

예비교사와 현직교사의 벡터 개념에 대한 이해 : MKT 중심으로

윤 현 경* · 권 오 남**

본 연구는 벡터 개념에 대해 예비교사와 현직교사가 어떻게 이해하고 있는가를 밝히는 것을 연구의 목적으로 한다. 이에 벡터 개념에 대한 예비교사와 현직교사의 가르치기 위한 수학적 지식(MKT)을 알아보려고 한다. 설문지와 인터뷰 조사 결과 예비교사와 현직교사 모두 벡터 자체가 되는 것보다 벡터의 표현수단을 벡터로 보는 경향이 있었으며 예비교사는 상대적으로 벡터를 벡터공간의 원소로 보는 대학교 수준의 공통내용지식(CCK)으로 응답했던 반면, 현직교사는 가르치는 상황에 필요한 특수내용지식(SCK)과 내용과 가르치는 것에 대한 지식(KCT)으로 응답하고 있었다. 본 연구는 이를 바탕으로 다음과 같은 벡터 개념에 대한 CCK, SCK, KCT와 수평내용지식(Horizon content knowledge)을 도출하였다. 또한 논의된 벡터 개념에 대한 MKT를 바탕으로 MKT 하위 영역 간의 관련성에 대해서도 살펴보았다.

1. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

대학에서 학습하는 수학은 계산과 공식에 치중했던 이전의 학습과는 달리 이해와 증명에 비중을 두고 있을 뿐만 아니라 이미 형성된 개념을 추상화하여 확장하는 과정이기 때문에 수학에 대한 접근 방식에 차이가 있다. 따라서 학생들은 고등학교 때와 다른 방식으로 수학을 접하게 되지만 후에 교사가 되어 학생들을 가르칠 때는 대학에서 학습한 추상적인 개념들을 고등학교 수학에 적용시키지 못하는 경우가 많다.

선형대수와 중등교육과정의 연결고리 중의 하나인 벡터에 대한 전개과정은 고등학교와 대학교 수준이 서로 다르다. 선형대수에서 정의하는 벡터는 벡터 공간의 원소로 개념의 전개과정은

공리적이고 추상적 구조를 기반으로 이루어지는 반면 학교수학에서 벡터는 비좌표계의 유향선분으로 위치벡터를 활용하여 대수적인 연산법칙을 제시한다. 즉, 대학교에서 배우는 벡터는 추상적인 데에 반해 고등학교에서의 벡터는 구체적이다. 따라서 수학교사가 되기 위해 대학에 입학한 학생들은 벡터 개념에 대해서 그 동안 학습했던 것과 다른 것을 배우고, 졸업 후 수학교사가 되었을 때 대학에서 배운 것과는 무관하게 예전에 학습했던 대로 지도하게 된다는 것이다. 이는 수학교사가 되는 사람들이 직면하는 학교 수학과 대학수학 사이의 이중단절(Klein, 1968)을 잘 보여주고 있다.

벡터의 개념에 대한 학생들의 생각을 살펴보면 벡터공간의 원소로서의 벡터는 추상적이고, 비좌표계의 벡터는 양의 개념이 모호하기 때문에 어렵다고 느끼고 있다(이윤수, 2009; Maracci, 2006; Dorier, 1998). 이에 관련하여 이중단절이

* 서울대학교 대학원 (ducale05@snu.ac.kr)

** 서울대학교 (onkwon@snu.ac.kr)

선형대수의 주요 개념인 벡터에 대해서 어떻게 나타나고 있는지 보이고, 더 나아가 벡터의 개념을 통해 선형대수와 중등교육과정의 연결성을 살펴보는 것은 의미가 있다.

실제 초·중등학교에서 가르칠 수학 내용과 무관해 보이는 대학수학에 대해서 부정적으로 생각하는 경향이 있는 예비교사나 대학에서 배운 수학 내용들이 현장에 직접적인 도움이 되지 않는다고 생각하는 초임교사들을 통해 대학수학에서 새롭게 학습한 교과내용지식과 중등교육과정의 가르치기 위한 수학적 지식(mathematical knowledge for teaching, 이하 [MKT]로 서술)¹⁾이 연결되지 않고 있음을 알 수 있다. 하지만 MKT는 어떻게 가르칠 것인가를 결정하는 큰 요인이며(Leinhardt & Smith, 1985) 개념에 맞는 적절한 예를 들거나 질문을 하는 등의 교수학적 결정에 직접적인 영향을 미치기 때문에(Even, 1990) 매우 중요한 것으로 간주되고 있다.

그동안의 선형대수와 중등교육과정의 연계성에 관한 연구들은 선형대수나 벡터 개념지도의 개선 방안을 탐색하거나 중·고등학교 수준에서 벡터 개념의 연결성을 강조한 수업 내용 및 방법을 제시하고 있다(이윤수, 2009; 이지연·홍갑주, 2008; 허은숙, 2005; Harel, 1990). 이에 본 연구는 벡터의 개념을 중심으로 한 선형대수에 관한 MKT 분석을 시도해보고자 한다. 따라서 벡터 개념에 대한 예비교사와 현직교사의 MKT를 살펴보고, 이를 통해 그 연결을 모색하는 연구는 이전 연구에서 발견하지 못한 부분을 규명할 수 있는 기회가 될 것이다.

2. 연구 문제

벡터 개념에 대해 예비교사와 현직교사가 어떻게 이해하고 있는가를 심층적으로 밝히는 것

을 목적으로 벡터 개념에 대한 예비교사와 현직교사의 MKT를 알아보고, 고등학교에서 벡터를 가르치게 되는 ‘기하와 벡터’ 단원에서의 연계성에 대한 이해를 바탕으로 예비교사와 현직교사의 MKT를 살펴보고자 한다. 따라서 연구 문제를 구분하여 두 가지로 제시한다.

- 1) 벡터 개념에 대한 예비교사와 현직교사의 MKT는 어떠한가?
- 2) ‘기하와 벡터’ 교과목에서 단원의 연계성에 대한 예비교사와 현직교사의 MKT는 어떠한가?

예비교사와 현직교사들의 벡터에 대한 MKT를 비교하고 분석하려는 본 연구는 선형대수 수업을 통해 학습한 MKT가 실제 현장에서 어떻게 활용되며 적용되고 있는지 살펴보고자 한다.

II. 이론적 배경

본 연구의 목적은 벡터 개념에 대한 예비교사와 현직교사의 MKT를 알아보고, 이를 바탕으로 대학수학이 중등교육과정에 어떻게 적용되고 있는지 알아보고자 하는 것으로 예비교사와 현직교사를 대상으로 연구하였다. 이에 교사의 지식이 어떻게 학생들에게 영향을 미쳐왔는지 알아보고, 벡터에 대한 연구가 어떻게 이루어져 왔는지 살펴보고자 하겠다. 따라서 크게 교사 지식에 관한 연구와 벡터에 관한 연구로 나누어 기술하였다.

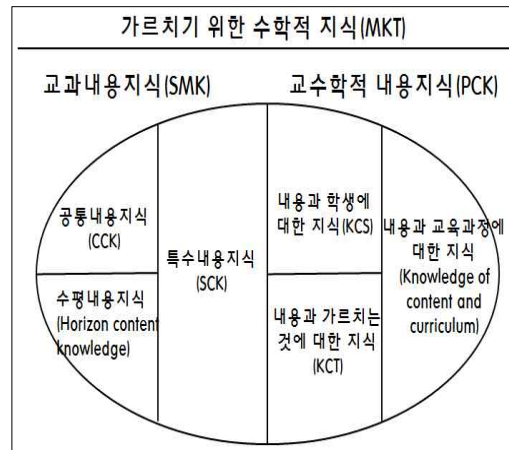
1. 교사 지식

교사 지식에 관한 연구는 크게 교사의 지식

1) Ball et al.,(2008)이 제안한 가르치기 위한 수학적 지식(Mathematical Knowledge for Teaching)의 약자로 교사의 지식을 크게 교과내용지식(Subject Matter Knowledge)와 교수학적 내용지식(Pedagogical Content Knowledge)로 나누고 이를 6개의 하위 영역으로 세분화하였다.

