韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2011. 05. 제 50권, 제 2호, 233-246.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2011, Vol. 50, No. 2, 233-246.

# 이차곡선을 활용한 정칠각형에 관한 Abū Sahl의 작도법의 GSP를 통한 재조명

김 향 숙 (인제대학교 컴퓨터응용과학부)*
박 진 석 (대구대학교 교육대학원)
하 형 수 (대구과학고등학교)

## I. 서 론

이차곡선은 아주 오래된 역사를 가진 기하학적 소재이다. Euclid의 제자인 Apollonius는 기원전 3세기 경에 이차곡선에 대한 연구를 담은 '원뿔곡선론'을 저술하였다. Apollonius는 원뿔을 여러 각도에서 평면으로 잘라보고 그 절단 부분에 나타난 곡선을 원뿔곡선이라 명명하였다. 하지만 그리스 시대에는 좌표를 사용하지 못하는 불편함이 있었기 때문에 Apollonius는 이차곡선을 연구함에 있어 대수적인 식을 사용하지 않고 도형의 합동이나 닮음의 성질을 이용하는 논증기하의 방법론을 취하였다. 그리스 시대 수학자들은 논증기하의 방법만으로도 많은 이차곡선의 성질들을 유도하였으며, 유명한 3대 작도 문제 중의 하나인 '배적문제: 주어진 정육면체의 2배의 부피를 갖는 정육면체 구하기'는 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로는 해결되지 않는다는 사실을 알고, 눈금 없는 자와 컴퍼스로 작도할 수 있는 직선과 원 이외의 또 다른 곡선인 원뿔곡선에 대하여 흥미를 갖고 연구를 하였다.

Hippocrates는 배적문제가 $a:x=x:y=y:2a$인 $x$를 구하는 문제로 귀착됨을 이용하여, 이같은 $x$가 두 포물선 $x^2=ay$, $y^2=2ax$의 교점의 $x$좌표로 나타난다는 사실을 생각해내어, 3대 작도불능문제의 하나인 이 배적문제를 풀었다고 전해진다.

현행 고등학교 수학과 교육과정에서 이차곡선과 관련된 문제는 주로 해석기하학적인 측면에서 다루어지고 있으며 초점과 직선과의 위치관계 정도는 다루나 논증기하적인 측면은 거의 다루어 지지 않고 있다.

홍성관・박철호(2007)는 고등학교에서 이차곡선의 지도가 오로지 대수적인 관점(또는 해석기하적인)만을 강조하여 학생들이 그 개념의 기원을 무시한 채, 오로지 기계적인 계산으로 해결하는 형식주의에 빠짐을 지적하고, 이에 대한 대안으로 기하적인 관점으로 접근 한 후 대수적인 관점으로 연결시켜야 함을 지적하였다.

나귀수(2006)는 기하교육이 고등학교에서 해석기하의 많은 내용을 학습하지만 해석기하의 수학적 의미를 거의 인식하지 못하고 있음을 지적하면서, 이에 대한 대안으로 논증기하와 해석기하의 조화를 이룰 수 있는 구체적인 방안탐색의 필요성을 지적하였다.

이에, 본 연구에서는 고등학교 수준에서 논증기하와 해석기하의 조화를 이룰 수 있는 방안의 하나로서 이차곡선을 활용한 Abū Sahl과 Archimedes의 정칠각형에 대한 작도방법을 고찰하고, 이를 바탕으로 눈금 없는 자와 컴퍼스로는 작도 불가능함으로 알려진 정칠각형 작도문제를 교육현장에서 많이 사용하고 있는 역동적 수학교육용 소프트웨어인 GSP(Geometer's Sketchpad)로 이차곡선을 활용하여 구현해 보이며, 또한 현행 중등수학교육과정에서 다루고 있는 Euclid정리를 이용하여 포물선에 관한 Apollonius의 징후(symptom)를 설명함으로써, 이러한 시도를 통해 얻어질 수 있는 교육적 시사점을 도출해보고자 한다.

* 접수일(2011년 3월 16일), 수정일(2011년 4월 27일), 게재확정일(2011년 5월 6일)
* ZDM분류 : G14
* MSC2000분류 : 97G40
* 주제어 : 작도, 정칠각형, GSP, 원뿔곡선, 이차곡선
* 인제대학교 기초과학연구소 지원

이를 위하여 먼저, 정칠각형의 작도법에 관한 Abū Sahl[1]의 해석[2]을 살펴보고, 이에 관한 새로운 증명법을 제시하며 나아가 이를 근거로 원뿔곡선을 이용한 Abū Sahl의 정칠각형의 작도법(Berggren(1986)에 의하면 비록 정칠각형을 자신의 해석에 따라 작도한 흔적은 전혀 보이지 않은 것으로 알려지고 있다.)에 따라 현행 중등 수학교육과정에서 다루고 있는 내용들을 응용하여 GSP (Geometer's Sketchpad)를 활용하여 정칠각형 작도의 근사구현을 시도함으로써 현장에서 적용 가능한 교수·학습 자료를 제시한다.

다음으로, Abū Sahl의 해석에서는 Apollonius의 포물선과 쌍곡선에 관한 몇 가지 성질(Apollonius의 symptom(징후) (Berggren, 1986))을 증명 없이 결과만을 사용하고 있다. 그러나 이 포물선과 쌍곡선에 관한 징후를 포물선과 쌍곡선에 관한 현대적인 기법을 이용하여 새로운 증명법을 제시하고, 특히 그 당시의 수학사적 배경으로 볼 때 Apollonius가 이용했을 것으로 추측되어지는 현행 중등수학교육과정에서 다루고 있는 Euclid정리를 이용하여 Apollonius의 포물선에 관한 징후를 설명하며, 나아가 보다 구체적으로 GSP를 활용하여 그림으로 그 증명방법을 제시하고 확인할 것이다.

끝으로 Archimedes의 정칠각형의 작도법(祭藤 憲, 2008)에 관한 해석도 소개한다. 실제로 Archimedes가 제시한 정칠각형의 작도법에서는 Euclid의 「원론」과 마찬가지로 어떻게 작도법을 찾아내었는지에 대한 기술은 전혀 없으며, 작도와 증명만 전해지고 있지만, 이 경우에도 역시 정칠각형이 그려졌다고 가정한 후에 추론한 것으로 알려져 있다.

1) 페르시아(현재의 이란)의 수학자, 물리학자, 천문학자로서 바그다드에서 주로 활약한 것으로 전해지고 있다.

2) 고대 그리스인들의 문제해법의 상습적인 수단으로, 문제가 풀렸다고 가정해서 그 해법을 탐구하는 의미의 것이며, 이를 "해석"이라 불렀다. 그러나 Euclid의 「원론」에는 이 "해석" 부분은 없고 "작도"와 "증명"만 보이고 있는 것으로 알려져 있다.

