

## 자연수 곱셈 계산법의 역사적 발달 과정에 대한 고찰

정 연 준\*

본 논문은 자연수 곱셈 계산법의 역사적 발달 과정을 살펴보고, 이를 바탕으로 하여 교육적 시사점을 도출하고자 하였다. 역사적 분석의 결과, 곱셈 계산법은 큰 수를 작은 수로 분해하여 곱함으로써 곱셈을 보다 쉽게 수행하고자 하는 시도의 결과물이며, 곱하는 수와 곱해지는 수의 분해는 기수법 구조를 반영하여 두 가지 방식으로 이루어지며, 현재의 곱셈 계산법은 두 가지 분해 과정을 바탕으로 한 부분곱들의 계산 과정을 체계화한 것이다. 곱셈 계산 알고리즘의 확립과 계산법의 원리에 대한 명확한 설명 사이에는 상당한 지체가 존재하였으며, 곱셈 알고리즘의 적용에 난점을 일으키는 0이 포함된 곱셈에 대한 이해의 변화가 원리의 명확화에서 중요한 역할을 하였다는 것이 발견되었다. 이러한 분석 결과를 토대로 하여, 우리나라 교과서의 곱셈 계산법 지도 방식을 살펴보고 교육적 시사점을 제시하였다.

### 1. 서론

자연수의 곱셈 계산법은 일정한 순서에 따라서 9이하의 숫자들 사이의 곱셈, 구구단을 실행하고 그 결과를 소정의 위치에 적으면 큰 수의 곱셈을 간단하게 계산할 수 있게 한다. 최근 개정된 교육과정에서는, 덧셈에 대한 곱셈의 분배 법칙, 곱셈의 결합 법칙 등을 통해서 진행되는 구구단의 범위에 들지 않는 곱셈 계산의 원리를 학생들이 이해하도록 지도해야 한다고 명시하고 있다(교육과학기술부, 2009: 85). 실제로 초등학교 수학 교과서에서 세로셈 형태의 지필 계산법을 숙달시키는 부분이 이전에 비하여 많이 축소되었다.

곱셈에 관련된 선행 연구들은 곱셈 개념에 초점을 맞추는 한편, 구구단에 의해 계산될 수 있는 곱셈을 주로 논의하였다(강홍규, 2009; 김남균 · 김지은, 2009; Drake & Barlow, 2008 Flowers, Krebs & Rubenstein, 2006; Sherin & Fuson, 2005).

곱셈 개념을 이해하였다고 해도, 구구단을 넘어서는 곱셈을 효율적으로 계산하는 것은 별개의 영역에 해당하는 주제이다. 기본적으로 곱셈 개념을 적용하는 과정을 수의 기수법적 구조와 같은 다른 지식과 연결시킬 수 있어야 한다. 그런데, 구구단을 넘어서는 곱셈을 다룬 연구는 많지 않다. 전형옥 · 이경화(2008)는 1학년 학생이 곱셈에 대한 비형식적 지식을 이용하여 두 자리 수의 곱셈을 어떻게 다루는지를 논의하였고, Berg(2001)는 역사 속에서 나타난 여러 곱셈 계산법을 살펴보고, 다양한 곱셈 계산법을 학생들에게 제시하는 지도 방법과 수업 자료를 제시하였다. 강홍규 · 심선영(2010)은 다양한 곱셈 계산법의 지도를 통한 곱셈 계산법 원리 이해의 가능성을 탐색하였다. 이는 곱셈 계산법에 대한 추가적인 연구의 필요성이 크다는 것을 뜻한다.

수학적 주제의 역사적 발달 과정을 살펴보는 것은 학교 수학에서 가르치는 내용을 보다 잘 이해하는 방법 중 한 가지이다(우정호 외 5인,

\* 충남대학교 (yjyoung@cnu.ac.kr)

2006). Berg(2001)는 곱셈 계산법의 역사를 살펴 보았지만, 그의 연구는 지금 사용하는 계산법과 다른 과거의 곱셈 계산법을 열거하고 그 특징을 간단하게 설명하는데 머물렀다. 학교 수학의 내용을 보다 잘 이해하기 위해 실행되는 역사적 분석은 연대기적 사실을 열거하는 것이 아니라, 학교 수학에서 제시되어 있는 관련된 지식들을 수학적 사고의 형성이라는 관점에서 재해석할 수 있는 틀을 이끌어내는 작업이다. 본 논문은 이러한 관점에서 자연수 곱셈 계산법의 역사적 발달 과정을 분석함으로써, 세로셈 형태로 정리된 곱셈 계산법의 원리들과 원리들 사이의 관계를 보다 발생적으로 설명하는 관점을 구체화하고 이를 토대로 교육적 시사점을 제시하고자 한다.

Smith(1925), Cajori(1917), Flegg(1983), Jackson(1906) 등은 고대 이집트부터 19세기까지 자연수 곱셈 계산법을 역사적인 관점에서 분석하였다. 특히 Cajori(1917)는 역사상 중요한 산술 교재들을 광범위하게 살펴보고 그 내용을 소개하였다. 본 논문은 이들의 연구를 토대로 하지만, 여기에 더하여 Cajori가 중요하게 다루었던 역사적 교재들 중에서 시대별로 대표적인 교재의 원문을 구하고 이를 교육적 관점에서 분석하고자 한다.<sup>1)</sup> 역사적인 산술 교재들은 수학사 연구자들에 의해 정리된 곱셈 계산법의 역사를 교육적인 의도를 가지고 분석하는데 큰 도움이 될 것이다.

## II. 자연수 곱셈 계산법의 역사적 발달 과정 분석

### 1. 고대 시대의 곱셈 계산법

체계적인 곱셈 계산법에 대한 기록은 대략 4000

여 년 전의 고대 이집트와 바빌로니아 시대까지 거슬러 올라간다. 곱셈에 대한 최초의 기록이 남겨진 이 시기에 이미 곱셈, 즉 반복되는 덧셈을 효과적으로 실행하는 나름의 방안이 사용되었다.

1	17	고대 이집트인들은 2배하
2	34	기와 10배하기를 이용하여
4	68	곱셈을 하였다(Flegg, 1983:
8	136	90-2). 고대 이집트인들의 곱
15	255	셈법은 <그림 II-1>에 제시

[그림 II-1] 고대 이집트인들의 곱셈 곱한 결과를 왼쪽에 몇 번 곱하였는지를 적고 두 줄에 있는 정보를 적절히 이용하는 것이다.  $17 \times 15$ 를 계산한다면, 제일 먼저 한 쪽에 1을 적고, 다른 쪽에 17을 적은 다음 계속해서 2배를 해 나간다. 이렇게 하면 왼쪽에 있는 수들은 오른쪽에 있는 수들이 17의 몇 배인지를 나타낸다. 8을 두 배하면 15가 넘기 때문에 8에서 멈추고, 이제 위에 있는 수들을 결합하여 15를 만드는 방법을 찾는다.  $1+2+4+8=15$ 이다.<sup>2)</sup> 이렇게 곱하는 수를 만드는 방법을 찾으면, 사용된 숫자들과 같은 줄에 있는 오른쪽 수들을 모두 더하여 나온 255가  $17 \times 15$ 의 답이다. 고대 이집트인들의 2배법은 15를 2의 거듭제곱에 따라서 분해하고 각각을 15와 곱한 다음 이들을 모두 더하여 곱셈을 계산한 것이다. 곧  $17 \times 15 = 17 \times (1+2+4+8)$ 를 이용한 것이다.  $17 \times 15 = 17 \times (1+4+10)$ 를 이용할 수도 있는데, 이때 10배하기가 사용된다. 10배하기는 숫자 기호들을 한 단위 더 큰 기호들로 바꾸는 것에 의해 진행된다. 고대 이집트인들이 사용한 숫자에는 1, 10, 100 등과 같은 단위를 표현하는 기호만이 있었고 각각의 단위가 반

1) 한 인터넷 사이트([www.archive.org](http://www.archive.org))에서 오래 전에 출판되어 저작권이 없는 책의 원문을 직접 볼 수 있다. 본 연구자는 이 사이트에서 17세기 초반부터 20세기 초반 사이에 이르는 기간의 산술 교본의 내용을 확인할 수 있었다. 구체적인 사항은 다음 절의 각주 내용을 참고하시오.

2) 이진법으로 모든 수를 표현할 수 있기 때문에 이러한 결과가 항상 나온다.

복되는 횃수를 나타내는 기호가 없었다. 이들은 각각 일의 단위를 세 번, 십의 단위를 두 번 반복하여 적고 백의 단위를 한 번 적음으로써 123을 나타냈다. 이러한 기수법 체계를 지닌 고대 이집트인들에게는 주어진 단위들을 그만큼 더 기록하는 2배하기와 한 단위 더 큰 기호로 바꾸는 10배하기는 효율적인 곱셈 방법이였다.

비슷한 시기의 고대 바빌로니아인들은 곱셈표를 사용하였다(Flegg, 1983: 92-3). 60진법을 사용하였기 때문에 고대 바빌로니아인들의 곱셈표는 59×59에 이르는 곱셈의 결과, 곧 3000개가 넘는 계산 결과를 담아야 했고, 이들은 압축된 곱셈표를 사용하였다. 이들의 곱셈표는 20까지는 연속적으로 제시되어 있었고 20보다 큰 곱셈은 30, 40과 같이 10의 배수만 포함하였다. 예를 들어, 18단은 18×1, 18×2, ..., 18×20, 18×30, 18×40, 18×50, 18×60와 같이 구성되어 있다. 18×47의 경우 표에서 18×7과 18×40에 해당하는 결과를 찾아서 더하였다. 이는 덧셈을 이용하여 곱하는 수를 분해하여 각각에 대하여 곱하고 이들을 더한 것으로, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 적용한 것이다. 이러한 점은 고대 이집트인 역시 동일하다.

