

유료 재생교체-비재생수리보증 종료된 이후의 최적의 교체정책

정기문

경성대학교 기초과학연구소

Optimal replacement policy following the expiration of payable RRNMW

Ki Mun Jung

Basic Science Research Center, Kyungsung University

Abstract

In this paper, we consider a replacement model following the expiration of warranty. In other words, this paper proposes the optimal replacement policy for a repairable system following the expiration of payable renewing replacement-non-renewing minimal repair warranty. The expected cost rate per unit time from the user's perspective is used to determine the optimality of the replacement policy. Thus, we derive the expressions for the expected cycle length and the expected total cost to obtain the expected cost rate per unit time. Finally, the numerical examples are presented for illustrative purpose.

Keywords : Replacement model, expected cost rate per unit time, renewing replacement warranty, non-renewing minimal repair warranty, payable renewing replacement-non-renewing minimal repair warranty

1. 서론

신뢰성 분야에서 보증기간이 주어진 수리가 가능한 시스템에 대한 최적의 보전정책에 대한 이론적인 연구는 많은 연구가들이 관심을 갖는 분야 중의 하나이며, 최근까지 활발하게 연구가 진행되고 있다. 우선, 교체보증(replacement warranty)이 주어진 시스템에 대한 보전정책과 관련된 연구로는 Sahin and Polatoglu(1996), Jung and Park(2003), Jung(2008), Chien(2008a) 그리고 Chien(2008b) 등이 있다. 특히, Sahin and Polatoglu(1996)는 보증기간에서 시스템에 고장이 발생되면 시스템을 새것으로 교체해 주고, 보증기간도 재생되는 재생무료보증(renewing free replacement warranty; RFRW)과 재생비례보증(renewing pro-rata replacement warranty; RPRW), 그리고 시스템을 새로운 것으로 교체해 주지만 보증기간은 재생되지 않는 비재생무료보증(non-renewing free replacement warranty; NFRW)과 비재생비례보증(non-renewing pro-rata replacement warranty; NPRW)이 제공되는 수리 가능한 시스템에 대하여 사용자 측면의 교체정책(replacement policy)을 제안하였다. 또한, Chien(2008a)은 재생무료교체보증이 주어진 시스템에 대하여 일반적인 기령교체모형을 고려하였다.

그리고 최소수리보증(minimal repair warranty)이 주어진 시스템에 관한 보전정책과 관련된 연구로는 Yeh et al(2007)과 Jung(2009)의 연구가 있다. Yeh et al(2007)은 보증기간에서 시스템에 고장이 발생되면 최소수리(minimal repair)가 수행되고, 보증기간은 재생되지 않는 비재생무료최소수리보증(non-renewing free minimal repair warranty; NFMW)이 주어진 수리가 가능한 시스템에 대한 교체정책을 제안하였다. 그리고 Jung(2009)은 비재생무료최소수리보증이 주어진 수리가 가능한 시스템에 대하여 Wu and Clements-Croome(2005)과 Jung(2006)의 보전모형을 이용한 사용자 측면에서의 예방보전모형을 고려하였다.

한편, 최근에 Jung(2011)은 기존의 무료재생교체보증과 무료비재생수리보증을 포함하는 일반적인 형태의 무료 재생교체-비재생수리보증(renewing replacement-non-renewing minimal repair warranty; RRNMW)을 제안하고, 이러한 보증기간이 주어진 수리 가능한 시스템에 대한 교체모형을 제안하였다. 그러나 생산자 또는 판매자 입장에서는 보증기간 동안에 발생하는 시스템의 고장에 대한 교체 및 수리에 대하여 사용자에게 어느 정도의 비용을 부담하게 하는 보증의 형태를 제공하기를 원할 수도 있다. 따라서 기존의 매우 간단한 형태인 무료보증인 경우를 유료인 경우로 확장할 필요가 있다. 따라서 본 논문에서는 Jung(2011)이 제안한 무료보증을 유료보증의 형태로 확장한 유료 재생교체-비재생수리보증(RRNMW)이 종료된 이후의 최적의 교체정책을 제안하고자 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 2절에서는 유료 재생교체-비재생수리보증이 종료된 이후의 교체모형을 소개하고자 한다. 3절에서는 유료 재생교체-비재생수리보증이 종료된 이후의 교체모형에 대한 단위시간당 기대비용을 이론적으로 유도하고, 이 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 교체정책에 대하여 설명하고자 한다. 끝으로 4절에서는 앞에서 고려된 유료 재생교체-비재생수리보증 이후의 교체정책을 자세히 설명하기 위하여 수치적 예를 보이고자 하는데, 이때 Jung(2011)에 의해서 제안된 무료보증인 경우와도 비교를 하고자 한다.