## Ⅱ. 본 론

현행 중등 교육과정에서는 포물선을 「정직선(준선)과 정점(초점)으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취」로서 정의하고, 좌표평면상에서 이와 같은 성질을 활용하여

$$y^2 = 4px \text{ 또는 } x^2 = 4py \ (p > 0\text{인 일정값})$$

로 표현하고 있다.

또, 쌍곡선을 「두 정점(초점)으로부터 거리의 차가 일정한 점의 자취」로서 정의하고, 좌표평면상에서는

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

로 나타남을 활용하여 여러 가지 기하학적 성질을 도출하고 있다.

그러나 기원전 3세기경에 Apollonius는 이와는 달리 원뿔을 평면으로 어떻게 자르냐에 따라 포물선, 쌍곡선 등으로 정의하고 있다는 것을 우리는 익히 잘 알고 있다. 지금으로부터 2000년도 전이므로 좌표평면이란 개념이 전혀 생소할 시기에 Apollonius는 이미 포물선과 쌍곡선의 방정식을 'Apollonius의 symptom(징후)'라는 이름으로 다음과 같은 놀라운 결과로 제시하였다. 다음 절에서 이 두 가지 내용을 소개한다.

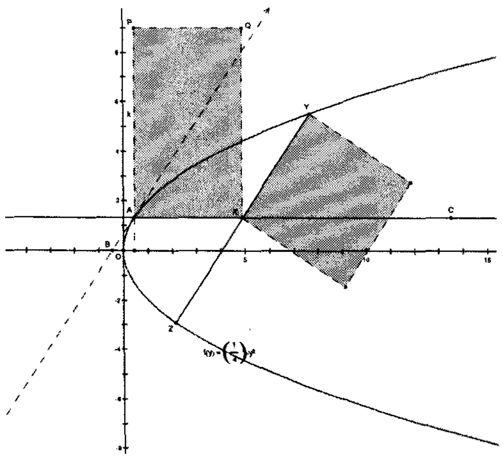
### 1. Apollonius의 포물선과 쌍곡선에 관한 symptom(징후)

#### (1) Apollonius의 포물선에 관한 symptom

포물선의 한 직경[3] $AC$상의 임의의 한 점 $X$를 잡아, 직경 $AC$의 점 $X$에서의 종선 $YZ$를 그으면 $\overline{XY} = \frac{1}{2}\overline{YZ}$ 이다[4].

3) Apollonius는 직경을 diameter라 부르고 있다(Berggren, 1986).

4) Apollonius는 이를 점 $X$에서의 세로좌표(ordinate)라 부르고 있다(Berggren, 1986).



<그림 1> 포물선에 관한 Apollonius의 symptom

이때 Apollonius는 다음이 성립한다고 말하고 있다. (<그림 1> 참조)

「직경 $AC$만에 의해 정해지는 값 $\delta$로서, 한 변은 $AX$이고 이웃하는 다른 변은 길이가 $\delta$[5]인 직사각형으로 그 넓이가 $\overline{XY}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 같은 그런 것이 존재한다.」

이제 Apollonius가 암시한 위 symptom을 증명해 보일 것이다.

**증명.** 표준형 $y^2 = 4px$에 대해서 위의 사실을 보이기로 한다. 종선 $YZ$의 기울기를 $m$이라 하고, $\overline{AX} = k$라 한다. 이때 직경 $AC$의 방정식은

$$y = \frac{2p}{m}$$

이고, $A\left(\frac{p}{m^2}, \frac{2p}{m}\right)$이므로 $X\left(\frac{p}{m^2} + k, \frac{2p}{m}\right)$이다 (박진석 · 김향숙, 2009). 따라서 종선 $YZ$의 매개변수방정식은

$$x = \frac{p}{m^2} + k + \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}r,$$

$$y = \frac{2p}{m} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}r \quad (-\infty < r < \infty)$$

이다. $\overline{XY}$를 구하기 위해 종선 $YZ$의 매개변수방정식을 포물선의 방정식 $y^2 = 4px$에 대입하면

$$\left(\frac{2p}{m} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}r\right)^2 = 4p\left(\frac{p}{m^2} + k + \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}r\right)$$

를 얻을 수 있다. 이 등식으로부터

$$r^2 = 4pk \cdot \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)$$

이 성립하며, 더욱이 $\delta = 4p \cdot \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)$은 주어진 직경(즉, 종선)만에 의해 정해지는 값이다. ◆

따라서 Apollonius의 주장이 옳음을 알 수 있다.

**참고.** 주어진 직경이 $x$축일 경우, 그 종선은 $y$축에 평행이므로 $m \to \infty$이다. 따라서 이 경우에 직경상의 임의의 점 $(x, 0)$에서의 종선이 포물선과 만나는 점의 좌표를 $(x, y)$라 하면 $r = y$이고 $k = x$이므로 $y^2 = 4px$가 성립함을 알 수 있다.

지금부터, 위에서 제시한 포물선에 관한 Apollonius의 symptom에 대한 증명 안에서 밝힌 $\delta = 4p \cdot \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)$를 실제로 Apollonius는 어떻게 찾았을까? 라는 의문점을 현행 중등수학교육과정에서 다루고 있는 Euclid정리를 이용하여 ① 알려진 사항, ② 작도 및 ③ 증명의 세 단계로 나누어 설명하여 보기로 한다. 그 당시의 수학사적 배경으로 볼 때 Apollonius는 Euclid정리를 활용했을 것이라고 추측되어진다.

① 알려진 사항

직경 $AC$의 꼭짓점 $A$의 좌표는 $\left(\frac{p}{m^2}, \frac{2p}{m}\right)$이고, 꼭짓점 $A$에서의 접선과 $x$축과의 교점 $B$의 좌표는 $\left(-\frac{p}{m^2}, 0\right)$이며, 꼭짓점 $A$에서의 법선 $AQ$의 법선영 $PQ$의 길이는 $2p$이다(박진석 · 김향숙, 2009). 이때

5) Apollonios는 이 값 $\delta$를 이 직경의 매개변수(parameter)라 부르고 있다(Berggren, 1986).