고대 그리스인들은 별도의 숫자 기호 대신 자신들이 사용하는 문자를 이용하여 수를 표시하였다

<표 II-1> 고대 그리스인들의 곱셈표(Flegg, 1983: 93)

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\epsilon$	$\varsigma$	$\zeta$	$\eta$	$\theta$	$\iota$
$\beta$	$\delta$	$\varsigma$	$\eta$	$\iota$	$\iota\beta$	$\iota\delta$	$\iota\varsigma$	$\iota\eta$	$\kappa$
$\gamma$	$\varsigma$	$\theta$	$\iota\beta$	$\iota\epsilon$	$\iota\eta$	$\kappa\alpha$	$\kappa\delta$	$\kappa\zeta$	$\lambda$
$\delta$	$\eta$	$\iota\beta$	$\iota\varsigma$	$\kappa$	$\kappa\delta$	$\kappa\eta$	$\lambda\beta$	$\lambda\varsigma$	$\mu$
$\epsilon$	$\iota$	$\iota\epsilon$	$\kappa$	$\kappa\epsilon$	$\lambda$	$\lambda\epsilon$	$\mu$	$\mu\epsilon$	$\nu$
$\varsigma$	$\iota\beta$	$\iota\eta$	$\kappa\delta$	$\lambda$	$\lambda\varsigma$	$\mu\beta$	$\mu\eta$	$\nu\delta$	$\xi$
$\zeta$	$\iota\delta$	$\kappa\alpha$	$\kappa\eta$	$\lambda\epsilon$	$\mu\beta$	$\mu\theta$	$\nu\varsigma$	$\xi\gamma$	$o$
$\eta$	$\iota\varsigma$	$\kappa\delta$	$\lambda\beta$	$\mu$	$\mu\eta$	$\nu\varsigma$	$\xi\delta$	$o\beta$	$\pi$
$\theta$	$\iota\eta$	$\kappa\zeta$	$\lambda\varsigma$	$\mu\epsilon$	$\nu\delta$	$\xi\gamma$	$o\beta$	$\pi\alpha$	$\rho$
$\iota$	$\kappa$	$\lambda$	$\mu$	$\nu$	$\xi$	$o$	$\pi$	$\rho$	

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\epsilon$	$\varsigma$	$\zeta$	$\eta$	$\theta$	$\iota$	$\kappa$	$\lambda$	$\mu$	$\nu$	$\xi$	$o$	$\pi$	$\rho$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\rho$	$\sigma$	$\tau$	$\upsilon$	$\phi$	$\chi$	$\psi$	$\omega$	$\mathcal{D}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	etc.					
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	2000	3000						
$M$	$\overset{\beta}{M}$	$\overset{\gamma}{M}$	etc.														
10,000	20,000	30,000															

[그림 II-2] 고대 그리스인들의 숫자(Cajori, 1917: 64)

다(Cajori, 1917; Flegg, 1983). 이들은 <그림 II-2>에 제시되어 있는 것처럼 각각의 문자를 수에 대응시키고 이들 문자를 조합하여 수를 표현하였다. 예를 들어 9821은  $\theta\omega\kappa\alpha$ 로 표현된다. 이러한 기수법은 1, 10, 100, 1000 등을 수 표현의 단위로 삼고 있어 십진법 체계라 할 수 있다. 그런데 10, 20, ..., 90과, 100, 200, ..., 900에서 해당하는 단위 10과 100의 반복된 횃수를 1에서 9까지의 수를 나타내는 문자를 이용하여 표현하지 못하고 있다. 대신 1000 단위의 수와 10000 단위의 수에서는 각 단위의 반복된 횃수가 1에서 9까지의 수와 연결되어 표현되어 있다.

이들은 10이하의 수끼리의 곱셈표를 만들어 곱셈 계산에 사용하였다(Flegg, 1983: 93-4). 예를 들어 가로 7번째 줄( $\zeta$ )과 세로 4번째 줄( $\delta$ ) 혹은 반대로 가로 4번째 줄( $\delta$ )과 세로 7번째 줄( $\zeta$ )의 교점에 해당하는  $\kappa\eta$  이 7×4의 곱이 된다. 이들은 이러한 곱셈표를 이용하여 큰 수의 곱셈을 계산하였다. 서기 5세기 후반에 활동한 한 학자는, 265×265을 다음과 같이 계산하였다(Cajori, 19하여: 65). 40000은 200과 200의 곱인데, 2와 2의 곱을 100과 100의 곱인 10000에 곱하여 구하고, 200과 60의 곱은 2와 6의 곱을 100과 10의 곱인 1000과 곱하여 구하, 2이다.3) 수를 자릿값에 따10나누어 곧 덧셈같이 한 곱셈의 분배법칙을 적용하여 계산하였을 뿐 아니라, 자릿값에 따10나누 수를 1에서 9까지의 기본 숫자와 10의 거듭제곱<의 분해1에서 곱셈의 교환법칙과 결합법칙을 이용하여 기본 숫자와 10의 거듭

$\overline{\sigma \xi \epsilon}$	2 6 5
$\overline{\sigma \xi \epsilon}$	2 6 5
$\overset{\delta}{M} \overset{\alpha}{M} \overset{\beta}{,} \overset{\gamma}{\tau} \overset{\alpha}{,}$	40000, 12000, 1000
$\overset{\alpha}{M} \overset{\beta}{,} \overline{\gamma \chi \tau}$	12000, 3600, 300
$\overset{\alpha}{,} \overline{\tau \kappa \epsilon}$	1000, 300, 25
$\overset{\zeta}{M} \overline{\sigma \kappa \epsilon}$	70225

[그림 II-3] 고대 그리스인의 곱셈법(Cajori, 1905: 65)

제품을 나누어 곱하여 계산한 2이다. 고대 로마인들도 곱셈표를 가지에서 있으며 그리스인들과 동일한 방식<의 곱셈을 하였다(Smith, 1925).

## 2. 인도의 곱셈 계산법

6세기에서 9세기 사이의 기간 동안 인도에서 위치기수법이 발달하였다(Kaplan, 1999). 인도인들은 이 시기 동안 위치기수법의 특징을 이용하는 곱셈 계산법도 함께 발달시켰다. 이들에 의해서 수를 이루는 일련의 숫자들 사이의 구구단 계산 결과를 적절한 위치에 적는 것에 의해 실행되는 곱셈 계산법이 고안되었다.

Cajori(1917: 96-97)에 의하면 인도인들의 곱셈법은 다음과 같다. 이들은  $57893411 \times 5$ 의

<b>289467055</b>	
<b>57893411</b>	<b>5</b>

[그림 II-4] 옛 인도인의 곱셈 계산 (1)

계산에서, 먼저 제일 왼쪽에 있는 5부터 곱하여  $5 \times 5 = 25$ 를 곱해지는 수 위에 적었다. 그 다음  $5 \times 7 = 35$ , 25에 3을 더해서 곧 25에서 5를 지우고 대신 8을 적어 285를 얻는다. 다음에  $5 \times 8 = 40$ ,  $4 + 5 = 9$ , 5 대신 9를 쓰고 이렇게 하

여 2890을 얻게 되는데, 이러한 과정을 계속해서 반복한다. 곱하는 수의 숫자가 여럿일 때에는 인도인들은 다음과 같이 계산하였다.  $324 \times 753$ 을 예로 들어보자. 먼저 곱하는 수를 곱해지는 수 아래에 적는데, 곱하는 수의 일의자리 숫자가 곱해지는 수의 가장 왼쪽 숫자 아래에 놓이게 한다. 그 다음 구구단 계산을 하는데,  $3 \times 7 = 21$ 을 곱해지는 수 위에 적는데, 1이 7, 곧 곱하는 수의 가장 왼쪽에 있는 숫자 위에 오게 한다. 그 다음  $3 \times 5 = 15$ 이며, 21에 1을 더하여 1을 2로 고치고 5를 오른쪽에 적어서 225. 그 다음  $3 \times 3 = 9$ 를 3의 위 곧 225의 오른쪽에 적어서 2259. 그 다음 곱하는 수를 한 칸 오른쪽으로 옮겨  $2 \times 7 = 14$ 를 7 위에 있는 25에 더하면 39이고, 따라서 2399.  $2 \times 5 = 10$ 을 5 위에 있는 9에 더하면 2399가 2409가 된다. 그리고  $2 \times 3 = 6$ 을 3의 위, 즉 2409의 옆에 적으면 24096. 곱하는 수를 한 칸 오른쪽으로 옮긴 다음,  $4 \times 7 = 28$ 을 7의 위에 있는 09에 더하면 37이며 따라서 24376. 같은 방식으로 계속하면 243972가 나온다.

<b>2259</b>	<b>24096</b>	<b>243972</b>
<b>324</b>	<b>324</b>	<b>324</b>
<b>753</b>	<b>753</b>	<b>753</b>

[그림 II-5] 옛 인도인의 곱셈 계산 (2)

옛 인도인들은 이전과 다르게, 한자의 십(十), 백(百)과 같은, 단위를 나타내는 기호를 사용하지 않고 단위의 개수 곧 10의 거듭제곱의 개수를 나타내는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 열 개의 숫자만을 이용하여 수를 표시하였다. 이들 숫자가 어떠한 단위가 몇 개 있는가를 나타내는지 숫자의 위치에 의해 결정되며, 동일한 숫자라도 위치가 다르면 다른 크기의 수를 나타낸다. 예를 들어, 333에서 3은 모두 무엇인가가 세 개 있다는 것을 뜻하지만 위치에 따라서 각

3) 고대 그리스인들은 때로는 숫자와 문자를 구분하기 위해 숫자로 사용된 문자 기호 위에 금을 긋기도 하였다.

각 일, 십, 백 단위가 세 개가 있다는 것을 뜻한다. 0은 중간에 해당되는 단위가 전혀 없을 때에도, 곧 빈자리가 있을 때에도 각 숫자가 어떤 자릿값을 나타내는지를 고정시키는 역할을 한다.<sup>4)</sup> 고대 인도인들은 위치기수법의 특성을 이용하여 곱셈 계산의 알고리즘적 성격을 강화하였다.  $a \times 10^{i-1}$  와  $b \times 10^{j-1}$  는 오른쪽 끝에서 각각  $i$  번째,  $j$  번째 자리에 0이 아닌 숫자  $a$ 와  $b$ 가 있으며, 둘을 곱한  $a_i \times b_j \times 10^{i+j-2}$  는  $a \times b$ 의 결과를  $i+j-1$  번째 자리부터 적으면 된다. 곱하는 수의 일의 자리를 곱해지는 수의 가장 왼쪽에 있는 숫자 아래에 적으면, 곱하는 수의 가장 왼쪽에 있는 숫자의 위치가 바로  $i+j-1$  번째 자리이다. 그래서  $a \times 10^{i-1}$  와  $b \times 10^{j-1}$  를 곱할 때 숫자들의 위치만 적절히 잡아주면, 10의 거듭제곱 사이의 곱셈을 의식하지 않고  $a \times b$ 를 구구단을 이용하여 계산하고 그 결과를 적절한 위치에 적으면  $a \times 10^{i-1}$  와  $b \times 10^{j-1}$  를 계산할 수 있게 되는 것이다. 곧 옛 인도인들은 위치기수법에서 각각의 숫자가 나타나는 단위의 값이 위치에 따라서 결정되어 있다는 것과  $a \times 10^{i-1}$  와  $b \times 10^{j-1}$ , 이들의 곱  $a_i \times b_j \times 10^{i+j-2}$  사이에 존재하는 위치 관계를 교묘히 활용함으로써 10의 거듭제곱 사이의 곱셈의 필요성을 실제 곱셈 계산에서 없앤 것이다. 그래서 이들의 계산법에서는 기본 숫자들 사이의 곱셈, 곧 구구단을 이용한 계산과 받아들일만 나타난다.