에 관한 것과 수학 교과지식에 관한 것이 있다. 교사의 지식에 관한 것은 Leinhardt & Smith(1985)가 교사지식의 두 가지 핵심적인 영역을 수업 구조 지식(lesson structure knowledge)과 교과내용 지식(subject matter knowledge)으로 나눈 것에서 Shulman(1986)이 교과내용지식(subject matter knowledge), 교수학적 내용지식(pedagogical content knowledge, 이하 [PCK]로 서술), 교육과정지식(curricular knowledge) 등의 3가지로 구분한 것으로 발전하였다. 이후 Shulman(1986)이 교사의 지식을 3가지로 분류한 것을 살펴보면 교과내용지식(subject matter knowledge, 이하 [SMK]로 서술)에는 어떤 영역의 사실이나 개념에 대한 지식과 교과 구조에 대한 이해가 포함되고, PCK에는 교과를 적절하게 표현하고 조직하는 방법과 학생들의 오개념 등을 고려한 교수전략 등에 관한 내용이 해당된다. 마지막으로 교육과정적 지식은 특별한 교육과정 내용에 관한 지식과 교육과정 내에서의 위치, 동일 학년에 제시되는 내용간의 연결에 대한 지식이다. 특히, 교사의 교과지식에 관심이 적었던 연구풍토에 대한 반성으로부터 나와 교사 고유의 전문지식으로 주목받았던 PCK는 정의가 모호하다는 지적이 많았다. 이는 PCK를 넓은 의미의 SMK와 교과지식을 가르치는 것 모두를 의미하는 것에 사용했기 때문에 교과 지식과 PCK사이의 구분이 명확하지 않다는 이유였다. 이에 Ball, Thames & Phelps(2008)은 Shulman과 동료들이 제공한 가르치는 활동에 특수한 종류의 내용지식이 필요하다는 아이디어가 의미 있다고 생각하여 연구자들은 필요한 내용지식을 상세하게 제시해야한다고 하였다. Ball과 동료들은 가르치는 상황에 필요한 수학지식인 MKT에 대한 연구를 통해서 가르치는 활동을 수행하기 위해서 상당한 수학지식이 필요하다는 점을 밝

혔다. 그동안 대학수학 교육과정에서 수학적 지식에 관심을 기울이지 않았다는 문제의식에서 출발하여 교과내용지식을 세분화하고, PCK역시 세분화하였다. 이를 보여주는 Ball et al.,(2008)의 다이어그램은 다음과 같다.



[그림 II-1] Ball et al.,(2008)의 MKT 하위 영역.

[그림 II-1]에서 보는 바와 같이 Ball et al.,(2008)은 교사의 지식을 MKT로 제안하고 이를 세분화하였다. 교사의 지식을 크게 SMK와 PCK로 나누고, SMK를 공통내용지식(common content knowledge, 이하 [CCK]로 서술), 특수내용지식(specialized content knowledge, 이하 [SCK]로 서술), 수평내용지식(horizon content knowledge)으로 나누고, PCK는 내용과 학생에 대한 지식(knowledge of content and students, 이하 [KCS]로 서술), 내용과 가르치는 것에 대한 지식(knowledge of content and teaching, 이하 [KCT]로 서술), 내용과 교육과정에 대한 지식(knowledge of content and curriculum)으로 나눴다.²⁾

2) CCK는 교사에게만 한정된 지식이 아닌 수학을 아는 사람들이면 아는 지식, SCK는 교수-학습 상황에서만 필요한 지식으로 문제를 맞게 푸는 것 이상의 지식, KCT는 가르치는 것과 수학에 관한 지식을 결합한 것으로 학생들이 벡터를 어려워할 때 무엇을 해야 하는지 결정할 수 있는 지식이다.

2. 벡터

벡터에 관한 연구는 크게 고등학교나 대학교에서 벡터나 선형대수에서 느끼는 학생들의 어려움에 대한 연구인 최혜진(1992), 박현미(2002), Dorier(1990, 2000)와 Sierpiska(2000), Stewart(2008), 고아라(2010)와 어려움의 이유나 문제점을 분석하거나 특정 교수법을 제안한 Harel(1990), Sierpiska, Hillel & Dreyfus(1998), 김용남(1999), Hill & Sierpiska(1994), Hillel(2000), 허은숙(2005), 이윤수(2009)의 연구로 나눌 수 있다. 최혜진(1992), 김용남(1999)과 박현미(2002)는 벡터 학습이 기하벡터에서 끝나게 되면 학습의 연결에 문제가 있다고 지적하였다. Hillel(2000)은 벡터의 표현 양식을 기하학적 양식, 대수적 양식, 추상적 양식으로 나누었다. 이 분류에 따르면 고등학교 교과서에서 볼 수 있는 유형선분은 기하학적 양식이고, 벡터 공간의 원소나 항등원, 역원은 추상적 양식, 대수적 양식이 된다. 벡터에 대한 Hillel(2000)의 표현 양식을 표로 나타내면 다음과 같다.

<표 II-1> Hillel(2000)의 벡터 표현 양식

표현 양식의 종류	내용
기하학적 양식	평면이나 공간, 즉 2차원이나 3차원 상에 유형선분, 점 등으로 나타내는 것
대수적 양식	R^n 상에서 n -짜리로 나타내는 것
추상적 양식	공리적으로 정의된 벡터 공간의 원소로 나타내는 것

또한, 허은숙(2005)은 수학적 연결성의 입장에서 고등학교에서 지도하고 있는 연립일차방정식과 행렬, 벡터, 이차곡선 그리고 일차변환 개념의 본질적인 연결성을 선형대수의 입장에서 살펴봄으로써 고등학교 수학에서 선형대수적인

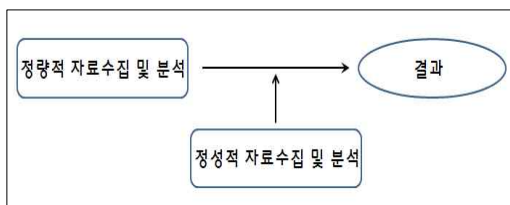
개념의 연결 관계가 잘 드러나도록 지도할 것을 강조하였다. 김용남(1999)은 영벡터에 대한 1995년 교과서를 살펴보았는데 당시 교과서에는 영벡터를 벡터의 도입과정에 넣지 않고 벡터의 덧셈, 뺄셈 등의 연산과정에서 취급하였으며 영벡터의 방향에 대해서는 방향을 생각하지 않는다는 교과서가 3종, 임의의 방향으로 한다는 교과서가 6종이라는 것을 조사했다.

기존 연구들은 벡터 개념에 대한 현상을 분석했지만 벡터 개념에 대해 교사가 가진 지식이 무엇인지에 대한 연구가 없으며, 예비교사와 현직교사를 대상으로 한 연구 중에 벡터 개념에 대한 연구는 없다. 또한 교사가 가진 지식을 SMK와 PCK로 나누어 본 연구는 있었으나 더 나아가 SMK중 교사가 가진 지식 그 자체와 가르치는 상황에서 필요한 지식으로의 세분화가 필요하다고 생각하였다. 마찬가지로 PCK에서도 내용, 학생과 가르치는 것에 대한 지식을 세분화하여 교사의 지식을 알아보고자 하였다. 따라서 벡터 개념에 대한 예비교사와 현직교사의 수학적 지식을 MKT에 근거하여 비교하고 분석해보려고 한다. 이를 위해서는 자료를 바탕으로 한 경험적 연구가 필요하다고 생각되어 본 연구는 예비교사와 현직교사들이 벡터 개념에 대해 어떤 이해를 하고 있는지를 자료에 기반하여 알아보고자 한다.

III. 연구 방법

본 연구는 구체적으로 벡터 개념과 ‘기하와 벡터’ 교과목에서의 단원간의 연계성에 대한 예비교사와 현직교사의 MKT를 알아보려는 연구 문제를 가지고 연구를 시행하였다. 연구 절차는 크게 세 단계로 구분할 수 있다. 본 연구를 하기 전의 1차 조사와 본 연구에서의 조사과정

즉, 교과서 분석과 설문지 조사, 면담 과정이며 이후 설문지와 면담을 분석하였다. 교과서 분석을 토대로 설문지를 제작하였으며 제작된 설문지는 1차 조사와 예비 면담을 통해서 수정하였고, 수정된 설문지로 2차 조사와 면담 조사를 실시하였다. 따라서 본 연구의 연구 방법은 혼합연구방법 중 순차적 설명 전략으로 이를 도식화하면 다음과 같다.



[그림 III-1] 본 연구의 연구 방법.

