

차분 진동형 가속도계 전기적 모델링 및 실험적 검증

이정신*, 임재욱*

Electromechanical Modeling and Experimental Verification of
Differential Vibrating Accelerometer

Jung-Shin Lee* and Jaewook Rhim*

ABSTRACT

Differential Vibrating Accelerometer(DVA) is a small and accurate resonant device to sense the change in natural frequency in presence of acceleration input. Both mathematical modeling for the electromechanical dynamics and experimental investigation on the structural characteristics are necessary for effective designs of precision controller and high Q-factor structure. In this paper, electromechanical modeling of the resonator of DVA, electrode module, and pre-amplifier is presented. The presented method is experimentally verified by measuring the resonance frequency, effective mass, effective stiffness and Q-factor. The direct comparison of the calculated displacement and the actual pre-amplifier of DVA also indicates the effectiveness of this study.

초 록

차분 진동형 가속도계는 입력 가속도에 따른 공진 주파수의 변화를 감지하는 공진형 센서이다. 이 때 가속도계 전기적 동역학의 수학적 모델링 및 구조 특성의 실험적 검증이 정밀한 제어기 및 높은 양질계수를 가지는 구조 설계에 앞서 필요하게 된다. 본 논문에서는 차분 진동형 가속도계의 공진자, 전극 모듈 및 전치증폭기 등의 전기적 모델링을 제시한다. 이러한 모델링 기법은 공진 주파수, 유효 질량, 유효 강성, 양질 계수 등을 측정함으로써 실험적으로 검증된다. 또한 모델링을 통해 예측된 진폭과 측정된 전치증폭기 출력의 직접적인 비교는 본 연구의 유효성을 보여준다.

Key Words : Differential Vibrating Accelerometer(차분 진동형 가속도계), Electromechanical Modeling(전기적 모델링), Resonance frequency(공진 주파수)

1. 서 론

차분 진동형 가속도계(Differential Vibrating Accelerometer, DVA)는 유효 강성 변화에 따른 공진자의 고유 주파수 변화를 검출하는 방식의

† 2010년 8월 10일 접수 ~ 2011년 5월 31일 심사완료

* 정회원, 국방과학연구소

교신저자, E-mail : jyylim@add.re.kr

대전시 유성구 수남동 215

가속도계로서 기존의 진자(pendulum) 방식보다 소형화 및 고정밀화에 적합한 공진형 가속도계이다[1]. 이러한 공진형 가속도계 중 차분 진동형 가속도계는 공진자로 두 개의 DTF(Double-ended Tuning Fork)를 사용하여 고유주파수 변화를 차분방식으로 검출하는 Push-pull 타입의 가속도계이다. 이는 하나의 DTF를 사용하는 경우보다 감도 및 잡음 특성을 향상시킬 수 있는 장점이 있다[2].

이러한 차분 진동형 가속도계가 우수한 성능을 얻기 위해서는 높은 양질 계수를 가진 센서 구조 및 공진 상태를 잘 유지하는 고정밀의 제어기 설계가 이루어져야 한다. 그러나 이러한 제어기 설계에 앞서 설계의 기반이 되는 가속도계 시스템의 전기적 모델링을 수행하고 실제 센서 구조가 설계대로 제작되었는지를 검증하는 일이 무엇보다 중요할 것이다.

이에 본 논문에서는 차분 진동형 가속도계의 공진자인 DTF의 운동 방정식을 연속 시간 운동 방정식(full equations of motion)과 시간 평균 운동 방정식(time averaged equations of motion)으로 유도하였다. 또한 공진자와 감지 및 구동 전극과의 관계를 도출하고 용량 변화를 검출하기 위한 전치증폭기를 설계하였다. 이러한 전기적 모델링을 통해 입력 가속도에 대한 주파수 출력 관계식 및 구동 전압에 따른 최종 전치증폭기 출력 관계식을 유도하였는데 이는 주파수 출력의 위상과 진폭을 일정하게 유지하도록 하는 제어기 설계의 기반이 된다. 본 연구에서는 제시한 모델링 기법이 유효한지를 판단하기 위해 3차원 미세 분석시스템을 이용한 실험을 수행하였다. 또한 구동 전압에 따른 전치증폭기 출력을 측정하고, 이를 계산된 진폭과의 직접적인 비교를 통해 본 연구의 유효성을 보였다.

II. 전기적 모델링

차분 진동형 가속도계는 SOI(Silicon On Insulator) 웨이퍼 위에 공진자인 두 개의 DTF가 각각 판정 질량(proof mass)에 고정되어 있는 구조로 되어 있다. 이 때 각각의 DTF를 인장 모드(tension mode)와 압축 모드(compression mode)로 구성함에 따라 입력 가속도에 비례하여 공진 주파수가 각각 증가, 감소하게 되고 이를 차분함으로써 입력 가속도를 계산할 수 있다. 본 장에서는 DTF의 운동 방정식을 유도하고 입력 가속도에 대한 출력 주파수 관계식을 계산하였다.