2. 교체모형

2.1 유료 재생교체-비재생수리보증

본 절에서는 본 논문에서 고려하고자 하는 유료 재생교체-비재생수리보증에 대하여 살펴보고자 한다. 보증기간동안 시스템에 고장이 발생되면 교체해 주거나 최소수리를 수행하여 주는 것이 일반적인 형태의 보증정책이라고 할 수 있다. 그러나 생산자 측면에서 살펴보면 교체비용이 최소수리 비용에 비하여 매우 크기 때문에 보증기간의 초기 일정부분까지만 새로운 시스템으로 교체해 주고, 그 이후의 잔여보증기간 동안에는 최소수리를 수행해 주는 보증정책을 고려할 수 있을 것이다. 뿐만 아니라 교체보증기간에서 시스템에 고장이 발생되면 보증기간이 재생되고, 최소수리보증기간 동안에는 보증기간이 재생되지 않는 보증정책을 고려할 수 있을 것이다.

따라서 본 논문에서는 기존의 보증정책인 재생비례교체보증과 비재생최소수리보증을 포함하는 일반적인 형태의 유료 재생교체-비재생수리보증을 제안하고자 한다. 즉, 유료 재생교체-비재생수리보증에서는 재생교체보증기간 $(0, w_R)$ 과 비재생최소수리보증기간 (w_R, w) 이 주어진다. 교체보증기간 동안에 시스템에 고장이 발생되면 사용자가 사용시간에 비례한 교체비용을 지불하고 시스템이 교체되고, 주어진 보증기간은 새롭게 재생된다. 그리고 비재생최소수리보증기간 동안에는 시스템에 고장이 발생되면 사용자가 정해진 비용을 지불하고 최소수리가 수행되며, 주어진 보증기간은 재생되지 않고 잔여 보증기간만이 유효하게 된다. 여기서, w_R 은 재생교체보증기간이고 w_M 은 비재생최소수리보증기간이며, $w = w_R + w_M$ 이다.

2.2 유료 재생교체-비재생수리보증 이후의 교체모형

본 절에서는 2.1절에서 설명한 유료 재생교체-비재생수리보증이 종료된 이후의 수리가 가능한 시스템에 대한 교체모형에 대하여 설명하고자 하는데, 이를 위해서 다음과 같은 사항들을 가정한다.

가정

- i) 시스템에는 유료 재생교체-비재생수리보증기간 w 가 주어지고, 재생교체보증기간과 비재생수리보증기간을 나타내는 w_R 과 w_M 이 각각 주어진다. 단, $w = w_R + w_M$ 이 된다.
- ii) 재생교체보증기간 w_R 에서 시스템에 고장이 발생되면 사용자가 사용시간에 비례한 교체비용을 지불하고 시스템이 새것으로 교체되고, 보증기간도 재생된다.
- iii) 비재생수리보증기간 w_M 에서 시스템에 고장이 발생되면 사용자가 정해진 비용을 지불하고 시스템에 최소수리가 수행되며, 보증기간은 재생되지 않는다.
- iv) 유료 재생교체-비재생수리보증이 종료된 이후의 보전기간 동안 시스템에 고장이 발생되면 사용자에게 의해서 최소수리가 수행된다.

- v) 시스템은 보전기간이 종료되는 시점에서 사용자에게 의해서 교체된다.
- vi) 최소수리 및 교체를 수행하기 위한 시간은 고려하지 않는다.
- vii) 수리보증기간에서 시스템에 고장이 발생할 경우 사용자가 지불하는 수리비용은 $c_{m,w}$, 보증기간에서의 고장에 따른 비용은 $c_{f,w}$, 보전기간에서의 최소수리비용은 c_m , 보전기간에서 발생하는 고장에 따른 비용은 $c_{f,m}$ 이고 시스템의 교체비용은 c_r 이다.

