대한수학교육학회지 <학교수학> 제 13 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.13, No.4 581-598. Dec. 2011

초등학교에서의 대수적 추론 능력 신장 방안 탐색[1)]
- 곱셈의 결합법칙 탐구에 관한 수업 사례 연구 -

최 지 영[*] · 방 정 숙[**]

학교 교육과정의 초기 단계에서부터 대수를 가르쳐야 한다는 주장이 국제적인 공감을 얻으면서, 초등학교에서 적절한 대수 지도 방안을 찾는데 관심이 높아지고 있다. 그러나 초등학교에서 대수적 추론 능력을 향상시키기 위해 수학 수업이 어떻게 이루어져야 하는가에 관한 실제적인 연구는 여전히 부족한 상황이다. 본 연구는 초등학교에서의 효과적인 대수 교수-학습에 대한 구체적이고 실질적인 정보를 얻기 위해, 곱셈의 결합법칙 탐구를 강조한 4학년 수업 사례를 중심으로 탐구적·질적 사례 연구를 실시하였다. 체계적인 수업 분석을 통해 본 연구는, 구체적인 상황에서 수와 연산의 성질에 초점 맞추기, 충분한 사례 탐구를 통해 수와 연산의 성질 발견하기, 임의의 수 상황에서 연산의 성질 일반화하기의 세 단계에 따라 교사가 어떤 활동들을 구성할 수 있으며 학생들은 어느 정도의 대수적 추론을 발현할 수 있는지를 구체적인 사례를 통해 밝히고자 하였다.

I. 서론

대수는 일반화와 기호화로 특징지을 수 있는데, 이러한 일반화와 기호화는 더 높은 수준의 수학적 사고로 도약하는 데 강력한 토대를 제공한다(Kaput, Blanton, & Moreno, 2008). 대수에 관한 기본 지식과 사고 능력은 직업에 관계없이 모든 사람들에게 유용한 것으로, 현대 사회는 학교 교육을 통해 모든 학생들이 대수와 관련된 기본 소양을 갖추길 기대하고 있다(NCTM, 2000).

그러나 학교 수학에서 대수의 중요성이 강조되고 있음에도 불구하고 대수 학습은 학생들에게 강력한 수학적 사고력을 형성해 주기 보다는 오히려 학습의 어려움과 곤란을 야기하고, 더 수준 높은 수학으로의 참여를 가로막는 장애와 걸림돌이 되어왔다(Kilpatrick & Izsák, 2008). Carraher와 Schliemann(2007)은 많은 선행연구들을 바탕으로 중・고등학생들이 대수 학습에서 겪는 주요 어려움들을 제시했다. 가장 전형적인 예로, 학생들은 등호를 좌변의 값을 계산하여 우변에 쓰라는 연산자의 의미로만 해석하는 경향이 있었고, 문자가 포함된 식을 조작하는 데 어려움을 겪었으며, 변수 개념을 제한된 의미로만 이해하는 경우가 많았다.

이처럼 많은 학생들이 대수 학습에서 어려움을 겪는다는 사실이 드러나면서, 대수 학습상의 어려움을 줄이고 학생들의 성취율을 높이기 위한 다양한 방안들이 제시되고 있다. 특히, 학교 수학에서 대수를 기호 조작이라는 형식적인 측면만을 고려하여 중등과정부터 도입하던 전통적인 접근 방법이 대수 학습에서의 근본적인 어려움을 야기한다는 주장이 설득력을 얻으면서,

* 서울대동초등학교 (ji2006@empal.com)
** 한국교원대학교 (jeongsuk@knue.ac.kr)
1) 본 논문은 제1저자의 박사학위 논문의 일부 내용을 바탕으로 하고 있음.

대수 교육을 성공적으로 개선하기 위한 노력들이 계속되고 있다.

우선적으로, 형식적이고 기호적인 측면으로 제한하여 규정하던 학교 대수의 개념을 대수적인 사고를 포함하는 보다 폭넓은 개념으로 재개념화 하였고, 학교 교육과정 기간 전반에 걸쳐 대수를 필수 요소로 다룰 것을 제안하였다(김성준, 2004; Blanton & Kaput, 2001; Kaput, 1998, 2008). 미국수학교사협의회는 '모두를 위한 대수'라는 슬로건 아래, 대수를 유아·유치원부터 12학년에 이르기까지 지속적으로 다루어야 할 필수 규준으로 채택하였다(NCTM, 2000). RAND 수학 연구 패널 보고서에서도 대수를 유아·유치원부터 12학년까지의 교육과정에서 점진적으로 발달시켜야 할 필수 요소로서 규정하고 있다(RAND Mathematics Study Panel, 2003). 이처럼 학교수학 교육과정의 초기부터 대수를 도입해야 한다는 권고는 많은 단체와 연구자들의 지지를 얻으며 대수 교육의 변화를 촉구하게 되었다. 그러나 어린학생들에게 대수를 도입하고 발달시켜나가는 초기 대수(early algebra) 교육이 성공적으로 정립되기 위해서는, 초기 대수에 어떻게 접근하고 어떻게 나아갈 것인지에 관한 다방면의 연구와 지속적인 논의가 필요하다. 특히, 학교 수학의 초기 단계인 초등학교에서의 대수 교육이 성공적으로 이루어지기 위해서는, 무엇보다도 초등학교 수준에서 대수 교수-학습이 어떻게 이루어져야 하는지에 대한 실제적이고 구체적인 방향이 제시되어야 한다.

본 연구는 초등학생들의 대수적 추론 능력을 촉진하기 위해 교사가 수학 수업을 어떻게 구성할 수 있는지, 그리고 그에 따라 학생들은 어느 정도의 대수적 추론을 발현할 수 있는지를 밝히는 데 그 목적이 있다. 이를 위해 본 연구는 수와 연산의 성질 탐구 단계를 설정하고 4학년 수업 사례를 통해, 학생들이 수와 연산의 성질을 어떻게 인식하고 발견하며 일반화하는지 그리고 그러한 과정을 지지하기 위해 교사가 어떤 활동들을 어떻게 구성해 나가는지를 면밀하게 탐구하였다. 이를 통해 본 연구는 초등학교에서의 초기 대수 지도 방안에 대한 시사점을 제공할 수 있을 것으로 기대한다.

II. 이론적 배경

1. 학교 수학에서 대수와 대수적 추론

학교 수학 교육과정 전반에 걸쳐 사고의 대상으로서 대수 및 대수적 추론을 다루고자 할 때, 먼저 대수와 대수적 추론이 무엇인지를 명확하게 할 필요가 있다. Lee(2001)는 대수와 대수적 추론을 분명하게 제시하기 위한 노력의 일환으로 대수와 대수적 추론이 어떻게 구분되는지를 밝히려고 하였다. 그는 대수와 대수적 추론 사이의 차이를 수학을 바라보는 두 가지 관점과 관련하여 설명하였다. 즉, 수학은 한편으로는 세대를 거듭하면서 대대로 이어져 내려오는 하나의 문화유산으로 간주할 수도 있지만, 다른 한편으로는 사람들이 직접 사고하고 의사소통하며 행동하는 일종의 활동으로 간주할 수도 있다. 이와 마찬가지로 대수도 하나의 지식체로서의 문화적 산물로서 간주할 수도 있고, 혹은 인간이 행하는 일련의 활동으로 간주할 수도 있다(Lee, 2001). Lee(2001)는 두 가지 접근 방식에 기초하여 대수를 교육과정에서 다루어야 할 내용으로서 부각하고자 하는지 아니면 학생들이 사고하고 활동하는 과정으로서 부각하고자 하는지와 관련하여 대수와 대수적 추론을 구분할 수 있음을 제안하였다.

이와 관련하여 Kaput(2008)은 대수는 문화적 산물로서 전 세계에 걸쳐 매우 다양한 방식으로

교육 체제 안에 내재되어 있으며, 동시에 일반화하고 이런 일반화를 표현하는 인간의 활동을 포함한다는 것을 지적한다. 더불어 학교 수학 교육과정에서 대수를 정의하고자 할 때, 이러한 두 가지 측면이 모두 고려되어야 한다고 설명한다.