다음 Fig. 1은 가속도계 전기적 모델링을 나타낸 것이다. 본 장에서는 구동 및 감지 전극에 적용되는 전압에 의한 정전력을 유도하여 모드 외력, F 을 구하였다. 이에 의한 변위, q 는 연속 시간 운동 방정식과 시간 평균 운동 방정식을 이용하여 도출하였다. 이를 통해 입력 가속도, a_{in} 에 따른 공진 주파수, ω_n 및 변위, q 에 대한 용량 변화, ΔC 을 계산할 수 있다. 다음으로 전치증폭기를 모델링하고 이를 반영하여 제어기 시스템

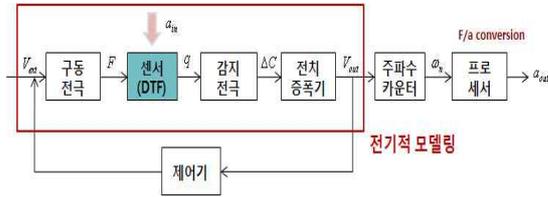


Fig. 1. Block diagram of the electromechanical modeling

모델인, 입력 힘, V_{ext} 에 대한 전치증폭기 출력, V_{out} 전달함수를 유도하였다.

2.1 운동 방정식 유도

다음 Fig. 2는 구동, 감지 전극을 각각 평행판(parallel plate) 타입과 콤(comb) 타입으로 할 경우의 DTF 설계도이다. DTF는 두 개의 빔(beam)이 대칭 구조를 가지고 있으므로 하나의 빔에 대한 운동 방정식을 유도하는 것으로 다른 빔 해석을 유추해낼 수 있다. 양단이 고정 지지된(clamped-clamped) 경계조건에서 평행판, 콤 타입 전극의 집중 질량(lumped mass)을 가진 빔의 진동해석으로 운동 방정식을 유도하고 이를 토대로 한 주기 동안 진동의 진폭과 위상이 느리게 변한다는 가정 아래 시간 평균 운동 방정식을 유도하였다[1]. 이 때 평행판 전극과 콤 전극을 모두 고려하는 이유는 평행판 전극이 구동 및 감지를 위한 전압 효율이 우수한 반면 콤 전극은 전치증폭기 출력 전압과 변위 사이의 선형성 구현 가능한 장점이 있어 이를 비교하여 시스템에 적합한 것을 선택하기 위함이다[2].

운동 방정식 유도에 필요한 변수 값은 다음 Table 1에 정리하였다. 다음 식 (1)은 빔에 외력이 작용했을 때 발생하는 변위에 관한 지배 방정식이다[1]. 임의의 축 방향 길이 및 시간인 x, t 에서 진동에 의해 발생하는 변위, $w(x, t)$ 는 다음과 같이 4계 미분방정식으로 나타낼 수 있다[1].

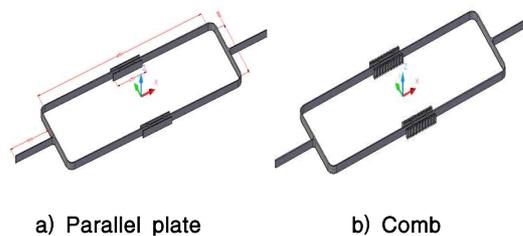


Fig. 2. Design drawing of the DTF

Table 1. Design variables

Beam depth(thickness)	$d = 40 \mu\text{m}$
Width	$h = 3 \mu\text{m}$
Length	$L = 850 \mu\text{m}$
Area	$A = dh$
Moment of Inertia	$I = \frac{1}{12}dh^3$
Density	$\rho = 2,330 \text{ kg/m}^3$
Yung's modulus	$E = 132 \text{ GPa}$
Normalized coordinate	$\xi = \frac{x}{L}$
Q factor	$Q = 10,000$
Lumped mass	$m_{lumped\parallel} = 4.7532 \times 10^{-11} \text{ kg}$ $m_{lumped\text{comb}} = 8.183 \times 10^{-11} \text{ kg}$
Electrode length	$L_{f\parallel} = 146 \mu\text{m}$ $L_{f\text{comb}} = 150 \mu\text{m}$
Cross-section area	$A_e = dL_f$
Comb number	$N = 19$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \sigma_a A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (1)$$

여기서,

σ_a : axial stress per unit area

$f(x, t)$: force per unit length

위 식 (1)의 변위, $w(x, t)$ 는 x 와 t 의 함수로서 각각 독립적이므로 다음 식 (2)와 같이 분리하여 나타낼 수 있다[1].

$$w(x, t) = q(t)\phi(x) \quad (2)$$

여기서 $q(t)$ 는 $x = \frac{L}{2}$ 에서의 변위이다. 우선 빔의 외부 응력이 작용하지 않을 때의 기본적인 모드 형태 및 주파수를 계산하도록 한다. 양단 고정정보(fixed-fixed beam)의 기본 모드 식은 다음과 같다[2-3].

$$\phi(x) = A(\sinh \alpha x - \sin \alpha x) + B(\cosh \alpha x - \cos \alpha x) \quad (3)$$

여기서,

$$\alpha = \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{\frac{1}{4}} \omega_0^{\frac{1}{2}} = \frac{4.73}{L}$$

ω_0 : natural frequency

위 식 (3)에서 경계조건, $\phi(L) = 0$ 와 $\phi\left(\frac{L}{2}\right) = 1$ 을 적용하면 $A = -0.6187$, $B = -1.0178A$ 이므로 다음 식 (4)와 같이 정규화된 좌표계, ξ 로 재정리된다.

$$\phi(\xi) = -0.6187[\sinh 4.73\xi - \sin 4.73\xi - 1.0178(\cosh 4.73\xi - \cos 4.73\xi)] \quad (4)$$

또한 고유 주파수는 다음 식 (5)와 같다.

$$\omega_0 = \frac{22.373}{L^2} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

