

# 모드법에 의한 클램프 조건 사각평판의 음향방사특성 예측모델

## A Numerical Model of an Edge-clamped Rectangular Plate Based on a Mode Method to Predict Acoustic Radiation Characteristics

유 지 우\*  
Ji Woo Yoo

(2011년 2월 16일 접수 ; 2011년 3월 14일 심사완료)

**Key Words** : Radiation Efficiency(방사효율), Radiation Power(방사파워), Clamped Condition(클램프 조건) Rectangular Plate(사각평판), Mode Method(모드법)

### ABSTRACT

A numerical model based on a mode method coupling beams and a rectangular plate is proposed to estimate radiation characteristics of an edge-clamped rectangular plate. The radiation efficiency and radiation power in the audio frequency range including the critical frequency can be predicted. The proposed model is rather simple and straightforward and gives reliable results comparing to the previous studies. The estimated radiation characteristics are compared to those of the pinned condition plates and also to those based on the formulae proposed by Maidanik. The radiation efficiency of the clamped plate seems a little higher than that of the pinned plate in the frequency range of corner and edge modes. It is explicitly shown that the power as well as efficiency at high frequencies is not influenced by these edge boundary conditions.

### 1. 서 론

구조물의 진동에 의해 공기 중으로 방사되는 음향특성은 종종 가장 중요한 소음진동 문제 중의 하나이다. 자동차의 대시 패널은 대표적인 예인데, 많은 진동모드가 발생하고 경계조건의 영향을 크게 받기 때문에 대부분의 경우 정확히 예측하기 어렵다. 따라서, 사각평판과 같은 단순 구조물에 대한 연구가 주로 이루어졌으며, 이로부터 특징적인 물리적 현상-주로 방사효율과 방사파워-이 고찰되었다.

이 연구에서는 특히 모서리가 클램프 조건(clamped boundary condition)인 평판에 대해 방사특성을 검토하고자 하였으며, 기존 연구에 비해 비교적 단순

하고 직관적인 수치해석모델을 제안하였다.

사각평판이 일반적인 경계조건(general boundary condition)을 가지는 경우에 대해 방사효율과 방사파워를 연구한 기존 사례는 Berry의 연구가 대표적이다<sup>(1)</sup>. 그는 다항식 함수(polynomial function)를 사용하였으며, 특히 질량이 없는 병진방향과 회전방향 경계부위강성(edge stiffness)을 도입함으로써, 일반적인 경계조건을 표현하려고 하였다. 임계 주파수 아래의 모드밀도가 낮은 주파수 대역에 대해 검토하여, 저주파 모드의 음향방사효율은 자유경계 조건(free condition)과 슬라이딩 조건(guided or sliding condition)에 대해 거의 유사하지만, 고주파 모드에서는 슬라이딩 조건에서 방사효율이 커짐을 확인하였다. 또한, 자유경계 조건이나 슬라이딩 조건에서 강제모드가 저주파대역의 소음 방사에 지배적인 역할을 하는 것을 규명하였다. 그의 연구는 여러 가지 경계조건에 대해 표현이 가능한 수식을 찾아내기는

\* 교신저자; 정회원, 현대기아자동차 차량해석팀  
E-mail : j.w.yoo@hyundai.com  
Tel : (02)3464-7676

하였으나, 경계부위 강성값에 따른 응답의 수렴성이 검토되지 않았고, 이 연구에서 보여지듯이 고주파로 갈수록 결과가 정확하지 않다.

Maidanik은 임계 주파수보다 충분히 낮은 주파수에서, 크기가 큰 평판에 대한 방사저항(radiation resistance)을 검토하였는데, 단순지지 조건에 비해서, 근접장에 영향을 주는 클램프 조건에서 방사저항이 두 배가 된다고 하였다<sup>(2)</sup>. 한편 Leppington은 Maidanik이 구조파장과 음파파장이 일치하는 경우 방사저항을 과대평가했다는 것을 확인하였다<sup>(3)</sup>. 사실, 앞의 두 연구는 모드상호간 연성(cross-modal coupling)의 기여를 고려하지 않은 것으로, 결과는 오차를 포함하고 있다.

Lomas 등은 평판 모서리에 상하방향 거동을 없애고 질량없는 회전강성을 도입함으로써, 평판 모서리의 회전자유도에 대한 탄성영향도를 검토하였다<sup>(4)</sup>. 이 연구는 저주파에서는 경계조건의 영향이 크지만, 높은 주파수 대역에서는, 모서리의 회전강성이 방사효율에 최소한의 영향만을 주고, 따라서 회전강성의 크기를 변경함으로써 구현이 가능한 단순지지조건이나 클램프조건에서 거의 유사한 방사효율을 보이는 것을 보였다. 연구발표 당시의 컴퓨터의 성능을 고려할 때 임계 주파수에 가까운 높은 주파수까지의 계산이 어려워, 상대적으로 낮은 주파수 대역에서의 검토만이 이루어졌다. 이 논문에서는 임계주파수를 포함하는 주파수 대역에서 방사효율을 검토함으로써, 그의 연구결과를 가시적으로 재확인 하였다.