직각삼각형 $ABQ$에 Euclid의 정리를 적용하면

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP} \cdot \overline{PQ}$$

를 얻을 수 있으므로 선분 $BP$의 길이는

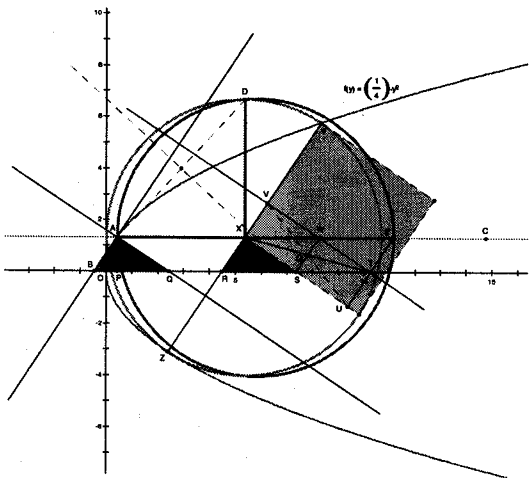
$$\overline{BP} = \left(\frac{2p}{m}\right)^2 \div 2p = \frac{2p}{m^2}.$$

그러므로

$$\overline{BQ} = \overline{BP} + \overline{PQ} = \frac{2p}{m^2} + 2p = 2p\left(1 + \frac{1}{m^2}\right).$$

② 작도

먼저 점 $X$를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{XY}$인 원 $c_1$을 그려, 점 $X$에서 직경 $AC$에 세운 수선과의 교점을 $D$라 한다.(<그림 2> 참조)




<그림 2> Euclid의 정리를 이용한 작도

다음으로 점 $A$와 $D$를 지나며 중심이 직경 $AC$ 상에 놓여있는 원 $c_2$를 그려 직경 $AC$와의 교점을 $E$라 하면 직각삼각형에 관한 Euclid의 정리로부터

$$\overline{XD}^2 = \overline{AX} \cdot \overline{XE}$$

가 성립한다. 그런데 $\overline{XY} = \overline{XD}$이므로

$$\overline{XE} = 2\,\overline{BQ},$$

즉 $\overline{XE} = 2 \times 2p\left(1 + \frac{1}{m^2}\right) = 4p\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)$임 을 보이면 된다.

③ 증명

선분 $XY$를 한 변으로 하는 정사각형의 변 $XY$의 연장선이 $x$축과 만나는 점을 $R$이라 하고, 변 $XY$에 수직인 변이 $x$축과 만나는 점을 $S$라 한다. 또, 점 $E$를 지나고 변 $XY$에 평행인 직선이 $x$축과 만나는 점을 $T$, 그리고 변 $XY$에 수직인 변과 만나는 점을 $U$라 한다(<그림 2> 참조). 이때 사각형 $XRTE$는 평행사변형이므로

$$\overline{XE} = \overline{RT}$$

이다. 더욱이 $\triangle ABQ$와 $\triangle XRS$는 직각삼각형으로

$$\overline{AB} = \overline{XR}, \quad \overline{AQ} = \overline{XS}$$

이므로 $\triangle ABQ \equiv \triangle XRS$이다. 그러므로

$$\overline{BQ} = \overline{RS}$$

이다. 따라서 우리의 문제는

$$\overline{RT} = 2\overline{RS} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ⓐ$$

임을 보이면 충분하다.

이제 점 $T$를 지나고 직선 $XU$에 평행인 직선이 변 $XY$와 만나는 점을 $V$, $x$축에 평행한 직선과 만나는 점을 $W$라 하면 사각형 $XUTV$는 직사각형이고, 사각형 $XSTW$는 평행사변형이다. 그러므로 평행사변형 $XSTW$의 두 대각선의 교점을 $G$라 하면, 직사각형 $XUTV$의 대각선 $VU$는 점 $G$를 지난다. 이때 직사각형 $XUTV$의 넓이는 선분 $WS$에 의해 이등분되므로

$$\overline{VX} \,//\, \overline{WS} \,//\, \overline{TU}$$

이다. 따라서 ⓐ가 성립한다.

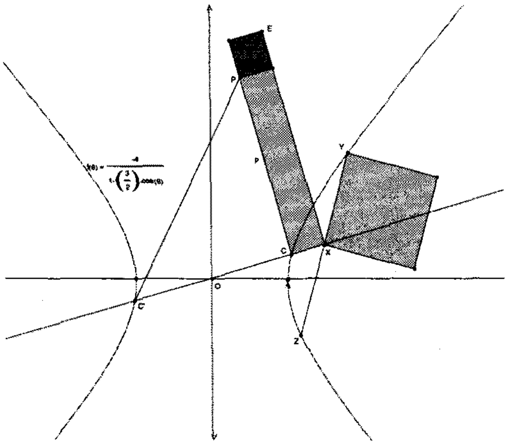
(2) Apollonius의 쌍곡선에 관한 symptom

쌍곡선의 직경은 항상 중심을 지남은 잘 알려져 있다(박진석 · 김향숙, 2009). 이제 쌍곡선의 한 직경이 아래의 <그림 3>처럼 쌍곡선과 만나는 점을 $C$, $C'$이라 하고 $l := \overline{CC'}$[6]이라 한다. 그리고 아래의 그림처럼 직경 $CC'$ 상의 한 점 $X$를 지나는 종선을 $YZ$라 할 때

$$\overline{XY} = \frac{1}{2}\overline{YZ}$$

이다(박진석 · 김향숙, 2009).

6) Apollonius는 $\overline{CC'}$을 transverse side라 부르고 있다(Berggren, 1986).




<그림 3> 쌍곡선에 관한 Apollonius의 symptom

이때 Apollonius는 다음이 성립한다고 말하고 있다(<그림 3> 참조).

「$l$에 대응해서 다음을 만족하는 값 $p$가 존재한다[7]. : $\overline{CX}$를 한 변으로 하고 다른 한 변의 길이는 $p$를 넘어서며[8], 그 넓이는 $\overline{XY}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 같은 직사각형이 존재한다. 더욱이 이웃하는 두 변의 길이가 $p$를 넘어서는 값과 $\overline{CX}$인 직사각형(위 의 <그림 3>에서 검은색 부분)은 이웃하는 두 변의 길이가 $l$과 $p$인 직사각형과 닮았다. 따라서 검은색 부분의 직사각형의 다른 한 변의 길이 $s$는 비례식

$$s : \overline{CX} = p : l$$

를 만족하므로 $s = \frac{p}{l} \cdot \overline{CX}$이다.」

이제

$$p = \overline{CP}$$

라 하고, 점 $X$에서 직경 $CC'$에 세운 수선이 직선 $C'P$와 만나는 점을 $E$라 하면 쌍곡선에 관한 Apollonius의 주장은

$$\overline{XY}^2 = (p+s) \cdot \overline{CX} = p \cdot \overline{CX} + \frac{p}{l} \cdot \overline{CX}^2$$

로 나타낼 수 있다.

여기에서 위에 제시된 쌍곡선에 관한 Apollonius의 symptom을 증명할 것이다.

**증명.** 표준형 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$에 대해서 위의 사실을 보이기로 한다.

직경 $CC'$이 쌍곡선과 만나는 점 $C$의 좌표를 $(a\sec\phi,\ b\tan\phi)$[9]라 하면 이 직경의 기울기는 $m := \frac{b\sin\phi}{a}$이다. 이제 직경 $CC'$상의 임의의 한 점 $X$를 잡아

$$k := \overline{CX}$$

로 두면 점 $X$의 좌표는

$$X\left(a\sec\phi + \frac{a\sec\phi}{\sqrt{\alpha}}k,\ b\tan\phi + \frac{b\tan\phi}{\sqrt{\alpha}}k\right)$$

이며

$$l = \overline{CC'} = 2\sqrt{\alpha}$$

이다.