위 식 (4)에서 구한 모드 형태를 적용한 빔의 운동방정식을 에너지법(energy method)에 의한 라그랑지안(Lagrangian) 함수를 이용하여 유도하기로 한다[1]. 외부 응력에 의한 퍼텐셜 에너지는 크게 굽힘 응력(bending stress)에 의한 변형 에너지, U_B 와 축 응력(axial stress, $T = \sigma_a A$)에 의한 변형 에너지, U_A 가 있으며 다음 식 (6), (7)과 같이 계산되어진다. 또한 운동 에너지, K 는 다음 식 (8)과 같다. 이 때 변위, $w(x, t)$ 는 식 (2)와 같이 분리하고 $\xi = \frac{x}{L}$ 을 적용하여 정리한다.

$$U_B = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{EI}{L^3} I_B \dot{q}^2(t) \quad (6)$$

여기서,

$$I_B = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi \approx 198.6$$

$$U_A = \frac{1}{2} T \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{T}{L} I_A \dot{q}^2(t) \quad (7)$$

여기서,

$$I_A = \int_0^1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \approx 4.85$$

$$K = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \rho A L I_k \dot{q}^2(t) \quad (8)$$

여기서,

$$I_k = \int_0^1 \phi^2 d\xi \approx 0.397$$

위 식 (6)에서 (8)까지를 적용하여 라그랑지안을 유도하면 다음과 같다.

$$L = K - (U_B + U_A) = \frac{1}{2} \rho A L I_k \dot{q}^2(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{EI}{L^3} I_B + \frac{T}{L} I_A \right) q^2(t) \quad (9)$$

$x = \frac{L}{2}$ 에서의 일반화된 힘을 F 라 가정하여 라그랑지안 함수를 계산하면 다음 식 (10)과 같다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F \quad (10)$$

$$\therefore \rho AL I_K \ddot{q} + \left(\frac{EI}{L^3} I_B + \frac{T}{L} I_A \right) q = F$$

이는 2계 미분 방정식인 스프링-댐퍼 시스템 ($M_{eff} \ddot{q} + 2\omega_0 \zeta \dot{q} + k_{eff} q = F$)와 등가 방정식이므로 이에 해당되는 유효 질량(effective mass), M_{eff} 및 유효 강성(effective stiffness), k_{eff} 는 다음 식 (11)과 (12)와 같다.

$$M_{eff} = 0.397 \rho AL + m_{lump} \quad (11)$$

$$k_{eff} = \frac{EI}{L^3} I_B + \frac{T}{L} I_A = 198.6 \frac{EI}{L^3} + 4.85 \frac{T}{L} \quad (12)$$

축 방향 가속도에 따른 외력, T 에 따른 공진 주파수(resonance frequency)는 다음 식 (13)과 같다. 여기서 공진 주파수, ω_n 는 외력이 없을 경우의 고유 주파수, ω_0 와 외력, T 의 함수로 나타내어진다.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eff}}{M_{eff}}} = \omega_0 (1 + 2ST)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

여기서,

$$\omega_0 = \left[\frac{198.6EI}{L^3(0.397\rho AL + m_{lump})} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{2.425L^2}{198.6EI}$$

다음으로 식 (10)에서의 외력, F 을 유도하도록 한다. 다음 Fig. 3은 DTF에 작용하는 외력을 도식화한 것이다. 여기서, L 은 DTF 길이, L_e 은 집중 질량체(콤팩트 또는 평행판 전극) 고정부 거리, L_f 는 전극 길이를 의미한다. 식 (10)의 질량 및

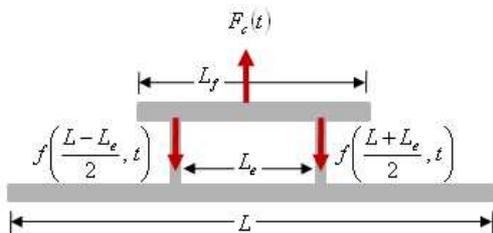


Fig. 3. External force modeling

강성 등이 모드 형태를 고려한 값이므로 외력, F 또한 모드 형태를 고려한 외력이어야 한다.

이 때 빔에 작용하는 외력, $f\left(\frac{L-L_e}{2}, t\right)$ 와 $f\left(\frac{L+L_e}{2}, t\right)$ 는 전극 지지점이 대칭적이기 때문에 그 크기가 같고 전극에 작용하는 외력의 합인 $F_c(t)$ 와 동일하게 된다. 따라서 외력, F 는 식 (14)와 같이 정리된다.

$$F(t) = \int_0^L f(x, t) \phi\left(\frac{x}{L}\right) dx \quad (14)$$

$$= f\left(\frac{L-L_e}{2}, t\right) \phi\left(\frac{L-L_e}{2L}\right) + f\left(\frac{L+L_e}{2}, t\right) \phi\left(\frac{L+L_e}{2L}\right)$$

$$= F_c(t) \phi\left(\frac{L-L_e}{2L}\right)$$

식 (14)에서 $K_x = \phi\left(\frac{L-L_e}{2L}\right)$ 라 하고 $F_c(t)$ 을 구동 및 감지 전압에 의한 정전력으로 모델링하면 다음 식 (15), (16)과 같다. 본 연구에서는 구동 전극과 감지 전극을 각각 동일 거리, d_0 만큼 떨어져 있다고 가정하였다. 또한 구동 전극에는 DC 전압, V_D 와 AC 전압, v_d 를 적용하고 감지 전극에는 직류 전압, V_S 만을 적용하였다.