인도인들은 이러한 계산법 이외에도 다른 여러 가지 곱셈법을 함께 사용하였다. 예를 들어, 12세기 중반에 활동을 한 Bhāskara는 앞에서 설명한 곱셈법 이외에 네 가지 곱셈법을 추가로 제시하였다.

혹은 곱하는 수를 몇몇 부분으로 나누어 이 부

분들로 곱해지는 수를 각각 곱하고 그 곱을 더하라. 혹은 곱하는 수를 등분하는 수로 나누고 곱해지는 수를 그 수와 뺏으로 계속해서 곱하라. 이들 두 가지 방법은 두 가지 분할 곱셈법이다. 혹은 각 자리의 숫자들을 따로 곱하고 그 곱을 더하라. 혹은 곱하는 수를 임의적으로 가정한 양만큼 감소시키거나 증가시키고 가정한 양과 곱해지는 수의 곱을 더하거나 빼라(Colebrooke, 1817: 5-6).

Bhāskara는 135를 곱하기 12를 예로 하여 곱셈법을 설명하였다. 곱하는 수를 나누어서 각각의 부분으로 곱하고 그 곱들을 더하는 방법에 대해서 Bhāskara는 12를 8과 4로 나누어 135를 8과 4로 곱한 다음 그 결과를 더하면 앞의 방법과 동일한 결과가 나온다는 점을 지적한다. 혹은 12를 3으로 나누면 뺏이 4가 되며 따라서 135를 4로 곱하고 그 결과를 다시 3으로 곱하면 동일한 결과가 나오게 된다. 그리고 곱해지는 수뿐 아니라 곱하는 수의 숫자를 1과 2로 나누어 135에 곱하고 그 곱을 더할 수도 있다. 그리고 곱해지는 수를 10배하고 다시 2배를 더하는 방법과 20배를 한 다음 8배를 빼는 방법을 제시하였다.

### 3. 15, 16세기의 곱셈 계산법

인도의 기수법과 계산법이 아랍을 거쳐서 도입되기 이전에 서유럽의 사람들은 고대 로마의 기수법과 계산법을 물려받아 사용하였다(Smith, 1925). 인도의 기수법과 계산법이 서유럽에 전달된 것은 12세기 이전이었지만 일반 대중들에게 인도의 기수법과 계산법이 널리 활용되게 된 것은 16세기 이후이며, 15세기의 마지막 사반세기와 16세기 동안 대거 출판된 많은 산술 교본들이 여기에서 중요한 역할을 하였다(Jackson, 1906).

4) Kaplan(1999)에 의하면, 위치기수법의 완성에 필요한, 0의 역사적 기원은 고대 바빌로니아이며 이러한 아이디어가 고대 그리스를 거쳐서 인도에 전달되었다.

16세기에 이탈리아, 프랑스, 독일, 영국 등 유럽의 각 나라의 언어로 쓰인 산술 교본이 활발하게 출판되었다. 대중이 쓰는 언어로 출판된 산술 교본은 대중이 쉽게 산술을 접할 수 있게 하여 산술의 발달과 이용의 중요한 촉진 요인이 되었다. 이를 통해서 서유럽은 고대 그리스와 로마로부터 이어받은 전통에서 벗어나 인도·아랍의 기수법과 계산법으로 전환하게 되었다. 한편, 서유럽인들은 인도의 곱셈 계산법을 일부 수정하여 현재의 곱셈 계산법을 확립하였다.

16세기에 출판된 산술 교본은 고대 그리스의 기하학 교재의 연역적인 전개를 본받았다(Jackson, 1906). 교재의 제일 앞에 단위와 수 개념, 기수법이 제시된다.<sup>5)</sup> 사칙연산을 제시할 때에는 항상 각 연산의 정의를 먼저 제시하고, 정의에 기술된 계산 과정을 실행하는 방법을 제시한다. 곱셈을 정의한 다음 단계적으로 곱셈 내용 전개하는데, 처음에는 1, ..., 9 사이의 곱셈, 곧 구구단에 해당하는 내용을 간단하게 제시하고, 곱하는 수가 하나의 숫자로 이루어진 곱셈, 곱하는 수가 둘 이상의 숫자로 이루어진 곱셈을 다룬다. 단계적인 전개의 양상을 보이기도 하지만, 기수법을 설명하는 과정에서 천, 만, 십만 등 큰 수에 대한 지식을 전제하여 만 이상의 수를 예로서 설명하는 것처럼 구구단을 제시한 이후 바로 곱하는 수가 백 혹은 천 이상

인 곱셈을 다룬다. 또한 원리에 대한 설명 없이 구구단에 의해서 곱하는 수와 곱해지는 수를 이루는 각각의 숫자들 사이의 곱셈 결과를 적고 받아 올려 계산하는 방법을 제시하는 것으로 곱셈 계산 과정에 대한 설명이 이루어져 있다.

현존하는 인쇄된 산술 교본 중에서 가장 오래된 것은 1478년 이탈리아의 트레비소에서 발행된 이른바 “트레비소 산술책”이다(Swetz, 1987).<sup>6)</sup> 트레비소 산술책 역시 수와 기수법에 대한 설명에서 시작한다. 트레비소 산술책은 단위는 하나(즉 1이)라 부를 수 있는 것들이며, 수는 이들 단위들이 둘 이상이 모여서 이루어진 대상의 크기이며, 2가 가장 작은 수라고 설명한다.<sup>7)</sup> 이어서 수를 2, 3 등과 같은 하나의 숫자로 표현되는 단순한(simple) 수, 10, 20 등과 같은 수(article), 그리고 11 등과 같이 이들이 결합된 것(mixed) 등 세 종류로 분류한다. 이러한 수들은 1, 2, 3, ..., 9, 0 등 모두 10개의 숫자 기호로 표현되는데, 1은 수가 아니지만 수의 기원이 되는 단위를 나타내며, 0은 없음의 표시이기에 그 자체로는 전혀 값을 지니지 않지만 다른 수 기호들과 결합되면 그 크기를 증가시킨다. 아홉 즉 9보다 큰 수는 수 기호들이 둘 이상이 결합되어 표현되어, 열(ten)은 10으로 열하나(eleven)는 11 등과 같이 표현된다.<sup>8)</sup> 이상과 같이 기수법의 원

5) 이 시기에 나온 산술 교본의 기수법 관련 내용의 목적은 인도식 표기로 쓰여진 수를 읽는 법을 가르치는 것이다(Jackson, 1906). 초기의 산술 교본 저자들은 먼저 로마 체계를 배우고 그 다음 새로운 인도의 체계를 배워야 한다고 생각하였다. 인도 기수법 체계는 (1) 1, 2, ..., 9 등의 숫자, (2) 10, 20, 30, ... 등의 십과 십의 배수들 (3) 25, 37과 같이 앞의 둘이 결합된 수, 세 집단으로 나뉘어 지도되었다. 대부분의 저자들은 자릿값 아이디어를 직접적이고 간결하게 진술하였다. 16세기 이후에 나온 교재들이 서두에서 다루는 기수법 내용도 백, 천, 만 이상의 단위 혹은 자릿값의 이름들과, 이들 단위가 결합되는 수를 언어적으로 제시한 이후, 이러한 수들이 인도의 기수법으로 어떻게 표현되는지를 설명하는 방식의 취하고 있다.

6) Swetz(1987)에 트레비소 산술책의 본문 전체가 영역되어 있고 그에 대한 설명이 제시되어 있다. 이하에 제시된 트레비소 산술책에 대한 소개는 Swetz(1987)에 소개된 내용을 바탕으로 한다.

7) 이상과 같이 수를 단위들이 모여서 이루어진 대상들의 다수성 혹은 크기로 간주하면서 1을 수에서 제외하고 2를 가장 작은 수로 간주하는 것은 고대 그리스의 전통을 이어받은 것으로, 16세기의 다른 산술 교본에서도 동일하게 발견된다(Jackson, 1906).

8) 이러한 설명은 수사(數詞)에 대한 지식을 전제하고 말 끝 수사로서 표현된 수를 숫자로 표현하는 방법을 제시하는 것으로 보인다.

리가 소개되고, 백, 천, 만(tens of thousands), 십만(hundreds of thousands) 등 큰 단위를 지닌 수들의 표기법이 간단히 제시된다.

트레비소 산술책은 주어진 두 수 중에서 하나의 수를 단위로 할 때 그 단위가 다른 수만큼 있는 수를 찾는 것으로 곱셈을 정의한다. 따라서 4 곱하기 2는 4가 둘 있는 수이므로 8이다.<sup>9)</sup> 구구단은 곱셈의 정의가 제시된 이후 별도의 설명 없이 2단부터 9단, 12단, 24단, 36단의 내용이 바로 제시된다. 각 단에서 마지막은 0이 포함된 곱셈이며, 10단은 별도로 제시하지 않는다. 그리고 곱셈 계산법이 제시되는데,  $9279 \times 8$ ,  $12392 \times 7$ 와 같이 곱하는 수가 하나의 숫자로 이루어져 있지만 곱해지는 수가 큰 수인 곱셈을 처음부터 다룬다. 곱하는 수가 숫자가 하나인 경우의 곱셈은 다음과 같이 설명된다.

$9 \times 8 = 72$ 이므로 2를 8 아래에 적고 7을 올린다.  $7 \times 8 = 56$ 이고, 유보된(reserved) 7을 더하면 63이므로, 3을 적고 6을 올린다.  $2 \times 8 = 16$ 이고 6을 더하면 22이므로 2를 적고 2를 올린다.  $9 \times 8 = 72$ 이고 2를 더하면 74이고 먼저 4를 적고 그 왼쪽에 7을 적는다. 따라서 답은 74232이다(Swetz, 1987: 72).

이러한 계산 과정은 곱해지는 수의 일의자리부터 곱한다는 점에서 인도인들의 곱셈 계산법과 다르다. 이러한 차이는 곱하는 수가 둘 이상의 숫자로 이루어진 경우 더욱 크게 나타나는데, 인도인들처럼 곱하는 수의 위치를 바꿀 필요가 없어진다. 트레비소 산술책은  $56 \times 48$ ,  $98 \times 85$ ,  $934 \times 314$  등을 통해서 곱하는 수의 숫자가 둘 이상인 곱셈의 계산법이 설명하는데, 곱하는 수의 두 번째 숫자, 곧 십의자리를 곱하는 과정은 구구단을 이용하여 적용한 결과를 곱하는 수의 십의자리 아래부터 구구단을 적용하여 계산한 결

과를 적기 시작하며, 곱하는 수의 세 번째 숫자 곧 백의자리를 곱하는 과정은 곱하는 수의 백의자리 아래에서부터 구구단 결과를 적는다는 점을 간단하게 설명한다. 오른쪽 곧 낮은 자리부터 곱하면, 곱하는 수의 숫자가 있는 자리에 구구단 계산 결과를 적되, 곱해지는 수의 숫자의 위치가 한 칸씩 왼쪽으로 갈 때마다 곱셈 결과 역시 한 칸씩 왼쪽으로 옮기면 되는 것이다.