Snyder와 Tanaka는 저주파에서 음향방사파위를 계산함에 있어, 모드상호간 연성에 의한 기여도를 고려하였다<sup>(5)</sup>. 주어진 방향에 대해 모드번호가 둘 다 홀수이거나 둘 다 짝수인 특정한 경우에만 모드연성항이 0이 아니며, 모드연성항은 방사파위에 영향이 큰 것을 확인하였다. 이 논문에서는 단순지지 조건의 평판에 대해서, 특정 가진점에 대한 응답을 계산함에 있어 모든 모드연성항을 고려한 경우와 모든 가진점의 평균을 취하므로써 모드연성항을 배제한 결과와 비교하였다.

Xie 등은 점가진 시, 직사각형 평판의 가로세로비(aspect ratio, AR)가 큰 스트립을 포함하여, 평판에 대한 평균 방사 효율을 연구하였다. 경계조건은 단순지지 조건으로 국한하였으며, 모드기법을 사용하여, 원거리음장에 대해 검토하였다. 가능한 모든

가진점에 대해 평균을 취함으로써, 모드연성항의 영향을 배제하고, 음향방사특성을 분석하였다<sup>(6)</sup>.

유지우는 사각평판이 슬라이딩 조건인 경우에 대해, 모든 가진점에 대한 평균값을 취하므로써, 연성항을 고려한 방사특성을 검토하였다. 소위 피스톤 모드인 강제모드가 중요한 것을 재확인 하였으며, 슬라이딩 조건의 경우 구석모드와 모서리 모드의 하한이 분명하지 않다고 하였다<sup>(7)</sup>. 또한 결과를 단순지지 조건의 그것과 비교하여, 임계주파수 아래 대역에서 단순지지 조건의 방사효율과 방사파위가 모두 더 크게 나타나는 것을 확인하였다<sup>(8)</sup>.

이 논문에서는 특히 기존에 연구가 부족하였던 클램프 조건의 구현을 위해, 무거운 네개의 보로 둘러싸인 얇은 평판의 수치해석 모드 모델을 제안하였으며, 그 결과를 단순지지 조건의 기존 모델과 비교하므로 기존에 제한적으로 검토되었던 음향방사특성을 고찰하였다.

## 2. 사각 평판의 클램프 조건 구현을 위한 모드기반 이론

이 연구는 사각평판, 특히 네 모서리가 클램프 조건인 평판에서의 음향방사 특성을 검토하는 것이 목적이다. Lomas 등은 평판의 상하방향거동이 없는 상태에서 회전강성을 도입하여, 클램프 조건을 구현하고자 하였다<sup>(4)</sup>. 이 논문에서는 이와는 다르게, 얇은 판의 경계에 슬라이딩 조건을 적용한 후, 그 모서리에 보 (beam)를 연결하고, 이 보의 무게를 무한히 크게 하여, 등가의 클램프 조건을 구현하는 방법을 제안한다.

이를 위해 모드기법(mode-based method)을 이용하여 얇은 사각평판과 네개의 보로 구성된 구조물

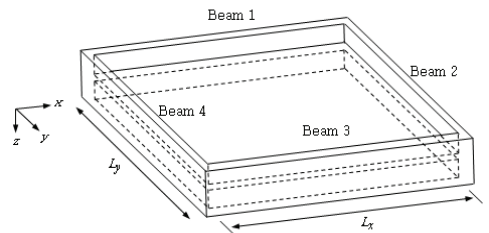


Fig. 1 The coupled structure consisting of four beams and a rectangular plate

(Fig. 1)의 수학적 모델을 제안하고<sup>(9)</sup>, 그 결과를 귀납적으로 증명하고자 한다.

이 구조물의 거동은 모드형(mode shape)으로 표현이 가능하고, 에너지 관계에 의한 라그랑지 운동방정식(Lagrange's equation of motion)을 유도할 수 있다. 판과 보가 결합된 구조물 자체의 모드를 구할 필요가 없으며, 비연성상태의 각 구조물 모드 행렬로부터 결합구조물의 거동을 다음과 같은 절차에 의해 구할 수 있다.

계산의 간략화를 위하여, 보의 비틀림 강성은 무한히 크다고 가정(즉, 사각평판의 모든 변이 슬라이딩 조건임)한다. 이 조건에서 평판의 응답은 변수분리해(separable solution)에 의해 구해질 수 있다. 즉, 평판의 2개 방향(x, y방향)의 모드형 함수는 평판 모서리에 있는 보의 모드형 함수(mode shape function)에 해당하며, 보의 끝단도 슬라이딩 조건이다.

### 2.1 일반좌표계의 해

네개의 보가 결합된 평판의 굽힘 변위(flexural displacement)는 경계조건을 만족하는 함수의 조합으로 쓸 수 있다. 이에 해당하는 결합이전인 비연성 평판거동은 다음과 같다.

$$w_p(x, y, t) = \sum_m \sum_n \psi_{mn}(x, y) q_{mn}(t) \quad (1)$$

여기서  $\psi_{mn}$ 는 비연성 평판의 모드형이며,  $q_{mn}$ 는 일반좌표(generalised coordinate)이다. 보의 거동은 평판의 모서리 거동과 일치하므로 (Fig. 1 참조)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w_{b1}(x, t) &= w_p(x, 0, t); w_{b3}(x, t) = w_p(x, L_y, t) \\ w_{b4}(y, t) &= w_p(0, y, t); w_{b2}(y, t) = w_p(L_x, y, t) \end{aligned} \quad (2)$$

행렬형태로 식 (1)을 다시 쓰면

$$w_p(x, y, t) = \Psi \mathbf{q} \quad (3)$$

평판의 모드형은 다음과 같이 분리하여 쓸 수 있다.