위와 같은 가정을 통해서 유료 재생교체-비재생수리보증이 종료된 이후의 교체모형을 설명할 수 있다. 즉, 시스템에는 유료 재생교체-비재생수리보증이 주어져서 재생무료교체보증기간 $(0, w_R)$ 에서는 시스템에 고장이 발생하면 시스템을 교체해 주고, 보증기간도 재생된다. 그리고 최소수리보증기간 (w_R, w) 에서는 시스템에 고장이 발생되면 최소수리가 수행되고, 보증기간은 재생되지 않고 잔여보증기간만이 유효하게 된다. 또한 보증기간이 종료된 이후에 시스템에 고장이 발생하면 사용자에게 의해서 최소수리가 수행되고, 보전기간이 종료되는 시점에서는 사용자에게 의해서 새로운 시스템으로 교체되는 교체모형이 본 논문에서 고려하고자 하는 사용자 측면의 교체모형이다.

3. 최적의 교체정책

3.1 단위시간당 기대비용

본 논문에서는 최적의 교체정책을 결정하기 위한 기준으로 단위시간당 기대비용을 사용하기 때문에 2.2절에서 설명한 유료 재생교체-비재생수리보증이 종료된 이후의 교체모형에 대한 단위시간당 기대비용을 구하여야 한다. 단위시간당 기대비용은 총기대비용과 기대순환길이로부터 구해질 수 있는데, 이 중 사용자 측면의 기대순환길이는 Jung(2011)에서 구해진 것과 동일하므로 이를 이용하면 된다. 즉, Jung(2011)의 결과로부터 기대순환길이 $ECL(\tau)$ 는 재생교체보증기간에서의 기대순환길리와 비재생수리보증기간에서의 기대순환길리와 그리고 보증기간이 종료된 이후의 기대순환길리로부터 다음과 같이 구해진다.

$$ECL(\tau) = \frac{I(w_R)}{F(w_R)} + w_M + \tau. \quad (3.1)$$

이제, 본 논문에서 제안한 유료 재생교체-비재생수리보증이 있는 수리 가능한 시스템에 대한 교체정책에 대하여 사용자 측면의 총기대비용 $ETC(\tau)$ 을 구하면 된다. 총기대비용 $ETC(\tau)$ 는 보증기간동안에 발생하는 기대비용, 보증기간이 종료된 이후의 보전기간 동안에 발생하는 기대비용 그리고 보전기간이 종료되는 시점에서의 시스템을 교체하기 위한 기대비용의 합으로 구할 수 있다. 그런데, 이러한 총기대비용 $ETC(\tau)$ 는 재생교체보증기간 동안에 발생하는 고장의 총 횟수를 고려하여야 한다. 따라서 K 를 재생교체보증기간 동안에 고장이 발생하지

않을 때까지의 시스템의 교체횟수, X_j 를 보증기간에서 m 번의 고장이 발생했다고 가정했을 경우에 보증기간에서의 시스템의 고장시간이라고 가정하자. 여기서, $X_j < w_R$, $j=1, 2, \dots, m$ 이고 $X_{m+1} > w_R$ 이 된다.

먼저, 보증기간 동안에 시스템에 m 번의 고장이 발생했다고 가정하면, 즉 $K=m$ 이 주어졌 있다는 조건 하에서 기대비용 ETC_w 는 다음과 같이 구해진다.

$$ETC(\tau | K=m) = m \frac{c_r}{w_R} \frac{I(w_R)}{\bar{F}(w_R)} + mc_{f,w} + (c_{m,w} + c_{f,w}) \int_{w_R}^w h(t)dt + (c_m + c_{f,m}) \int_w^{w+\tau} h(t)dt + c_r, \quad (3.2)$$

여기서 $I(s) = \int_0^s tf(t)dt$ 이다.