한편, 많은 연구들은 대수적 추론의 핵심으로 일반화와 기호화라는 두 가지 측면을 동시에 강조한다. Kaput, Blanton, 그리고 Moreno(2008)에 의하면, 일반화란 각각의 예에 대해 반복적인 언급을 하지 않으면서 다양한 예들에 모두 적용할 수 있는 방안을 탐구하는 것으로, 일반화는 모든 예들을 아우를 수 있는 단 하나의 구문을 찾는 기호화 과정으로 해석될 수 있다. 이처럼 일반화와 기호화는 매우 밀접하게 관련되어 있는 것으로, 개별적으로든 역사적으로든 일반화하려는 인간의 활동에서 기호화가 시작되기 때문에 일반화를 기호적 대상을 창안하는 활동으로 간주할 수 있다(Kaput, et al., 2008). 그들은 일단 기호화가 이루어지면 이것은 일반성을 표현하거나 일반성에 대해 추론할 수 있게 하는 새로운 토대가 되며 여기에는 더 발전된 기호화가 포함될 수 있다고 설명한다. 이처럼 Kaput, Blanton, 그리고 Moreno(2008)는 대수적 추론의 핵심이 의미 있는 일반화와 일반화된 추론에 도움이 되는 복잡한 기호화 과정으로 구성된다고 보고 있으며, 이러한 기호화 과정은 초등학생들의 대수적 추론이 발달될 때 일어나는 현상들을 이해하는 데 바탕이 된다는 것을 밝히고 있다.

2. 초등학교 수준에 적절한 대수적 추론의 유형

Blanton과 Kaput(2005)은 초등학교 수준에서 적절한 대수적 추론이 무엇인지를 탐구하기 위해 노력하였다. 그들은 Kaput(1998)의 연구를 토대로, 대수적 추론을 몇 개의 구체적인 사례들로부터 수학적 아이디어를 추측하고 정당화하며 일반화하고 그러한 일반화를 기호로 표현하는 데 필요한 일련의 사고 과정으로 정의하였다. 그리고 초등학교에서 핵심적으로 다루어야 할 대수적 추론의 유형을 일반화된 산술로서의 대수적 추론과 함수적 사고로서의 대수적 추론을 중심으로 범주화하였다. Blanton과 Kaput(2005)에 의하면, 일반화된 산술로서의 대수적 추론이란 산술 즉, 수 체계 및 연산의 구조와 성질 등을 대상으로 일반화를 구성하고 표현하는 일련의 사고 과정을 말한다. 그들은 초등학교 수업과 관련하여 범자연수 범위에서 수와 연산의 성질과 관계 탐구하기, 양 사이의 관계에 대한 표현으로써 동치 관계 탐구하기, 수를 대수적으로 처리하기, 미지의 값이 포함된 수식 해결하기 등을 일반화된 산술로서의 대수적 추론 활동으로 간주하였다. 한편, 함수적 사고로서의 대수적 추론은 변화하는 양들 사이에서 규칙성과 관계를 추측하고 일반화하며 그러한 일반화를 표현하는 데 초점을 둔 일련의 사고 과정으로 보았으며, 초등학교 수업과 관련하여 양과 연산을 상징적인 표현으로 기호화하기, 그래픽적으로 자료 표현하기, 함수적 관계 찾기, 기지의 자료를 활용하여 미지의 상태 예상하기, 수치적·기하적 관계를 찾고 설명하기 등을 함수적 사고로서의 대수적 추론 활동으로 범주화하였다(Blanton & Kaput, 2005).

본 연구는 덧셈 및 곱셈에서의 항등원, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 대상으로 수와 연산의 성질을 인식하고 발견하며 일반화하는 일련의 사고과정을 일반화된 산술로서의 대수적 추론으로 정의하고자 한다. 특히, 본 논문에서는 지면상의 제약을 고려하여 곱셈의 결합법칙만을 집중적으로 탐구하여 제시하고자 한다.

3. 초등학생들의 일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력 신장 방안을 탐구한 선행 연구 고찰

일반화된 산술로서의 대수적 추론은 초등학교에서 가장 핵심이라 할 수 있는 수와 연산 영역과 매우 밀접한 관련이 있다. 많은 연구자들은 초등학교에서 수와 연산 영역의 주제들을 다루는 과정에서, 학생들이 수 체계 및 연산의 구조와 성질 등을 대상으로 일반화를 구성하고 표현할 수 있는 기회와 경험들을 어떻게 제공할 수 있는지를 탐구하고 있다(Carraher & Schliemann, 2007; Lannin, 2003; Watanabe, 2008).

구체적인 예로, Carpenter, Franke와 Levi(2003)는 초등학교에서의 교수 실험을 통해 초등학교에서 산술과 대수를 통합하여 지도할 수 있는 방안을 탐구하였다. 그들의 연구에서 등호에 대한 관계적 이해를 향상시키기 위한 방안으로 학생들에게 8=8, 5=2+3과 같은 수식이 참인지 거짓인지를 탐구하는 활동과 8+4=□+5와 같은 수식에서 □안에 어떤 수를 넣어야 하는지를 탐구하는 활동 등을 제시하고 있다. 이들의 연구 결과에 따르면, 초등학생들은 수와 연산의 성질을 일반화하고 일상 언어 혹은 비형식적인 기호 표현으로 수와 연산의 대수적 성질을 정당화할 수 있었다. 이러한 결과들을 토대로, Carpenter, Franke와 Levi(2003)는 연산의 성질을 탐구하고 일반화하는 다양한 경험을 통해 수학 개념을 더욱 깊이 있게 이해할 수 있으며, 동시에 일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력을 개발할 수 있게 된다고 강조한다.

Fujii와 Stephens(2008)는 초등학교에서는 일반적으로 수세기와 연산 알고리듬의 숙달을 강조하는 반면 변수 개념은 소홀이 다루는 경향이 있음을 지적하면서, 초등학교에서 수와 연산을 기호 표현과 관련지어 탐구하는 활동은 변수에 대한 아이디어를 계발하는 데 기초가 될 수 있다고 제안한다. 그들은 어린 학생들도 '78-49+49=78'과 같은 수식이 참인지 거짓인지를 탐구하는 과정을 통해 처음의 수에서 어떤 수를 뺐다가 다시 더하면 원래의 수를 얻게 된다는 일반적인 수학적 관계(a-b+b=a)를 이해할 수 있다고 보았다. Fujii와 Stephens (2008)은 일본과 호주의 2, 3학년 학생 30명을 대상으로, '78-49+49=78'과 같은 형태의 수식이 참인지 거짓인지를 탐구하는 활동으로부터 출발하여 '78-●+●=78'과 같이 더 일반적인 수를 나타내기 위한 기호로서 '●'를 도입하는 교수 실험을 실시하였는데, 연구 결과, '●, ▲'와 같은 기호가 포함된 수식을 탐구하는 일련의 활동들은 학생들에게 변수 개념의 기초가 되는 아이디어를 제공할 수 있었다(Fujii & Stephens, 2008). 한편, '●, ▲' 등의 기호와 관련하여, Fujii와 Stephens(2008)는 준-변수(quasi-variables) 개념을 제안한다. 그들은 준-변수를 초등학교 수준에 적절한 변수의 개념으로 정의하며, 준-변수의 사용이 산술적 사고와 대수적 사고를 의미 있게 연결해 줄 수 있다고 논의한다. 더불어 초등학교와 중학교에서 대수를 다루고자 할 때, 미지수로서의 변수 개념은 종종 학생과 교사의 사고에서 결정적이며, 준-변수 개념은 바로 이러한 필수적인 부분을 보충해주는 역할을 한다고 강조한다. 본 논문은 일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력의 개발 방안을 탐구한 선행 연구들을 바탕으로, 수와 연산의 성질 탐구를 강조한 수업 사례 연구를 통해 초등학생들의 대수적 추론 능력을 신장시킬 수 있는 구체적인 방안을 제시하고자 하였다.

III. 연구 방법

1. 연구 방법 및 대상

본 연구는 초등학교 교실 수업 상황에서 대수

교수-학습 과정을 면밀하게 관찰하고 분석함으로써, 초등학생들의 대수적 추론 능력을 신장시키기 위한 구체적이고 실제적인 방안을 탐색하는 데 그 목적이 있다. 이에 탐구적 · 질적 사례연구 방법을 적용하였다(Yin, 2002).

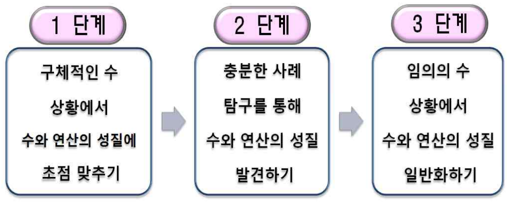
본 연구를 위해 학생들의 학력 수준이 중위 수준이며 가정의 사회 · 경제적 수준도 대체로 중위에 해당하는 S초등학교의 4학년 1개 학급을 연구대상으로 선정하였다. 초등학교 4학년은 범자연수의 사칙연산이 완성되는 시기로 본 연구에서 초점을 두고 있는 범자연수의 덧셈 및 곱셈에 관한 연산의 성질을 이해하고 적용하기, 연산 사이의 관계를 일반화하기와 관련하여 체계적으로 탐구할 수 있는 장점이 있다. 한편, 본 연구의 핵심 과정인 초기 대수 교수-학습에 직접 참여할 수업 교사는 대학원 과정에서 초기 대수와 관련된 내용을 공부한 경험이 있는 초등 교사를 선정하였다.