Case 1. 콤팩트 전극

$$F(t) = \frac{\epsilon_0 K_x dN}{2d_0} \left[(V_D + v_d \cos \omega_n t)^2 - V_S^2 \right] \quad (15)$$

Case 2. 평행판 전극

$$F(t) = \frac{\epsilon_0 A_c K_x}{2} \left[\frac{(V_D + v_d \cos \omega_n t)^2}{(d_0 - K_x q)^2} - \frac{V_S^2}{(d_0 + K_x q)^2} \right] \quad (16)$$

여기서,

$V_D + v_d \cos \omega_n t$: driving voltage

V_S : sensing voltage

ϵ_0 : permittivity of the air

d_0 : overlap length(comb)

: electrode gap(parallel plate)

이를 식 (10)에 대입하고 식 (11)에서 (13)을 적용하여 연속 시간 운동 방정식을 정리하면 다음 식 (17)과 (18)과 같다. 평행판 전극의 경우 정전력 항을 테일러 급수로 정리하였고 이 때 변위, q 에 비례하는 항에 의해 공진 주파수, ω_n 가 다음 식 (19)와 같이 구동, 감지 전압에 의해 새롭게 정의된다[4].

Case 1. 콤팩트 전극

$$\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q} + \omega_n^2 q = \frac{\epsilon_0 K_x d N}{2 M_{eff} d_0^2} [(V_D + v_d \cos \omega_n t)^2 - V_S^2] \quad (17)$$

Case 2. 평행판 전극

$$\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q} + \omega_n^2 q = \frac{\epsilon_0 A_e K_x}{2 M_{eff} d_0^2} [(V_D + v_d \cos \omega_n t)^2 - V_S^2] \quad (18)$$

여기서, $Q = \frac{1}{2\zeta}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eff}}{M_{eff}} - \frac{\epsilon_0 A_e K_x^2}{M_{eff} d_0^2} [(V_D + v_d \cos \omega_n t)^2 + V_S^2]} \quad (19)$$

본 연구에서의 차분 진동형 가속도계는 22kHz 정도의 높은 공진 주파수를 가지는 시스템이므로 변위, q 을 직접적으로 제어하는데 어려움이 있다. 따라서 변위, q 을 다음 식 (20)과 같이 진폭, A 와 위상, B 의 함수로 분리하여 모델링하기로 한다. 이때 진폭과 위상의 변화가 작다고 가정하여 한 주기 동안의 진폭과 위상의 평균치인 A 와 B 를 구하도록 한다[2].

$$q = A \cos(\omega_n t + B) = A \cos(\Phi) \quad (20)$$

식 (20)을 다음 식 (21)과 같이 재정리할 수 있다.

$$\ddot{q} + \omega_n^2 q = \frac{F(t)}{M_{eff}} - \frac{\omega_0}{Q} \dot{q} = \epsilon f(q, \dot{q}) \quad (21)$$

여기서 ϵ 은 차원이 없는 아주 작은 양을 의미한다. 식 (20)을 미분하여 식 (21)에 대입하면 \dot{A} , \dot{B} 에 관한 식을 유도할 수 있다. 만약 $\epsilon = 0$ 일 경우, A 와 B 는 일정하여야 하므로 변위의 미분식은 $\dot{q} = -\omega_n A \sin \Phi$ 와 같다. 반면, $\epsilon \neq 0$ 일 경우에는 $\dot{q} = -\omega_n A \sin \Phi + \dot{A} \cos \Phi - \dot{B} \sin \Phi$ 와 같게 된다. 이 두 식이 동일하기 위해서는 다음 식 (22)이 성립된다.

$$\dot{B} = \tan \Phi \cdot \dot{A} \quad (22)$$

또한 $\dot{q} = -\omega_n A \sin \Phi$ 를 미분하면 다음 식 (23)을 얻을 수 있다.

$$\ddot{q} = -\omega_n^2 A \cos \Phi - \omega_n^2 \dot{A} \sin \Phi - \omega_n \dot{B} \cos \Phi \quad (23)$$

식 (20)과 (23)을 식 (21)에 대입하고 식 (22)를 참조하면 다음과 같이 진폭과 위상의 미분 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{A} = -\frac{\epsilon}{\omega_n} \sin \Phi \cdot f(A \cos \Phi, -\omega_n A \sin \Phi) \quad (24)$$

$$\dot{B} = -\frac{\epsilon}{\omega_n A} \cdot f(A \cos \Phi, -\omega_n A \sin \Phi) \quad (25)$$

위 식에서 진폭, A 와 위상, B 는 Φ 보다 시간에 대해 훨씬 천천히 변하게 되므로 $2\pi/\omega_n$ 주기 동안 평균할 때 \dot{A} 와 \dot{B} 는 일정하다고 가정할 수 있다. 이러한 가정 아래 식 (24)와 (25)를 평균하면 다음 식 (26)과 (27)로 나타낼 수 있다. 이에 식 (17)과 (18)을 참조하여 $f(q, \dot{q})$ 을 모델링하면 다음 식 (28)부터 식 (31)과 같이 콤팩트 평행판 전극에 따른 진폭 및 위상 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{A} = -\frac{1}{2\pi\omega_n} \int_0^{2\pi} \sin \Phi \cdot f(A \cos \Phi, -\omega_n A \sin \Phi) d\Phi \quad (26)$$

$$\dot{B} = -\frac{1}{2\pi\omega_n A} \int_0^{2\pi} \cos \Phi \cdot f(A \cos \Phi, -\omega_n A \sin \Phi) d\Phi \quad (27)$$