그런데, 식 (3.2)에 있는 기대비용은 $K=m$ 이 주어졌 있다는 조건 하에서 구한 것이므로 일반적으로 조건이 없을 경우로 확장하기 위해서는 K 의 분포를 고려하여야 한다. K 는 재생교체보증기간 동안에 고장이 발생하지 않을 때까지의 시스템의 교체횟수이므로 다음과 같은 분포를 따른다.

$$P(K=m) = (1 - F(w_R))F(w_R)^m, \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

따라서 유료 재생교체-비재생수리보증이 있는 수리 가능한 시스템에 대한 교체정책에 대한 사용자 측면의 총기대비용 $ETC(\tau)$ 는 식 (3.2)와 식 (3.3)으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$ETC(\tau) = \frac{c_r}{w_R} \frac{I(w_R)}{\bar{F}(w_R)} + c_{f,w} \frac{F(w_R)}{\bar{F}(w_R)} + (c_{m,w} + c_{f,w}) \int_{w_R}^w h(t)dt + (c_m + c_{f,m}) \int_w^{w+\tau} h(t)dt + c_r. \quad (3.4)$$

이제, 식 (3.1)의 기대순환길이와 식 (3.4)의 총기대비용으로부터 유료 재생교체-비재생수리 보증이 종료된 이후의 교체정책에 대한 단위시간당 기대비용은 다음과 같이 구해짐을 알 수 있다.

$$C(\tau) = \frac{\frac{c_r}{w_R} I(w_R) + c_{f,w} F(w_R) + \bar{F}(w_R)(c_{m,w} + c_{f,w}) \int_{w_R}^w h(t)dt + \bar{F}(w_R)(c_m + c_{f,m}) \int_w^{w+\tau} h(t)dt + \bar{F}(w_R)c_r}{I(w_R) + \bar{F}(w_R)(w_M + \tau)}. \quad (3.5)$$

3.2 최적의 교체정책

본 절에서는 식 (3.5)에 구해져 있는 단위시간당 기대비용에 근거한 유료 재생교체-비재생수리보증이 종료된 이후의 최적의 교체정책에 대하여 살펴보고자 한다. 즉, 식 (3.5)에 주어져 있는 유료 재생교체-비재생수리보증이 종료된 이후의 교체정책에 대한 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 교체주기 τ^* 를 결정하는 문제를 고려하고자 한다.

먼저, 최적의 교체주기 τ^* 를 찾기 위해서 식 (3.5)을 τ 에 관해서 1차 미분하여 0으로 놓고 풀면 다음을 얻을 수 있다.

$$(I(w) + w\bar{F}(w_R))h(w + \tau) + \bar{F}(w_R)\left(\tau h(w + \tau) - \int_w^{w+\tau} h(t)dt\right) = \frac{C}{(c_m + c_{f,m})}, \quad (3.6)$$

여기서 $C = \frac{c_r}{w_R}I(w_R) + c_{f,w}F(w_R) + \bar{F}(w_R)(c_{m,w} + c_{f,w}) \int_{w_R}^w h(t)dt + \bar{F}(w_R)c_r$ 이다.

그런데 식 (3.5)의 단위시간당 기대비용 $C(\tau)$ 는 $h(t)$ 가 증가함수이면 의사볼록함수(pseudo-convex function)가 되기 때문에 최적의 보전기간 τ^* 는 식 (3.6)을 만족하는 τ 의 값이 된다. 따라서 유료 재생교체-비재생수리보증이 종료된 이후에 식 (3.6)을 만족하는 τ^* 시점에서 새로운 시스템으로 교체하는 것이 사용자측면에서 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 교체정책이 된다.

4. 수치적 예

본 논문에서는 고려된 유료 재생교체-비재생수리보증이 종료된 이후의 교체모형에 대한 최적의 교체정책을 설명하기 위해서 시스템의 고장시간 T 가 척도모수가 1인 와이블분포(Weibull distribution)를 따른다고 가정하자. 즉, 가정된 시스템의 고장률함수는 $h(t) = \beta t^{\beta-1}$ 이 된다. 그리고 보증기간은 $w = 0.5$, 보증기간 또는 보전기간에서 발생하는 고장에 따른 비용은 $c_{f,w} = c_{f,m} = 1.5$, 보증기간에서의 최소수리비용은 $c_{m,w} = 0.5$, 보전기간에서의 최소수리비용은 $c_m = 1$ 이라고 가정하자.