$$\psi_{mn}(x, y) = \phi_m(x)\phi_n(y) \quad (4)$$

슬라이딩 경계조건에 의해서,

$$\begin{aligned} \phi_m(x) &= \cos k_x x, k_x = m\pi/L_x \\ \phi_n(y) &= \cos k_y y, k_y = n\pi/L_y \end{aligned} \quad (5)$$

평판의 운동에너지는 일반좌표  $q_{mn}$ 으로 다음과 같이 표현된다.

$$T_p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_p \dot{\mathbf{q}} \quad (6)$$

여기서

$$M_{p,mrns} = m_p^n \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi_{mn} \psi_{rs} dx dy \quad (7)$$

$\psi_{mn}$ 는 비연성 평판  $\mathbf{M}_p$ 의 모드형이므로, 이 모드질량(modal mass)은 비연성 평판의 모드질량과 동일하다. 즉,

$$M_{p,mrns} = \begin{cases} M_{mn}^p & \text{for } m=r, n=s \\ 0 & \text{for otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

평판과 마찬가지로 보1 (beam 1,  $y=0$ )에 대한 운동에너지  $T_{b1}$ 은

$$T_{b1} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{b1} \dot{\mathbf{q}} \quad (9)$$

$$M_{b1,mrns} = M_m^{b1} \delta_{nr} \quad (10)$$

여기서  $\delta_{nr}$ 는 Kronecker delta이다. 다른 보에 대해서도 같은 방식으로 쓸 수 있고, 결국 연성된 시스템의 총 운동에너지(total kinetic energy)는

$$T = T_p + T_{b1} + T_{b2} + T_{b3} + T_{b4} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (11)$$

여기서 일반화된 질량 행렬(generalised mass matrix)  $\mathbf{M}$ 은

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_p + \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{b2} + \mathbf{M}_{b3} + \mathbf{M}_{b4} \quad (12)$$

$\mathbf{M}_p, \mathbf{M}_{b1}, \mathbf{M}_{b2}, \mathbf{M}_{b3}, \mathbf{M}_{b4}$ 은 각각 식 (8)과 (10) 같은 방식으로 주어진다. 여기서,  $\mathbf{M}_p$ 은 대각행렬인 반면,  $\mathbf{M}_{bi}$ 은 그렇지 않으므로, 결국 평판 모드는 일반화된 질량행렬에 의해 연성되어 있음을 알

수 있다.

마찬가지로, 일반화된 강성 행렬도 연성구조물의 변형 에너지로부터 구해진다. 연성된 시스템의 변형 에너지는

$$U = U_p + U_{b1} + U_{b2} + U_{b3} + U_{b4} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (13)$$

여기서  $\mathbf{K}$ 는 일반화된 강성행렬이며

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_{b1} + \mathbf{K}_{b2} + \mathbf{K}_{b3} + \mathbf{K}_{b4} \quad (14)$$

각 행렬은 질량행렬을 구하는 것과 유사하게 구할 수 있다.

외부가진력을 나타내는 일반좌표계의 힘벡터(generalised force vector)는

$$\mathbf{F} = [F_{11} \ F_{12} \ \dots \ F_{1N} \ F_{21} \ F_{22} \ \dots \ F_{2N} \ \dots \ F_{M1} \ \dots \ F_{MN}]^T \quad (15)$$

특히 점하중에 대해 다음과 같이 주어지며,

$$F_{mn} = F_0 \phi_m(x_e) \phi_n(y_e) \quad (16)$$

여기서  $F_0$ 는 위치  $x = x_e$  와  $y = y_e$  에 가해지는 점하중의 크기이다.

정상상태의 조화운동(steady state harmonic motion)을 가정하고, 구조감쇠를 시스템에 적용하면, 일반좌표는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \tilde{\mathbf{F}} \quad (17)$$

연성된 구조물의 응답은 식 (17)과 (3)으로 부터 구해진다.

모서리의 경계조건이 클램프 조건인 평판을 구현하기 위해, 이 절에서 제안된 수치해석 모델에서 보의 강성을 배제하고, 무한히 무거운 보를 적용한다. 클램프 조건의 구현을 위한 이러한 가정이 타당함은, 다음 절에서 같이 수치해석결과로부터 귀납적으로 증명될 수 있다.