1. 교과서 분석

학습은 주로 교과서와 교사의 도움으로 이루어진다. 학생들을 가르치는 교사는 교과서를 바탕으로 지도하기 때문에 벡터 개념에 대한 예비

교사와 현직교사의 이해를 알아보기 위해서 교과서를 살펴보아야한다. 특히 2007년에 시행된 7차 교육과정 개정안에서 벡터는 ‘기하와 벡터’ 과목에서 지도하게 되므로 기존 교과서와의 차이점에 대한 분석이 선행되어야 한다. 또한 예비교사나 현직교사 모두 벡터, 영벡터, 역벡터의 정의 등 벡터 개념을 가르칠 때 가장 근원이 되는 것이 교과서이기 때문에 교과서의 내용이 교사의 CCK는 물론 SCK, KCT에 영향을 미친다고 볼 수 있다.

2. 설문지 조사

벡터 개념에 대해 교사가 갖고 있는 지식을 MKT 하위 영역에 맞추어서 알아보려 하였다. MKT 하위 영역 중 설문지를 통하여 알아볼 수 있는 지식은 CCK, SCK, KCT라고 생각하여 설문지를 구성하였다. 교사가 갖고 있는 수학 지식인 CCK, 교수-학습 상황에서 필요한 지식인 SCK, 가르치는 상황에서 필요한 지식인 KCT로 나누어 벡터 개념에 대한 CCK, SCK, KCT가 각

<표 III-1> 문항의 조사내용

문항	문항 구성	조사 내용	MKT 분류					
1	<p>아래의 문장들은 예비교사들이 갖고 있는 벡터에 대한 여러 가지 생각들입니다. 여러분이 갖고 있는 벡터에 대한 생각과 얼마나 일치하는지 그 정도에 해당하는 숫자에 체크해주세요.</p> <table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td>시점에서 시작해서 한 방향으로 떨어진다는 반직선은 벡터의 한 예라고 생각한다.</td> </tr> <tr> <td>어떤 것들을 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 와 같은 형태로 나타낼 것은 벡터의 한 예라고 생각한다.</td> </tr> <tr> <td>공간의 점은 벡터의 한 예라고 생각한다.</td> </tr> <tr> <td>$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 같은 행렬은 벡터의 한 예라고 생각한다.</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$와 같은 함수는 벡터의 한 예라고 생각한다.</td> </tr> </table>	시점에서 시작해서 한 방향으로 떨어진다는 반직선은 벡터의 한 예라고 생각한다.	어떤 것들을 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 와 같은 형태로 나타낼 것은 벡터의 한 예라고 생각한다.	공간의 점은 벡터의 한 예라고 생각한다.	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 같은 행렬은 벡터의 한 예라고 생각한다.	$f(x)$ 와 같은 함수는 벡터의 한 예라고 생각한다.	벡터 개념	CCK
시점에서 시작해서 한 방향으로 떨어진다는 반직선은 벡터의 한 예라고 생각한다.								
어떤 것들을 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 와 같은 형태로 나타낼 것은 벡터의 한 예라고 생각한다.								
공간의 점은 벡터의 한 예라고 생각한다.								
$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 같은 행렬은 벡터의 한 예라고 생각한다.								
$f(x)$ 와 같은 함수는 벡터의 한 예라고 생각한다.								
2	수준별 수업에서 학생들이 ‘벡터란 무엇인가요?’라는 질문을 한다면 어떻게 대답하시겠습니까? 영벡터와 역벡터의 정의를 물어본다면 어떻게 대답하시겠습니까?	벡터, 영벡터, 역벡터 개념	KCT					
3	<p>다음의 원(a)에서 타원(b)로의 변환에 대해 설명해주세요.</p>	변환과 이차곡선의 연계성	SCK					

각 어떠한 서로 어떤 영향을 미치고 있는지 ‘기하와 벡터’ 교과목을 중심으로 알아보고자 한다. 또한 MKT를 반영하는 문항이 구체적으로 제시될 때, 벡터 개념에 대한 MKT의 의미가 확실해질 수 있으므로 설문 문항을 만들 때 CCK, SCK, KCT에 맞도록 제작하였다.

3. 연구 대상

2010년 7월 고등학교에 재직하고 있는 서울 시 교사 69명을 대상으로 설문지를 통하여 1차 조사를 하였고, 3명의 현직교사를 선정하여 면담을 실시하였다. 면담 내용을 바탕으로 설문지 내용을 보완하여 8월에 2011년 교원 임용시험을 준비하는 예비교사 80명과 고등학교에 재직하고 있는 경기도 교사 124명을 대상으로 2차 설문 조사를 실시하였으며, 수집된 설문 조사 응답을 바탕으로 면담을 진행하였다.

2011년 임용시험을 준비하면서 2차 조사 설문문에 참여한 80명의 예비교사 중에서 설문의 응답을 토대로 선정한 4명의 예비교사들의 과외지도 경력은 각기 달랐으며 ‘기하와 벡터’교과서에 대한 지식이 있는 사람은 단 1명이었다. 한편, 현직교사의 경우 69명의 1차 조사와 124명의 2차 조사에서 1차 조사의 면담에 참여한 3명과 2차 조사의 면담에 참여한 2명의 특징은 다음과 같다.

<표 III-2>에서 볼 수 있듯이, ‘기하와 벡터’

<표 III-2> 면담대상자(현직교사)에 대한 정보

대상 \ 특징	조사대상	교사 경력	벡터 지도 경험	‘기하와 벡터’ 지도경험	벡터 개념
A	2차 조사	3년 반	있음	있음	기하학적 양식
B	2차 조사	4년	있음	없음	추상적 양식
C	1차 조사	9년	있음	없음	기하학적 양식
D	1차 조사	5년	없음	없음	추상적 양식
E	1차 조사	5년	있음	없음	대수적 양식

가 2010년부터 적용됐기 때문에 지도경험이 있는 교사가 거의 없었으며, 현직교사의 벡터 개념에 대한 양식은 Hillel(2000)에 근거하여 분류하였다.

IV. 연구 결과

연구 문제를 바탕으로 교과서, 설문지, 면담을 분석하면서 연구결과를 크게 세 가지로 분류하였다. 설문지를 분석한 결과는 통계프로그램을 활용한 양적인 분석으로 문항별로 이루어졌다. 면담을 분석한 결과는 9명의 연구 참여자를 대상으로 실시한 반 구조화된 면담을 분석하여 서술하였다. 그리고 앞에서 분석된 정성적 결과와 정량적 결과를 종합하여 연구 문제를 기준으로 벡터 개념과 ‘기하와 벡터’ 교과목에서 단원의 연계성에 대한 예비교사와 현직교사의 MKT에 대해 살펴보았으며, 더 나아가 MKT 하위 영역들 간의 관련성에 대해서도 알아보았다.

1. 교과서 분석 결과

고등학교 ‘기하와 벡터’ 교과서를 보면 대부분 ‘크기와 방향을 갖는 양’으로 벡터의 정의를 하고 벡터의 연산, 벡터의 실수배의 순서로 벡터의 성질을 기술하고 있다. 그러나 영벡터의 방향에 대한 기술은 <표 IV-1>과 같이 다양하

<표 IV-1> 영벡터의 방향

1995년 교과서		'기하와 벡터' 교과서 9종	
방향을 생각하지 않는다.	3개	방향을 생각하지 않는다.	5개
임의의 방향으로 본다.	6개	임의의 방향으로 본다.	1개
		방향이 없다.	1개
		방향에 대한 언급이 없다.	2개

게 되어있다.

영벡터의 방향은 <표 IV-1>와 같이 1995년 교과서와는 달리 7차 개정교육과정의 '기하와 벡터'에서는 '방향을 생각하지 않는다.'가 5종, '임의의 방향으로 본다.'와 '방향이 없다.'가 각각 1종 그리고 방향에 대한 언급이 없는 교과서가 2종이었다.

2. 설문지 조사 결과

예비교사 80명과 현직교사 124명에 대한 설문지를 종합하여 교사의 MKT를 알아보기 위한 분석을 실시하였다. 이를 위하여 설문지에 대한 응답을 범주화하였고, SPSS를 이용하여 빈도분석과 교차분석을 실시하였다. 교사의 CCK를 알아보고자 한 [문항 1]의 빈도분석 결과 예비교사와 현직교사 모두 반직선, 공간의 점, $\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$ 가 벡터와 일치하는 예라는 질문에 긍정적으로 응답하고 있는 비율이 70% 이상이지만 행렬과 함수의 경우에는 그렇지 않았다.