단, 여기서

$$\alpha = (a\sec\phi)^2 + (b\tan\phi)^2 = \frac{a^2}{\cos^2\phi} + \frac{b^2\sin^2\phi}{\cos^2\phi}$$
$$= \frac{1}{2}\{2a^2 + b^2 - b^2\cos(2\phi)\}\sec^2\phi$$

이다.

한편 종선 $XY$의 기울기는 $\frac{b^2}{a^2 m} = \frac{b}{a\sin\phi}$이므로 직선 $XY$의 매개변수방정식은

$$x = a\sec\phi + \frac{a\sec\phi}{\sqrt{\alpha}}k + \frac{1}{\sqrt{\beta}}r,$$

$$y = b\tan\phi + \frac{b\tan\phi}{\sqrt{\alpha}}k + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\frac{b}{a\sin\phi}r$$

$$\left(\text{단, } \beta = 1 + \left(\frac{b^2}{a^2 m}\right)^2 = \frac{a^2\sin^2\phi + b^2}{a^2\sin^2\phi}\right)$$

이다.

7) Apollonius는 이를 parameter라 부르고 있다(Berggren, 1986).

8) 그리스어로 "넘어선다"는 의미의 "hyperballetai"를 Apollonius는 "hyperbolē"로 나타냈으며, 이것이 'hyperbola"의 어원으로 알려져 있다(Berggren, 1986).

9) $\phi$는 점 $C$의 이심각의 크기이다(박진석 · 김향숙, 2009).

이제 $r=\overline{XY}$에 관한 정보를 얻기 위해서 직선 $XY$의 매개변수방정식을 쌍곡선의 방정식에 대입하여 정리하면

$$r^2 = p \cdot k + \frac{p}{l} \cdot k^2,$$

$$p = -\frac{\sqrt{2}\,(-a^2 - 2b^2 + a^2\cos 2\phi)\sec^2\phi}{\sqrt{(2a^2 + b^2 - b^2\cos 2\phi)\sec^2\phi}},$$

$$\frac{p}{l} = -\frac{-a^2 - 2b^2 + a^2\cos 2\phi}{2a^2 + b^2 - b^2\cos 2\phi}$$

로서, $p$와 $\frac{p}{l}$는 직경 $CC'$만에 의해 결정되는 값이다. ◆

**참고.** 주어진 직경이 $x$축인 경우에 점 $C$의 이심각의 크기 $\phi = 0$이므로, 이 경우에는 $p = \frac{2b^2}{a}$, $\frac{p}{l} = \frac{b^2}{a^2}$, $l = 2a$이다. 이제 이 직경상의 임의의 점 $(x, 0)$에서의 종선이 쌍곡선과 만나는 점의 좌표를 $(x, y)$라 하면, $r = y$이고 $k = x - a$이므로

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}(x-a) + \frac{b^2}{a^2}(x-a)^2, \text{ 즉}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

이 성립함을 알 수 있다.

이상으로 Apollonius가 암시한 포물선과 쌍곡선에 관한 symptom의 증명을 통해 다음을 알 수 있다.

실제로 포물선의 방정식 $y^2 = 4px$는 대칭축을 직경으로 잡았을 때 Apollonius의 symptom에서의 일정 값을 $4p$로 볼 수 있으며, 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$은 $y^2 = \frac{2b^2}{a}(x-a) + \frac{b^2}{a^2}(x-a)^2$으로 변형이 되므로 직경을 $x$축으로 택했을 때, Apollonius가 말한 일정 값은 $\frac{2b^2}{a}$ 이다.

Apollonius 이후 1000년도 지난 10세기 경에 Abū Sahl은 위에서 살펴본 Apollonius의 두 symptom을 이용하여 정칠각형을 작도하는 방법을 제시하였다. 다음 절에서는 이에 대한 내용을 소개한다.

## 2. Abū Sahl의 해석

Euclid의 「원론」 제4권에는 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 이용한 정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형 및 정십오각형을 작도하는 법을 소개하고 있다. 한편 각 호는 이등분 가능하므로 모든 자연수 $n$에 대하여 정 $3 \cdot 2^n$각형, 정 $4 \cdot 2^n$각형, 정$5 \cdot 2^n$각형, 정$6 \cdot 2^n$ 및 정$15 \cdot 2^n$각형도 작도 가능함을 알 수 있다. 1796년 독일의 수학자 Gauss는 소수개의 변을 가지는 정다각형이 작도 가능할 필요충분조건은 그 변의 수가 Fermat의 수, 즉 $F_n = 2^{2^n} + 1$의 형태의 소수임을 보임으로써, 일반적인 정$n$각형이 작도 가능일 경우에 대한 해를 제시하였다.[10] 그러나 위의 해를 제시한 Gauss는 작도 가능한 경우만을 알았을 뿐 실제의 작도방법은 알지 못했던 것으로 알려지고 있다. Gauss의 정리에 의해 정칠각형은 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 이용하여 작도 불가능함을 알 수 있다.

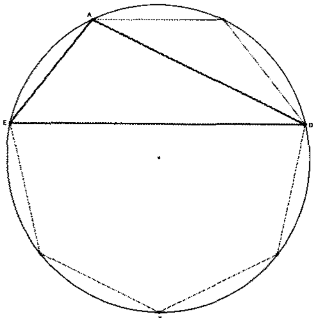
이러한 역사적 배경을 바탕으로 본 절에서는 앞 절에서 소개한 Apollonius의 symptom과 이를 활용한 Abū Sahl의 정칠각형의 작도에 관한 도전을 확인해 보고, 다음 절에서 GSP라는 소프트웨어를 통한 정칠각형 작도 문제에 대해 체험학습을 해봄으로써 초등기하적인 방법만이 알려졌던 당시에 Apollonius는 과연 어떻게 그와 같은 symptom을 발견하였을까? 라는 지극히 자연스런 문제 발견의 의미를 생각해 볼 기회를 갖고자 한다.

<그림 4>에서 원 $EAD$의 호 $\widehat{EA}$에 대한 선분 EA는 정칠각형의 한 변이며

$$\widehat{AD} = 2\widehat{EA}$$

라 가정한다.

10) 정$n$각형이 작도 가능이다. $\Leftrightarrow$ $n = 2^k P_1 P_2 \cdots P_m$
(단, $P_1, P_2, \cdots, P_m$은 서로 다른 Fermat의 소수 $F_n$, $k \geq 0$, $k$는 정수)



<그림 4> 원에 내접하는 정칠각형

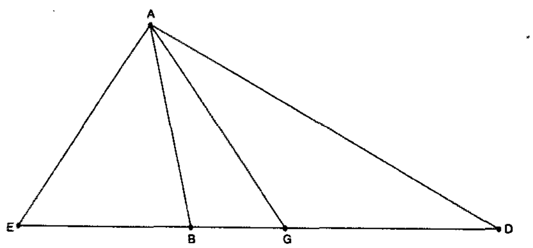
이때 $\widehat{EAD}=3\widehat{EA}$, $\widehat{EKD}=4\widehat{EA}$ 을 얻는다. 따라서

$$\angle A=4\angle D, \quad \angle E=2\angle D$$

이다.