Case 1. 콤팩트 전극

$$\dot{A} = -\frac{\epsilon_0 K_x d N V_D v_d}{2 M_{eff} d_0 \omega_n} \sin B - \frac{\omega_0}{2Q} A \quad (28)$$

$$\dot{B} = -\frac{\epsilon_0 K_x d N}{2 M_{eff} d_0 \omega_n} V_D v_d \frac{\cos B}{A} \quad (29)$$

Case 2. 평행판 전극

$$\dot{A} = -\frac{\epsilon_0 A_e K_x}{2 M_{eff} d_0^2 \omega_n} V_D v_d \sin B - \frac{\omega_0}{2Q} A \quad (30)$$

$$\dot{B} = -\frac{\epsilon_0 A_e K_x}{2 M_{eff} d_0^2 \omega_n} V_D v_d \frac{\cos B}{A} \quad (31)$$

Table 1의 값과 $K_x = 0.98$, $V_D = 1V$, $v_d = 1mV$, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m$, $d_0 = 2\mu m$ 을 연속 시간

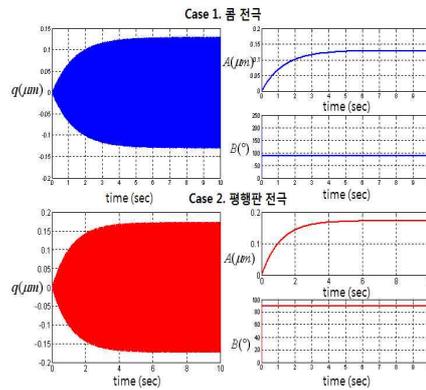


Fig. 4. Comparison between q and A , B

운동 방정식인 식 (17)과 (18)에 대입하고 이를 시간 평균 운동 방정식인 식 (28)에서 (31)까지에 대입한 결과와 비교하면 다음 Fig. 4와 같다. 이 때 시간, $t=0$ 일 때 $A \ll 1$, $B=0$ 이라 가정하고 입력 가속도를 $+1g$ 로 적용하였다.

위 시뮬레이션 결과 변위, q 의 진폭과 A 둘 다 최종적으로 콤팩트 전극일 경우 $0.13\mu\text{m}$, 평행판 전극일 경우 $0.17\mu\text{m}$ 로 수렴하며 B 는 90° 로 수렴함을 알 수 있다. 다른 시뮬레이션 조건에서도 모두 변위, q 의 진폭과 A 는 같은 값으로 수렴함을 확인하였고 B 또한 초기 값에 상관없이 90° 로 수렴함을 알 수 있었다. 이를 통해 빠르게 변하는 q 를 직접적으로 제어하는 것과 진폭, A 와 위상, B 를 각각 제어하는 것은 동일한 결과를 가져옴을 알 수 있다. 또한 제어기 설계 이후 제어기 안정도 판정 또한 시간 평균 운동 방정식 결과 모델로 보다 쉽게 할 수 있다.

2.2 공진자-전극 전기적 모델링

앞 장에서 유도한 식 (13)을 이용하여 입력 가속도에 따른 공진 주파수 출력 관계식을 유도하면 다음 식 (32)와 같다.

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_n - \omega_0}{2\pi} = \frac{\omega_0(1+2ST)^{\frac{1}{2}} - \omega_0}{2\pi} \quad (32)$$

여기서,

$$T = M_{proof}a_{in}/2, \quad M_{proof} = 432.3 \times 10^{-9} \text{kg}$$

위를 계산하여 선형 환산계수를 추정하면 다음 식 (33), (34)와 같다.

$$\frac{\Delta f}{a}|_{comb} \approx 122.333 \text{Hz/g} \quad (33)$$

$$\frac{\Delta f}{a}|_{parallel} \approx 142.901 \text{Hz/g} \quad (34)$$

다음으로 식 (15)와 (16)을 미분하여 구동 AC 전압, v_d 에 대한 외력 관계식을 구하면 다음과 같다. 이 때 $v_d \ll V_D$ 이며 $2\omega_n$ 의 고주파 항은 생략할 수 있다고 가정한다.

$$\frac{dF}{dv_d}|_{comb} \approx \frac{\epsilon_0 K_x d N V_D}{d_0} \quad (35)$$

$$\frac{dF}{dv_d}|_{parallel} \approx \frac{\epsilon_0 A_c K_x V_D}{d_0^2} \quad (36)$$

외력에 대한 변위 관계식은 식 (17)과 (18)을 라플라스 변환하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{dq}{dF} = \frac{1/M_{eff}}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_n^2} \quad (37)$$

시간 평균 운동방정식을 참고하여 $\omega_n = \omega_0$ 일 때의 외력에 대한 공진점에서의 변위 관계식을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dq}{dF} = \frac{1/M_{eff}}{\omega_0^2/Q} \quad (38)$$

다음으로 감지 전극에서 검출되는 용량변화를 알기 위해 변위에 대한 용량 변화 관계식을 유도한다. 이 때 변위, q 의 +방향을 감지 전극과 멀어지는 방향으로 정의하면 다음 식 (39)와 (40)과 같다.

$$\frac{dC}{dq}|_{comb} = d \left[\frac{\epsilon_0 N(L - K_x q)}{d_0} \right] / dq = -\frac{\epsilon_0 N K_x d}{d_0} \quad (39)$$

$$\frac{dC}{dq}|_{parallel} = d \left[\frac{\epsilon_0 A_c}{(d_0 + K_x q)} \right] / dq \approx -\frac{\epsilon_0 A_c K_x}{d_0^2} \quad (40)$$