## 2.2 클램프 조건인 평판 거동의 수칙해석

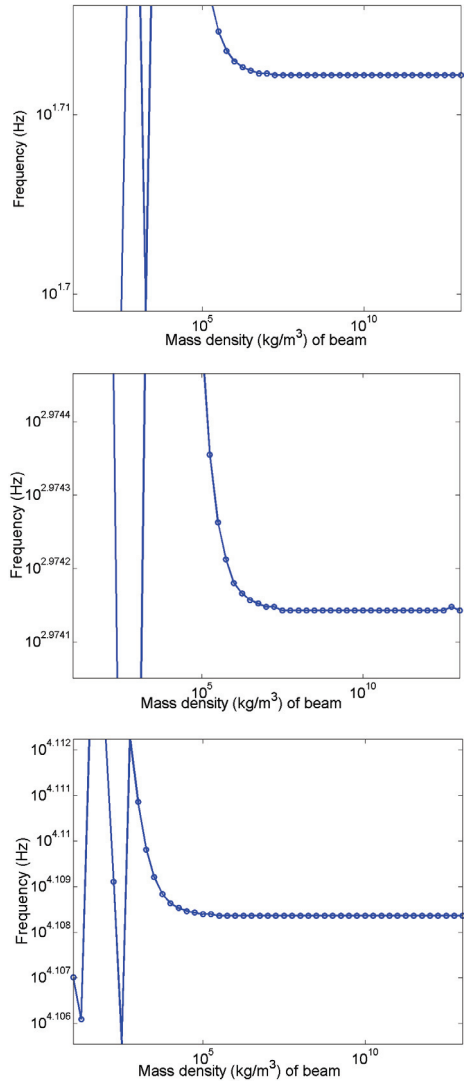
### (1) 사각평판의 설계정보

모서리가 클램프 조건인 평판을 2.1절에서 구한 수학모델로서 구현하고자 하였다. 강성관련항 즉

Young's modulus를 0.0으로 하고, 보의 단면크기는  $50 \times 5 \text{ mm}^2$ 로 고정한 후, 밀도의 값을 변경하여, 평판의

**Table 1** Material properties and dimensions of the rectangular plate shown in Fig. 1 ( $\eta = 0.01$ )

Young's modulus, $E(\text{GNm}^{-2})$	199.	Thickness(mm)	1.0
Poisson's ratio	0.28	Plate width, $L_y(\text{m})$	0.455/1.2
Density( $\text{kgm}^{-3}$ )	7850.	Plate length, $L_x(\text{m})$	0.455



**Fig. 2** Convergence of natural frequencies of the clamped plate when beam mass density is changed(51.5 Hz, 942.2 Hz, 12834.0 Hz)

클램프 조건을 만족시키고자 하였다. 평판 설계 치수와 물성치는 Berry의 그것과 동일하며, 제 1차 공진 주파수(fundamental mode (1,1))은 51.5 Hz 그리고, 임계주파수(critical frequency)는 12360 Hz이다. 최대 20 kHz까지 계산하였으며, 대수적인 주파수 간격(1 decade) 마다 40개의 주파수갯수를 포함하였다. 적용 하중은 단위 점하중(unit point force)이다.

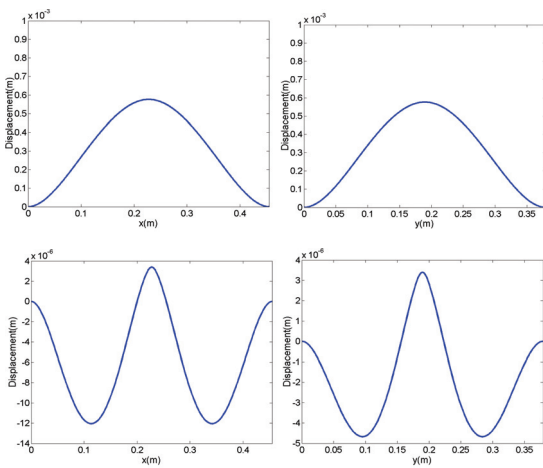
(2) 응답 수렴성 검토

평판의 진동속도제곱의 평균을 계산하여 진동레벨이 커지는 주파수를 고유진동수로 추출하였다. 평판을 둘러싼 보의 밀도(mass density)를 10 kg/m<sup>3</sup>에서 1.0×10<sup>13</sup> kg/m<sup>3</sup>까지 변경하면서 고유진동수의 수렴도를 검토하였다(Fig. 2). 고유진동수는 약 1.0×10<sup>8</sup> kg/m<sup>3</sup>대역에서 수렴하며, 주파수가 높을수록 빠르게 수렴하는 것을 알 수 있다.

충분히 수렴이 이루어졌다고 판단되는 1.0×10<sup>10</sup> kg/m<sup>3</sup>을 사용하는 경우, 추출된 고유진동수를 기존의

**Table 2** Natural frequencies of a plate with clamped supports

Mode number	1	2	3	4	5	6
This method	51.5	93.2	116.1	154.4	160.3	214.8
Berry's result	52.4	94.0	Un-known	157	161	Un-known
FEM	51.5	93.2	116.1	154.4	160.5	215.4



**Fig. 3** Displacement(real part) of the plate due to the excitation on the center point. 51.5 Hz(upper) and 116.1 Hz(lower).

결과와 비교하였다(Table 2). 알려진 결과와 매우 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

**3. 클램프 조건인 평판의 음향방사**

**3.1 평판모드로 계산되는 음향방사와 음압**  
평판의 음향방사를 계산하기 위한 좌표계는 일반적으로 Fig. 4와 같다.

평판 음향방사에 의한 복소 음압(complex acoustic pressure amplitude)  $p(\mathbf{r})$ 은 평판 면속도(surface velocity)에 대한 Rayleigh 적분으로 계산할 수 있다<sup>(10)</sup>.

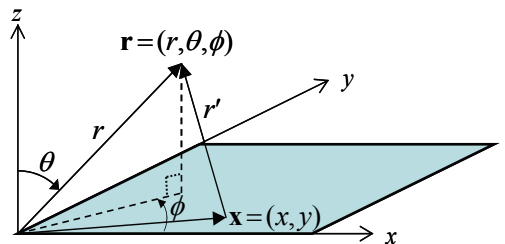
$$p(\mathbf{r}) = \frac{ik\rho c}{2\pi} \int_S v(\mathbf{x}) \frac{e^{-ikr'}}{r'} dx \quad (18)$$

여기서  $\rho, c$ 는 각각 공기밀도와 음속,  $k = \omega/c$ 는 공기의 파수,  $S$ 는 평판넓이 그리고 거리  $r' = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|$ 은 Fig. 4에 보인 바와 같다. 평판위의 임의 위치  $\mathbf{x} = (x, y)$ 에서의 수직 면속도(complex surface normal velocity amplitude),  $v(\mathbf{x})$ ,는 각 모드에 의한 모드 기여도를 중첩시킴으로써 구할 수 있다.