<표 1, 2> 그리고 <표 3>에는 $\beta = 3$, $\beta = 4$ 그리고 $\beta = 5$ 인 경우에 유료 재생교체-비재생수리보증이 종료된 이후의 최적의 교체정책과 그 때의 단위시간당 기대비용이 나타나 있다. 이 때, Jung (2011)이 제시한 무료 재생교체-비재생수리보증이 종료된 이후에 대해서도 함께 제시하였다. <표 1>에서 $\beta = 3$, $w_R = 0.20$, $c_r = 20$ 일 때, 식 (3.5)를 최소화하는 최적의 교체주기가 1.195가 됨을 알 수 있는데, 이는 유료 재생교체-비재생수리보증이 종료된 이후에 1.195시점에서 사용자에게 의해서 새로운 시스템으로 교체하면 단위시간당 기대비용이 21.5401이 되고, 이것이 기대비용 측면에서 최적의 교체정책이 된다는 것을 의미한다. <표 1>에 주어

저 있는 다른 최적의 교체주기와 이에 대응하는 단위시간당 기대비용도 동일한 의미를 갖는다. 한편, <표 1, 2> 그리고 <표 3>으로부터 다음과 같은 사실을 알 수 있다. 1) 최적의 교체주기에서의 단위시간당 기대비용은 유료보증인 경우가 무료보증인 경우에 비하여 항상 크다. 2) 유료보증인 경우가 무료보증인 경우에 비하여 항상 최적의 교체주기가 길다. 3) w_R 과 β 값이 고정되어 있을 때, c_r 값이 증가하면 단위시간당 기대비용은 증가하고 교체주기는 길어짐을 알 수 있다. 4) w_R 과 c_r 값이 고정되어 있을 때, β 값이 증가하면 교체주기는 짧아짐을 알 수 있다.

<표 1> RRNMW이 종료된 이후의 최적의 교체정책($\beta = 3$)

w_R	Optimal policy		c_r		
			10	20	30
0.10	τ^*	무료	0.807	1.136	1.366
		유료	0.810	1.138	1.368
	$C(\tau^*)$	무료	12.8051	20.0653	26.1135
		유료	12.8626	20.1155	26.1613
0.15	τ^*	무료	0.834	1.163	1.393
		유료	0.838	1.165	1.395
	$C(\tau^*)$	무료	13.3486	20.7303	26.8637
		유료	13.4212	20.8040	26.9422
0.20	τ^*	무료	0.862	1.190	1.420
		유료	0.867	1.195	1.424
	$C(\tau^*)$	무료	13.9197	21.42032	27.6375
		유료	14.0215	21.5401	27.7763

<표 2> RRNMW이 종료된 이후의 최적의 교체정책($\beta = 4$)

w_R	Optimal policy		c_r		
			10	20	30
0.10	τ^*	무료	0.608	0.812	0.948
		유료	0.609	0.812	0.948
	$C(\tau^*)$	무료	13.5965	22.5618	30.3618
		유료	13.6283	22.5888	30.3867
0.15	τ^*	무료	0.627	0.830	0.966
		유료	0.628	0.831	0.967
	$C(\tau^*)$	무료	14.2986	23.5242	31.5219
		유료	14.3344	23.5574	31.5546
0.20	τ^*	무료	0.646	0.849	0.985
		유료	0.647	0.850	0.986
	$C(\tau^*)$	무료	15.0588	24.55215	32.7523
		유료	15.1045	24.6009	32.8058