반직선, 공간의 점, $\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$ 은 벡터를 나타내는 표현이 될 수 있고, $\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$, 행렬, 함수는 그 자체가 벡터가 되는 것들의 예인데 행렬과 함수를

<표 IV-2> [문항 1]의 긍정적 응답에 대한 빈도분석 결과

대상	'내가 생각하는 벡터와 일치한다.'라고 응답한 교사의 비율	
	예비교사(80명)	현직교사(124명)
벡터의 예		
반직선	58 (72.5%)	90 (72.6%)
공간의 점	63 (78.8%)	89 (72.4%)
$\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$	69 (86.3%)	95 (76.6%)
행렬	46 (57.5%)	51 (41.5%)
함수	31 (38.8%)	44 (35.5%)

벡터와 일치하는 예라고 긍정적으로 응답한 비율이 낮은 것으로 보아 벡터 자체가 되는 것보다는 벡터의 표현수단을 벡터로 보는 경향이 있음을 알 수 있다. 또한, 교차분석 결과 행렬을 벡터와 일치하는 예라고 생각하는 것에 대해서 예비교사와 현직교사가 통계적으로 유의한 차이를 보였다.³⁾ 즉, 예비교사가 현직교사보다 행렬을 벡터와 일치하는 예라고 생각하고 있는 것으로 해석된다.

교사가 가진 CCK을 알아보고자 한 [문항 1]과는 달리 [문항 2]에서는 교수-학습 상황에서 사용되는 KCT을 알아보고자 하였다. 교수-학습

3) 유의확률 0.031* (* $p < .05$)

상황에서의 지식은 교사가 가진 지식이 교수학적 변환을 통해서 달라질 수 있기 때문에 [문항 1]의 응답과 차별성을 가지게 될 것이라고 예상하였다. 또한 교사가 가진 CCK가 수준별 수업이라는 가상적 상황에서 상반과 하반에 따른 차이가 있는지, 있다면 어떻게 있으며 이것이 벡터에 대한 대학교 수준의 지식과 어떻게 연결되고 있는지 알아보고자 하였다. 벡터의 정의에 대한 응답을 분류해보면 6가지로 나눌 수 있다. 우선 크게 ‘크기와 방향을 갖는 양’이라는 고등학교 수준의 교과서 정의와 대학교 수준의 지식인 ‘벡터 공간의 원소’로 분류하였다. 그 밖에 기하학적 대상, 물리량, 구체적인 예로 나누었는데 우선 기하학적 대상에 속하는 응답은 ‘유향선분, 반직선, 공간상의 점’이 있었다. 이런 종류의 응답을 기하학적 대상으로 분류한 이유는 교과서 정의인 ‘크기와 방향을 갖는 양’은 추상적으로 생각할 여지가 있는 반면, ‘유향선분, 반직선, 화살표’ 등의 응답은 벡터를 기하학적 대상으로 한정지어 나타냈다는 차이가 있기 때문이다. 그리고 물리에서의 벡터나 힘과 연결 지어 설명한 응답은 물리량으로 분류하였고, 실생활과 관련된 예로 응답한 것은 구체적인 예로 분류하였다. 벡터의 정의에 대한 상반의 응답을 분석한 결과 고등학교 수준에서 정의하고 있는 응답이 예비교사의 77.5%, 현직교사의 75%로 가장 많았고 그 중에서 기하학적 대상으로 정의한 응답이 예비교사의 40%, 현직교사의 36.29%로 가장 많았다. 또한, 고등학교 수준에 속하는 물리량에 관련된 응답은 현직교사가 7.26%로 단 한명만이 응답한 예비교사의 경우보다 많았다. 그러나 대학교 수준의 벡터 공간을 언급한 응답은 예비교사의 6.25%, 현직교사의 4.84%로 예비교사에게서 조금 더 많았다. 대학교 수준의 벡터 개념에 대한 응답이 있었던 상반과는 달리 하반의 응답을 분석한 결과 대부분의 응답은 고등학교 수준

의 응답이었으며, 벡터를 기하학적 대상으로 표현하는 응답이 더 많았고, 예비교사의 3.75%, 현직교사의 13.71%가 풍향, 풍속이나 손가락 등의 실생활에서의 예를 이용하여 응답하였다. 위의 내용을 종합해보면, 예비교사와 현직교사 모두 벡터를 기하학적 대상으로 인식하고 있는 경향이 강하며 이는 [문항 1]에서 예비교사와 현직교사 모두 벡터의 표현수단을 벡터와 일치하는 예로 생각하는 경향이 강한 것과 연결된다고 볼 수 있다. 또한, 현직교사의 KCT는 실생활과 관련된 구체적인 예를 사용한다는 것을 알 수 있었다.

영벡터에 대한 응답을 분석한 결과 크게 ‘크기가 0인 벡터’라는 고등학교 수준의 교과서 정의와 대학교 수준의 지식인 ‘덧셈에 대한 항등원’으로 분류하였다. 교과서에서도 벡터의 연산을 도입한 후 영벡터에 덧셈에 대한 항등원의 성질을 명시하고 ‘항등원’이라는 용어를 사용한 교과서도 있었지만 ‘항등원’이라는 용어를 사용하지 않은 교과서가 4종이나 되었기 때문에 일반적이지 않다고 판단하여 항등원으로 언급한 응답을 대학교 수준으로 분류하였다. 이를 기준으로 영벡터의 정의에 대한 상반의 응답을 분석한 결과 고등학교 수준의 응답이 예비교사의 65%, 현직교사의 66.94%로 가장 많았고, 그 중에서 방향에 대한 언급이 없는 응답이 예비교사의 33.75%, 현직교사의 50%로 가장 많았다. 벡터의 정의에 대한 응답과 마찬가지로 영벡터의 경우에도 ‘점, 크기가 0인 선분’ 등의 기하학적인 표현이 적지 않았다. 또한, 상반에서 영벡터의 정의를 덧셈에 대한 항등원으로 언급한 응답은 예비교사의 15%, 현직교사의 5.65%으로 현직교사보다 예비교사가 영벡터를 벡터의 연산과 함께 덧셈에 대한 항등원으로 지도하겠다는 것으로 해석할 수 있다. 이는 교수-학습 상황에서 적용되는 예비교사와 현직교사의 KCT

가 다르다는 것을 보여준다. 영벡터에 대한 하반의 응답은 벡터의 경우와 같이 풍속이 0인 것, 힘을 주지 않는 것 등의 실생활과 관련된 구체적인 예를 사용한 현직교사의 KCT를 확인할 수 있었다. 앞서 살펴보았듯이 영벡터의 방향에 대한 언급이 없는 응답이 많았기 때문에 예비교사와 현직교사 모두 영벡터의 방향에 대한 확신을 갖지 못하고 있다고 판단하여 영벡터의 방향에 대한 ‘기하와 벡터’ 9종 교과서의 분석한 결과 영벡터의 방향에 대한 다양한 해석이 있었다. 영벡터의 방향에 대해서 ‘방향을 생각하지 않는다.’가 5종, ‘방향이 없다.’와 ‘임의의 방향으로 본다.’가 각각 1종, 그리고 방향에 대한 언급이 아예 없는 교과서가 2종이었다. ‘기하와 벡터’ 9종 교과서를 살펴본 결과 교과서마다 영벡터의 방향에 대한 정의가 상이한 것이 영벡터의 방향에 대한 언급이 없는 예비교사와 현직교사의 응답이 무관하지 않다고 생각된다.

역벡터의 정의에 대한 응답을 분석한 결과 ‘방

향이 반대이다.’라는 고등학교 수준의 응답이 예비교사의 50%, 현직교사의 54.84%로 가장 많았고, ‘역원’이라는 대학교 수준의 지식으로 지도하겠다는 응답이 예비교사의 22.5%, 현직교사의 11.29%로 예비교사가 현직교사보다 역벡터를 벡터의 연산과 함께 덧셈에 대한 역원으로 지도하겠다는 것으로 해석할 수 있다.