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} \psi_{mn}(\mathbf{x}) \quad (19)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} \psi_{mn}(\mathbf{x})$$

여기서  $v_{mn}$ 는 평판 모드  $(m, n)$ 의 평판 속도,  $\psi_{mn}$ 는 동일모드의 모드형 함수(mode shape function),  $u_{mn}$ 는 복소 모드 속도(complex modal velocity amplitude)이며, 2장에서 구한 일반좌표로부터 다음과 같이 얻어진다.



**Fig. 4** Co-ordinate system of a vibrating rectangular plate

$$u_{mn} = \frac{dq_{mn}}{dt} \quad (20)$$

이제 식 (19)를 식 (18)에 삽입하면

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ik\rho c}{2\pi} \int_S u_{mn} W_{mn}(\mathbf{x}) \frac{e^{-ikr'}}{r'} d\mathbf{x} \quad (21)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} A_{mn}(\mathbf{r})$$

여기서 거리  $r \gg L_x, L_y$  이 되는 원거리 음장 (acoustic farfield)에서, 거리  $r'$  은 다음과 같이 쓸 수 있다<sup>(11)</sup>.

$$r' = r - \sin\theta \cos\phi \cdot x/r - \sin\theta \sin\phi \cdot y/r \quad (22)$$

모드  $(m,n)$ 에 해당하는 복소 음압  $p_{mn}$  을 식 (21)에 서와 같이 전개함에 있어,  $u_{mn}$  과  $A_{mn}$  은 모드형 함수에 따라 달라지며, 다음 절에 설명하는 바와 같다.

### 3.2 클램프 조건인 평판의 음향방사 파워

2장에서 증량이 큰 보에 슬라이딩 조건을 가지는 평판을 연성시킴으로써, 클램프 조건의 평판 거동을 구현할 수 있음을 보였다. 이러한 관계는 음향방사를 계산할 때에도 그대로 유지된다. 따라서, 식 (4), (5)의 모드형 함수와 식 (17)과 (20)에 의해 구해지는 모드 속도는 그대로 식 (21)에 사용된다. 즉, 계산시 평판 슬라이딩 조건으로 반영되지만, 보의 효과에 의해 실제 거동은 클램프 조건으로 구현됨에 주목해야 하며, 이에 해당하는 클램프 조건의 평판 고유진동수는 모드  $(m,n)$ 에서 직접적으로 구해지지 않고, 수치계산에 의해서 계산된다.

슬라이딩 조건에 의한 평판 모드형 함수를 적용하여, 식 (21)에서 모드  $(m,n)$ 에 해당하는 복소 음압(complex acoustic pressure amplitude)  $p_{mn}$  은 다음과 같이 쓸 수 있으며<sup>(8)</sup>,

$$p_{mn} = -ik\rho c \frac{e^{-ikr}}{2\pi r} u_{mn} L_x L_y \alpha \beta \times \left[ \frac{(-1)^m \exp(i\alpha) - 1}{m^2 \pi^2 - \alpha^2} \right] \left[ \frac{(-1)^n \exp(i\beta) - 1}{n^2 \pi^2 - \beta^2} \right] \quad (23)$$

마찬가지로, 해당계수는 다음과 같다.

$$A_{mn}(\mathbf{r}) = -ik\rho c \frac{e^{-ikr}}{2\pi r} \alpha \beta L_x L_y \times \left[ \frac{(-1)^m \exp(i\alpha) - 1}{m^2 \pi^2 - \alpha^2} \right] \left[ \frac{(-1)^n \exp(i\beta) - 1}{n^2 \pi^2 - \beta^2} \right] \quad (24)$$

여기서  $\alpha = kL_x \sin\theta \cos\phi$ ,  $\beta = kL_y \sin\theta \sin\phi$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ . 계 수  $A_{mn}$  은 슬라이딩 조건의 평판과 같은 식을 가지 지만, 단순지지 조건(pinned condition)의 그것과는 다르다(3.3절 참조)

평판에 의해 방사되는 총 음향파워(total acoustic power)는 반경  $r$ 에 대한 반구에 대해 원거리 음향 인텐시티를 모두 합하여 얻을 수 있다<sup>(6)</sup>.

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{p(\mathbf{r})p^*(\mathbf{r})}{2\rho c} r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} u_{mn} u_{m'n'}^* \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} A_{mn}(\mathbf{r}) A_{m'n'}^*(\mathbf{r}) \frac{r^2}{2\rho c} \sin\theta d\theta d\phi \quad (25)$$

여기서  $m'$  과  $n'$  은  $m$  과  $n$  을 구별하기 위해 사용 되었고, 파워를 계산함에 있어  $m, n, m', n'$  이 각각 고려되어야 한다(한편, 나중에 설명되듯이 평판의 판 속도는 좀 더 간단하게 추약될 수 있다).