2. 수업 설계

가. 수업 설계의 기본 방향

수업 설계는 현행 교육과정에 제시된 수와 연산 영역의 내용을 바탕으로, 학생들의 대수적 추론 능력을 촉진시킬 수 있는 접근 방법을 찾는 데 주안점을 두었다. 이에 따라 현행 교과용 도서에 제시된 단원 및 차시 중에서 덧셈 또는 곱셈을 다루는 내용들을 중심으로 덧셈 및 곱셈에서의 항등원, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 탐구하는 총 12차시의 수업을 구성하였다. 특히, 12차시의 수업은 공통적으로 학습 목표로 수와 연산에 대한 개념적 이해와 연산 알고리듬의 숙달뿐만 아니라 수와 연산의 성질에 대한 이해를 강조하였다. 그리고 이를 위해 수업의 초점을 연산의 의미나 절차에 대한 탐구를 넘어서서 학생들이 문제 상황에 포함된 수와 연산의 성질을 발견하고 일반화하는 경험을 갖도록 하는데 두었다.

특히, 본 연구는 초등학교 교실수업상황에서 수와 연산의 성질을 일반화하는 과정에 관심을 두기 때문에, Friedlander와 Tabach(2001)가 제시한 일반화 단계를 초등학교상황에 알맞게 재구성하여 수와 연산의 성질 탐구 단계를 설계하였다([그림 Ⅲ-1] 참조).



[그림 Ⅲ-1] 수와 연산의 성질 탐구 단계.

수와 연산의 성질 탐구 단계는 구체적인 수 상황에서 수와 연산의 성질에 초점 맞추기, 충분한 사례 탐구를 통해 수와 연산의 성질 발견하기, 임의의 수 상황에서 수와 연산의 성질 일반화하기의 세 단계로 구성하였다. 첫째, 수와 연산의 성질에 초점 맞추기 단계는 덧셈 및 곱셈을 다루는 수학 수업에서 연산 상황에 암묵적으로 포함되어 있는 수와 연산의 성질들에 초점을 맞추고 그것을 대상으로 집중적으로 탐구하기 시작하는 단계이다. 둘째, 수와 연산의 성질 발견하기 단계는 특정한 한 두 개의 구체적인 사례를 통해 인식하기 시작했던 수와 연산의 성질이 다수의 다양한 사례에서도 공통적으로 적용되는 일종의 규칙이라는 사실을 깨닫게 함으로써 학생들이 수와 연산의 성질을 발견하도록 이끄는 단계이다. 셋째, 수와 연산의 성질 일반화하기 단계는 수와 연산의 성질이 임의의 수 상황에서도 여전히 적용되는지에 대해 추측하고 정당화하는 활동을 통해, 수와 연산의 성질의 일반성을 깨닫고, 문장이나 관계식 등을 사용하여 수와 연산의 성질의 일반성을

표현해 보도록 함으로써 학생들이 수와 연산의 성질을 일반화하도록 이끄는 단계이다.

나. 학생의 이해 실태 및 현행 교과서 검토

수업 전 대상 학급 학생들의 연산의 성질에 대한 이해 실태를 알아 본 결과, 교환법칙 이해 과제에서는 성공률이 약 80%로 높은 정답률을 보였으나 결합법칙과 분배법칙 이해 과제에서는 성공률이 60%에도 미치지 못하는 낮은 정답률을 보였다. 특히, 본 논문에서 중점을 두어 탐구하고자 하는 곱셈의 결합법칙 이해 과제의 경우 성공률이 더욱 낮아 약 50%의 정답률을 보이는 데 그쳤다. 한편, 현행 교과서에서 곱셈의 결합법칙과 직접적으로 관련된 내용은 4학년 1학기 2단원(곱셈과 나눗셈)의 한 개의 차시에서 다루어지고 있다(교육과학기술부, 2010). 해당 차시는 '세 수의 곱셈을 계산할 수 있어요'라는 주제로 2쪽으로 구성되어 있다. 첫 번째 쪽에서는 세 수의 곱셈으로 해결할 수 있는 문제 상황을 제시한 후, 학생들이 직접 계산해보기 전에 약 얼마정도 될지를 어림해 보도록 발문이 제시되어 있다. 이어서 어림이 맞는지를 확인할 수 있는 방법을 생각해 보도록 한 후, 답을 정확하게 계산하는 방법으로 세 수의 곱셈식을 써 보도록 발문을 제시하고 있다. 두 번째 쪽에서는 문제 상황이나 문맥을 제거하고, 직접적으로 세 수의 곱셈식 '47×6×50'을 제시하며 계산 방법을 탐구해보도록 하고 있다. 특히, 세 수를 앞에서부터 계산한 결과와 뒤에서부터 계산한 결과가 서로 같다는 것을 가로셈과 세로셈으로 직접 계산하여 곱셈의 결과를 비교해봄으로써 알아보도록 제시하고 있다.

다. 곱셈의 결합법칙 교수-학습 과정안

본 논문에서는 곱셈의 결합법칙 과제에서의 학생들의 이해 정도가 매우 낮다는 점을 고려하여 '(한자리수)×(한자리수)×(한자리수)'의 곱셈 상황에서부터 곱셈의 결합법칙을 탐구하도록 수업을 설계하였다. 한편, 현행 교과서에서 직접적으로 세 수의 곱셈을 다루도록 구성된 차시가 아니더라도, 곱셈의 결합법칙을 탐구할 수 있는 기회를 제공하고자 하였다. 이에 따라 곱셈의 결합법칙을 2단원(곱셈과 나눗셈)과 5단원(혼합계산)의 곱셈을 다루는 차시 전반에 걸쳐 지속적으로 탐구하게 하였다(<표 Ⅲ-1>참조).

한편, 일반화된 산술로서의 대수적 추론을 강조하기 위한 수업 설계의 의도를 수업자에게 명확하게 전달하기 위해 매 차시의 수업을 실행하기 전에 함께 논의할 수 있는 시간을 가졌고 최종적인 교수-학습 과정안은 수업자와의 충분한 논의를 통해 작성하였다. 본 연구자가 고안한 교수-학습 자료와 학생 활동지 및 수행 평가지 역시 수업 실행 전에 수업자와 적절성을 함께 논의한 후 수업에 반영하였다.

3. 자료의 수집과 분석

초등학생들의 대수적 추론 능력을 신장하기 위한 수학 수업의 특징을 교사 및 학생 측면에서 상세하게 기술하기 위한 방법으로 교실 관찰을 사용하였다. 범자연수 연산의 성질 탐구를 강조한 수업은 40분씩 총 12차시에 걸쳐 이루어졌으며, 본 연구자는 참여 관찰자로서 매 수업에 참여하여 학생들의 대수적 추론 능력의 발달 과정과 교수-학습 과정을 면밀하게 관찰하여 기록하였고, 수업의 흐름이나 활동 내용, 교사와 학생들 사이의 대화, 학생들의 표정이나 행동 등도 관찰하여 기록하였다. 교실에는 총 3대의 캠코더를 설치하여 매 차시의 수업을촬영하였고, 수업 전사 자료, 교사와 학생의 수업 후 소감문, 관찰 기록지, 학생의 개별 혹은 조별 학습지, 차시별 평가자료, 학생의 대수적 추론 능

<표 Ⅲ-1> 수와 연산의 성질 탐구 단계에 따른 곱셈의 결합법칙 교수-학습 과정안

<table>
<tr><td>도달 목표</td><td colspan="2">◎ 세 수의 곱을 구할 수 있다.
◎ 세 수의 곱을 구하는 순서에 관계없이 곱은 항상 같다는 것을 알 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">관련된 대수적 추론 요소</td><td colspan="2">곱셈의 결합법칙의 이해와 적용</td></tr>
<tr><td colspan="2">곱셈의 결합법칙, 일반화, 정당화, 형식화, 기호화</td></tr>
<tr><th>단계</th><th>대수적 추론을 촉진하는 주요 교수-학습 활동</th><th>유의사항</th></tr>
<tr><td>구체적인 수 상황에서 곱셈의 결합법칙에 초점 맞추기</td><td><과제 제시>
과제 1. 상자가 가로, 세로, 높이에 각각 3, 5, 4개씩 쌓여있을 때, 상자의 총 개수를 구하시오.
<다양한 문제 해결 방법 탐색>
* 상자가 모두 몇 개인지를 구하는 풀이 방법을 탐색한다.
* 학생들이 풀이 방법으로 알맞은 식을 찾고 발표를 통해 공유하도록 한다.
* 학생들이 알맞은 식을 구하더라도, 문제를 해결하는 또 다른 방법이 있는지를 계속해서 탐구하도록 발문을 제시한다.
<순서가 다른 여러 가지 곱셈식 탐구하기 >
* 동일한 배열 상황을 여러 가지 곱셈식으로 나타낼 수 있다는 것과 순서를 바꾸어 곱한다는 것의 의미를 탐구한다.
* '$3\times5\times4=60$', '$5\times4\times3=60$', '$4\times3\times5=60$'의 세 식을 대상으로 공통점과 차이점을 논의하게 하여 곱셈식의 '순서'와 '곱' 사이의 관계에 초점을 맞추게 하고, 곱셈의 결합법칙을 인식하게 한다.</td><td>문제의 답 보다는 문제 해결의 방법을 찾는데 초점을 두게 한다.