그러므로 정칠각형의 작도문제는 내각의 크기의 비가 4 : 2 : 1인 삼각형의 작도문제로 귀착된다.

아래의 <그림 5>처럼 $\angle B=2\angle G=4\angle A$를 만족하는 $\triangle ABG$를 그렸다고 하자.




<그림 5> 선분의 분할

이때 변 $BG$를 양방향으로 연장하여

$$\overline{DG}=\overline{GA},\ \overline{EB}=\overline{BA}$$

를 만족하는 점 $D$, $E$를 위의 <그림 5>처럼 잡아 $\triangle AED$를 만들면

$$\angle EAD=2\angle E=4\angle D \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

임을 쉽게 알 수 있다.

위의 ①로부터

$$\triangle ABG \backsim \triangle DBA, \quad \triangle AEB \backsim \triangle GEA.$$

따라서

$$\overline{BA}:\overline{DB}=\overline{BG}:\overline{BA},\ \overline{EA}:\overline{GE}=\overline{EB}:\overline{EA}.$$

즉

$$\overline{BA}^2=\overline{DB}\cdot\overline{BG},\ \overline{EA}^2=\overline{GE}\cdot\overline{EB}. \quad \cdots\cdots \text{②}$$

한편 $\triangle AEB$는

$$\overline{BE}=\overline{BA} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

인 이등변삼각형이므로 $\triangle GEA$도

$$\overline{GA}=\overline{EA} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

인 이등변삼각형이다.

그런데 $\overline{GD}=\overline{GA}$, $\overline{BE}=\overline{BA}$이므로 ②, ③ 및 ④로부터

$$\overline{EB}^2=\overline{BD}\cdot\overline{BG},\ \overline{GD}^2=\overline{EG}\cdot\overline{EB} \text{[11)]} \cdots \text{⑤}$$

를 얻을 수 있다.

이상을 종합하여 Berggren(1986)에서 소개한 다음의 정칠각형 작도법을 지금부터 증명해 보일 것이다.

**정칠각형 작도법 : 선분 $ED$가 주어졌을 때, 조건 ⑤를 동시에 만족하는 점 $B$, $G$를 정할 수 있다면**

$$\overline{GD}=\overline{GA}=\overline{EA} \quad \cdots\cdots\cdots \text{⑥}$$

**를 만족하는 점 $A$를 택할 수 있으므로, $\triangle DEA$의 외접원상에 $\overline{EA}$와 등간격으로 점을 잡아나가면 정칠각형을 얻을 수 있다.**

**증명.** ⑤의 두 번째 등식과 ⑥으로부터

$$\overline{EA}^2=\overline{EG}\cdot\overline{EB}, \text{ 즉 } \overline{EG}:\overline{EA}=\overline{EA}:\overline{EB}$$

이므로

$$\triangle EGA \backsim \triangle AEB. \quad \cdots\cdots\cdots \text{⑦}$$

그런데 ⑥으로부터 $\triangle EGA$는 이등변삼각형이므로

11) $ac=b^2$ & $a<c$이면 $a<b<c$이다. 왜냐하면, 만약 $b<a$이면 $b^2<a^2$. 여기서 $c-a=d$로 두면 $b^2=ac=a^2+ad>a^2$으로 되어 모순이다. 따라서 $a<b$이다. 마찬가지로 만약 $b>c$이면 $b^2>c^2$이다. 이때 $c-a=d$로 두면 $b^2=ac=c^2-cd<c^2$으로 되어 모순이다. 따라서 $b<c$이다. 이상을 종합하여 $a<b<c$임을 알 수 있다(祭藤 憲, 2008).

$\triangle AEB$도 이등변삼각형이다. 그러므로 $\overline{BE}=\overline{BA}$이며, 이 사실과 ⑤의 첫 번째 등식으로부터

$$\overline{BA}^2=\overline{DB}\cdot\overline{BG}$$

즉

$$\overline{BG}:\overline{BA}=\overline{BA}:\overline{DB}$$

가 성립한다. 따라서

$$\triangle BGA \backsim \triangle BAD \quad \cdots\cdots\cdots \text{⑧}$$

따라서 ⑦과 ⑧로부터

$$\angle EAD=2\angle E=4\angle D$$

가 성립한다. 이상으로부터 $\triangle DEA$의 외접원 상에 $\overline{EA}$와 등간격으로 점을 잡아나가면 정칠각형을 얻을 수 있음을 알 수 있다. ◆

3. GSP를 활용한 Abū Sahl의 정칠각형 작도법의 근사구현

이 절에서는 위에서 언급한 정칠각형 작도법에서 조건 ⑤를 동시에 만족하는 점 $G, B$를 찾는 문제에 대한 Abū Sahl의 방법과 Archimedes의 방법에 대해 고찰해 볼 것이다.

(1) Abū Sahl의 방법 :

선분 $ED$를 <그림 6>과 같이 조건 ⑤를 동시에 만족하도록 점 $B$, $G$로 나누었다고 하자.

또, 선분 $ED$에 수직인 선분 $ABD$로서

$$\overline{AB}=\overline{BG},\ \overline{BZ}=\overline{GD}$$

를 만족하는 것을 그어서 직사각형 $BZTE$를 만든다.

이때

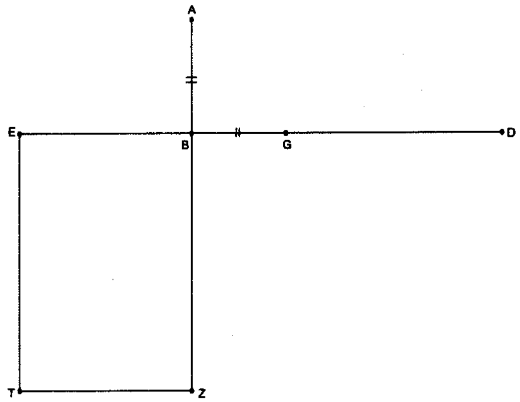
$$\overline{ZA}\cdot\overline{AB}=\overline{DB}\cdot\overline{BG}=\overline{BE}^2,$$
$$\overline{AB}=\overline{BG},$$
$$\overline{BE}=\overline{TZ}$$

이므로

$$\overline{ZA}\cdot\overline{BG}=\overline{TZ}^2$$

이 성립하며, 이는 점 $T$가 점 $A$를 꼭짓점으로 매개변수(parameter)[12]가 $\overline{BG}$인 포물선위에 놓여있음을 말하고 있다.(<그림 6>와 부록의 <그림 11> 참조)