식 (24)로부터

$$A_{mn} A_{m'n'}^* = \left( k\rho c \frac{1}{2\pi r} \alpha \beta L_x L_y \right)^2 \times \left[ \frac{(-1)^m \exp(i\alpha) - 1}{m^2 \pi^2 - \alpha^2} \right] \left[ \frac{(-1)^n \exp(i\beta) - 1}{n^2 \pi^2 - \beta^2} \right] \times \left[ \frac{(-1)^{m'} \exp(-i\alpha) - 1}{m'^2 \pi^2 - \alpha^2} \right] \left[ \frac{(-1)^{n'} \exp(-i\beta) - 1}{n'^2 \pi^2 - \beta^2} \right] \quad (26)$$

$$= \left( k\rho c \frac{1}{2\pi r} \alpha \beta L_x L_y \right)^2 P \cdot Q \cdot R \cdot S$$

결국, 진동하는 평판의 방사파워는 다음과 같은 모드기반 수식으로 쓸 수 있다.

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{p(\mathbf{r})p^*(\mathbf{r})}{2\rho c} r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{k^2 \rho c}{8\pi^2} L_x^2 L_y^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} u_{mn} u_{m'n'}^* \quad (27)$$

$$\times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \alpha^2 \beta^2 \cdot P \cdot Q \cdot R \cdot S \sin\theta d\theta d\phi$$

단순지지 조건 혹은 슬라이딩 조건과는 달리, 이 식에서 보의 특성을 반영하는  $u_{mn}$  과  $u_{m'n'}^*$  은 직교성 (orthogonality)이 없으므로, 평판에 대한 평균기법을 적용하여 단순화시킬 수 없다.

방사효율(radiation efficiency)은 방사파워와 평판 면적에 대해 평균한 평균제곱속도(mean square velocity)의 관계로부터 구해져야 한다. 먼저 평균제곱속도는 다음과 같다.

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2L_x L_y} \sum_{m=0} \sum_{n=0} \sum_{m'=0} \sum_{n'=0} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} u_{mn} \psi_{mn} u_{m'n'}^* \psi_{m'n'}^* dx dy \quad (28)$$

그런데,  $u_{mn}$  은  $x$ 와  $y$ 의 함수가 아니라  $x_e$  와  $y_e$  의 함수이므로

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2L_x L_y} \sum_{m=0} \sum_{n=0} \sum_{m'=0} \sum_{n'=0} u_{mn} u_{m'n'}^* \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi_{mn} \psi_{m'n'}^* dx dy \quad (29)$$

이제 모드형 함수  $\psi_{mn} = \cos \frac{m\pi x}{L_x} \cos \frac{n\pi y}{L_y}$  의 직교성에 의해 식 (29)는 다음과 같이 단순화 될 수 있으며,

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2L_x L_y} \sum_{m=0} \sum_{n=0} |u_{mn}|^2 \int_0^{L_x} \cos^2 \frac{m\pi x}{L_x} dx \int_0^{L_y} \cos^2 \frac{n\pi y}{L_y} dy \quad (30)$$

따라서,

$$\langle v^2 \rangle = \begin{cases} \sum_{m=0} \sum_{n=0} |u_{mn}|^2 / 2 & \text{for } m=0 \text{ and } n=0 \\ \sum_{m=0} \sum_{n=0} |u_{mn}|^2 / 4 & \text{for } m=0 \text{ or } n=0 \\ \sum_{m=0} \sum_{n=0} |u_{mn}|^2 / 8 & \text{for } m \neq 0 \text{ and } n \neq 0 \end{cases} \quad (31)$$

방사효율은 다음과 같이 구한다.

$$\sigma = \frac{W}{\rho c L_x L_y \langle v^2 \rangle} \quad (32)$$

### 3.3 단순지지 조건인 평판의 음향방사 파워

단순지지 조건은 이 연구의 직접적인 관심사항은 아니지만, 계산결과를 서로 비교하고, 기존 결과를

검토함에 있어 유용하다.

식 (24)에 해당하는 단순지지 조건의 해당식은 다음과 같이 알려져 있다<sup>(6)</sup>.

$$A_{mn}(\mathbf{r}) = ik\rho c \frac{e^{-ikr}}{2\pi r} \frac{L_x L_y}{\pi^2 mn} \times \left[ \frac{(-1)^m \exp(i\alpha) - 1}{(\alpha/(m\pi))^2 - 1} \right] \left[ \frac{(-1)^n \exp(i\beta) - 1}{(\beta/(n\pi))^2 - 1} \right] \quad (33)$$

여기서,  $m=1,2,3,\dots$ ,  $n=1,2,3,\dots$  이며, 모드형 함수는

$$\psi_{mn}(x, y) = \phi_m(x) \phi_n(y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (34)$$

이며, 식 (34)의 평판의 평균제곱속도는  $\sum_{m=1} \sum_{n=1} |u_{mn}|^2 / 8$  로 단순화 된다.

## 4. 수치해석

클램프 조건의 평판에 대해 음향방사 특성을 위에서 설명한 수치해석기법으로 계산하였다. 사용된 설계치수는 Table 1과 같다. 계산결과가 합리적인지를 검토하기 위해 단순지지 조건에 대해서 수치해석 결과를 도출하여, 비교하였다<sup>(1,2,6)</sup>.