다양한 순서의 식이 발표되도록 한다.</td></tr>
<tr><td>충분한 사례탐구를 통해 곱셈의 결합 법칙 발견하기</td><td><과제 제시>
과제 2. '$25\times8\times5$' 상자 배열에서 상자가 모두 몇 개인지 구하시오.
과제 3. 순서를 바꾸어 곱하였을 때, 곱이 달라지는 예를 찾아보시오.
과제 4. 교과서 및 익힘책에 제시된 세 수의 곱셈문제를 곱하는 순서를 바꾸어 가며 여러 가지 방법으로 풀어보고 곱을 비교해 보시오.
<곱셈의 교환법칙 발견하기>
* 순서가 다른 곱셈식 사이에서 공통점과 차이점을 논의하는 경험을 바탕으로 곱셈의 결합법칙을 발견하게 한다.</td><td>학생들이 구체적인 수를 예로, 다양한 순서와 형태의 관계식을 경험하도록 한다.</td></tr>
<tr><td>임의의 수 상황에서 곱셈의 결합법칙 일반화하기</td><td><과제 제시>
과제 5. 가로와 세로, 높이에 임의의 개수로 놓여진 상자 배열에서 상자의 총 개수를 구하시오.
과제 6. 곱셈의 결합법칙에 대해 말로 설명해 보시오.
과제 7. 곱셈의 결합법칙에 대해 언어 혹은 기호로 정리해 보시오.
<곱셈의 결합법칙 일반화하기>
* 임의의 세 수에 대해, 세 수를 곱하는 순서에 관계없이 곱은 항상 같다는 것을 알 수 있다.
* $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$
<결합법칙이 적용되는 사례와 적용되지 않는 사례 구분하기>
* 곱셈과 나눗셈의 혼합계산은 순서를 바꾸어 계산하면 결과가 달라진다는 것을 경험하게 한다.</td><td>문장 혹은 기호적 표현을 사용하여 곱셈의 결합법칙의 일반성을 표현하게 한다.</td></tr>
</table>

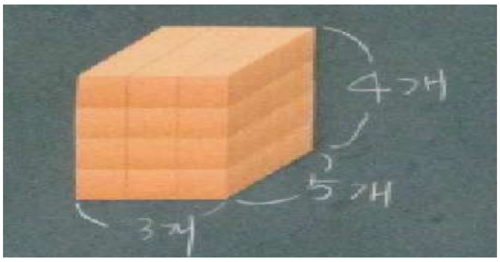
력 검사지 등을 모두 수집하여 분석을 위한 자료로 활용하였다.

결과 분석은 곱셈의 결합법칙을 예로 들어, 크게 교사의 측면과 학생의 측면으로 살펴보았다. 수와 연산의 성질 탐구의 첫 번째 단계인 구체적인 수 상황에서 수와 연산의 성질에 초점을 맞추기 단계에서 교사측면의 분석은 '수와 연산의 성질을 학생들이 인식하도록 촉진하기 위해 교사가 어떠한 활동들을 구성하고 있는가?', '교사는 수업을 어떠한 흐름으로 전개하고 있는가?', '교사가 제시한 과제들의 특징은 무엇인가?', '학생들이 수와 연산의 성질에 초점을 맞추도록 이끌기 위해 교사가 어떠한 발문과 전략들을 사용하고 있는가?'에 초점을 두어 분석하였다. 학생의 측면에서는 '수와 연산의 성질을 인식하는 과정에서 드러나는 학생들의 경향이나 특징, 어려움은 무엇인가?'에 초점을 두어 분석하였다. 후속 단계인 수와 연산의 성질을 발견하는 단계와 수와 연산의 성질을 일반화하는 단계에서도 동일한 패턴으로 교사의 측면과 학생의 측면에서 분석하였다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 구체적인 수 상황에서의 곱셈의 결합법칙 인식 과정

교사는 곱셈에서의 결합법칙을 탐구하기 위한 첫 단계로 상자가 가로, 세로, 높이에 각각 3, 5, 4개씩 쌓여있는 상자 배열에서, 상자의 총 개수를 구하는 문제를 제시하였다. 이 때, 교사는 직육면체 모양으로 쌓여있는 상자 그림을 칠판에 제시하여 학생들이 가로에 놓인 개수, 세로에 놓인 개수, 높이에 놓인 개수의 곱으로 상자의 총 개수를 구할 수 있다는 것을 직관적으로 파악할 수 있도록 하였다([그림 Ⅳ-1] 참조). 학생들은 칠판에 제시된 상자의 배열을 보면서 상자의 총 개수를 구하는 방법을 발표했다. 교사는 문제의 답 보다는 문제 해결의 과정에 초점을 두었고, 풀이 방법을 식으로 표현해 보도록 발문을 제시하였다. 또한, 다른 방법은 없는지 계속 탐구하도록 발문을 제시하였다.

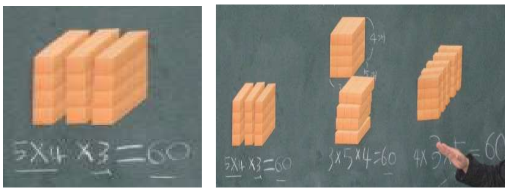


[그림 Ⅳ-1] 구체적인 수 상황에서 곱셈의 결합법칙을 보여주기 위한 시각적 모델 (1).

학생들이 동일한 문제 상황을 곱하는 순서에 따라 여러 가지 곱셈식으로 나타낼 수 있음을 탐구하도록 하기 위해, 교사는 수업의 초점을 상자가 모두 몇 개인지를 알아보기 위한 다양한 방법을 찾는데 두었다. 한 학생이 곱셈식 '3×5×4=60'을 제시했을 때, 교사는 한 가지 방법에 만족하지 않고 학생들에게 다른 방법을 찾아볼 것을 요구하였다. 즉, 교사는 "지금 재원이가 '3×5×4=60'이라고 했어요. 그런데 저는 생각이 좀 달라요, 하는 사람? 요 옆에다가 한 번 써 볼게요." 라고 발문함으로써, 학생들이 동일한 상자 배열에서 상자의 총 개수를 구하는 다른 방법을 계속해서 탐구하도록 했다. 이에 또 다른 학생이 어렵지 않게 곱셈식 '5×4×3=60'을 제시하였고, '5×4×3'을 계산하는 방법을 설명하였다. 이에 대해 교사는 두 번째 방법이 맞는지에 대해 학생들의 동의 여부를 물었고 대다수의 학생들이 동의를 표현했다. 교사는 칠판에 제시된 두 가지 식 각각에 대하여 동일한 방법으로 구한 사람이 몇 명이나 되

는지 손을 들어보게 하였는데, ‘3×5×4=60’의 방법으로 상자의 총 개수를 구한 사람은 서른 명쯤 되었고, ‘5×4×3=60’의 방법으로 상자의 총 개수를 구한 사람은 서너 명쯤 되었다. 교사는 계속해서, 학생들이 상자의 개수를 구하는 또 다른 방법이 있는지를 탐구해 보도록 발문하였다. 이런 과정을 통해 학생들은 동일한 상자 배열의 총 개수를 구하는 방법으로 ‘3×5×4=60’, ‘5×4×3=60’, ‘4×3×5=60’의 세 가지 곱셈식을 찾았고, 교실 담화를 통해 전체 학생들이 세 가지 곱셈식이 모두 옳은 방법이라는 것에 동의하였다.

교사는 후속 활동으로 학생들이 세 가지 곱셈식 각각이 무엇을 의미하는지를 상자 배열과 관련지어 설명해 보도록 했다. <에피소드 1>는 이 중에서 곱셈식 ‘5×4×3=60’의 의미를 탐구하는 과정을 나타낸다([그림 Ⅳ-2] 참조).