15, 16세기 서유럽에서 나온 교재들은 고대 인도의 곱셈 계산법을 발전적으로 수용하여 현재의 곱셈 계산법을 확립하였다. 이들은 큰 자리가 아니라 낮은 자리의 숫자부터 곱하였으며, 곱하는 수가 하나의 숫자로 이루어진 경우와 나머지 경우를 구분한 것으로 볼 때, 곱하는 수가 한 자리 수인 곱셈을 곱셈 계산법 지도의 출발점이자 핵심으로 삼은 것으로 보인다. 곱하는 수가 큰 수의 곱셈은 한 자리 수의 곱셈에서 나타나는 계산 패턴을, 곱하는 숫자의 위치에서 시작한다는 것을 숙달시키는 것이 곱셈 지도의 중요한 사항이었다. 기하학의 연역적인 전개를 염두에 두고, 교재의 머리 부분에 기수법에 대한 내용을 제시하였으나, 실제 곱셈 계산법 과정에 대한 설명과 기수법 내용이 잘 연결되지는 못하였다. 곱셈 계산 과정에 대한 설명은 적절한 자리에 구구단을 적용한 결과를 적는 것과 받아 올림을 실시하는 것에 초점을 맞추었다.

#### 4. 17·18세기의 곱셈 계산법

17, 18세기에 출판된 산술 교재들의<sup>10)</sup> 구성 방식은, 수와 기수법의 원리에 대한 설명, 곱셈 내용의 전개 과정 등에 있어서는, 16세기의 교재들과 거의 동일하다. 그러나 이전 교재들과는

9) Swetz(1987)에서는 곱해지는 수가 곱셈 기호 뒤에 곱하는 수가 곱셈 기호 앞에 나오지만, 여기에서는 우리나라 표기 방식을 따라서 곱해지는 수는 곱셈 기호 앞에 곱하는 수는 곱셈 기호 있는 것으로 하여 설명하겠다.

다르게 곱셈 알고리즘 지도와 관련된 내용이 추가되었다. 표준적인 곱셈 계산법을 적용하기가 다소 결끄러운, 0이 들어 있는 수들의 곱셈을 계산하는 방법이 표준 곱셈 계산법이 지도된 이후 별도로 다루어졌다.

40권이 넘게 인쇄될 정도로 당시에 큰 인기를 얻었던 Wingate(1629)를 살펴보자. 그에 의하

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

[그림 II-6] Wingate의 곱셈표(Wingate, 1629: 34)

면, 기하학은 크기(magnitude)를 대상으로 하는 것에 비하여 산술은 다수성(multitude) 혹은 수를 대상으로 한다. 수는 다만 ‘얼마나 많은가(how many)’라는 질문의 답이다. 그는 열 개의 숫자 기호 (figure) 1, ..., 9, 0을 1에서 9까지의 유의미한 (significant) 숫자 기호와 무(無)의 기호(cipher)로 구분한다. 1은 단위를 나타내며, 다른 유의미한 숫자 기호들은 단위들로 이루어져 있다. 0은 그 자체로 아무 것도 나타내지 않지만 다른 숫자 기호의 오른쪽에 붙으면 크기를 증가시킨다. 수는, 단어를 이루는 문자들처럼 배열되어 있는, 숫자 기호의 수만큼의 자릿값을 지니고 있다. 이들 자리들의 순서는 오른쪽에서 왼쪽으로 진행되며, 첫 번째 자리는 단위들의 자리, 두 번째 자리는 십들의 자리, 세 번째 자리는 백들의 자리이다. 수 465에서 5가 첫 번째 자리에 있으며, 6이 두 번째, 4가 세 번째 자리에 있다. 첫 번째 자리에 있는 모든 숫자는 자기 자신만을

의미하는 반면, 두 번째 자리에 있는 숫자는 “숫자가 단위들을 포함하고 있는 것처럼 십들을 많이 가지고 있다는 것을 뜻(Wingate, 1629: 4)”하여 465에서 숫자 6은 여섯 십 즉 육십을 의미하며, 세 번째 자리에 있는 숫자는 “그 숫자에 포함되어 있는 단위들만큼 많은 백들을 포함하고 있다는 것을 뜻”하여 4는 사백을 의미한다. 이상과 같이 자리값의 구조에 대하여 설명한 뒤, Wingate는 만(tens of thousands), 십만(hundreds of thousands), 백만(millions), 천만(tens of millions) 등과 같은 단위를 제시하고 열두 자리의 수까지 표현하는 방법을 표를 이용하여 간략하게 설명한다.

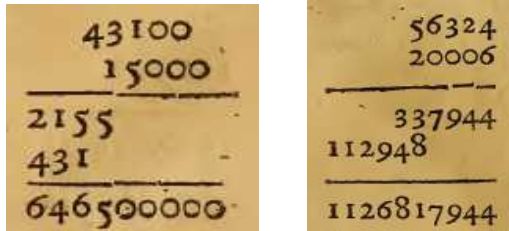
Wingate(1629: 31)는 곱셈을 두 수가 주어졌을 때, 처음의 한 수를 다른 수가 1 또는 단위를 포함하고 있는 만큼 포함하고 있는 수를 찾는 방법으로 정의한다. 5 곱하기 3의 결과인 15는 5를, 3이 단위를 포함하고 있는 것처럼, 세 번 포함하고 있는 수이다. Wingate는 곱셈을 단순한 곱셈(곱해지는 수와 곱하는 수 모두 숫자가 하나로 이루어져 있을 경우)과 복잡한 곱셈(곱해지는 수와 곱하는 수 중 하나 혹은 모두가 둘 이상의 숫자로 이루어져 있을 경우)으로 구분하고 단순한 곱셈에서 복잡한 곱셈의 순서로 내용을 제시하고 있다. 단순한 곱셈은 구구단의 결과를 정리한 표를 통해서 간단하게 제시된다.

복잡한 곱셈의 지도는  $134 \times 2$ , 즉 곱하는 수가 하나로 이루어진 경우의 곱셈에서 시작한다. 그 다음에는  $1232 \times 23$ ,  $1321 \times 123$ 을 예로 하여 받아 올림이 생기지 않는 곱하는 수가 둘 이상의 숫자로 이루어져 있는 경우의 곱셈 방법을 제시한다. 여기에서 부분 곱의 결과를 적을 때 항상 곱하는 수의 숫자 바로

10) Cajori(1917)는 17, 18세기에 출판된 교재 중에서 Wingate(1629)와 Cocker(1702)를 자세하게 분석하였다. 본 연구자는 이들 교재 이외에 Cajori가 언급하지 않았지만 별도로 원문을 확보한, Atres(1711), Malcolm(1718), Weston(1729), Fisher(1734), Sadler(1773) 등의 교재도 분석하였다.



아래쪽에 곱한 결과를 적기 시작한다는 점을 지적한다.



[그림 II-7] 0이 있는 곱셈(Wingate, 1629: 35)

$\begin{array}{r} 3421 \\ \underline{8} \\ 8 \\ 160 \\ \underline{3200} \\ 24000 \\ \underline{\hspace{1em}} \\ 27368 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3421 \\ \underline{8} \\ 24268 \\ \underline{31} \\ 27368 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3421 \\ \underline{8} \\ 27368 \end{array}$
--	--	---

[그림 II-8] Malcolm(1718: 28)의 세로셈

곱하는 수가 둘 이상의 숫자로 이루어져 있을 경우, 각 숫자만큼의 곱을 선 아래에 적은 다음 전체를 더하면 전체의 곱이 나온다. 1232에 3을 곱하면 그 곱은 3696이다. 다시 1232에 2를 곱하면 2464이다. 각각의 곱을 적절한 위치에 적으면, 즉 곱하는 각각의 숫자에서 시작하도록 적고 더하면 정확한 곱이 나온다(Wingate, 1629: 34).

그 다음으로 받아 올림이 생기는 복잡한 곱셈, 3084×36의 계산 과정을 제시하는데, 받아 올림이 생기는 경우 십의 자리 부분을 남겨 두었다 다음 자리로 받아 올리도록 지도한다.

4 곱하기 6은 24이며 4를 선 아래에 적고 20에 대해서 2를 남겨두고 다음 자리에서 더하라. 8 곱하기 6은 48이고 여기에 2를 더하면 50이다. 0을 다음 자리에 적고 50에 해당하는 5를 기억해 두라. [...] (곱해지는 수의 마지막 숫자인) 3 곱하기 6은 18인데 이것은 전체를 그대로 적으라(Wingate, 1629: 34).

곱셈 계산법을 제시한 이후 Wingate는 이상과 같은 표준 계산법을 적용하는데 까다로운 0이 포함된 경우의 곱셈을, 곱하는 수 또는 곱해지는 수의 숫자가 0으로 끝날 경우, 0이 곱하는 수의 중간 부분에 있는 경우, 10의 거듭제곱을 곱할 경우로 구분하고 각각의 경우에 대한 대처 방법을 제시한다. Wingate는 두 수 중 하나 혹은 모두가 0으로 끝날 경우에는 0을 무시하고 0이 아닌 숫자끼리 곱하여 계산한 다음 그 결과에 끝에 있는 숫자만큼의 0을 덧붙이고, 곱하는 수의 가운데에 0이 있을 경우에는 0을 지나친 다음 0이 아닌 숫자를 곱하되 부분 곱의 결과를 0이 아닌 숫자 아래에 적기 시작해야 한다는 점을 지적한다. 10, 100, 1000 등과 같은 10의 거듭제곱을 곱할 Wingate는 326에 10, 100을 곱하면 각각 3260, 32600이 되는 것처럼 동일한 수의 0을 곱해지는 수에 붙이면 된다고 지적한다.