12) 참고문헌 (Berggren,1986), p. 75 참조




<그림 6> 점 $T$의 자취구하기

한편

$$\overline{GD}^2=\overline{EG}\cdot\overline{EB},\quad \overline{GD}=\overline{BZ}=\overline{ET}$$

로부터 $\overline{EG}\cdot\overline{EB}=\overline{ET}^2$를 얻을 수 있으며, 이는

$$\overline{ET}^2=\overline{EB}\cdot(\overline{EB}+\overline{BG})\ \cdots\cdots\cdots \text{⑨}$$

로 고쳐 쓸 수 있으므로, 이로부터 점 $T$는 점 $B$를 꼭짓점으로 횡단변(transverse side)과 매개변수(parameter)가 모두 $\overline{BG}$인 쌍곡선위에 놓여있음을 알 수 있다.(부록의 <그림 11> 참조)

실제로 ⑨는 선분 $EG$를 품는 직선을 $x$축으로, 선분 $BG$의 중점 $O$를 지나고 $x$축에 수직인 직선을 $y$축으로 잡으면

$$\begin{aligned} y^2 &= \overline{ET}^2 \\ &= \overline{EB}^2+d\cdot\overline{EB} \\ &= \left(x-\frac{d}{2}\right)^2+d\left(x-\frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$
$$(d:=\overline{BG})$$

로 나타내어진다.

따라서

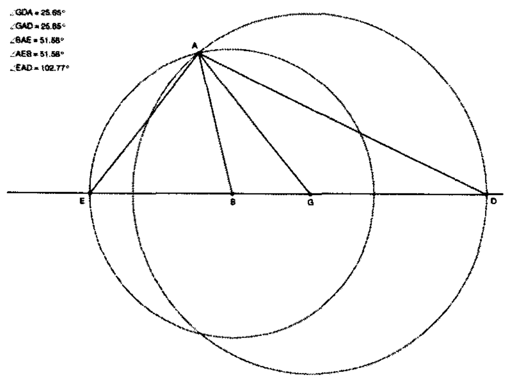
$$x^2-y^2=\frac{d^2}{4},\ \text{즉}\ \frac{x^2}{d^2/4}-\frac{y^2}{d^2/4}=1$$

이 성립한다. 그러므로 이 쌍곡선의 초점 $(c,0)$, $(-c,0)$는 $c^2=a^2+b^2=\dfrac{d^2}{2}$이므로 $\left(\dfrac{d\sqrt{2}}{2},0\right)$,

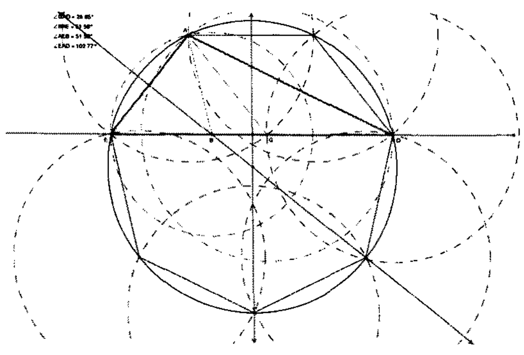
$\left(-\dfrac{d\sqrt{2}}{2}, 0\right)$임을 알 수 있다.

다음으로 이와 같은 포물선과 쌍곡선의 교점으로 점 $T$(위의 그림 참조)를 찾아, 이를 이용하여 두 선분 $\overline{GD}$와 $\overline{EB}$를 $\overline{GD}=\overline{ET}$, $\overline{EB}=\overline{TZ}$ 로 정함으로써 조건 ⑤를 동시에 만족하는 선분 $EBGD$를 얻을 수 있다.

여기서 아래의 <그림 7>처럼 점 $G$를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{GD}$인 원과 점 $B$를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{BE}$인 원을 그려 그 교점을 $A$라 하면, $\overline{AE}$는 $\triangle AED$의 외접원에 접하는 정칠각형의 한 변이 된다.(<그림 8> 참조)



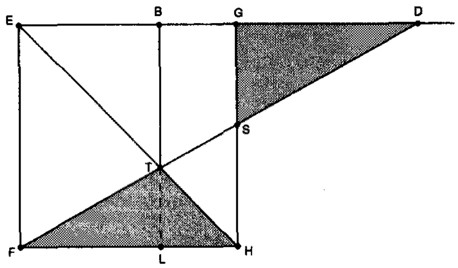

<그림 7> 정칠각형의 한 변 $\overline{AE}$



<그림 8> Abū Sahl의 정칠각형 작도법의 GSP 구현

(2) Archimedes의 방법 :

Archimedes의 해법은 먼저 선분 $EG$를 잡아 $\overline{EG}$를 한 변의 길이로 하는 정사각형 $EFHG$를 아래의 그림처럼 그린다. 이때 대각선 $EH$를 그어 <그림 9>에서 나타낸 두 개의 빗금 친 부분의 넓이가 같도록 직선 $FD$를 작도한다. 여기서 점 $B$는 선분 $EH$와 $FD$의 교점에서 선분 $EG$에 내린 수선의 발이다. 이 경우에 네 점 $E$, $B$, $G$, $D$는 조건 ⑤를 동시에 만족한다.




<그림 9> Archimedes의 방법

물론 이 작도는 눈금이 없는 자와 컴퍼스만으로는 작도불능이다(祭藤 憲, 2008; Berggren, 1986).

실제로 $\triangle DSG=\triangle TFH$이면 조건 ⑤를 동시에 만족하는 이유는 아래와 같다.

$$\triangle DSG=\triangle TFH$$

이면

$$\overline{GD}\cdot\overline{GS}=\overline{TL}\cdot\overline{FH},$$

즉

$$\overline{EG}:\overline{GD}=\overline{GS}:\overline{TL} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑩$$

이 성립한다.

그런데 $\triangle GDS \backsim \triangle LFT$이고 $\overline{LF}=\overline{BE}$이므로

$$\overline{GS}:\overline{TL}=\overline{GD}:\overline{EB} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑪$$

⑩과 ⑪로부터

$$\overline{EG}:\overline{GD}=\overline{GD}:\overline{EB}$$

가 성립한다. 또, $\triangle DBT \backsim \triangle LFT$이며 $\overline{LF}=\overline{BE}$이므로

$$\overline{BT}:\overline{TL}=\overline{DB}:\overline{BE} \quad \cdots\cdots\cdots ⑫$$

그런데 $\overline{EH}$는 정사각형 $EFHG$의 대각선이므로

$$\overline{BT}=\overline{EB},\quad \overline{TL}=\overline{LH}=\overline{BG}$$

이다. 따라서 ⑫로부터

$$\overline{EB}:\overline{BG}=\overline{BD}:\overline{EB}$$

도 성립한다.