[그림 Ⅳ-2] 구체적인 수 상황에서 곱셈의 결합법칙을 보여주기 위한 시각적 모델 (2).

<에피소드 1: 상자를 세는 방법과 세 수의 곱셈 순서를 관련지어 곱셈식의 의미 탐구하기>

교사: (곱셈식 ‘5×4×3=60’의 ‘5×4’를 손으로 짚으며) 여기 보세요. ‘5×4’가 있네요.(상자 배열을 손으로 가리키며) 여기에서 ‘5’는 무엇을 의미하나요?

학생들: 밑에가 5개에요.

교사: (상자 배열에서 세로로 5개씩 놓였다는 것을 손으로 짚어주며) 여기가 5개라는 거죠?

학생들: 네.

교사: (상자 배열을 전체적으로 가리키며) 여기서 4는 무엇을 의미해요?

학생들: (몇몇은 ‘높이’라고 답하고, 몇몇은 ‘상자가 위로 쌓인 수’라고 말함) 높이/ 상자가 위로 쌓인 수

교사: (상자 배열에서 1층부터 4층까지 차례로 짚어주며) 상자들이 4층으로 쌓여있다는 거죠! 그렇다면, 5×4는 무엇을 의미할까요?

학생들: 20이요.

교사: ([그림 Ⅳ-2]의 좌측 그림에 제시된 ‘5×4’ 상자 배열 중에서 1개를 붙이며) 바로 이거에요. 이 한 줄이 몇 개라는 거예요?

학생들: 3묶음

교사: ([그림 Ⅳ-2]의 좌측 그림에서와 같이, ‘5×4’ 상자 배열 3개를 이어붙이며) 5×4가 3묶음 있다. 이것은 곱셈식에서 (곱셈식 ‘5×4×3=60’에서 ‘5×4’와 ‘×3’에 순서대로 밑줄을 그으며) ‘5×4’가 ‘3묶음’ 있다는 것이지요. 맞나요?

<에피소드 1>, [그림 Ⅳ-2]에서 알 수 있듯이, 교사는 곱셈식 ‘5×4×3=60’의 의미를 설명하기 위해 상자가 5개씩 4층으로 쌓여있는 ‘5×4’ 배열을 사용하였다. 학생들은 상자 배열과 곱셈식 사이의 관계를 탐구하며, 직육면체 모양의 배열에서 세로로 놓인 상자의 개수와 높이의 개수가 각각 곱셈식의 ‘5’와 ‘4’에 대응하고, 가로로 놓인 상자의 개수가 곱셈식의 ‘3’에 대응한다는 사실을 명확하게 이해하였다. 그리고 곱셈식 ‘5×4×3=60’은 ‘5×4×3’ 배열에서 ‘5×4’를 먼저 고려한 것으로 ‘5×4’ 배열 3묶음과 같다는 것에 동의하였다.

교사는 이어서 곱셈식 ‘3×5×4=60’과 ‘4×3×5=60’에 대해서도 ‘배열 모델’과의 관계를 탐구하도록 촉진하였다. 이와 같은 일련의 과정들은, 학생들이 동일한 상자 배열에서 가로, 세로, 높이의 개수 중 어느 것을 먼저 고려하느냐에 따라 순서가 다른 여러 가지 곱셈식으로 표현된다는 것과 곱셈의 순서는 곱셈의 결과에 영향을 미치지 않는다는 것을 깨닫게 하는데 중요한 역할을 하였다.

학생들이 동일한 배열 상황을 순서가 다른 여

러 가지 곱셈식으로 표현할 수 있다는 것에 동의하자, 교사는 여러 가지 곱셈식을 대상으로 곱셈식 자체에 대한 탐구로 옮겨갔다. <에피소드 2>은 순서에 따른 곱셈식들을 탐구하는 과정이다.

<에피소드 2: 곱하는 순서가 다른 세 수의 곱셈식에서 곱셈의 결합법칙에 초점 맞추기>

교사: (칠판에 제시된 '3×5×4=60', '5×4×3=60', '4×3×5=60'을 함께 살펴보게 하며) 자! 여기서 공통점? 누가 이야기 해 볼 사람? 무엇인가 같은 것이 있어요.

정민: 답이 다 같고, 곱하기도 순서만 다를 뿐이지 다 같아요.

교사: 와~ 관찰력 끝내줘요. 곱하는 수도 순서만 다를 뿐이지 다 같대요. 3하고 4하고 5 같고 어때요? 또 공통점 있어요?

재원: 다 곱셈식입니다.

교사: 다 곱셈식이에요. 좋아요.

재원: 곱하는 수가 다 같아요.

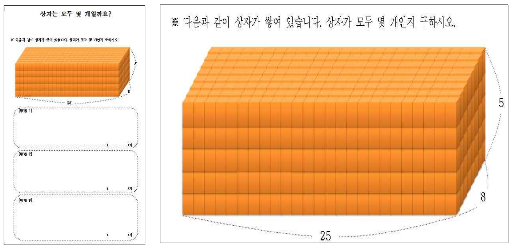
교사: 아까 얘기한 것과 비슷해요. 그렇죠? 좋아요. 그러면 다른 점? 이 식 세 개의 다른 점은?

정민: 순서가 달라요.

<에피소드 2>에서 교사는 학생들에게 칠판에 제시된 세 개의 곱셈식 '3×5×4=60', '5×4×3=60', '4×3×5=60'에서 공통점과 차이점을 찾아보도록 하였다. 이에 대해 학생들은 공통점으로 답이 같다는 점, 곱하는 수가 같다는 점, 곱셈식이라는 점 등을 발견하였고, 차이점으로 순서가 다르다는 점을 발견하였다. 이러한 과정을 통해 학생들은 세 수의 곱에서 '곱하는 순서'는 '곱'에 영향을 미치지 않는다는 사실을 깨닫게 됨으로써 곱셈의 결합법칙을 인식하게 되었다.

2. 충분한 사례탐구를 통한 곱셈의 결합법칙 발견 과정

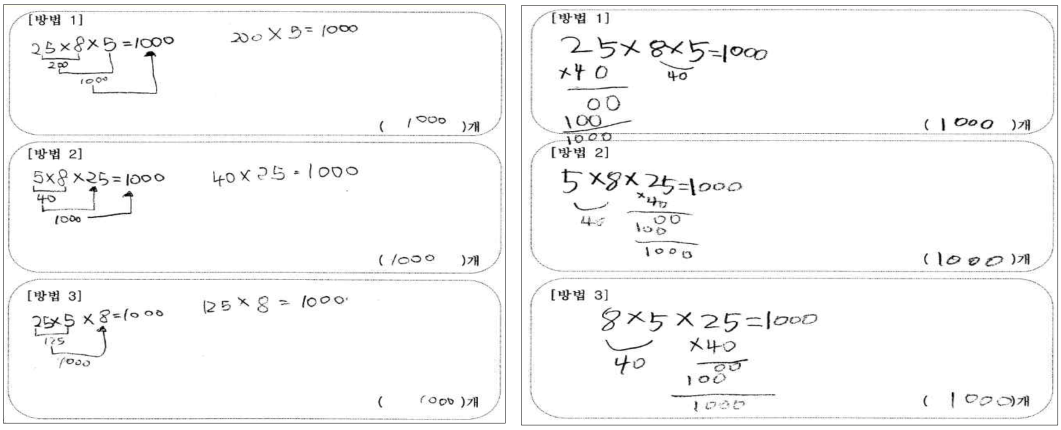
교사는 학생들이 가로, 세로, 높이에 각각 3, 5, 4개씩 쌓여 있는 상자 배열을 통해 세 수의 곱은 곱하는 순서에 관계없이 일정하다는 것에 동의하자, 상자의 개수를 늘려 가로, 세로, 높이에 각각 25, 8, 5개씩 쌓여 있는 상자 배열에 대해서도 곱하는 순서에 관계없이 곱이 일정한지를 탐구하도록 하였다. 이를 위해 먼저 칠판에 '25×8×5' 상자 배열 그림을 제시하였고, 학생들에게 상자가 모두 몇 개인지 생각해 보게 하였다. 이어서 '25×8×5' 상자 배열 그림이 포함된 개별 활동지를 나누어주고 상자가 모두 몇 개인지를 여러 가지 방법으로 구해보도록 했다([그림 Ⅳ-3] 참조).



[그림 Ⅳ-3] 곱셈의 결합법칙을 발견하도록 고안된 학습지.