마지막으로 용량변화에 대한 전하증폭기 출력 관계식을 유도해야 한다. 본 연구에서는 용량변화를 전압 출력으로 전환시켜주기 위해 저 잡음, 저 오프셋 측면에서 유리한 전하증폭기를 사용하였고 이는 다음 Fig. 5와 같이 설계하였다. 전하증폭기 설계 시 컷오프 주파수가 공진 주파수의 1/100배 정도 되어야 하나 본 연구에서 사용한 Op 앰프의 GBP(Gain Bandwidth Product)를 고려하여 피드백 저항, R_f 을 $1G\Omega$ 로, 피드백 커패시터, C_f 을 $2pF$ 으로 설계하였다. 이를 참고로 용량변화에 대한 전하증폭기 출력 관계식은 다음 식 (41)과 같다[5].

$$\frac{dV_{out}}{dC} = -V_D \cdot \frac{R_f s}{R_f C_f s + 1} \quad (41)$$

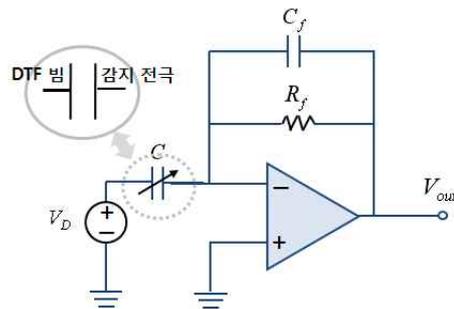


Fig. 5. Charge Amplifier Modeling

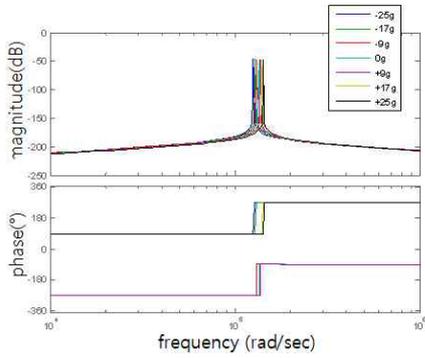


Fig. 6. Bode plot of $dV_{out}/dv_d|_{comb}$

위 식 (35)에서 (41)까지를 이용하여 구동 전극에 의한 외력에 대한 최종 전하증폭기 출력까지의 관계식을 유도하면 다음과 같다.

$$\frac{dV_{out}}{dv_d}|_{comb} = \frac{[(\epsilon_0 K_x N d V_D)^2 R_f / M_{eff} / d_0^2] s}{R_f C_f s^3 + k_{d2} s^2 + k_{d1} s + \omega_n^2} \quad (42)$$

$$\frac{dV_{out}}{dv_d}|_{parallel} = - \frac{[(\epsilon_0 K_x A_e V_D)^2 R_f / M_{eff} / d_0^4] s}{R_f C_f s^3 + k_{d2} s^2 + k_{d1} s + \omega_n^2} \quad (43)$$

여기서,

$$k_{d2} = 1 + \frac{\omega_0}{Q} R_f C_f, \quad k_{d1} = \frac{\omega_0}{Q} + \omega_n^2 R_f C_f$$

입력 가속도가 $-25g \sim +25g$ 일 때 식 (42)의 전달함수 보드 선도를 그리면 위 Fig. 6과 같다. 평행판의 경우 크기만 다를 뿐 그 형태는 콤팩트 전극의 경우와 동일하다. 아래의 그림을 통해 입력 가속도에 비례하여 공진 주파수가 변함을 확인할 수 있다.

III. 실험적 설계 검증

앞 장에서 유도한 유효 질량, 양질계수 및 유효 강성 등이 실제 제작된 센서 모델과 동일한지 판단하기 위해 전기적 모델링의 실험적 검증을 수행하였다. 또한 신호 분석기를 통해 전하증폭기 출력의 주파수 응답 특성(Frequency Response Function, FRF)이 모델링 결과와 동일한지 확인하였다.

Fig. 7은 3차원 미세거동분석시스템을 이용한 실험 구성도이다. 이는 MEMS 구조물의 진공도와 온도 변화에 따른 공진 특성을 확인할 수 있는 장비이다. 0.01nm 해상도의 고속 동조 카메라를 이용하여 실제 공진하는 구조물을 관찰할 수

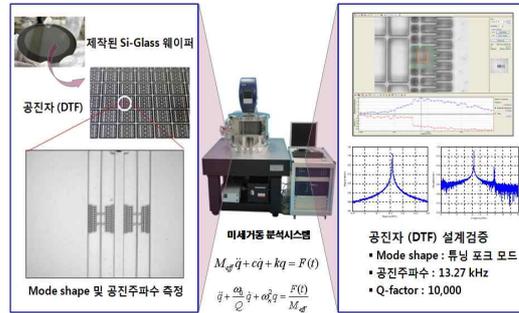


Fig. 7. Test setup using the 3D micro movement analyzer system

있고, 다양한 주파수 범위의 진압을 인가하여 구조물의 동특성을 확인할 수 있다.

3.1 공진자 설계 검증

전기적 모델링의 실험적 검증을 위해 콤팩트 형태의 공진자를 웨이퍼 수준으로 샘플을 제작하고 이를 앞 장에서 유도한 운동 방정식에 대입한 설계 결과는 다음과 같다.