### 4.1 방사효율

클램프 조건인 평판의 방사효율이 Fig. 5에 도시되었다. 이 결과는 약 1kHz까지 Berry에 의해 계산된 결과와 정확히 일치한다. 그러나, 그 이상의 주파수에서는 차이가 나는데, Berry의 계산결과는 3 kHz

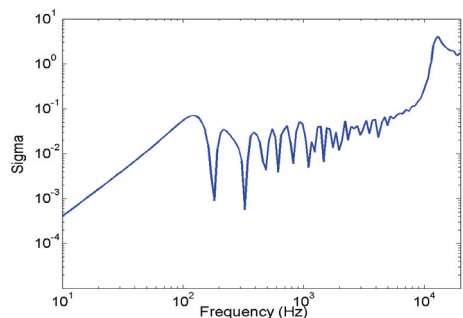


Fig. 5 Radiation efficiency of the clamped plate (excitation at the center point of the plate,  $\eta=0.01$ )

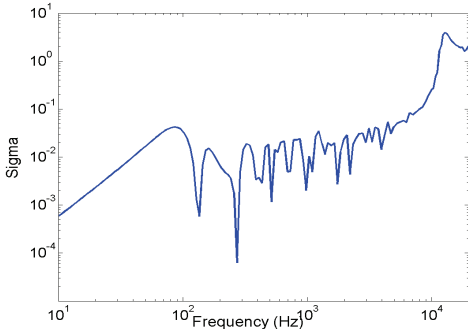
대역에서 이미 1에 가까워진다. 이는 평판의 임계주파수가 약 12 kHz임을 감안할 때 아마도 잘못된 결과일 것이다. 이 연구의 결과는 임계주파수 근처에서 방사효율이 최대가 되는 것을 확인할 수 있으며, 타당한 결과로 보인다.

동일한 방법으로 단순지지 평판에 대한 결과도 도시하였다(Fig. 6). 앞의 결과와 마찬가지로 약 1 kHz까지는 Berry의 결과와 일치하지만, 그 이상에서는 차이가 있다.

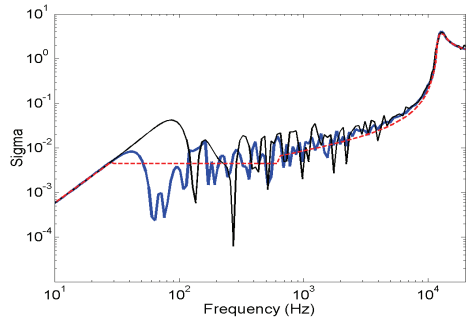
좀 더 확실한 비교를 위해, 기존 연구를 더 검토하였다. Maidanik은 약한 감쇠 특성을 가지는 평판의 모드기반 평균방사에 대한 단순수식을 제안하였다(참고문헌 (2) 참조). 앞의 Figs. 5, 6을 Maidanik에 의한 계산결과와 함께 Fig. 7에 나타내었다. 비교

된 그림으로부터 3개의 결과가 고주파 대역에서 완전히 일치하며, 특히 Maidanik의 근사식 결과는 이 연구에서 사용한 수식의 결과와 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 소위 코너 모드와 모서리 모드(*corner mode, edge mode*) 대역에서 클램프 조건의 방사효율이 약 3 dB 큰 것으로 알려져 있으며<sup>(2)</sup>, 이 연구의 결과도 이를 잘 나타내고 있음을 알 수 있다. 따라서, 이 연구가 Berry의 결과에 비해 전 주파수 대역에서 잘 일치하는 결과를 보이는 것을 알 수 있다.

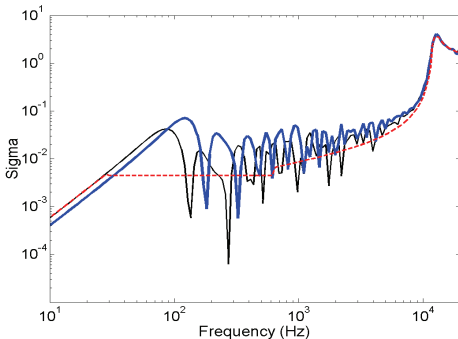
한편, 이 연구에 의한 2개의 방사효율에서 첫 번째 피크가 Maidanik의 결과와 다르게 나타난다. 이것은 다음에 나타낸 단순지지 평판에 대한 검토를 이용하여 추가로 고찰하였다.



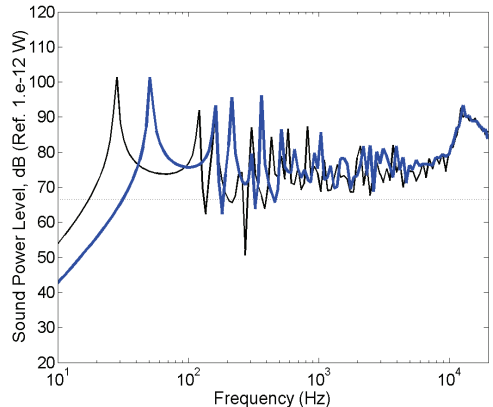
**Fig. 6** Radiation efficiency of the pinned plate (excitation at the center point of the plate,  $\eta=0.01$ )



**Fig. 8** Radiation efficiency of the pinned plate ( $\eta=0.01$ ). Thick solidline, averaged for all possible excitation points; thin solidline, excitation at the center point of the plate; dashedline, simple formulae of Maidanik.



**Fig. 7** Radiation efficiency of the plate (excitation at the center point of the plate,  $\eta=0.01$ ). Thick solid line, clamped condition; thin solidline, pinned condition; dashedline, simple formulae of Maidanik



**Fig. 9** Sound power radiated from the plate. Thick solid line, clamped condition; thin solidline, pinned plate



Xie 등은 모든 가능한 가진점에 대한 평균기법을 도입하므로써, 모드연성 기여도(cross-modal contribution)에 대한 계산시간을 크게 줄여서, 단순지지 평판의 방사효율을 계산하였다<sup>(6)</sup>. 이 결과를 Fig. 7의 단순지지 평판의 결과와 함께 Fig. 8에 나타내었다. 각 결과를 비교할 때, Maidanik의 근사식은 모든 가진점에 대한 평균을 고려한 방사효율 결과를 더 잘 반영하는 것을 알 수 있다.