학생들이 문제를 해결하는 동안 교사는 궤간 순시를 하며 '여러 가지 방법으로 생각해 볼 것'과 '어떻게 풀었는지가 나타나도록 풀이와 답을 모두 쓸 것'을 강조하였다. 이에 학생들은 개별 활동지의 [방법 1], [방법 2], [방법 3]이라고 적힌 공란에 식과 문장 등으로 풀이 방법을 기술하되, 방법들이 서로 차별화 되도록 하기 위해 노력을 기울였다. 학생들은 상자의 총 개수를 구하기 위해 상자의 가로, 세로, 높이에 놓인 개수인 '25', '8', '5'의 세 수에 주목하였고, 세 수 중 어느 것을 먼저 고려했는가에 따라 [방법 1], [방법 2], [방법 3]으로 구분하여 풀이 방법을 제시하는 경향을 보였다.

학생들이 기술한 풀이 방법을 구체적으로 살펴보면, 대부분의 학생들이 '25', '8', '5'가 들

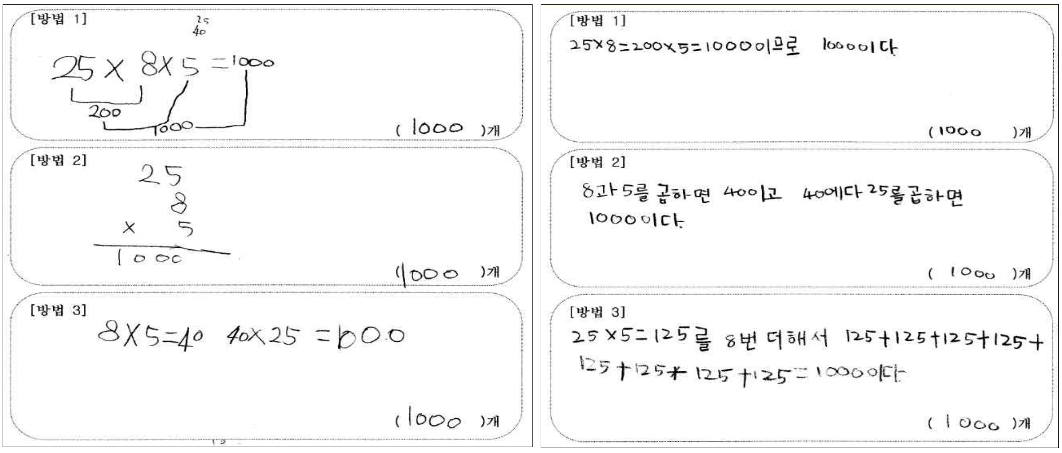


[그림 Ⅳ-4] 세 수의 곱셈식으로 문제를 해결한 전형적인 학생들의 예.

어가는 세 수의 곱셈식으로 풀이 방법을 표현하는 특징을 보였다. 그리고 [방법 1], [방법 2], [방법 3]에 제시된 세 수의 곱셈식 사이에는 ‘25’, ‘8’, ‘5’가 어떤 순서로 배열되었는지의 측면에서 차이가 나타났다. 또한, ‘동일한 순서의 곱셈식’을 제시한 학생들 사이에서도 ‘실제 계산의 순서’ 측면에서 차이가 나타나기도 하였다.

[그림 Ⅳ-4]는 풀이 방법을 세 수 25, 8, 5의 곱셈식으로 표현한 전형적인 예에 해당한다. 먼저 [그림 Ⅳ-4]의 좌측을 살펴보면, 이 학생은 [방법 1]에서 상자의 총 개수를 나타내는 세 수의 곱셈식으로 ‘25×8×5’를 쓴 후, 식에 선과 숫자를 사용하여 계산의 순서와 계산의 과정들을 표시하였다. 또한, 세 수의 곱셈식의 우측에 ‘200×5=1000’으로 두 수의 곱셈식을 함께 제시하였다. 이런 방법으로 [방법 2]에서는 곱셈식을 ‘5×8×25’로 세운 후, 5와 8을 먼저 곱한 후 25를 곱하여 1000을 구하였고, [방법 3]에서는 곱셈식을 ‘25×5×8’로 세운 후 25와 5를 먼저 곱한 후 8을 곱하여 1000을 구하였다. 이 학생과 같이 대부분의 학생들은 세 수의 순서를 바꾸어 가며 다양하게 곱셈식을 세울 수 있었으며, 각각의 곱셈식을 앞에서부터 차례로 계산하여 답을 구하는 경향을 보였다.

[그림 Ⅳ-4]의 우측을 살펴보면, 이 학생은 [방법 1]에서 곱셈식을 ‘25×8×5’로 세운 후 뒤에서부터 계산하여 8과 5의 곱 40을 먼저 구한 후 앞에 있는 25를 곱하여 1000을 구했고, [방법 2]에서는 곱셈식을 ‘5×8×25’로 세운 후, 5와 8을 먼저 곱하여 40을 구한 후 25를 곱하여 1000을 구하였다. [방법 3]에서는 곱셈식을 ‘8×5×25’로 세운 후 8과 5의 곱 40을 먼저 구한 후 뒤에 있는 25를 곱하여 1000을 구했다. 즉, 이 학생은 곱셈식에서 세 수의 제시 순서에 관계없이 8과 5의 곱을 먼저 실행하여 40을 구한 후 나중에 25를 곱하였다. 이 학생의 풀이 방법과 위에 제시된 학생의 예를 비교하면, 세 수 25, 8, 5에 대하여 곱하는 순서를 다르게 하여 세 가지 식을 세웠다는 측면에서는 대동소이하다는 것을 알 수 있다. 그러나 실제 계산의 순서 측면에서는 분명한 차이가 나타났다. 즉, 위에 제시된 학생의 경우는 세 수의 곱셈식을 일관성 있게 앞에서부터 차례로 계산하는 반면, 뒤에 제시된 학생의 경우는 계산상의 편리함을 고려하여 앞에서부터 계산하거나 뒤에서부터 계산하였다. 이처럼 ‘곱의 순서’ 측면에서의 ‘다양성’은 크게 두 가지 과정에서 발견되었는데, 첫째는 문제 상황을 곱셈식으로 번역하는 과정에



[그림 Ⅳ-5] 세 수의 곱셈을 여러 가지 방법으로 해결한 학생들의 예.

서 나타났고, 두 번째는 세 수의 곱셈식을 실제로 계산하는 과정에서 나타났다.

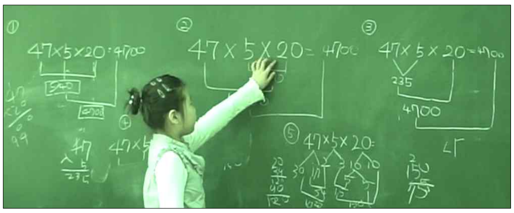
한편, 학생들이 제시한 풀이 방법 중에는 '곱의 순서' 보다는 '다른 측면의 차이'에 주목하는 경우도 발견되었다. 예를 들어 [그림 Ⅳ-5]의 좌측을 살펴보면, 이 학생은 동일한 순서의 곱셈식 '25×8×5'를 식의 형태에 따라 가로셈과 세로셈으로 구분하여 각각 [방법 1]과 [방법 2]에 제시하였고, [방법 3]에서는 풀이 단계를 구분하여 '8×5=40'과 '40×25=1000'의 두 개의 곱셈식으로 제시하였다.

또한, 매우 예외적인 경우로 식과 문장을 혼합하여 풀이 방법을 기술한 학생도 있었다([그림 Ⅳ-5]의 우측 참조). 이 학생은 [방법 1]에서 '25×8=200×5=1000'과 같이 풀이 단계를 구분하여 두 단계의 곱셈으로 표현을 시도하였는데, 이 과정에서 '등호'를 잘못 사용하는 오류를 범했다. [방법 2]에서는 곱하는 순서를 바꾸어 풀이하되, 풀이 과정을 완전한 문장으로 표현하였다. [방법 3]에서는 문장과 식을 혼합해서 제시하였는데, 25와 5를 먼저 곱하여 125를 구한 후, 125에 8을 곱하는 대신 125를 8번 더하여 1000을 구하였다.

교사는 학생들의 활동이 끝나자 발표를 희망하는 학생 중 여섯 명에게 칠판에 직접 자신의 풀이 방법을 제시하도록 하였다. 이 때, 교사는 "가로셈과 세로셈이라고 하여 서로 다른 방법이라고 할 수 없어요. 세로셈으로 했다고 하더라도 무엇을 먼저 곱했는지가 가로셈으로 할 때와 같다면, 한 가지 방법이 될 수도 있는 거예요."라고 언급하면서 '다양한 방법'으로 '식의 형태'를 고려하기 보다는 '곱하는 순서'를 고려하도록 강조하였다. 학생들은 칠판에 제시된 여러 가지 식들을 관찰하여 '곱하는 순서'에 관계없이 곱은 항상 '1000'이라는 사실을 확인하였고, 이 과정을 통해 학생들은 세 수의 곱은 곱하는 순서에 관계없이 일정하다는 것에 동의하였다.