[문항 2]에서 하반의 응답은 보다 쉽게 설명하기 위한 실생활의 예가 많았다는 것 이외에는 상반의 응답과 비슷하므로 상반의 응답만을 분석하였다. 영벡터와 역벡터에 대한 응답을 벡터의 표현양식을 기하학적, 대수적, 추상적 양식으로 분류한 Hillel(2000)의 양식을 기준으로 가상적 수준별 수업 중 상반의 응답 중에서 예비교사와 현직교사의 응답빈도에 대한 교차분석을 실시한 결과는 다음과 같다.

<표 IV-3>에서 보는 바와 같이, 영벡터와 역벡터의 정의에 대한 예비교사와 현직교사의 응답이 통계적으로 유의한 차이⁴⁾를 나타낸다. 현직교사가 예비교사보다 기하학적 양식으로 접

<표 IV-3> 영벡터, 영벡터 정의에 대한 교차분석 결과

영벡터의 정의에 대한 응답 분석				
	기하학적 양식	대수적, 추상적 양식	계	
예비교사 (%)	57 (77.0)	17 (23.0)	74 (100.0)	$\chi^2 = 5.460^*$ $df = 1$ $p < .05$
현직교사 (%)	90 (90.0)	10 (10.0)	100 (100.0)	
전체 (%)	147 (84.5)	27 (15.5)	174 (100.0)	
역벡터의 정의에 대한 응답 분석				
	기하학적 양식	대수적, 추상적 양식	계	
예비교사 (%)	51 (68.9)	23 (31.1)	74 (100.0)	$\chi^2 = 5.073^*$ $df = 1$ $p < .05$
현직교사 (%)	81 (83.5)	16 (16.5)	97 (100.0)	
전체 (%)	132 (77.2)	39 (22.8)	171 (100.0)	

* $p < .05$, *** $p < .001$

4) 유의확률: 영벡터 0.017* ($p < .05$), 역벡터 0.02* ($p < .05$)

근하고 있는 경향이 있으며 현직교사에 비해서 예비교사가 영벡터, 역벡터를 덧셈에 대한 항등원, 역원으로 지도하려는 경향이 강하다는 것을 알 수 있다.

이차곡선에서 타원의 방정식이 원에서의 일차 변환으로 나타낼 수 있다는 것을 보여줌으로써 ‘기하와 벡터’ 교과목에서 단원간의 연계성에 대한 예비교사와 현직교사의 SCK를 알아보고자 한 [문항 3]의 응답을 분석한 결과는 다음과 같다. 예비교사의 46.24%, 현직교사의 45.97%가 변환으로 표현하였고 변환에서 더 나아가 $\begin{pmatrix} 20 \\ 01 \end{pmatrix}$ 의 행렬로 표현한 응답은 예비교사 80명 중 11명(19.6%), 현직교사 124명 중 9명(9.3%)이다. 반면, 잘못 표현된 응답과 무응답의 비율은 예비교사의 53.75%, 현직교사의 54.03%인 것으로 보아 예비교사와 현직교사의 50% 이상이 원에서 타원으로의 변환을 연결 지어 생각하고 있지 않았다고 볼 수 있다.

3. 면담 조사 결과

설문지 분석 결과 [문항 1]에서 예비교사가 현직교사보다 행렬을 벡터와 일치하는 예라고 생각하는 CCK가 강하다는 차이가 있었고, [문항 2]에서 예비교사가 현직교사보다 영벡터, 역벡터를 기하학적 양식에서 나아가 연산구조를 생각한 벡터공간의 원소로 대수적, 추상적 양식으로 지도하겠다는 KCT가 있다는 것을 통계적으로 유의하게 확인할 수 있었다. 그러나 예비교사와 현직교사의 MKT 차이가 실제로 있는지 어떻게 얼마나 다른 것인지 조사하기 위해 설문지 응답을 토대로 9명의 면담 대상자를 선정하여 2010년 11월 서울 및 경기도에서 개별적으로 약 3시간 정도의 반구조화된 면담을 실시하였다. 면담 내용은 문항별 설문지 응답의 이유, 영벡터의 방향에 대한 질문, ‘기하와 벡터’ 교과목에서 이차곡선과 다른 단원과의 관련

성, 7차 개정교육과정에서 변환이 추가된 의미, 교사에게 벡터공간에 대한 지식의 필요성, 단원간의 연결성의 필요성, 벡터를 지도할 때의 어려움을 포함한 벡터 개념에 대한 교사의 MKT를 바탕으로 구성되었다. 면담을 실시한 결과 예비교사는 벡터에 대한 지식이 선형대수 쪽에 조금 더 가깝기 때문에 행렬과 함수를 벡터와 일치하는 예로 인식하고 있는 경우가 많았고, 현직교사는 상대적으로 그렇지 않았다는 것을 알 수 있었다. 면담 대상자인 예비교사 모두 벡터를 벡터공간의 원소라는 CCK를 가지고 [문항 1]에 응답하였다고 했고, 현직교사의 경우에는 면담을 진행하는 동안 벡터공간을 기억해내는 경우가 있었다. 현직교사의 경우 행렬이나 함수가 벡터의 예가 된다는 사실을 기억하는데 시간이 걸리거나 행렬이나 함수가 벡터로 느껴지지 않는다고 하였다.

연구자: 왜 교사는 벡터공간을 다 알고 있어야 할까요? 몰라도 될까요?

예비교사D: 알아야 해요. 모르면 안 되는데…….

연구자: 왜요?

예비교사D: 모르면 그게 무슨 선생님이에요.

연구자: 뭐가 문제가 될까요?

예비교사D: 음……. 더 알고 싶어 하는 애들을 위해서 그리고 뭔가 더 질문을 했을 때 모르면 그냥 느낌에 비추어서밖에 설명을 못할 것 같아요. 좀 이런 거 아니야 이런 식으로요. 근데 잘 알고 있으면 잘 알려줄 수 있으니깐

예비교사D는 교사는 무조건 많이 알아야한다고 생각하고 있었지만 과외지도 경험이 없기 때문에 그것이 어떻게 적용되는지에 대한 확신이 없었던 반면, 과외지도 경험이 가장 많은 예비교사 B는 대학교 수준의 지식이 교수학적 변환에 있어서 왜곡을 최소화하고 연결성 있게

지도 되도록 도와준다고 설명하고 있다. 즉, 수업 상황에서 학생들이 겪는 어려움에 대한 생각을 하고 있다는 것은 교사의 KCT에 대한 것으로 과외지도경험이 예비교사의 KCT를 풍부하게 해줬다는 것을 알 수 있었다.

연구자: 선생님께서 벡터의 정의를 벡터공간으로 써주셨잖아요. 그렇다면 교사는 그런 벡터 공간을 알아야할까요? 알면 뭐가 다를까요?

현직교사B: 알면요? 그니까 교사는 더 많이 알아야죠. 애들이 항상 질문을 할 때는 수학이 뭐지 궁금한 애들이 많아요. 수학이 뭐냐 그러면 제가 가르치는 해석적인 거나 대수적인 거나 기하적인 부분에서 항상 공리적인 사고를 갖고 있어야 된다고 생각하거든요.

연구자: 교사는요?

현직교사B: 네, 왜냐면 애들 수준에 따라서 어떤 애들 수준은 벡터를 이 정도로만 아까처럼만 해줘도 만족하는 반면에 어떤 애들은 이런 정도의 수준에서 만족을 못하고 예를 들어 문제를 갖고 와서 함수를 벡터로 해가지고 마치 이런 문제들이 있거든요.

예비교사와는 달리 현장에서 다수의 학생들을 지도해 본 경험이 비교적 많은 현직교사 B는 실제 교수-학습 상황에서 겪었던 경험을 토대로 수준이 높은 학생들의 질문을 받았을 때 당황하지 않고 해결해주기 위해서 교사는 공리적인 지식을 갖고 있어야한다고 설명하였다. 벡터공간이라는 대학교 수준의 지식이 가르치는 상황에서 필요가 없다고 생각하는 예비교사나 현직교사도 교사는 학생들보다 더 많은 지식을 갖고 있어야한다는 생각에는 동의하였다. 학생들의 질문이 교사의 지적욕구를 자극하고, 수준이 높은 학생들에게는 보다 높은 수준의 지식

을 전달해야 한다는 이유로 대학교 수준의 벡터 개념이 필요하다는 것이다.