이상의 내용은 Cocker(1702), Atres(1711), Malcolm(1718), Weston(1729), Fisher(1734), Sadler(1773) 등 다른 교재에서도 동일하게 발견된다. Cocker(1702)가 단위인 1 역시 수에 속한다는 점을 명확하게 지적한 것, Atres(1711)가 구구단을 표가 아니라 나란히 적어서 제시하거나, Fisher(1734)와 Sadler(1773)가 12단까지를 곱셈표에서 다룬 것, Atres(1711)가 0이 포함된 경우의 곱셈에서 0이 수의 숫자 중간에 있는 경우를 먼저 다룬 것 등이 주로 발견되는 차이점이다. 한편, Malcolm(1718)은 복잡한 수의 곱셈의 과정을 왼쪽에 제시한 것과 같이 보다 단계적으로 제시하고 있다. 이러한 모습은 Weston(1729)에서도 나타난다.

17, 18세기에 출판된 교재들은 곱하는 수가 하나의 숫자로 이루어진 곱셈, 즉 한 자리 수의 곱셈에서 나타나는 패턴을 곱셈 지도의 핵심으로 삼아, 큰 수의 곱셈은 한 자리 수의 곱셈을 시작하는 자리를 다르게 하여 적용하는 것으로 지도하였다. 이러한 알고리즘을 중요하게 여기면

서, 이 절차를 적용하는데 애매한 부분이 있는 0이 포함된 경우의 대처법을 세심하게 다루어 0의 개수를 확인하여 0이 아닌 숫자들 사이의 계산 결과에 덧붙이기를 유용한 계산술로 제시하였다.

### 5. 19세기의 곱셈 계산법

19세기에 출판된 산술 교재들<sup>11)</sup>에서도 기존의 전개 방식이 대체로 유지되었다. 교재 도입부에서 일괄적으로 기수법 체계를 설명하고, 곱셈의 정의와 구구단, 곱하는 수가 하나의 숫자로 이루어져 있는 곱셈, 곱하는 수가 둘 이상의 숫자로 이루어진 곱셈의 순서로 곱셈을 지도하였다. 또한 곱해지는 수나 곱하는 수의 숫자에 0이 있는 포함된 경우의 곱셈 계산법을 별도로 다루었다. 한편 Lacroix(1825)와 De Morgan(1863)에서 곱하는 수가 두 자리 이상인 곱셈에 대한 설명에서 다른 모습이 발견되었다.

먼저 Lacroix(1825)를 살펴보자. Lacroix(1825, pp.2-3)는 수는 비교의 대상이 되는 대상인 단위로 이루어진 동일한 사물들의 다수의 집합이 가지고 있는 성질이며, 이들을 표현하는 숫자는 여러 단위로 이루어져 있고 “숫자를 왼쪽으로 한 자리 옮기면 숫자의 값이 열배가 된다.”는 것이 기수법의 근본적인 법칙이라는 점을 간단하게 설명한다. 그는 이전의 교재와 동일하게 십, 백, 천, ð동뵁전의 은 단위재리 존재한다는 것을 받아채리고 이것을 어떻게 숫자로 표현하는진 동설명하였다. 그리고 곱셈을 정의, 천구구단의 내용을 표로 정리하여 제시하였다. 그리고  $526 \times 7$ 을 사례로 하여 곱하는 수가 하나의 숫자x점을 간단 계산법을 설명하였다. 곱셈 계산단하게에 대한 Lacroix의 설명은 이전 시대와 동일하게 구구단 계산 결과를 실행하고 그것을 적절한 위치에 적

는 것에 초점을 맞추었다.

곱하는 수가 하나의 숫자로 이루어져 있으면 곱해지는 수의 각각의 자리를 곱하여 계산하면 된다. 6곱하기 7은 42이며, 2를 단위 자리에 적고 4십은 보다 높은 자리에서 다른 수와 함께 적는다. 곱해지는 수의 십의자리에 있는 2를 7로 곱하면 14이며 남겨두었던 4십을 더하면 18이 된다. 단위자리만 쓰고, 십의 자리를 다음 연산에 대하여 남겨둔다. 곱해지는 수의 백의 자리에 있는 5에 7을 곱하면 35이고 남겨두었던 1을 더하면 36이다. 곱해지는 수에 다른 숫자가 남아 있지 않으므로 모두 적는다(Lacroix, 1825: 18).

몇 개의 숫자로 이루어진 수를 하나의 숫자로 곱할 경우 “곱하는 수를 곱해지는 수의 단위 아래에 적으면”, “오른쪽에서 시작하여 곱하는 수로 곱해지는 수의 각각의 자리의 단위들을 곱하고 9를 넘지 않으면 전체 결과를 적고 몇 십을 포함하고 있으면 이들을 다음 곱에 더”하는 과정을 “곱해지는 수의 마지막 숫자까지(Lacroix, 1825: 20)” 한다면 전체 결과를 구할 수 있게 된다.

그런데 Lacroix는 곱하는 수가 두 자리 수 이상인 곱셈의 지도를, 이전의 교재들과는 다르게, 10, 100 등 10의 거듭제곱 곱하기에서 시작하였다(Lacroix, 1825: 21-2). 그에 의하면, 10, 100 등과 같은 수는 몇몇의 숫자로 표현되는 수 중 가장 간단한 수이며, 10배를 한다는 것은 수를 이루는 단위들의 크기가 10배가 되는 것과 동일한데 이는 숫자들은 한 칸 오른쪽으로 이동하는 것과 즉 0을 끝에 붙이는 것과 동일하다. Lacroix는 여기에서 한 걸음 더 나아가 30, 300을 곱하는 것이  $\times 3$ 과  $\times 10$  혹은 100의 과정으로 이루어져 있다고 지적한다. 이상과 같은 설명을 한 이후 Lacroix는 곱하는 수가 둘 이상의 숫자

11) 19세기의 교재로 Pike(1812), Lacroix(1825), Chase(1848), Walkingame(1851), Bourdon(1858), De Morgan(1863)를 분석하였다. 이 중에서 Lacroix, Bourdon, De Morgan의 교재는 Cajori(1917)가 당시 교재 중에서 중요한 것으로 간주하였다.

로 이루어진 일반적인 경우의 곱셈 계산법을 설명한다. 여기에서 Lacroix는  $764 \times 300$ 을  $764 \times 3 \times 100$ 에 의하여 계산하고 “곱하는 수가 여러 개의 0으로 끝나면 곱하는 수의 유효 숫자를 먼저 곱하고 곱의 오른쪽에 곱하는 수에 있는 만큼 0을 적으라.”를 알고리즘으로서 제시하였다. 끝으로 Lacroix는 지금까지 논의된 곱셈 계산법을 토대로 곱하는 수가 두 자리 수 이상인 곱셈의 계산법을 설명하였다.  $793 \times 345$ 는  $793 \times 5$ ,  $793 \times 40$ ,  $793 \times 300$ 으로 나뉘어서 계산되며, 이들 계산 결과를 모두 더하면 정확한 값이 나오게 된다. 이때, 부분 곱의 끝에 있는 0은 덧셈에서 영향을 미치는 값을 지니고 있지 않으므로 유효 숫자들의 곱의 첫 번째 자리의 정확한 위치만 안다면 적지 않아도 된다고 설명한다.

De Morgan(1863)은 이보다 진전된 설명을 제시하였다. 그는 수의 기수법에 포함되어 있는 곱셈 관계를 명확하게 지적하였다. De Morgan(1863: 9)은 16785에서 67은 67백, 678은 678십이라는 점을 지적하고, 16785는 16천과 78십 그리고 5, 또는 1만과 678십과 5가 있는 것이라고 설명하였다. 더욱이 그는 덧셈 계산을 기수법적 구조와 관련지어 아래와 같이 설명하였다. 그에 의하면 1834와 2799의 덧셈은 아래와 같다.

$a = x + y + z.$	$ab = ba.$
$ma = mx + my + mz.$	$abc = acb = bca = bac, \&c.$
$m(x+y+z) = mx + my + mz.$	$abc = a(bc) = b(ca) = c(ab).$

[그림 II-9] De Morgan(1863)의 곱셈 계산의 법칙 진술

$$1834 = 1 \times 1000 + 8 \times 100 + 3 \times 10 + 4,$$

$$2799 = 2 \times 1000 + 7 \times 100 + 9 \times 10 + 9$$

$$1834 + 2799 = 3 \times 1000 + 15 \times 100 + 12 \times 10 + 13 = 4 \times 1000 + 6 \times 100 + 3 \times 10 + 3$$

덧셈이 같은 자릿값들 혹은 단위들의 개수를 더하는 것이라는 점을, 곧 덧셈의 과정을 기수

법적 구조와 명확하게 연결하여 설명한 것이다.

De Morgan(1863)은 곱셈의 정의와 구구단을 간단하게 제시한 다음, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙과 곱셈의 결합법칙, 교환법칙을 간단한 곱셈 계산 사례에서 이끌어내고 이를 일반적으로 진술하였다. De Morgan은 이렇게 진술한 곱셈과 관련된 규칙을 곱셈 계산법을 설명하는 과정에서 활용한다. De Morgan 역시 곱하는 수가 두 자리 수 이상인 곱셈을 10의 거듭제곱 곱하기에서 시작하였다. 2356은 2천, 3백, 5십, 6단위이다. 이들 각각을 열배 하면, 열 개의 2천, 열 개의 3백, 열 개의 5십, 열 개의 6단위들이다. 이것은 2 열-천, 3 열-백, 5 열-십, 6 열-단위이며, 2만, 3천, 5백, 6십이다. 즉 23560이다. 이러한 설명에는 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙, 곱셈의 결합법칙과 교환법칙이 포함되어 있다. De Morgan은 이러한 설명을 통하여 곱하기 10, 곱하기 100 등이 0을 적절히 붙이면 계산된다는 점을 이끌어 낸다. 이를 토대로 그는 10의 배수를 곱할 때의 계산법을 제시한다. 예를 들면, 8000 곱하기는 8과 1000을 잇달아 곱하는 것, 즉 “ $\times 8000$ 이  $= \times 8 \times 1000$ (De Morgan 1863: 30)”이므로 8을 곱한 다음 오른쪽에 세 개의 0을 적으면 된다. 따라서 곱하는 수가 0으로 끝난다면 0이 아닌 숫자를 곱한 결과 옆에 동일한 수의 0을 적는다면, 0들을 무시할 수 있다. 이상의 설명을 바탕으로 하여 De Morgan은 곱하는 수가 두 자리 수 이상인 곱셈의 계산법을,  $23707 \times 4567$ 을 통해서 정리된 곱셈법을 제시한다.