#### 4.2 방사파워

방사효율 외에 평판의 방사파워는 실제로 공간의 음압에 영향을 주는 항으로 중요하다. 경계조건에 따른 평판의 방사파워를 도시하였다(Fig. 9에서 점선은 평판의 강제모드에 의한 방사파워를 나타냄<sup>(7)</sup>).

이전 연구인 Berry의 결과와 비교할 경우, 방사효율과 마찬가지로 1 kHz까지 일치하며, 그 이상에서는 차이를 보인다. Berry는 임계 주파수 대역에서의 결과를 도시할 수 없었으나, 이 결과에서 볼 수 있듯이, 임계주파수 대역에서 방사파워가 최대값이 되는 것을 확인할 수 있다.

단순지지 평판과 클램프 조건의 평판은 고주파 대역에서는 거의 유사한 방사파워의 크기를 보이는 것을 알 수 있으며, 모드 밀도가 낮은 저주파 대역에서 방사파워는 모드에 의한 영향을 크게 받는 것을 알 수 있다.

Lomas 등은 경계부위의 회전강성의 영향이 크지 않다는 것을 밝힌 바 있는데, 이 연구의 결과는 이러한 이전의 연구가 특히 고주파 대역에서 타당함을 뒷받침한다.

## 6. 결 론

보와 판의 모드합성법을 이용하여, 클램프 조건의 평판에 대한 방사효율과 방사파워를 수치적으로 계산하였으며, 기존 결과와 비교하여, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

보와 판의 모드합성법이 단순평판을 클램프 조건으로 구현하는데 타당함을 귀납적으로 보였다.

이러한 방법에 의해, 클램프 조건인 평판의 방사효율과 방사파워를 임계 주파수 대역까지 계산할 수 있었으며, 기존에 제시된 방법에 비해 직관적이고 단순하며, 신뢰성이 높은 결과를 보임을 알 수

있다.

기존에 검토된 바 없던, 단순지지 평판의 가운데를 가진하는 경우의 방사효율과 가능한 모든 가진점을 가진한 경우의 방사효율을 직접 비교하였다. 두 경우 방사효율은 대체로 유사하나, 저주파 대역에서 약간의 차이를 보인다. 기존에 Maidanik에 의해 제안된 근사식은 모든 가능한 가진점을 평균하는 방사효율에 더욱 근사함을 확인하였다.

평판의 경계조건이 단순지지와 클램프 조건인 경우, 임계 주파수까지의 방사효율과 방사파워를 직접 비교하였다. 중주파수 대역인 corner, edge mode 대역에서 클램프 조건의 방사효율이 다소 높아진다. 임계주파수 근처인 고주파 대역에서, 방사효율과 방사파워는 경계조건에 크게 영향을 받지 않는 것을 알 수 있다.

이러한 결과는 각 연구에서 부분적으로 기존에 검토된 바 있으나, 이 연구에서와 같이 모든 모드를 고려하여 모든 가청주파수 대역에서 동시에 비교된 바 없었으며, 이 연구에서 제안된 단순한 수치모델로부터 직접적으로 비교검토가 가능하였다.

## 참 고 문 헌

- (1) Berry, A., Guyader, J.-L. and Nicolas, J., 1990, A general Formulation for the Sound Radiation from Rectangular, Baffled Plates with Arbitrary Boundary Conditions, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 88, No. 6, pp. 2792~2802.
- (2) Maidanik, G., 1962, Response of Ribbed Panels to Reverberant Acoustic Fields, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 34, No. 6, pp. 809~826.
- (3) Leppington, F. G., Broadbent, E. G. and Heron, K. H., 1982, The Acoustic Radiation Efficiency of Rectangular Panels, Proc. the Royal Society London A, Vol. 382, pp. 245~271.
- (4) Lomas, N. S. and Hayek, S. I., 1977, Vibration and Acoustic Radiation of Elastically Supported Rectangular Plates, Journal of Sound and Vibration, Vol. 52, No. 1, pp. 1~25.
- (5) Snyder, S. and Tanaka, N., 1995, Calculating Total Acoustic Power Output Using Modal Radiation Efficiencies, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 97, pp.

1702~1709.

(6) Xie, G., Thompson, D. J. and Jones, C. J. C., 2005, The Radiation Efficiency of Baffled Plates and Strips, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 280, pp. 181~209.

(7) Yoo, J. W., 2009, Sound Radiation Characteristics of Rectangular Plates with a Guided Edge Condition, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 19, pp. 876~883.

(8) Yoo, J. W., 2010, Study on the General

Characteristics of the Sound Radiation of a Rectangular Plate with Different Edge Conditions, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 24, No. 5, pp. 1111~1118.

(9) Yoo, J. W., Thesis, University of Southampton.

(10) Rayleigh, L., 1896, *The Theory of Sound*, 2nd Edition(reprinted by Dover, NewYork, 1945).

(11) Shuyu, L., 2002, Study on the Radiation Acoustic Field of Rectangular Radiators in Flexural Vibration, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 254, No. 3, pp. 469~479.