**참고.** Archimedes의 방법을 나타내는 <그림 9>에서

$$F(0,0),\ H(5,0),\ E(0,5),\ G(5,5)$$

로 두고, $D(x_0,5)$ 이라 하면

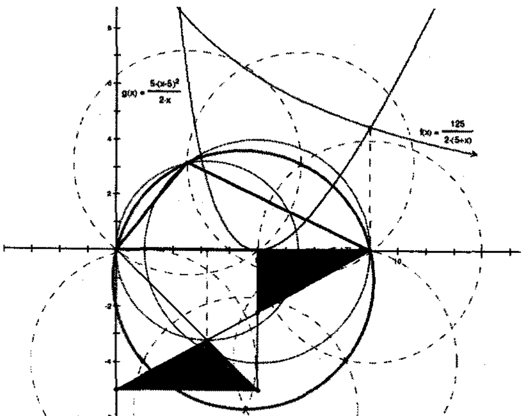
$$\triangle DSG=\frac{1}{2}\cdot\frac{5(x_0-5)^2}{x_0}\ ,$$

$$\triangle TFH=\frac{1}{2}\cdot\frac{125}{x_0+5}$$

이므로, 조건 $\triangle DSG=\triangle TFH$로부터 $x_0$는 두 곡선

$$y=\frac{5(x_0-5)^2}{x_0},\quad y=\frac{125}{x_0+5}$$

의 교점의 $x$좌표이다. 따라서 Archimedes의 작도법에 따라 아래 <그림 10>와 같이 원에 내접하는 정칠각형 작도의 근사구현이 가능하다.



<그림 10> Archimedes의 정칠각형 작도법의 GSP구현

4. 교육적 시사점

장혜원(1997)은 작도문제는 기존의 기하 지식을 재인식하고 재조직할 기회를 가지게 하고 전체적인 구조 하에서 문제를 해결해야 하므로 통찰력을 키울 수 있는 좋은 학습제재일 뿐 아니라 학습자의 활동에 의해 수학적 지식을 습득한다는 활동주의 교육이론을 실행하기에 좋은 학습제재임을 밝혔으며, 한인기(2008)는 작도문제의 해결 방법, 다양한 작도문제에 대한 탐구 및 활용방안에 대한 연구들은 폭넓게 진행되었지만, 작도문제의 해결에 관련된 역사적 자료들의 수집 및 분석에 관련된 연구들은 매우 빈약함을 지적하고 있다.

2007 개정수학과교육과정에서 작도는 중학교 1학년에서 하나의 소단원으로 다루어지고 있고, 고등학교 이차곡선 단원에서도 몇몇 교과서에서 도입부분에 이차곡선에 대한 작도를 제시하고는 있으나, 중학교에서 학습한 작도단원과 고등학교 이차곡선작도의 연관성은 대부분의 교과서에서 다루지 않고 있다. 김성은(2002)은 작도와 연계한 평면 논증 기하 학습 자료 및 지도안 개발 연구에서 다른 수학 내용들이 같은 주제에 따라 학년별로 위계가 있는 것에 비해 중학교 기하 영역 중 작도는 그러한 위계성이 비교적 약해 보임을 지적하였다.

본 논문에서 이차곡선을 활용한 Abū Sahl과 Archimedes의 정칠각형 작도방법을 GSP로 근사구현하여 제시한 것은 눈금 없는 자와 컴퍼스로는 작도 불가능한 정칠각형이 이차곡선을 활용하여 작도가 가능하다는 사실을 보여줌으로써 중학교 작도와 고등학교의 작도의 연관성을 제시하여 작도단원의 위계성을 보여줌은 물론이고 이러한 사실을 보이기 위해 소개한 GSP 작도방법은 이차곡선의 논증기하 측면의 고등학교 교수 및 학습 소재로써도 충분히 가치가 있다고 여겨진다. 특히, Abū Sahl의 정칠각형 작도법을 발견하는 과정을 살펴보면 이미 작도되었다고 가정한 후에 추론한 방법인 분석법의 전형적인 형태를 보이고 있다.

류희찬·제수연(2009)은 역동적 기하프로그램인 GSP와 같은 소프트웨어는 지필환경의 한계로 인해 사용하기 힘들었던 분석법을 보통 수준의 고등학교 학생들이 자유롭게 사용할 수 있도록 하는 강력한 도구가 될 수 있음을 보였고, 남선주(2006)는 역동적 기하 환경에서 분석법을 활용한 문제 해결과 증명 학습은 학생들의 문제 해결력, 증명 능력 및 태도에 긍정적인 영향을 미침을 제시하였다. 지금과 같이 컴퓨터와 소프트웨어의 보급이 충

분히 이루어진 교실환경에서는 이차곡선을 활용한 작도는 학생들에게 충분히 스스로 활동할 수 있는 소재가 될 수 있고, 이미 중학교에서 다룬 작도에 대한 개념을 더 심화시키고 폭을 확장 시킬 수 있는 좋은 방법이 될 것이다.

본 연구를 통하여 현행 교육과정에 대해 다음과 같은 교육적 시사점을 도출할 수 있을 것이다.

첫째, 고등학교 학생이 중학교 과정에서 학습하였던 작도에 대한 인식을 새롭게 하고, 작도 문제를 해결하는 과정에서 학생들이 수학을 만들어 가는 과정을 경험하게 할 수 있다.

둘째, 논증기하 증명지도 과정에서 역동적 기하프로그램인 GSP를 활용한 분석법 지도의 효과가 나타날 것으로 기대된다.

셋째, 정칠각형 작도과정에서 이차곡선의 성질이 활용되므로, 이차곡선을 활용한 작도문제가 고등학교 교육과정과 연계가 가능할 것으로 기대된다.

넷째, 대수적인 식으로 많이 다루고 있는 이차곡선의 기하학적인 측면의 활용을 통해 기하와 대수에 걸친 수학적 아이디어들이 조화롭게 결합되는 과정을 보여줄 수 있을 것이다.

## Ⅲ. 결 론

수학의 역사에 있어 난제들은 수학의 발전을 이끄는 원동력이었다. Fermat의 마지막 정리를 해결하기 위해 도전하였던 많은 수학자들에 의해 새로운 이론들이 탄생하였듯이, 작도불능문제도 수많은 수학자들의 도전에 의해 해결되는 과정에서 많은 수학적 이론을 탄생시켰으며, 해결과정에서 기하학 보다는 오히려 대수학 발전에 큰 역할을 하였다. 또한 눈금없는 자와 컴퍼스로 작도 불가능한 배적문제를 포물선을 활용하여 해결을 시도한 Hippocrates의 방법, 눈금 없는 자와 컴퍼스로 작도 불가능했던 정칠각형을 포물선과 쌍곡선을 활용하여 작도 가능하다고 주장한 Abū Sahl의 방법 등은, 작도가 현행 중등수학과교육과정에서 하나의 독립된 작은 소단원 주제가 아닌 기하 전체에 연결성을 줄 수 있는 좋은 소재가 될 수 있음을 알 수 있다.