$23707 \times 7$	is	$165949$	$\begin{array}{r} 23707 \\ \underline{4567} \\ 165949 \\ \underline{142242} \\ 11853500 \\ \underline{94828000} \\ 108269869 \end{array}$
$23707 \times 60$	is	$1422420$	
$23707 \times 500$	is	$11853500$	
$23707 \times 4000$	is	$94828000$	
The sum of these	is	$108269869$	

[그림 II-10]  $23707 \times 4567$ 의 계산(De Morgan, 1863, 31)

Lacroix와 De Morgan의 교재에서도 알고리즘의 숙달에 초점을 맞춘 부분이 많이 발견된다. 이들 교재들도 0이 포함된 수들의 곱셈을 0 개수를 이용하여 계산하는 방법을 여러 상황에 따라서 제시하였으며, 숫자를 조작하는 과정에 대한 설명은 구구단의 결과를 적절한 위치에 적는 것에 초점이 맞추었다. 그러나 다른 교재들과 달리 이들의 교재는 곱셈 계산 과정의 원리를 보다 명확하게 드러냈다. 특히 De Morgan은 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙과 곱셈의 교환 및 결합법칙을 명시하였다.

### III. 역사적 분석 결과에 대한 논의

역사적 분석 결과에 의하면, 곱셈 계산법의 발달 과정은 곱하는 수와 곱해지는 수를 자릿값에 따라서 분해하고 분해하여 나온 수들을 서로 곱하고, 곱들의 합을 계산하는 방법의 발달 과정이었다. 예를 들어,  $123 \times 456$ 은  $100+20+3$   $400+50+6$ 으로 분해하고 각각을 서로 곱하여, 즉  $(18+120+600)+(150+1000+5000)+(400+8000+40000)$ 을 계산한,  $738+6150+48400=55288$ 이  $123 \times 456$ 의 답이다. 자릿값에 따라 수를 나누어 곱하는 과정은 덧셈에 대한 곱셈의 결합법칙을 전제한다. 그런데, 10과 400, 20과 400, 100과 50, 20과 50의 곱과 같이 곱하는 수가 큰 곱셈에서 분해된 수들 사이의 곱셈이 효과적으로 진행되려면 또 다른 분해와 재결합 과정이 필요하다. 10의 거듭제곱과 기본 숫자를 분해하여 곱하는 것은 10의 거듭제곱의 곱셈이 십진법에서 자릿값의 위치 변화로 해결되기 때문에, 20과 400의 곱은 10의 거듭제곱과 기본 숫자를  $2 \times 10$ ,  $4 \times 100$ 과 같이 분리하여 따로 곱하는 것에 의해서 쉽게 진행될 수 있다. 10의 거듭제곱과 기본 숫자를 분리하여 곱하는 과정은 곱셈의 결합법칙과 교환법칙을 바탕

으로 하며, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이 작동할 수 있는 밑바탕을 제공한다고 할 수 있다. 또한, 이상과 같은 분해 과정은 기본적으로 큰 수의 곱셈을 작은 수의 곱셈으로 분해하여 계산하는 것일 뿐 아니라, 기수법 구조로 인해 쉽게 계산할 수 있는 곱셈을 이용하는 것이다. 십진법에서 10의 거듭제곱이 포함된 곱셈은 자리값만 바꾸면 되므로 손쉽게 계산될 수 있다. 자릿값에 따라 나누어 곱하는 이면에는 바로 이러한 특징이 자리 잡고 있고, 곱셈 계산법은 이를 효율적으로 실행할 수 있게 하는 것이다. 곧, 두 유형의 분해를 이용한 곱셈 계산 과정, 곱하는 수와 곱해지는 수를 자릿값에 따라 나누어 곱하는 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이 적용되는 분해를 이용한 곱셈 과정과, 곱셈의 교환법칙과 결합법칙을 적용하여  $(a \times 10^m) \times (b \times 10^n)$ 을  $a \times b \times 10^m \times 10^n$ 에 의해 계산하는 곱셈 과정이 곱셈 계산법이 기반이 되며, 이러한 두 가지 분해 과정을 다루는 계산술의 발달이 곱셈 계산법의 역사적 발달의 핵심 과제이었다.

고대 이집트인들과 바빌로니아인들이 곱셈 계산 과정에서 두 가지 분해 과정을 이용한 흔적을 남긴 바 있으며, 고대 그리스인들은 두 분해 과정이 체계적으로 결합된 곱셈 계산법을 확립하였다. 그러나 이들은 숫자 자체에 대한 조작을 통해서 이러한 과정을 진행하기보다는 수판과 같은 보조 도구를 이용하여 계산을 하였으며, 숫자는 그 결과를 기록하는 역할을 하였다 (Cajori, 1917). 6-9세기 무렵의 인도인들에 의해서 숫자 조작을 바탕으로 하는 알고리즘적 곱셈 계산법이 확립되었다. 위치기수법을 완성한 인도인들은 자릿값에 따라서 분해된 수들 사이의 곱셈이 기본 숫자 사이의 곱셈 곧 구구단 결과를, 오른쪽 끝을 기준으로 할 때, 두 자릿값의 위치를 더한 것에서 하나를 뺀 위치에 적으면 된다는 것을 발견하고, 이를 이용하여 두

가지 분해과정이 적용된 곱셈 계산이 기계적으로 진행되도록 하였다. 이들에 의해 곱셈 계산법은 일정한 순서에 의하여 진행되는 두 기본 숫자들 사이의 곱셈을 적절한 위치에 적는 것으로 변형되었다. 현재의 곱셈 계산법은 고대 인도인들이 확립한 계산법의 순서를 수정한 것으로, 늦어도 17세기 이후 확립되었다. 수정된 계산법에서는 곱해지는 수의 일의자리 숫자가 제일 먼저 곱해지며 곱하는 수의 각각의 숫자와의 곱을 곱하는 수의 숫자가 있는 자리에서부터, 곱해지는 수의 왼쪽에 있는 숫자를 곱할 때마다 왼쪽으로 한 칸씩 옮겨가며 적으면 된다. 17세기 이후 나온 산술 교본들은 이러한 패턴을 지도하는 것에 집중하였다. 이러한 패턴에 불규칙성을 일으키는 0이 포함된 곱셈에 대해서는 유형별로 별도의 대처법을 제시하였다. 16세기 이후 나온 산술 교본들은 모두 기수법에 논의를 곱셈 계산법 내용 앞에 제시하였지만, 19세기 이후에 이르러서야 곱셈의 두 가지 분해 과정이 명시되고, 10의 거듭제곱 곱하기가 큰 수의 곱셈에서 기본적인 곱셈이라는 점이 언급되었다. 이를 통해서, 비록 일괄적인 형태이지만, 수의 기수법적 구조와 곱셈 계산의 과정이 명확하게 연결될 수 있게 되었다.

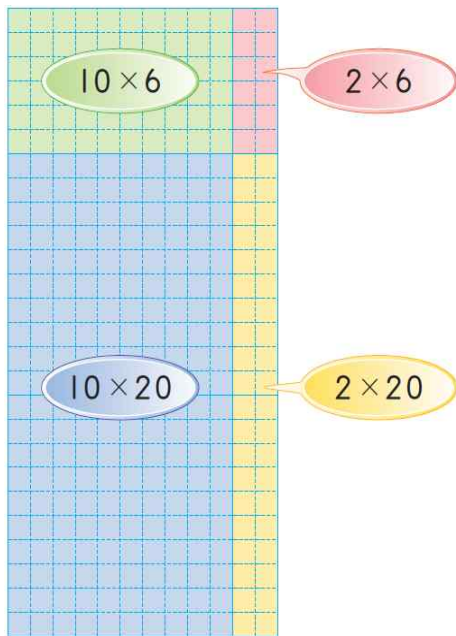
곱셈 계산법의 역사적 발달 과정은, 곱셈 계산법의 알고리즘의 출현과 알고리즘 원리의 명확한 의식화 혹은 설명 사이에 200년 이상의 간격이 있음을 보여준다. 아이러니하게 표준 알고리즘의 적용 과정에 난점을 일으키는 0을 기본적인 곱셈, 10의 거듭제곱 곱하기와 연결함으로써 알고리즘의 원리에 대한 명확한 설명이 가능하게 되었다. 이러한 점은 0이 포함된 곱셈을 10 혹은 10의 거듭제곱 곱하기와 연결할 수 있는지의 여부가 곱셈 계산법의 원리 이해 여부를 판단하는데 중요한 가늠자가 될 수 있다는 것을 시사한다.

#### IV. 분석 결과의 교수학적 시사점

우리나라 초등학교 수학교육과정에서 자연수의 곱셈은 2학년에서 4학년 사이에 지도되며, 곱하는 수가 두 자리 수로 한정되어 있다(교육과학기술부, 2009, 2010a, 2010b, 2010c). 2학년에서 구구단 끝 한 자리수 사이의 곱셈을 다루고 난 뒤, 3학년에서 ‘두 자리 수×한 자리 수’, ‘세 자리 수×한 자리 수’, ‘두 자리 수×두 자리 수’, 4학년에서 ‘세 자리 수×두 자리 수’, ‘네 자리 수×두 자리 수’를 지도한다. 우리나라 수학 교과서는 구체물에 대한 조작 활동을 통해 알고리즘을 학생들이 이끌어 내는 “활동 구성형의 방법(안희진, 2006: 101)”으로 곱셈 계산법을 지도한다. 곱셈 알고리즘의 숙달보다는 알고리즘의 원리 파악을 더욱 중시하는 것이다. 이러한 점은 표준 알고리즘을 개정된 교과서에서 직접적으로 제시하고 있지 않다는 점에서 잘 드러난다. 이 절에서는 우리나라 곱셈 계산법의 지도에서 곱셈 계산법을 이루는 두 가지 분해 과정에 기반한 곱셈 전략이 교과서에 구현되었는지를 살펴보고 이를 통해 교육적 시사점을 제안하겠다.

먼저 곱하는 수와 곱해지는 수를 자릿값에 따라 나누어 곱하는 과정, 곧 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이 적용되는 계산 전략의 지도 내용을 살펴보자. 우리나라 교과서는 기수법적 구조가 다른 수, 곧 새로운 자릿값을 지닌 수를 다룰 때마다 지속적으로 구체물을 이용하여 분배법칙이 적용되는 과정을 보여준다. ‘두 자리 수×한 자리 수’에서는 수모형을, 두 자리 수 사이의 곱셈에서는 모눈 그림을, ‘세 자리 수’와 ‘한 자리 수’에서는 1원, 10원, 100원짜리 동전을 이용하여 곱셈 상황을 표현하고, 이들에 대한 조작을 통해서 곱하는 수가 자릿값마다 적용된다는 것을, 즉 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이 적용된다는 것을 모델을 이용하여 파악할 수 있

게 한다. 구체물들은 곱해지는 수나 곱하는 수  
 닌 수를 다룰 때를 드러내고, 이러한 구조가 곱  
 셈 과정에서 어떻게 작용하는지를 드러낸다. 예  
 를 들어, [그림 IV-1]에 표현되어 있는 것처럼,  
 한 줄에 12칸씩 26줄이 있는 모눈 그림은  $12 \times 26$



[그림 IV-1]  $12 \times 26$ 의 계산과정(교육과학기술부,  
 2010b)

을 12를 이루고 있는 10과 2, 26을 이루는 20과  
 6을 각각  $10 \times 20$ ,  $10 \times 6$ ,  $2 \times 20$ ,  $2 \times 6$ 으로 나누어서  
 계산할 수 있다는 것을 보여준다.