공진 주파수 : $f_0 = 13.27 \text{ kHz}$

유효 강성 : $k_{eff} = 2.001$

유효 질량 : $M_{eff} = 287.72 \times 10^{-12} \text{ kg}$

양질 계수 : $Q = 10,000$

앞 장의 식 (17)에서 댐핑 효과와 $\cos 2\omega_n t$ 항을 무시하고, $V_s = 0$ 이라 가정하면 변위, q 와 유효 강성, k_{eff} 은 다음의 관계식이 성립된다.

$$q = \frac{\epsilon_0 K_x d N}{2 d_0 k_{eff}} \left(V_D^2 + \frac{1}{2} v_d^2 \right) + \frac{\epsilon_0 K_x d N}{2 d_0 (-M_{eff} \omega^2 + k_{eff})} \cdot (2 V_D v_d \cos \omega t) \quad (44)$$

공진 주파수가 13.51kHz인 샘플(sample 1)과 14.32kHz인 샘플(sample 2)에 다양한 DC 전압, V_D 및 $\omega = 1 \text{ kHz}$ AC 전압, v_d 을 인가하여 측정된 변위를 통해 유효 강성 값을 계산하고 이를 모델링 해석 결과와 비교하면 각각 Table 2와 Table

Table 2. Effective stiffness of sample 1

DC 전압	AC 전압	변위	실험치	실험 평균치	오차
5V	100mV	14.45nm	1.90	1.976	1.2%
	150mV	13.73nm	2.04		
	200mV	14.64nm	1.95		
	250mV	14.47nm	2.01		
	300mV	14.96nm	1.98		

Table 3. Effective stiffness of sample 2

DC 전압	AC 전압	변위	실험치	실험 평균치	오차
10V	1V	64.68nm	1.98	2.07	3.5 %
	3V	90.70nm	1.97		
	5V	113.79nm	2.09		
	7V	142.34nm	2.15		
	9V	176.98nm	2.16		

Table 4. Effective mass measurements

공진 주파수	유효질량 실험치	유효질량 설계치	오차율
13.32kHz	290.11ng	287.72ng	0.83%
13.51kHz	282.01ng		1.98%
13.43kHz	285.37ng		0.82%

3과 같다. 표에서 알 수 있듯이 제안한 모델링 기법 해석 결과인 $k_{eff} = 2.001$ 와의 오차가 5%이 내임을 알 수 있다. 이는 측정 오차 및 공정 오차를 고려할 때 타당하다고 판단되어진다.

다음으로 측정한 유효 강성 평균치, $\overline{k_{eff}} = 2.032$ 와 공진 주파수를 식 (14)에 대입하여 유효 질량을 계산하고 이를 모델링 결과와 비교하면 다음 Table 4와 같다. 이를 통해 유효 질량은 모델링 결과와의 오차가 2%이내임을 알 수 있다.

마지막으로 전하증폭기 출력의 주파수 응답 특성을 구하여 하프 파워점(half power point)의 공진 주파수 변화량, Δf 을 측정하였다. $Q = f_0 / \Delta f$ 의 관계식을 통해 양질 계수를 계산한 결과 10,015(sample 1), 10,292(sample 2)로 모델링 결과와의 오차가 3%이내임을 확인하였다.

본 연구에서 사용한 3차원 미세거동분석시스템은 공진 시 변위를 측정하기 위해 구조물의 모서리 부분이 측정 선택창의 1/4를 차지하여야 하는데 평행판 전극의 경우 콤팩트 전극과 달리 모서리를 선택할 수 없으므로 측정이 불가하였다. 따라서 평행판 전극의 경우는 다음의 공진자-전극 전기적 모델링까지의 결과를 확인함으로써 타당성을 검증하기로 한다.

3.2 공진자-전극 전기적 모델링 검증

앞 장에서 공진자의 운동 방정식 결과인 유효 질량, 유효 강성 및 양질 계수 등이 실험적으로 검증되었다. 따라서 본 장에서는 공진자-전극 모델링 결과인 구동 전압에 따른 전하증폭기 출력 크기를 측정하여 모델링 결과와 비교하도록 한다. 이를 위해 Fig. 8과 같은 구성으로 평행판 전

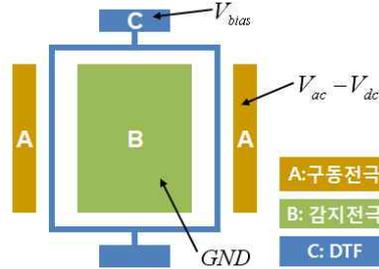


Fig. 8. Parallel plate type sensor model

극 형태의 센서 샘플을 제작하였으며 식 (19)와 같이 평행판 전극의 경우 구동, 감지 전압에 따라 공진 주파수가 변하는 특성을 확인하였다. 또한 구동 전압에 따른 전하 증폭기 출력 크기를 측정하여 공진자-전극 모델링 기법의 유효성을 확인하였다.

식 (19)에서 $\cos 2\omega_n t$ 을 무시하여 재정리하면 다음 식 (45)와 같다[4, 6].

$$\omega_n \approx \sqrt{\frac{K_m}{M_{eff}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{K_e}{K_m}} \quad (45)$$

여기서,

$K_m = k_{eff}$: mechanical stiffness

$$K_e = \frac{\epsilon_0 A_e K_x^2 (V_{bias} - V_{dc})^2}{d_0^3}$$

: electrostatic stiffness

다음으로 식 (36), (38), (40) 및 (41)을 참고하여 구동 AC 전압, V_{ac} 에 대한 전하증폭기 출력 전압, V_{out} 을 계산하면 다음 식 (46)과 같다.

$$V_{out} = \frac{\epsilon_0^2 A_e^2 K_x^2 V_{ac} (V_{bias} - V_{dc}) V_{bias} / M_{eff}}{d_0^4 \omega_0^2 C_f / Q} \quad (46)$$