본 논문에서는 이차곡선을 논증기하 측면에서 활용한 정칠각형의 작도법에 관한 Abū Sahl의 해석을 살펴보고 그 증명법을 제시하였으며, 이를 근거로 원뿔곡선을 이용한 Abū Sahl와 Archimedes의 정칠각형 작도법을 GSP 활용하여 구현하였다. 작도문제는 기존의 기하지식을 재인식하고 재조직할 기회를 가지게 하고 통찰력을 키울 수 있는 좋은 학습제재이므로 고등학교 이차곡선의 지도에 있어서도 이차곡선을 재인식하고 재조직할 기회를 가지게 하는 이차곡선을 활용한 작도의 학습도 의미가 있을 것이다.

이러한 측면에서 본 연구에서 제시한 이차곡선을 활용한 정칠각형 작도에 대한 탐구는 역동적 기하프로그램인 GSP를 활용하여 고등학교 과정에서 논증기하를 다룰 수 있는 이차곡선에 대한 새로운 활용방법을 제공하고 있으며, 이와 같은 교수 학습 자료들의 개발은 수학을 가르치는 교사들에게도 중학교 작도의 중요성을 다시 인식할 수 있는 기회를 제공하고, 학생들은 이러한 탐구활동을 통해서 중등학교 수준의 수학지식으로써도 가치있는 수학탐구를 할 수 있는 경험을 얻을 수 있을 것으로 기대한다.

## 참 고 문 헌

김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤 (2006). 수학교육과정과 교재연구, 서울: 경문사.

김성은 (2002). 작도와 연계한 평면 논증 기하 학습 자료 및 지도안 개발 연구, 한국교원대학교 석사학위 논문.

남선주 (2006). 역동적 기하 환경에서 분석법을 활용한 증명 학습에 대한 연구, 한국교원대학교 석사학위 논문.

류희찬 · 제수연 (2009). 역동적 기하환경에서 파푸스의 분석법을 이용한 이차곡선의 작도활동에서 나타난 학생들의 수학적 발견과 정당화, 한국교원대학교 교원교육, **25(4)**, 168-189.

박진석·김향숙 (2011). 해석기하학개론[제2판], 서울: 경문사.

장혜원 (1997). 중학교 기하 영역 중 작도단원에 관한 고찰. 대한수학교육학회 논문집, **7(2)**, 327-336.

한인기 (2008). '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정다각형의 작도 방법 연구. 한국수학사학회지, **21(2)** 119-134.

홍성관·박철호 (2007). 이차곡선 학습에서 고등학생들의 오개념 분석, 대한수학교육학회 학교수학, **9(1)**, 119-139.

祭藤 憲, 正五角形と正七角形の作圖, 數學教育, **2008**, **8**, 28-33.

Berggren, J. L. (1986). *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, New York,

Thabit Ibn Qurra, On Inscribing a Regular Heptagon in a Circle, props. 17, 18, California State Univ. at LA home page. (key word ; Henry, heptagon, theorem 17).

Henry Mendell, Archimedes and the Regular Heptagon, according to Thabit Ibn Qurra, California State Univ. at LA home page. (key word ; Henry, heptagon, theorem 17).

# The Approximate Realization of Abū Sahl's Geometric Construction about a Heptagon through GSP using Conic Sections

**Kim, Hyang Sook**
School of Computer Aided Science, Institude of Basic Science, Inje University, Kimhae 621-749, Korea
E-mail : mathkim@inje.ac.kr

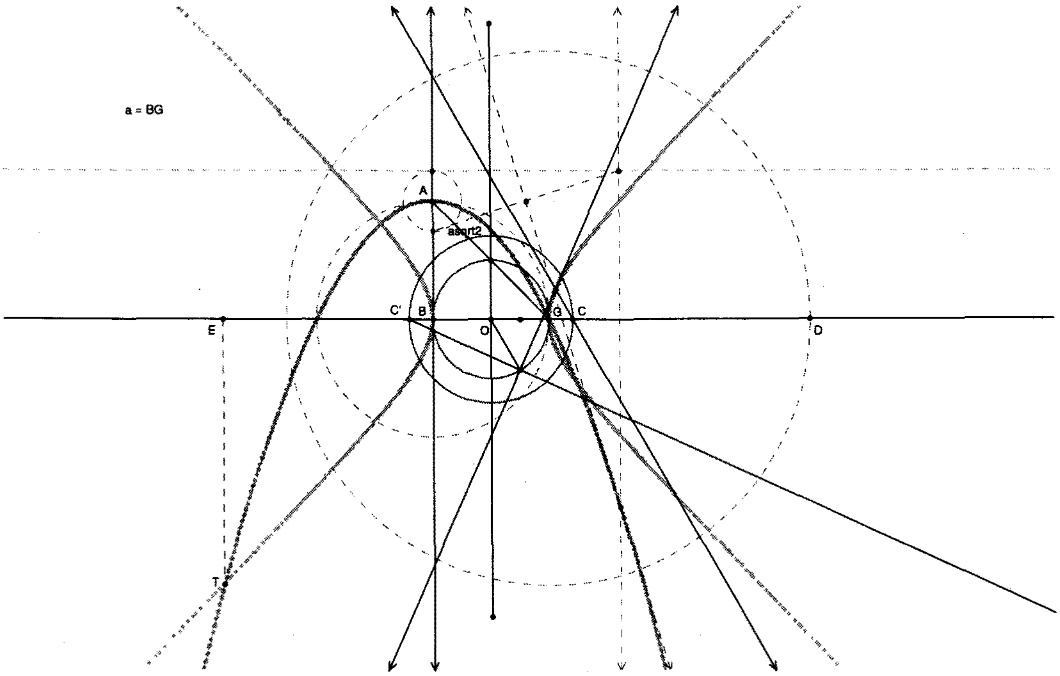
**Pak, Jin Suk**
Graduate school of Education, Daegu University, Gyeongsan 712-714, Korea
E-mail : jspak@knu.ac.kr

**Ha, Hyoung Soo**
Daegu Science High School, Daegu 706-042 , Korea
E-mail : 9429ha@hanmail.net

The geometry field in the current high school curriculum deals mainly with analytic geometry and the reference to logic geometry leaves much to be desired. This study investigated the construction on a heptagon by using conic sections as one of measures for achieving harmony between analytic geometry and logic geometry in the high school curriculum with the Geometer's Sketchpad(GSP), which is a specialized software prevalent in mathematics education field and is intended to draw an educational suggestion on it.

* ZDM Classification : G14
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97G40
* Key Words : construction, heptagon, GSP, conic sections, quadratic curves

**<부록> Abū Sahl의 정칠각형 작도법의 근사구현을 위한 GSP를 활용한 포물선과 쌍곡선의 작도**




<그림 11> 포물선과 쌍곡선의 작도