가상의 수준별 교수-학습 상황을 가정한 [문항 2]에서 현직교사는 지도 경험을 통해서 수준별 교수-학습 상황을 충분히 알고 있었지만 예비교사는 지도 경험이 없었기 때문에 학생들의 수준이나 어떤 대답을 해야 하는지 생각하지 못했다. 즉, 예비교사의 벡터 개념에 대한 KCT를 알아보 고자 했지만 면담을 통해 확인한 결과 설문지의 응답은 예비교사가 현재 가지고 있는 CCK에 가까운 것이었다. 이는 영벡터, 역벡터의 정의에서도 나타나고 있는데 각각 ‘덧셈에 대한 항등원, 역원’이라는 대학교 수준의 지식으로 응답을 한 이유에 대해 물어본 결과 ‘가르쳐보지 않아서 잘 모르겠다.’고 설명하였다. 반면, 현직교사의 면담을 분석한 결과 상반 학생들은 벡터가 왜 필요한지 물어보기 때문에 원리나 실생활 얘기를 해 주고, 대학에 진학하여 수학을 배울 때 오개념이 생길 수 있기 때문에 벡터공간에 대한 공리적 접근을 해주지만, 하반 학생들은 단순한 기계적인 조작만으로 충분하기 때문에 화살표나 유향선분으로만 지도해도 충분하다는 구체적인 설명을 하였다. 즉, 예비교사보다 현직교사가 실생활의 예로 응답한 설문조사의 결과와 일치했으며 현직교사의 가르쳐 본 경험이 KCT를 풍부하게 해준다고 생각할 수 있다.

연구자: 그럼 이 자체가 벡터라고 가르치면 뭔가 문제점이 생길까요?

예비교사C: 아, 글썽요. 그건 잘 모르겠어요. 무슨 문제점이 생길지는 잘 모르겠는데 기분은 별로 안 좋아요.

(중략)

뭐랄까 그냥 지금 머리를 확 굴려서 떠오르는 건 애들의 생각의 틀을 딱 막아버릴 것 같아요. 이렇게 나타낼 수 없는 건 벡터로 생각하지 못할 것 같아요.

연구자: 선생님, 벡터의 본질에 뭐라고 생각하세요?

현직교사B: 너무 어렵네. 벡터의 본질이요?

(중략)

근데 벡터의 본질이 벡터 처음에는 보통 가르치게 되면 이렇게 화살표로 표현하게 되면 그게 벡터의 본질이 아닐까거든요. 왜냐면 제가 옛날에 수학에서 연수도 가고 대학에서 배웠던 거를 보면 아주 다양한 것들을 벡터라고 정의하고 있잖아요.

(중략)

‘이런 걸 만족하는 게 벡터공간이다’라고 하면 그래서 이제 함수를 막 가져와요. 야 이걸 이렇게 정의를 하고 이게 만족하겠나? 애들이 막 확인해 봐요. 그럼 만족하면 이것도 벡터야 그러면 이제 애들이 생각을 하겠죠. 내가 생각하는 벡터는 분명히 방향이 있는데 왜 이걸 벡터라고 하지? 그러면서 애들이 스스로 생각을 하겠죠. 이런 거를 만족하는 놈을 벡터라고 정의했을 때 다른 것들도 다 벡터가 될 수 있다.

연구자: 선생님, 영벡터의 방향에 대해서 어떻게 생각하고 계세요?

현직교사A: 교과서에서처럼 ‘방향을 생각하지 않는다’라는 건 설명을 안했어요. 그냥 움직이지 않는다고만 했어요.

연구자: ‘방향을 생각하지 않는다’라는 게 무슨 뜻일까요?

현직교사A: 그냥 가능성을 열어놨다고 생각하면 될 것 같은데……. 어디로든 갈 수 있는 거잖아요. 그래서 방향이 없다가보다 방향이 너무 많다

(중략)

방향을 생각하지 않는다는 것은 고려할 필요가 없다는 거 아닐까요? 움직이지 않았으니까……. 임의의 방향으로 본다는 건 웬지 가야할 것 같은데요. 어느 방향으로든 다 된다면 말이 다르다고 어 다르다고 가능성이 있는 거랑 어디로든 갈 수 있다는 거랑 가능성을 열어놓은 거는 생각하지 않는다는 거니깐 그런 의미로 생각을 한거죠. 아예 방향이 없는 게 아니라

연구자: 선생님, 영벡터의 방향에 대해서 어떻게 생각하세요?

현직교사B: 근데 우리가 보통 애들한테 얘기할

때 순열, 조합 같은 걸 하면 팩토리얼 정의를 하잖아요. 0!은 얼마나 하면 1이라고 하잖아요. 우리가 0!은 뭐냐라고 할 때 그거는 그냥 1로 하면 여러 가지 계산할 때 접근하기 편하기 때문에 좋다 뭐 이런 식으로 설명을 하거든요. 그런 관점으로 얘기를 해도……. 뭐 0이란 것의 특수성? 그렇게 얘길 해도…….

벡터의 표현수단으로 벡터를 지도하면 어떠한지에 대한 질문에 예비교사 C와 현직교사 B는 학생들의 생각의 틀을 막아 기하학적 대상으로 나타낼 수 없는 것은 벡터로 생각하지 못하여 벡터 개념을 한정지을 수 있다는 우려를 보였다. 또한, 영벡터의 방향에 대한 면담 조사 결과 현직교사 A는 임의의 방향으로 본다는 것은 어느 방향으로든 다 된다는 의미를 담고 있어서 방향이 있어야 할 것 같지만 ‘방향을 생각하지 않는다.’는 것은 방향에 대한 가능성을 담고 있어서 ‘방향이 없다’와 ‘임의의 방향이다’를 모두 포괄할 수 있기 때문에 좋다고 설명하였다. 한편, 공리적인 관점을 갖고 있는 현직교사 B는 영벡터를 0이란 것의 특수성으로 설명하겠다고 하였다. 현직교사와 예비교사 모두 영벡터의 방향에 대해서 쉽게 대답하지 못하였을 뿐만 아니라 본인이 생각한 응답에 대해서도 확신을 갖지 못하고 있었다.

연구자: 이게 이차곡선이잖아요. 이차곡선을 가르치신다. 만약에 상상을 하면 이런 식으로 도입하시겠어요?

현직교사B: 지금 만약에 벡터에서 변환이 있었잖아요. 그 다음에 이차곡선이 있었잖아요? 그럼 가르치겠죠. 이렇게 할 수 있다면……. 근데 그 전에는 이런 거 없이 바로 이차곡선이 나왔기 때문에 이거를 ‘원이 타원이 되는 과정에서 변환이다’라는 개념을 가

르치겠다고는 할 수 없었는데 지금은 나오니깐 가르치겠죠.

잘못 표현된 응답이나 무응답이 가장 많았던 [문항 3]에 대한 면담 분석 결과 아직 ‘기하와 벡터’ 교과서를 보지 못했기 때문에 변환으로 생각하지 못했다는 현직교사B는 면담을 하면서 변환을 행렬로 표현하는 것까지 생각하고 일차 변환이 추가됐으므로 이차곡선을 변환으로 지도하겠다고 하였다. 면담 결과 5명의 현직교사 중 4명, 4명의 예비교사 중 2명이 변환과 이차곡선의 연계가 필요하다고 하였다. 또한, 이차곡선을 변환을 통해서 도입하는 것은 정의를 다루는데 무리가 있으나 변환을 이차곡선에서 다시 다루고 활용하는 것은 그래프나 도형을 보는 안목이 길러지기 때문에 좋은 방법이라고 생각한다는 의견과 이전에 배웠던 원과 행렬을 이용해서 이차곡선을 표현해내면 행렬의 의미를 전달할 수 있을 것이라는 예비교사의 의견도 있었다. 면담 결과 1명의 현직교사를 제외하고 ‘기하와 벡터’ 교과목을 지도해본 경험이 없어서 ‘기하와 벡터’ 교과목의 단원 구성을 알고 있지 않았고, 예비교사 역시 마찬가지였기 때문에 잘못 표현된 응답과 무응답의 비율이 높았

던 것으로 생각할 수 있다. 즉, 예비교사와 현직교사 모두 ‘기하와 벡터’의 단원 중 ‘변환’에 대한 수평내용지식(Horizon content knowledge)이 없었기 때문에 SCK로 연결되지 못했고, 이것은 나아가 내용과 교육과정에 대한 지식(knowledge of content and curriculum)에 영향을 미칠 수 있다고 볼 수 있다. 면담 조사 결과를 정리하면 <표 IV-4>와 같다.