〈표 3〉 RRNMW이 종료된 이후의 최적의 교체정책($\beta = 5$)

w_R	Optimal policy		c_r		
			10	20	30
0.10	τ^*	무료	0.526	0.674	0.772
		유료	0.526	0.675	0.772
	$C(\tau^*)$	무료	13.8349	23.7842	32.6737
		유료	13.8518	23.7988	32.6872
0.15	τ^*	무료	0.540	0.688	0.785
		유료	0.540	0.689	0.786
	$C(\tau^*)$	무료	14.6183	24.9368	34.1211
		유료	14.6365	24.9531	34.1365
0.20	τ^*	무료	0.555	0.703	0.800
		유료	0.555	0.703	0.800
	$C(\tau^*)$	무료	15.4799	26.1877	35.6811
		유료	15.5011	26.2085	35.7024

5. 결론

본 논문에서는 Jung(2011)에 의해서 제안된 무료보증을 유료보증의 형태로 확장하였다. 즉, 기존의 재생비례교체보증과 비재생최소수리보증을 포함하는 일반적인 형태의 유료 재생교체-비재생수리보증을 제안하였으며, 제안된 보증기간이 종료된 이후의 교체모형을 제시하였다. 이러한 교체모형에서는 수리가 가능한 시스템에는 유료 재생교체-비재생수리보증이 주어져서 교체비례보증기간 ($0, w_R$)에서는 시스템에 고장이 발생되면 고장시간에 비례한 비용을 사용자가 부담하고 시스템이 새롭게 교체되고 보증기간도 재생된다. 그리고 수리보증기간 (w_R, w)에서는 시스템에 고장이 발생되면 수리비용의 일부를 사용자가 부담하고 최소수리가 수행되며 주어진 보증기간은 재생되지 않고 잔여 보증기간만이 유효하게 된다. 또한 보증기간이 종료된 이후에 시스템에 고장이 발생하면 사용자에게 의해서 최소수리가 수행되고, 보증기간이 종료되는 시점에서 사용자에게 의해서 새로운 시스템으로 교체된다. 이때, 이러한 제안된 교체모형에 대하여 사용자 측면의 단위시간당 기대비용을 이론적으로 구하였으며, 구해진 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 교체정책을 제시하였다. 끝으로 수치적 예를 통하여 본 논문에서 고려된 교체모형에 대한 최적의 교체주기와 그 때의 단위시간당 기대비용을 결정할 수 있음을 보였다. 또한, 교체비용(c_r), 재생교체보증의 기간(w_R) 그리고 시스템의 고장시간 T 의 형태모수(β)의 값이 다양하게 변화할 때 최적의 교체주기 및 단위시간당 기대비용의 변화를 살펴보았으며, 더불어 Jung(2011)의 결과와도 비교를 하였다.

참고문헌

- [1] Chien, Y. H.(2008a). A general age replacement model with minimal repair under renewing free-replacement warranty, *European Journal of Operational Research*, **186**, 1046-1058.
- [2] Chien, Y. H.(2008b). Optimal age-replacement policy under an imperfect renewing free-replacement warranty, *IEEE Transactions on Reliability*, **57**, 125-133.
- [3] Jung, K. M.(2006). Extension of PM model with random maintenance quality, *The Korean Communications in Statistics*, **13**, 651-656.
- [4] Jung, K. M.(2008). PM policy with random maintenance quality following the expiration of non-renewing warranty, *The Korean Communications in Statistics*, **15**, 77-86.
- [5] Jung, K. M.(2009). Two PM policies following the expiration of free-repair warranty, *Journal of Korean Data & Information Science Society*, **20**, 999-1007.
- [6] Jung, K. M.(2011). Replacement model following the expiration of free RRNMW, *The Korean Communications in Statistics*, **18**, 697-705.
- [7] Jung, G. M. & Park, D. H.(2003). Optimal maintenance policies during the post-warranty period, *Reliability Engineering and System Safety*, **82**, 173-185.
- [8] Sahin, I. & Polatoglu, H.(1996). Maintenance strategies following the expiration of warranty, *IEEE Transactions on Reliability*, **45**, 220-228.
- [9] Wu, S. and Clements-Croome, D.(2005). Preventive maintenance models with random maintenance quality. *Reliability Engineering and System Safety*, **90**, 99-105.
- [10] Yeh, R. H., Chen, M. Y. & Lin, C. Y.(2007). Optimal periodic replacement policy for repairable products under free-repair warranty, *European Journal of Operational Research*, **176**, 1678-1686.