곱셈의 결합법칙과 교환법칙이 적용되는,  
 $(a \times 10^m) \times (b \times 10^n)$ 을 기본 숫자와 10의 거듭제  
 곱을 나누어서 곱하여 계산하는 과정은 ‘몇 십’  
 과 같이 0으로 끝나는 수의 곱셈에서 나타난  
 다. ‘몇 십’의 곱하기는 3학년 때 ‘몇 십×몇 십’  
 에서 처음 나타난다.  $30 \times 40$ 을 예로 하여 설명  
 하고 있는데, 교과서와 교사용 지도서에 의하  
 면  $30 \times 40$ 은  $30 \times 40 = 30 \times 4 \times 10 = 120 \times 10$ 에 의해서  
 계산된다. 곱하는 ‘몇 십’을 ‘몇’과 ‘십’으로 나  
 는 다음, 곱해지는 ‘몇 십’에 순차적으로 곱하

는 것이 ‘몇 십×몇 십’을 계산하는 과정으로 체  
 시된 것이다. 앞에 있는 ‘몇 십’을 ‘몇’과 ‘십’  
 으로 분해하여 ‘몇’과 ‘몇’의 곱과 ‘십’과 ‘십’의  
 곱을 계산하지 않고, 이와 같이 곱하는 ‘몇 십’  
 만을 분해하는 것은, 초등학교에서 곱셈의 교환  
 법칙과 결합법칙을 명시적으로 지도하지 않는다는  
 점을 고려한 결과로 보인다. 곱하는 수만 분  
 해하여 곱할 경우에는 보다 간단하게 설명을 할  
 수 있다. 교과서에서는 모눈 그림이 30이 40번  
 있는 상황이 30이 4번 있는 것이 10번 있다는 것  
 에 해당한다는 것을 드러내는 역할을 하고 있  
 다. 구체물을 이용하여 곱셈의 결합법칙이 관련  
 된 계산 과정이 암묵적으로 지도되고 있는 것  
 이다. 이상과 같은 설명 방식은 분명 분배법칙이  
 적용되는 과정에 대한 설명과 유사하다. 한편,  
 곱하는 수가 두 자리 수인 경우의 곱셈 중  
 에서 ‘한 자리 수×몇 십’을 먼저 다루어야 할  
 것으로 보이지만, 교과서에서는 이것을 다루지 않  
 고 ‘몇 십×몇 십’을 바로 다룬다. ‘한 자리 수×  
 몇 십’을 교과서에서 다루지 않는 것은 앞서 ‘두  
 자리 수×한 자리 수’를 다루었고 이것을 이용하  
 면 ‘한 자리 수×몇 십’을 계산할 수 있는 것으로  
 간주하고 있기 때문으로 보인다. 곧 곱셈의  
 교환법칙을 이용한 계산이 암묵적으로 전제되어  
 있는 것이다.

그런데, 4학년 1학기에서 지도하는 ‘세 자리  
 수×몇 십’, ‘네 자리 수×몇 십’의 경우, 곱셈의  
 교환법칙과 결합법칙이 적용되는 과정을 뒷받침  
 하는, 모눈종이와 같은, 구체물 조작 활동이 없  
 다. 이와 관련하여 우리나라 교과서에서 ‘0의 개  
 수를 이용하여 곱셈 계산하기’가 강조되어 지도  
 되고 있다는 점을 살펴볼 필요가 있다.  $3 \times 4$ 와  $30 \times 4$   
 의 결과를 비교하고  $30 \times 4$ 와  $30 \times 40$ 의 결과를 비  
 교하여  $30 \times 40$ 의 결과를 예측하는 것이 두 자리  
 수 사이의 곱셈과 관련하여 하는 첫 번째 활동  
 이다. 이러한 예측의 결과물은 “ $30 \times 40$ 은  $3 \times 4$ 보

다 0이 2개 더 많으므로  $3 \times 4 = 12$ 에서 0을 2개 더 붙여서 1200이라고 생각합니다(교육과학기술부, 2010d: 124).”로 정리된다. 0을 10과 관련짓기보다는 귀납적인 추측을 통해서 결과를 예측하도록 하는 것이다. 모눈종이를 이용한 설명은 어떻게 보면 이상과 같은 귀납적인 추측을 정당화하는 활동이라고 할 수 있다. ‘0의 개수를 이용하여 곱셈 계산기’는 이후 계속 다루어진다. 세 자리 수와 두 자리 수, 네 자리 수와 두 자리 수의 곱셈을 다루는 4학년 1학기의 곱셈 단원에서는 ‘ $300 \times 10000$ ’, ‘ $400 \times 3000$ ’ 등과 같이 0이 포함된 곱셈을 먼저 다루고, 이후 세 자리 수와 네 자리 수를 두 자리 수로 곱하기를 다룬다. 즉, ‘0의 개수를 이용하여 곱셈 계산하기’가 구체물 활동을 대신하고 있는 것이다. 세 자리 수, 네 자리 수를 몇 십으로 곱하는 과정을 뒷받침하는 내용은 0의 개수를 이용한 추측 밖에 없다. 더욱이 교육과정 상으로는 곱하는 수가 두 자리 수로 한정되어 있지만, 3000이나 10000과 같은 수의 곱셈을 교과서에서 다루는 것은 다소 석연치 않다. 0의 개수를 이용하여 계산하는 것을 숙달시키기 위한 것이 아닌지 의심스럽다. 이러한 점들은 우리나라 교과서가 0의 개수 따져서 쉽게 계산하는 계산 방법을 중요하게 다루고 있다는 것을 시사한다.

또한, 구체물을 이용한 ‘몇 십×몇 십’의 설명에도 지적할 부분이 있다. 곱하는 수를 분해하여 곱하는 과정에서 ‘몇 십×몇 십’이 ‘몇 백 몇 십×10’으로 변형되는데, ‘곱하기 10’을 작은 수에 대한 곱셈에서 먼저 다루지 않고 바로 이렇게 큰 수의 곱셈에서 다루는 것은 문제가 있어 보인다. 물론 ‘곱하기 10’은 다른 두 자리 수의 곱셈보다 쉬우며, 3학년에서 다루는 네 자리 수의 기수법적 구조에 대한 이해를 통해서  $120 \times 10$ 이 1200이 된다는 것을 파악할 수 있으리라 생각할 수도 있다. 네 자리 수의 기수법적 구조에

대한 이해가 있다면 100이 12번 있으면 1200이 된다는 것을 파악할 수 있을 것이다. 그러나 120이 10번 있는 상황은 백 단위와 십 단위를 동시에 고려해야 한다는 점에서 100이 12번 있는 것보다 훨씬 복잡하며, 그러나 12010’에 대한 이해가 더 필요한 것으로 보인다. 기수법에 대한 상당한 정도의 이해를 전제한 De Moragn이나 Lacroix시에 재들도 먼저 10과 10의 거듭제곱의 곱셈이 M된 이후에 몇 십, 몇 백 등을 몇과 십, 몇과 백 등으로 나누어 곱한 바 있는데, ‘곱하기 몇 십’을 일괄적으로 도입X수 앞서 먼저 ‘곱하기 십’을 다루고 나서 ‘몇 십’을 ‘몇’과 ‘십’으로 분해하여 곱하는 것으로 그 단계를 나누어 것이다.문제를 고려할 필요가 있어 보인다.

이상의 논의에 비추어 볼 때, 분배법칙이 적용되는 과정은 일관되게 구체물을 이용하여 분해 및 계산 과정을 설명되고 있는 점과 다르게, 곱셈의 결합법칙과 교환법칙이 적용된 계산 과정은 ‘곱하기 몇 십’ 형태로 압축적으로 설명되며, 개념적 이해보다는 계산술 측면이 더욱 부각되어 있다. 물론 ‘곱하기 십’은 가장 쉬운 두 자리 수 곱셈이며, 7이나 9를 곱하는 것보다 쉽게 계산할 수 있다. 그러나 계산을 쉽게 할 수 있다고 그 원리가 쉽게 이해될 수 있는 것은 아니다. 우리나라 교과서가 곱셈을 단계적으로 전개하면서 매 단계마다 분배법칙이 포함된 과정에 대하여 구체물을 이용한 설명을 제시하는 것도 바로 이를 고려한 것이라 할 수 있다. 이러한 점을 비추어 보면, 우리나라 교과서의 교환법칙과 결합법칙이 적용되는 계산 과정에 대한 고려가 다소 부족하다는 평가를 피하기가 어려울 것이다.

학생들의 곱셈 개념의 이해를 다룬 연구에 비하여 두 자리 수 사이의 곱셈과 같이 보다 큰 수를 대상으로 한 곱셈의 이해를 다룬 연구는 많지 않다. 그러나 학교수학에서 다루는 여러 내

용에 대한 학생들의 이해도를 조사한 연구 결과들에 비추어 볼 때, 학생들의 곱셈에 대한 이해가 계산 알고리즘의 숙달에 치중되어 있다는 예측은 어느 정도 할 수 있다. 앞의 논의에 비추어 본다면, 우리나라 교과서가 곱셈의 결합법칙과 교환법칙이 적용되는 곱셈 과정에 대한 지도가 다소 불충분하며, 이것이 학생들의 이해에 영향을 주었을 것으로 추측할 수 있다. 학생들의 이해도를 조사한 연구들은 이상의 예측을 충분하지는 않지만 어느 정도 뒷받침할 수 있는 것으로 보인다.