V. 결론 및 논의

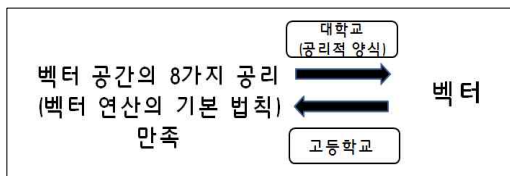
1. 결론

본 연구의 목적은 벡터 개념에 대해 예비교사와 현직교사가 어떻게 이해하고 있는가를 밝히는 것으로 연구결과를 요약하면 다음과 같다. 첫째, 예비교사와 현직교사 모두 벡터 자체가 되는 것보다는 벡터의 표현수단을 벡터로 보는 경향이 있었다. 또한 예비교사는 상대적으로 벡터를 벡터공간의 원소로 보는 대학교 수준의 CCK로 응답했던 반면, 현직교사는 가르치는 상황에 필요한 SCK, KCT로 응답하고 있었다. 따라서 예비교사의 CCK가 가르치는 상황에서 필요한

<표 IV-4> 면담 조사 결과

문항	예비교사	현직교사
1	B: 대학교 수준의 지식이 수학적 연결성에 도움이 된다고 응답함 D: 교사는 무조건 많이 알아야 한다고 응답함	B: 지도 경험을 토대로 공리적인 지식이 필요하다고 응답함
2	C: 벡터의 표현수단으로 벡터를 지도하면 학생들의 생각을 틀을 막아버려 사고가 한정될 우려가 있다고 응답함	A: 영벡터의 방향은 ‘방향을 생각하지 않는다.’ 라고 지도하겠다고 응답함 B: 화살표는 벡터의 본질이 아니므로 학생들에게 벡터공간에 대해서 생각해볼 기회를 제공하고 있다고 응답함
3	B: 이차곡선의 변환으로 행렬의 의미가 전달될 수 있다고 응답함	B: ‘기하와 벡터’에서 일차변환이 추가 되었으므로 이차곡선을 변환으로 지도할 수 있다고 응답함

지식인 SCK이나 KCT으로 연결되고 적용되기 위해서 대학과정에서 이를 생각해볼 기회를 가지는 것이 중요하다. 그렇다면 교사의 CCK가 왜 중요한지, 대학교 수준의 지식을 왜 알고 있어야 하는지에 대해 생각해볼 필요가 있다. 고등학교 ‘기하와 벡터’교과서를 보면 벡터의 정의를 하고 벡터의 연산, 벡터의 실수 배 순서로 벡터의 성질을 기술하고 있다. 그러나 대학교에서 배우는 선형대수에서는 벡터를 공리 8개를 만족시키는 벡터공간의 원소로 정의한다. 고등학교에서는 벡터라는 것을 먼저 정의하고 벡터의 성질을 나타낸 것과는 달리 대학교에서는 고등학교 교과서에 있는 성질을 만족시키는 것들이 벡터공간을 이루고 그런 벡터공간의 원소가 벡터라고 정의한다. 즉, 고등학교와 대학교의 벡터 개념은 사고의 방향성이 다른 것이다.



[그림 V-1] 고등학교와 대학교 벡터 개념의 방향성.

[그림 V-1]에서와 같이 고등학교와 대학교에서 벡터를 다루는 방향은 반대라고 할 수 있다. 따라서 교사의 CCK가 고등학교 교과서에 나온 대로 벡터를 정의하고 그에 따른 성질을 아는 것에서 끝난다면 벡터의 성질이 어디서 기인되는지 알 수 없을 뿐만 아니라 유향선분이외의 다양한 것들이 벡터의 예가 될 수 있다는 사실을 알 수 없게 된다. 교수-학습 현장에서는 교과서에서 차원에서 벡터의 개념이 끝나지만 교사는 여기서 더 나아가 벡터 연산의 기본 법칙을 만족하는 벡터공간의 원소로 벡터를 이해하고 있어야 벡터의 표현수단으로 벡터를 정의하

지 않고 벡터의 다양한 예를 상상할 수 있게 하여 벡터에 대한 학생들의 확장된 사고를 이끌어낼 수 있다.

둘째, 벡터, 영벡터, 역벡터의 정의에 대한 이해를 살펴본 결과 예비교사가 현직교사보다 영벡터, 역벡터를 항등원, 역원으로 접근하고 있다는 통계적으로 유의미한 결과로 인해서 예비교사가 현직교사보다 벡터 개념에 대해서 대수적, 추상적 양식으로 응답하였다고 해석할 수 있다. 설문지 조사를 통해서 벡터 개념에 대한 SCK나 KCT를 알아보려고 했던 문항이 면담을 진행하면서 예비교사의 경우 지도 경험이 부족하기 때문에 교수-학습 상황의 예측이 어려웠던 관계로 SCK나 KCT가 아닌 CCK로 응답했다는 사실을 알게 되었다. 즉, 예비교사의 CCK는 대학교 수준의 지식으로 풍부하지만 가르치는 상황에 사용되는 지식인 SCK, KCT가 형성될 기회는 없었다고 볼 수 있다. 반대로 현직교사는 실제 교수-학습 현장에서 얻은 SCK, KCT를 바탕으로 설문지 조사에 응답했기 때문에 나름대로의 SCK나 KCT가 형성되어 있지만 예비교사에 비해서 대학교 수준의 CCK로 응답하지 않았다. 면담을 통해서 예비교사와 현직교사 모두 대학교 수준의 지식을 고등학생에게 적용하는 것이 무리라고 생각하고 있었으며 대학수학을 배우고 나서도 본인이 고등학교 때 배운 지식으로 학생들을 지도하겠다고 응답하였기 때문에 예비교사의 경우 CCK가 SCK, KCT로 연결되지 못하고 있으며 현직교사의 경우 연수를 통해서 CCK에 대한 필요성을 많이 느꼈다는 응답으로 미루어 현장에서 CCK가 자극될 기회가 없음을 알 수 있었다.

또한, 고등학교 교과서에 다양하게 나타났던 영벡터의 방향에 대해서는 벡터의 정의를 ‘크기와 방향을 갖는 양’이라고 했으므로 영벡터의 방향에 대해서도 언급을 해줘야한다고 생각

한다. 방향에 대한 여러 가지 가능성을 열어놓은 표현이기도 하고 0의 특수성을 적용시킬 수 있기 때문에 영벡터의 방향에 대해서는 ‘방향을 생각하지 않는다.’로 표현하는 것이 좋다고 생각한다.

셋째, ‘기하와 벡터’ 교과목에서 단원의 연계성에 대한 예비교사와 현직교사의 MKT는 어떠한지에 대한 연구결과는 다음과 같다. 예비교사와 현직교사 모두 ‘기하와 벡터’ 교과목의 단원 구성에 대한 사전 지식과 지도 경험이 거의 없기 때문에 연계성에 대한 생각을 하지 못하고 있다는 것을 알 수 있었다. 이것은 ‘일차변환’이 ‘기하와 벡터’ 교과목에서 어떤 의미를 갖고 있는지 아는 수평내용지식(Horizon content knowledge)이 부족해서 실제 교수-학습 상황에서 ‘일차변환’을 가르치는데 필요한 전문화된 수학적 지식인 SCK로 발전하지 못하고 있음을 의미한다. 하지만 면담 조사 결과 ‘일차변환’이 ‘기하와 벡터’ 교과목에서 단원과 단원을 이어주는 연결고리가 될 수 있다는 응답을 통해서 수평내용지식(Horizon content knowledge)은 내용과 교육과정에 대한 지식(knowledge of content and curriculum)으로까지 확장될 수 있다는 것을 알 수 있었다.

연구결과로 논의된 벡터 개념에 대한 CCK, SCK, KCT, 수평내용지식(Horizon content knowledge)은 다음과 같다.