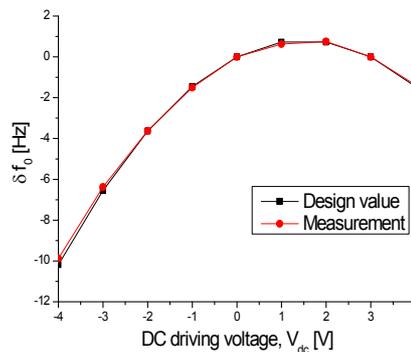


Fig. 9. Change of the resonance frequency w.r.t. DC driving voltage

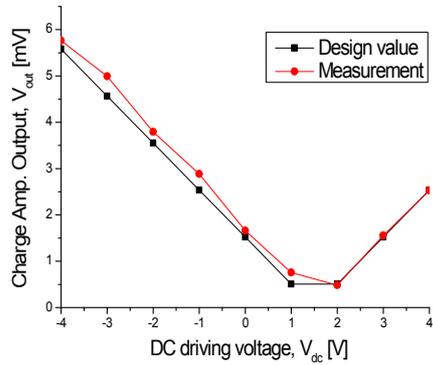


Fig. 10. Charge Amp. output w.r.t. DC driving voltage

다음 Fig. 9와 Fig. 10은 공진 주파수, $f_0 = 21.024\text{kHz}$, 양질계수, $Q = 180,000$, 유효 질량, $M_{eff} = 2.98 \times 10^{-10}\text{kg}$ 및 간극, $d_0 = 6\mu\text{m}$ 인 실험 샘플에 $V_{bias} = 1.5\text{V}$, $V_{ac} = 10\text{mV}$ 을 적용하고 DC 구동 전압을 -4V 에서 $+4\text{V}$ 까지 증가시킬 때 공진 주파수와 전하증폭기 출력의 설계치와 측정치를 비교한 그래프이다. 아래 그래프를 통해 모델링 결과와 실제 측정된 결과 차이가 10% 이내로 유사함을 알 수 있으며 이를 통해 공진자-전극 전기적 모델링 기법이 유효함을 판단할 수 있다.

IV. 결 론

본 연구에서는 차분 진동형 가속도계의 제어기 설계의 기반이 되는 전기적 모델링을 수행하였다. 가속도계 공진자인 DTF의 운동 방정식으로부터 입력 가속도에 대한 변위 및 공진 주파수 관계식을 유도하였다. 또한 공진자와 전극과의 관계를 모델링하고 전하증폭기를 설계하여 구동 전압에 따른 최종 전하증폭기 출력 관계식을 도출하였다. 이러한 전기적 모델링 기법이 유효한지 검증하기 위해 콤팩트 전극 및 평행판 전극 형태의 샘플을 제작하여 3차원 미세거동분석 시스템을 이용한 실험을 수행하였다. 그 결과 설계된 공진 주파수, 유효 질량, 유효 강성 및 양질계수의 예측 치들은 실제로 제작된 센서로부터 측정된 값들과 거의 일치하며 공진자-전극 모델링 결과 또한 유효함을 확인할 수 있었다. 제안된 설계 기법은 정밀한 공진형 센서의 제어기의 설계와 성능 개선을 위해 폭넓게 활용될 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

- 1) Kevin A. Gibbons, "A Micromechanical Silicon Oscillating Accelerometer; Master's thesis", Massachusetts Institute of Technology, Science in Mechanical Engineering, 1992.
- 2) Trey Allen William Roessig, "Integrated MEMS Tuning Fork Oscillators for Sensor Applications; Doctor's thesis", University of California, Berkeley, Philosophy in Mechanical Engineering, 1992.
- 3) 석선호, "항법급 수직형, 수평형 차동공진형 가속도계의 설계 및 해석", 서울대학교 전기컴퓨터 공학과 박사학위 논문, 2004.
- 4) Manu Agarwal, Saurabh A. Chandorkar, Harsh Mehta, Robert N Candler, Bongsang Kim, Matthew A. Hopcroft, Renata Melamud, "A study of electrostatic force nonlinearities in resonant microstructures", Physics Letters 92, March 2008.
- 5) 전창배, 서재범, "전하증폭기형 가속도계 제어루프 설계", ADDR-417-081620, 2008.
- 6) Emmanuel Saucedo-Flores, Ruben Ruelas, Martin Flores, Ying Cai and Jung-chiao, "Dynamic Behavior Modeling of MEMS Parallel Plate Capacitors", *IEEE Journal*, 2004, pp. 15-19.
- 7) Philip Wayne Loveday, "Analysis And Compensation of Imperfection Effects in Piezoelectric Vibratory Gyroscope; Doctor's thesis", Virginia Polytechnic Institute and State University, Mechanical Engineering, 1999.
- 8) Palph Hopkins, Joseph Miola, Roy Setterlund, Bruce Dow, William, "The Silicon Oscillating Accelerometer: A High-Performance MEMS Accelerometer for Precision Navigation and Strategic Guidance Application", *Institute of Navigation 61st Annual Meeting*, Cambridge, MA, June 27-29, 2005, pp. 4-12.
- 9) Gyro and Accelerometer Panel of the IEEE/AESS, "IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Linear, Single-Axis, Nongyroscopic Accelerometers", 1998.
- 10) Christian Burner, Jaurne Esteve, and Emilio Lora-Tamayo, "Resonant Silicon Accelerometers in Bulk Micromachining Technology - An Approach", *Journal of Microelectromechanical System*, Vol. 5, No. 2, 1996, pp. 122-130.