교사는 후속 활동으로 교과서의 '세 수의 곱셈' 차시에 제시된 문제 상황을 활용하여 세 수의 곱셈식을 계산하는 방법에 대해 탐구하도록 하였다. 교사는 먼저 문제를 TV 화면을 통해 제시한 후 "시연이네 집에는 암탉이 47마리 있습니다. 암탉 한 마리가 일주일에 달걀을 6개씩 낳는다고 합니다. 이 암탉들이 50주 동안 달걀을 낳는다면 달걀은 모두 몇 개인지 알아봅시다."라고 문제를 읽어 주었다. 교사는 먼저 어림하기 활동을 통하여 달걀이 몇 개쯤 될지를

예상해 보도록 한 후, 달걀의 개수를 정확하게 계산하는 곱셈식을 발표하도록 하였다. 그런 후 교사는 여러 가지 곱셈식 중에서 문제 상황을 가장 적절하게 반영한 곱셈식인 ‘47×5×20’에 대하여, 학생들에게 계산 방법을 칠판에 쓰고 설명해 보도록 하였다([그림 Ⅳ-6] 참조).

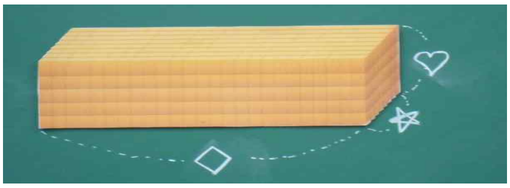


[그림 Ⅳ-6] 47×5×20을 다양한 순서로 계산하고 발표를 통해 공유하는 장면.

교사는 자신의 계산 방법을 발표할 때, 왜 그렇게 계산하였는지에 대한 이유도 함께 발표하도록 하였다. 학생들은 여러 가지 방법 중에서 특히, ‘5’와 ‘20’을 먼저 곱한 후 ‘47’을 곱하는 방법이 가장 쉽고 편리하다는 데 동의하였다. 또한, 교실 토의를 통해 학생들은 세 수의 곱셈식을 계산할 때, 식에 제시된 수의 순서를 바꾸어 계산할 수 있으며, 특히, 계산이 쉽고 간편한 두 수를 선택하여 먼저 계산하는 것이 편리하다는 결론을 얻었다.

3. 임의의 수 상황에서의 곱셈의 결합법칙 일반화 과정

교사는 학생들이 세 수의 곱셈 상황에서 곱하는 순서에 상관없이 곱이 일정하다는 것에 동의하자, 가로 세로 높이가 각각 ◇, ☆, ♡인 상자 배열을 제시하고, 상자의 총 개수를 알아보는 문제를 제시하였다. 이 때, 교사는 임의의 수 상황에서도 문제 상황을 직관적으로 파악하여 문제 해결의 실마리를 쉽게 발견할 수 있도록 하기 위해, [그림 Ⅳ-7]과 같은 상자 배열을 제시하였다. 학생들은 상자 배열을 보면서 상자의 총 개수를 구하는 식을 발표 했고, 교사는 다른 방법은 없는지 계속 탐구하도록 발문을 제시하였다. <에피소드 3>는 학생들이 임의의 수 상황에서 곱셈의 결합법칙을 탐구하는 과정을 보여준다.



[그림 Ⅳ-7] 임의의 수 상황에서 곱셈의 결합법칙을 보여주기 위한 시각적 모델.

<에피소드 3: 임의의 개수의 배열에서 곱셈의 교환법칙 탐구하기>

교사: (직육면체모양의 상자 배열 그림을 가리키며) 상자가 그림과 같이 쌓여 있어요. (상자 배열의 가로, 세로, 높이에 각각 ◇,☆,♡를 써 넣으며) 상자가 가로에 ◇개씩 놓여 있고요, 세로로는 ☆개씩, 높이로는 ♡개씩 쌓여 있어요. 그렇다면 상자가 모두 몇 개인지는 곱셈식으로 어떻게 나타낼 수 있을까요? 이 그림에서 상자가 모두 몇 개인지를 식으로 나타내어 보세요. 먼저 각자 학습지에 나타내어 본 후 손을 들고 발표해 보세요.

학생들: ◇×☆×♡

교사: (칠판의 상자 배열 아래쪽에 ‘◇×☆×♡’를 쓰며) 또 다른 방법이 있나요?

은주: ☆×◇×♡

교사: (‘◇×☆×♡’의 오른쪽에 나란히 ‘☆×◇×♡’를 쓰며) 이 두 가지 식을 비교해 봅시다.

학생들: 서로 같아요.

교사: ‘◇×☆×♡’와 ‘☆×◇×♡’가 서로 같다고 할 수 있을까요?

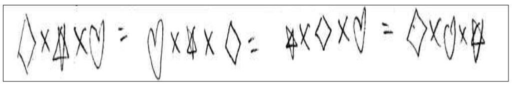
윤서: 어차피 상자가 모두 몇 개인지를 구하는 것이니까, 가로와 세로를 먼저 곱한 후 높이를 나중에 곱하거나, 세로와 높이를 먼저 곱한 후, 가로를 곱하거나 똑같아요.

교사: 여러분 생각은 어때요?

학생들: 같아요.
교사: 그렇다면 두 식의 값이 서로 같다는 것을 어떻게 나타내면 좋을까요?
학생들: 등호(=)로 나타내요.
교사: 자, 이것들 외에도 순서 바꿀 수 있죠? 그러면 결과가 다 어떻게 될까요?
학생들: 똑같아요.

<에피소드 3>에서 학생들은 상자의 가로와 세로, 높이의 개수가 각각 구체적인 수로 제시되지 않은 상황에서도 세 수의 곱은 곱하는 순서에 상관없이 일정하다는 것에 동의했고, '♡×☆×◇'와 '☆×◇×♡'를 등호로 연결하여 제시할 것을 제안했다. 이처럼 학생들은 '세 수의 곱셈에서 곱하는 순서를 바꾸어도 곱이 같다'는 곱셈의 결합법칙을 일반화하고 기호로 표현하는 데 성공적이었다.

한편, 교사는 학생들에게 세 수의 곱셈에 대하여 발견한 점을 학습지에 정리해 보도록 하였다. [그림 Ⅳ-8]은 학생들이 곱셈의 결합법칙에 대해 식으로 표현한 예이다.



[그림 Ⅳ-8] 곱셈의 결합법칙을 식으로 표현한 학생의 예.

[그림 Ⅳ-8]의 '◇×☆×♡=♡×☆×◇=☆×◇×♡=◇×♡×☆'라고 식을 제시한 학생은 변수 개념을 사용하여 곱셈에서의 결합법칙을 일축하고 있다. 이처럼 학생들은 기호적 표현을 사용하여 곱셈에서의 결합법칙을 일반화할 수 있었다.

Ⅴ. 논의

실제 수업 상황에서 곱셈의 결합법칙을 발견하고 일반화하는 과정을 탐구함으로써 초등학교에서 대수적 추론 능력을 향상시킬 수 있음을 확인하였다. 이에 '수와 연산을 다루는 수업에서 학생들의 대수적 추론 능력을 신장시키고자 할 때, 어떤 측면들을 고려해야 하는가?'라는 측면에서 논의하면 다음과 같다.

첫째, 수와 연산의 성질을 적용할 수 있는 문제의 맥락인지를 고려하여 과제를 제시할 필요가 있다. 본 연구에서 교사는 학생들이 세 수의 곱을 구하는 과정에서 곱셈의 결합법칙을 인식하도록 하기 위해 교과서에 제시된 묶음 상황의 곱셈 과제 대신, 직육면체 모양으로 쌓아올린 상자 더미에서 상자의 총 개수를 구하는 배열 상황의 곱셈 과제를 사용하였다. 이에 학생들은 상자를 여러 가지 방법으로 세어보는 활동을 바탕으로 상자의 총 개수를 다양한 곱셈식(예, '3×5×4=60', '5×4×3=60', '4×3×5=60')으로 표현할 수 있었고, 더 나아가 세 수를 곱하는 순서가 곱셈의 결과에 영향을 미치지 않는다는 사실을 이해할 수 있었다. 이처럼 학생들은 곱셈의 결합법칙을 문제 상황을 반영한 구체적인 활동과 연결하여 인식하는 경향을 보였다. 이때, 학생들이 곱하는 순서를 자유롭게 바꾸어가며 세 수의 곱을 탐구할 수 있었던 원인으로 상자 배열이라는 문맥이 곱하는 순서에 구애받지 않는 대칭적인 상황의 곱이라는 사실에 주의할 필요가 있다.