CCK: 벡터를 벡터 공간의 원소로 이해하고 있고, 벡터의 정의를 표현수단으로 이해하고 있지 않는 지식

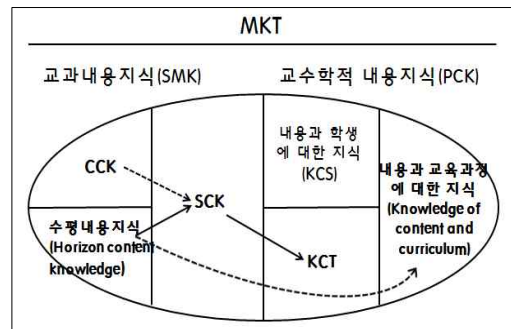
SCK: 변환에 대한 수학적 이해를 하여 가르치는 상황에서 왜, 언제, 어떻게 사용되는지 아는 지식

KCT: 학생들이 벡터, 영벡터, 역벡터에 대해 어려워할 때 친밀한 예나 비유를 통해서 어떻게 대답할지 아는 지식

수평내용지식(Horizon content knowledge): ‘일차변환’이 ‘기하와 벡터’ 교과목에서 어떤 관련성

이 있는지를 아는 지식

논의된 벡터 개념에 대한 MKT를 바탕으로 설문지 조사와 면담 분석을 종합하여 Ball et al., (2008)의 MKT하위 영역간의 관련성을 도식화하면 다음과 같다. 점선은 관련이 있을 수 있다는 가능성을 의미하며, 실선은 발견한 관련성을 의미한다.



[그림 V-2] Ball et al.,(2008)의 MKT 하위 영역간의 관련성.

[그림 V-2]에서 보는 바와 같이, CCK가 SCK에 영향을 미치고 있는지에 대해서는 확신할 수 없었다. 하지만 ‘기하와 벡터’ 교과내용 구성을 알지 못해서 어떻게 가르칠지 생각해보지 않았다는 면담 내용결과로 수평내용지식(Horizon content knowledge)이 내용과 교육과정에 대한 지식(Knowledge of content and curriculum)에 관련이 있을 수 있다는 가능성이 발견됐다. 또한 [문항 1]의 설문지 분석결과와 면담 분석 결과 예비교사의 CCK가 대학교 수준에 가깝지만 지도 경험 부족으로 인해서 교수-학습 상황을 상상할 수 없기 때문에 그것이 KCT와 관련되지 않았다. 이로부터 MKT 하위 영역이 가까울수록 관련성이 클 수 있다는 사실을 알 수 있었다.

2. 논의

벡터 개념과 ‘기하와 벡터’ 교과목의 연계성

에 대한 예비교사와 현직교사의 MKT를 살펴본 결과 예비교사는 CCK가 대학교 수준으로 높지만 가르치는 상황에 사용되는 지식인 SCK, KCT는 생각해볼 기회가 없었던 반면, 현직교사는 SCK, KCT는 풍부하지만 CCK에서는 예비교사와 차이가 있었다. 또한 예비교사와 현직교사 모두 벡터 개념에 대한 대학수학을 배웠지만 본인이 고등학교 때 배운 지식으로 학생들을 지도하겠다는 면담 결과를 통해서 단절을 확인할 수 있었는데, 이런 단절이 일어나지 않기 위해서는 예비교사의 경우 사범대학 교육과정에서 CCK를 SCK, KCT로 연결할 수 있는 기회를 만들어야 하며, 현직교사의 경우 연수 프로그램이나 지도서를 통해서 가르치는 상황에 적용할 수 있는 CCK에 대한 자극을 받는 기회를 만들어야 한다. 특히 현직교사가 받는 연수 프로그램은 단순히 대학교 수준의 CCK를 전달하는 형태가 아니라 실제 교수-학습 상황에 연결시킬 수 있는 수업 모형을 제공하는 등의 구체적이고 실용적인 수업과 자료가 제공되어야 한다.

본 연구는 MKT 하위 영역 중에서 CCK, SCK, KCT를 중점적으로 살펴보았지만 수평내용지식(Horizon content knowledge)과 내용과 교육과정에 대한 지식(Knowledge of content and curriculum)에 대해서는 개념이 아직 모호하다. ‘기하와 벡터’ 교과목에서 단원의 연계성에 대한 예비교사와 현직교사의 MKT를 알아보려는 연구문제를 해결하면서 이 두 가지 지식이 가르치는 상황에 매우 중요한 역할을 한다는 것을 알았다. 따라서 수평내용지식(Horizon content knowledge)이 SMK인지 PCK인지 그리고 내용과 교육과정에 대한 지식(Knowledge of content and curriculum)과는 어떻게 다른지 알아볼 필요가 있다. 또한 벡터 개념에 대해 대학교 수학의 CCK를 가르치는 상황에 필요한 SCK나 KCT로 연결할 수 있는 실제적인 수업 모형을 마련하는 연구가

이루어질 필요가 있다. 본 연구는 현재 예비교사와 현직교사가 가진 MKT를 알아보는 것에 그쳤으므로 더 나아가 어떻게 하면 교과목의 학문적인 세계와 가르치는 실제적 세계를 연결하는 PCK를 발전시킬 수 있는가에 대한 구체적인 연구가 필요하다.

참고문헌

- 고아라(2010). **벡터학습과정에서 고등학생들에게 나타나는 오류 유형분석**, 순천대학교 대학원 석사학위 논문
- 김용남(1999). **고등학교 수학에서 벡터도입에 관한 연구**, 단국대학교 대학원 석사학위 논문
- 김응태·박승안(2006). **선형대수학** (제 4판). 서울: 경문사
- 박현미(2002). **7차 교육과정에서의 고등학교 수학에서 벡터의 효율적인 교수·학습 방법**, 아주대학교 대학원 석사학위 논문
- 이윤수(2009). **벡터 개념의 지도에 관한 연구**, 서울대학교 대학원 석사학위 논문
- 이지연·홍갑주(2008). 교과지식으로서의 유클리드 기하와 벡터기하의 연결성, **학교수학** 10(4), 573-581
- 최혜진(1992). **벡터의 지도에 관한 연구**, 경희대학교 대학원 석사학위 논문
- 허은숙(2005). **고등학교에서의 선형대수 개념 지도에 관한 연구: 수학적 연결을 중심으로**, 서울대학교 대학원 석사학위 논문
- Ball, D. L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching : What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Dorier, J-L. (1990). Continuous analysis of one year of science students' work, in linear

- algebra, in first year of French university. *Proceeding of the 14th Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Oaxtepec, Mexico, II, 35-42.
- Dorier, J-L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces, *Linear algebra and its applications*, 27(5), 141-160.
- Dorier, J-L. (2000). Use of History in a Research Work on the Teaching of Linear Algebra. In Katz, V. J.(Ed), *Using History to Teach Mathematics*, MAA, (pp. 99-110).
- Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21(6), 521-544.
- Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high-school students basic notions in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 21(3), 387-392.
- Hillel, J. & Sierpiska, A.(1994), On one persistent mistake in linear algebra, In *Proceedings of the 18th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Lisbon, 2, 65-72.
- Hillel, J. (2000), Modes of description and the problem of representation in linear algebra, In J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, *Dordrecht: Kluwer Academic Publishers*, 191-207.
- Klein, F. (1968). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic · Algebra · Analysis*. NY: Dover Publications.
- Leinhardt, G., & Smith, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of Education Psychology*, 77(3), 247-271.
- Maracci, M. (2006). On students' conceptions in vector space theory. *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4: 129-136. Prague: PME.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching, *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Sierpiska, A., Hillel, J & Dreyfus, T. (1998). *Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of vectors*, Preprint, available from the authors.
- Sierpiska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra, In J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 209-246.
- Stewart, S. (2008). *Understanding linear algebra concepts through the embodied symbolic and formal worlds of mathematical thinking*. Unpublished Doctoral Thesis, Auckland University.

Pre-service and In-service Teachers' MKT about the Concept of Vector

Yoon, Hyun Kyoung (Seoul National University)

Kwon, Oh Nam (Seoul National University)

The purpose of the study was to investigate the mathematical knowledge for teaching (MKT) of pre-service and in-service mathematics teachers on the concept of vector. 80 pre-service and 124 in-service mathematics teachers were asked to perform three questions based on MKT's subdomain. The results show that pre-service teachers have stronger common content knowledge(CCK). On

the other hand, in-service teachers have stronger specialized content knowledge(SCK), knowledge of content and teaching(KCT) compared to those of pre-service teachers. The paper proposes CCK, SCK and KCT about the concept of vector and discusses the relationships between subdomains of MKT.

* key words : the concept of vector(벡터 개념), Mathematical Knowledge for Teaching(MKT, 가르치기 위한 수학적 지식), pre-service teacher(예비교사), in-service teacher(현직교사)

논문접수 : 2011. 10. 27

논문수정 : 2011. 11. 22

심사완료 : 2011. 12. 9