배열 상황은 인수(factor)들이 서로에게 물리적인 영향을 주지 않으며 곱하는 순서를 바꾸는 행위 자체가 문제 상황에 모순을 일으키지 않는다. 이처럼 곱하는 수들이 교환 가능한 문맥으로는 배열이나 넓이, 부피, 조합의 상황이 있으며(Baroody & Coslick, 1998), 이러한 문맥은 곱셈의 교환법칙이나 결합법칙과 같은 연산의 성질을 직접적으로 적용할 수 있다는 장점이 있다. 따라서 학생들이 문제 상황을 통해 연산의 성질을 성공적으로 이해하고 발견하도록 이

끌기 위해서는 과제 설정 단계에서 연산의 성질을 자연스럽게 탐구할 수 있는 문맥인지를 신중하게 고려하는 것이 중요하다.

둘째, 연산의 성질을 발견하고 일반화할 수 있도록 돕는 시각적 모델을 적극적으로 활용할 필요가 있다. 본 연구에서 교사는 학생들이 수와 연산의 성질을 쉽게 파악할 수 있도록 돕기 위해 시각적 모델을 고안하여 사용하는 특징을 보였다. 수업에서 시각적 모델은 문제 상황에 내포된 수학적 구조를 시각화하여 드러내 주는 역할을 함으로써, 학생들이 수업에서 강조하여 다루고자 하는 연산의 성질에 초점을 맞추어 탐구하도록 하는 효과가 있었다. 수업에서 사용된 시각적 모델의 구체적인 예로, 직육면체 모양의 상자 배열이 사용되었다. 학생들은 상자 배열에서 상자의 총 개수 역시 가로와 세로, 높이에 각각 상자가 몇 개씩 놓여 있는지를 고려하여 총 개수를 구하되 어느 쪽을 먼저 세든 상자의 총 개수는 일정하다는 점을 들어 곱셈의 결합법칙을 설명할 수 있었다. 이처럼 시각적 모델은 연산의 성질을 직관적으로 이해하는 데 도움이 되었으며, 더 나아가 임의의 수 상황에서도 동일하게 적용됨으로써, 학생들이 연산의 성질을 성공적으로 일반화하는 데에도 많은 도움이 되었다.

이와 관련하여 NCTM(2000)에서는 점 배열이나 넓이 모델이 특히, 곱셈의 교환성이나 분배성을 탐구하는 데 도움이 된다고 밝히고 있다. 본 연구는 이러한 모델을 실제 수업 상황에서 구체적으로 어떻게 활용할 수 있는지를 탐구한 예로, 학생들은 이러한 시각적 모델을 통해 연산의 성질을 직관적으로 이해할 수 있었고, 더 나아가 시각적 모델에서의 탐구 경험을 바탕으로 임의의 수 상황에서 연산의 성질이 성립한다는 것을 정당화하는 특징을 보였다.

셋째, 수와 연산의 성질을 예시할 수 있는 관계식을 체계적으로 활용할 필요가 있다. 본 논문에서 교사는 곱의 순서가 다른 세 수의 곱셈식을 탐구 단계에 걸쳐 지속적으로 제시하고 있다. 예를 들어, 구체적인 수 상황에서 수와 연산의 성질에 초점 맞추기 단계에서는 곱셈식 '3×5×4=60', '5×4×3=60', '4×3×5=60'을 대상으로 공통점과 차이점을 탐구하도록 하였고, 충분한 사례 탐구를 통해 수와 연산의 성질을 발견하기 단계에서는 두 곱셈식 '(47×5)×20=4700'과 '47×(5×20)=4700'을 비교하도록 하는 등, 탐구 과정에 관계식을 적극적으로 활용하였다. 이에 학생들은 임의의 수 상황에서 두 곱셈식 '◇×☆×♡'와 '♡×☆×◇'이 서로 동치라는 사실에 자신감을 드러냈다. 이처럼 구체적인 수로 수와 연산의 성질을 예시할 수 있는 관계식들은 초등학생들의 선행 지식과 경험만으로 충분히 이해 가능한 표현이면서 동시에 곱셈의 결합법칙이 갖는 본질적인 속성을 그대로 드러내어 주는 장점이 있다. 따라서 구체적인 수 상황에서 수와 연산 사이의 관계를 다양한 식으로 표현하는 경험은 수와 연산의 성질의 일반성을 성공적으로 표현하도록 하는 데 도움을 준다.

한편, 학생들은 예를 들어, '(a×b)×c'와 'a×(b×c)'의 두 식의 값이 서로 같다는 것을 경험한다고 해서 '(a×b)×c=a×(b×c)'를 자동적으로 이해하지는 않는 경향을 보였다. 따라서 구체적인 수를 예로, 다양한 순서와 형태의 관계식을 접할 수 있는 기회와 경험을 제공할 필요가 있다. 특히, 관계식은 문제 상황을 표현하고 의사소통하는 강력한 도구로서 역할을 하는데, 동일한 문제 상황을 여러 가지 식으로 표현하는 경험은 학생들이 외형이 다른 여러 가지 식 사이에서 동치 관계를 파악하게 하는 데에도 도움이 되었다.

초등학교에서부터 대수적 사고 능력을 신장해야 할 필요성을 인식하면서도 구체적으로 어떻게 지도해야 하는가에 관해서는 잘 알려지지

않은 현 시점에서, 본 논문은 초등학생들의 대수적 추론 능력을 향상시키기 위해 교사가 어떤 활동들을 구성할 수 있으며, 그러한 활동들에 참여함으로써 학생들이 어느 정도의 대수적 추론을 발현할 수 있는지를 구체적인 사례를 통해 보여주었다는 측면에서 의의가 있다. 추후 연구를 통해, 본 연구에서 개발한 수업의 단계가, 수와 연산의 성질 이외의 내용에서도 적용될 수 있는가에 관하여 알아볼 필요가 있다.

참고문헌

교육과학기술부(2010). **수학 4-1.** 서울: 두산동아(주)

김성준(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색.** 서울대학교 박사학위논문.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience part Ⅱ: Transforming practice on a district-wide scale. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 1, pp. 87-92). The University of Melbourne, Australia.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36(5), 412-446.

Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T., & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra, Vol. 1*(pp. 155-162). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth,* NH: Heinemann.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Developong a curriculum of beginning algebra in a spreadsheet environment. In H. Chick, K. Stacery, J. Vincent & Vincent(Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra,* (pp. 252-257). The University of Melbourne, Australia.

Fujii, T., & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 127-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 32(2), 195-222.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics & Mathematical Sciences Education Board (Eds.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium.* Washington, DC: National Academy Press.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J., Blanton, M, L., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). New York: Lawrence Erlbaum.

Kilpatrick, J., & Izsák, A. (2008). Historical perspectives on algebra in the curriculum. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 3-18). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 8(7), 342-348.

Lee, L. (2001). Early algebra-But which algebra? In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 392-399). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

RAND Mathematics Study Panel. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education.* Santa Monica, CA: RAND.

Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A Japanese perspective. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 183-194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Yin, R. K. (2002). *Case study research: Design and methods.* Thousand Oaks, CA: SAGE.

Fostering Algebraic Reasoning Ability of Elementary School Students: Focused on the Exploration of the Associative Law in Multiplication

Choi, Ji Young (Seoul DaeDong Elementary School)
Pang, Jeong Suk (Korea National University of Education)

Given the growing agreement that algebra should be taught in the early stage of the curriculum, considerable studies have been conducted with regard to early algebra in the elementary school. However, there has been lack of research on how to organize mathematic lessons to develop of algebraic reasoning ability of the elementary school students. This research attempted to gain specific and practical information on effective algebraic teaching and learning in the elementary school. An exploratory qualitative case study was conducted to the fourth graders. This paper focused on the associative law of the multiplication. This paper showed what kinds of activities a teacher may organize following three steps: (a) focus on the properties of numbers and operations in specific situations, (b) discovery of the properties of numbers and operations with many examples, and (c) generalization of the properties of numbers and operations in arbitrary situations. Given the steps, this paper included an analysis on how the students developed their algebraic reasoning. This study provides implications on the important factors that lead to the development of algebraic reasoning ability for elementary students.

* key words : early algebra(초기대수), algebraic reasoning(대수적 추론), generalization(일반화), symbolization(기호화), properties of operations(연산의 성질), context(문맥), visual model(시각적 모델), mathematical relation(수학적 관계), role of the teacher (교사의 역할).

논문접수 : 2011. 11. 1
논문수정 : 2011. 11. 21
심사완료 : 2011. 12. 8