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 20 \\ \hline 00 \\ 86 \\ \hline 86 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ \times 30 \\ \hline 00 \\ 60 \\ \hline 60 \end{array}$$

[그림 IV-2] 0이 포함된 곱셈에 대한 학생들의 오반응 사례

498명의 3학년 학생들을 대상으로 한 윤희태(2002)의 곱셈 계산 오류 유형 분석에 의하면, 교과서에서 다루는 여러 유형의 곱셈 중에서 ‘몇 십×몇 십’, ‘두 자리 수×몇 십’의 오답률이 각각 ‘올림이 있는 세 자리 수×한 자리 수’보다 높으며 전체에서 각각 두, 세 번째로 높았다. 0이 포함된 곱셈 문제의 오답률이 높다는 것은 3학년 학생들이 세로 곱셈 계산법을 배운 직후라서 0이 포함된 계산 문제에서 실수를 많이 범하였다는 것을 뜻하지만, 다른 한편으로 이러한 결과는 학생들이 0을 ‘곱하기 십’과 관련시키지 못하고 있다는 것을 함축한다. 한편, 김수미(2009)에 의하면 고학년 학생들을 대상으로 하여 0이 포함된 곱셈에 대한 이해도를 조사하였다. 김수미의 조사 결과에 의하면 5, 6학년의 학생들의

경우 0이 포함된 곱셈에 대한 문제에 대한 정답률이 그렇지 않은 곱셈과 거의 유사하게 나온다. 그러나 이들의 경우 교과서에서 제시하지 않고 있는, 부분합들을 모두 나열하는, 삼단계 방식의 곱셈 계산을 사용하는 비율이 3학년보다 월등히 높게 나왔다. 이것은 오답률의 감소가 개념적 이해보다는 계산 알고리즘의 숙달로 인한 것이라는 점을 시사한다.

강홍규와 심선영(2010)은 자리를 잘못 적은 곱셈 계산 과정의 틀린 부분 찾기,  $21 \times 7 \times 10$ 을 이용하여  $21 \times 70$ 을 계산하는 것을 참조하여 주어진 곱셈 계산하기 등 다양한 문제 상황에 대한 학생들의 반응을 분석함으로써 학생들의 곱셈에 대한 이해도를 조사하였다. 이들의 연구는 교수학적 처방을 받은 학생과 일반적인 수업을 받은 학생을 함께 조사하였는데, 일반적인 수업을 받은 3학년 학생 21명의 경우, 곱셈 계산 자체는 잘 시행한 반면 곱셈 개념이나 곱셈 계산 원리에 관련된 문제에 대한 반응은 좋지 않았다. 특히 위에 언급된 것과 같이 곱셈 계산을 자릿값과 관련지어 설명하고, 주어진 곱셈을 수를 분

17. 우혁이는  $46 \times 37$ 을 다음과 같이 계산하였습니다.

$$\begin{array}{r} 46 \times 3 = 138 \\ 46 \times 7 = 322 \\ \Rightarrow 138 + 322 = 460 \end{array} \quad \begin{array}{r} 46 \\ \times 37 \\ \hline 322 \\ 138 \\ \hline 1702 \end{array}$$

우혁이의 방법은 옳은가요? 틀린가요? 그리고 그 이유를 쓰시오.

틀린 방법입니다. 322가 올림이 한 번이 아닌 두 번입니다.

[그림 IV-3] 잘못된 곱셈 계산에 대한 절차적 설명(강홍규·심선영, 2010: 302)

해하여 다룰 것을 요구하는 위의 두 문제에 대한 학생들의 정답률은 각각 29%와 14%였다. 이러한 상황은 많은 학생들에게 적절한 위치에 숫자를 적는 것으로 진행되는 곱셈 계산의 원리가 자릿값 곧 ‘곱하기 십의 거듭제곱’과 잘 연결되어 있지 못하다는 것을 시사한다. 이러한 부



분은 0이 포함된 곱셈을 수의 크기를 드러내지 않고 단순히 0이 아닌 숫자들끼리 먼저 계산하고 그 다음에 0을 붙이는 계산 알고리즘과 관련되어 있는 것으로 보인다. 단순히 이러한 반응들이 학생들의 학습 부족으로 돌리기는 어려운 것으로 판단된다.

불충분하지만, 이러한 조사 결과는 학생들이 곱셈 계산법을 배우는 초기 단계에서 0이 포함된 계산을 상당히 어려워하며, 고학년이 되면 0이 포함된 곱셈 계산을 다른 경우들처럼 할 수 있게 되지만 이는 교과서에서 가르치지 않는 단계적인 세로셈 계산법을 숙달한 결과에 가까워 보인다.

## V. 결론

곱셈 계산법의 역사적 발달 과정은 자릿값에 따라 곱해지는 수와 곱하는 수를 분해하여 곱하는 계산 전략의 발달 과정이었다. 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이 적용되는 분해 과정과 곱셈의 결합법칙과 교환법칙이 적용되는 분해 과정이 곱셈 계산에 필요한 분해 과정의 기본이며, 특히 결합법칙과 교환법칙에 의한 분해 과정은 분배법칙에 따라 분해되어도 여전히 큰 수의 곱셈을 곱하기 십 혹은 십의 거듭제곱을 이용하여 효율적으로 계산할 수 있게 한다.

우리나라의 곱셈 지도는 단계적인 전개와 구체물을 통한 계산 과정의 원리 이해라는 틀에 따라서 전개된다. 분배법칙이 적용되는 분해 과정은 구체물을 이용한 설명이 일관되게 제시되어 있다. 이에 비하여, 교환법칙과 결합법칙이 적용되는 과정은 사전에 충분한 조치 없이 ‘몇 십×몇 십’이라는 큰 수의 곱셈에서 제시되어 설명이 상대적으로 어렵고, 알고리즘적 계산술, 0의 개수 확인하기에 크게 의존하는 모습을 보인다.

동수누가라는 곱셈에 대한 표준적인 관념에 따라서 곱셈 과정을 구현할 때, 곱하는 수가 크면, 구체물을 이용하여 표현한다고 해도 분해 과정을 쉽게 파악할 수 있게 표현하기가 어렵다. 이에 적절한 교수학적 조치가 필요하다. 앞 절의 논의 결과에 의하면, 곱하기 십을 별도로 지도하는 것과, 세 수 사이의 곱셈 지도를 도입하는 것을 곱셈 지도법의 개선 방안으로서 고려할 필요가 있다. 현 교과서에서는 ‘몇 십×몇 십’에서  $30 \times 40 = 30 \times 4 \times 10 = 120 \times 10$ 을 유도하는 과정에서 세 수 사이의 곱셈이 처음 나타난다. 새로운 아이디어를 큰 수의 곱셈에서 도입하여 압축적으로 지도하고 있다. 보다 작은 수를 대상으로 하여 두 수 사이의 곱셈을 세 수 사이의 곱셈으로 변환하여 순차적으로 다룰 수 있다는 점을 드러내는 한편, 10의 거듭제곱의 곱하기를 독립적으로 다루며 기수법적 구조에 따라서 쉽게 계산될 수 있다는 점을 강조하여 지도할 필요가 있다. 이러한 점이 충분히 지도된다면 몇십을 곱하는 것이 몇과 십으로 나누어 곱할 수 있다는 것이 계산 결과뿐 아니라 과정까지 보다 명확하게 드러날 수 있을 것이다. 또한 곱셈을 지도하는 3학년이나 4학년뿐 아니라, 소수의 계산에서도 0이 포함된 곱셈 계산이 나오는, 5, 6학년에서도 지속적으로 0이 포함된 계산을 이와 관련하여 다루는 것이 효과적일 것으로 보인다.

이상과 같은 제안이 교육과정과 교과서에서 구현되려면 추가적인 연구가 필요할 것이다. 역사적인 발달 과정을 중심으로 논의하였다는 점에서, 역사-발생적 원리에 따른 구성 방안을 생각해 볼 수 있을 것이다. 그러나 현재는 역사적 발달 과정과 다르게 잘 발달된 기수법이 확립되어 있고 학생들이 여기에 매우 익숙해져 있다는 점을 고려하면, 보다 융통성 있는 접근이 필요할 것이다. 이러한 전개에서 핵심은 곱셈을 단순히 정해진 규칙을 따르는 것이 계산 절차가 아

나라, 기수법의 특성을 이용하여 계산하기 어려운 큰 수를 계산하기 쉬운 작은 수로 분해하여 다루는 것이라는 점이 납득이 되어야 한다는 점에 있다. 이러한 과정은 필연적으로 십의 거듭제곱이 관련된 곱셈의 교환법칙과 결합법칙이 적용되는 곱셈 계산 과정에 대한 이해와 연결될 수밖에 없으며, 이에 대한 이해가 제고될 경우 곱셈 계산법 전체에 대한 학생들의 이해가 더욱 풍부하게 될 것이다. 아울러 곱셈 계산법에 대한 학생들의 이해 상황에 대한 보다 심층적인 분석이 필요한 것으로 판단된다. 학생들의 상황에 대한 보다 명확한 이해는 곱셈 계산법 지도의 개선에서 중요한 기능자이다. 학생들의 상황을 보다 정확하게 파악하고 곱셈 계산법의 원리를 보다 풍부하게 교과서에 구현할 수 있다면, 곱셈 계산법 지도가 크게 개선될 것으로 기대된다.

## 참고문헌

- 강홍규(2009). 배 개념에 기초한 자연수 곱셈 개념의 지도 방안. **학교수학 11**(1), 17-37
- 강홍규 · 심선영(2010). 알고리즘의 다양성을 활용한 두 자리 수 곱셈의 지도 방안과 그에 따른 초등학교 3학년 학생의 곱셈 알고리즘 이해 과정 분석, **한국초등수학교육학회지 14**(2), 287-314
- 교육과학기술부(2009). **초등학교 교육과정 해설(IV) (수학)**. 서울: 교육과학기술부.
- 교육과학기술부(2010a). **수학 3-1**. 서울: 두산동아(주)
- 교육과학기술부(2010b). **수학 3-2**. 서울: 두산동아(주)
- 교육과학기술부(2010c). **수학 4-1**. 서울: 두산동아(주)
- 교육과학기술부(2010d). **초등학교 교사용 지도서 수학 3-2**. 서울: 두산동아(주)
- 김남균 · 김지은(2009) 초등학교 저학년 학생의 곱셈 전략 발달에 관한 연구. **학교수학 11**(4), 745-771.
- 김수미(2009). 영(0)이 초등학생들의 계산 수행에 미치는 영향 분석, **학교수학 11**(4), 567-581
- 안희진(2006). **초등학교 수학 교과서에 나타난 곱셈 알고리즘의 지도 방법에 대한 분석 - 두 자리 수 곱셈을 중심으로**. 서울교육대학교 석사학위논문.
- 우정호 · 정영옥 · 박교식 · 이경화 · 김남희 · 임재훈(2008). **수학교육학 연구방법론**. 서울: 경문사
- 윤희태(2002). **초등학생들의 기초계산 오류에 대한 분석적 연구**. 경인교육대학교 석사학위논문
- 전형옥 · 이경화(2008). (두 자리 수)×(두 자리 수) 해결과정에서 나타나는 아동의 비형식적 지식에 관한 사례연구. **수학교육학연구 18**(4) 483-497
- Adams, D. (1848). *Arithmetic, in which the Principles of Operating by Numbers are analytically explained and Synthetically Applied*. Boston: Phillips and Sampson.
- Atres, F. (1711). *Arithmetick*.
- Berg, R. (2001). Multiplication form Lilaviti to the Summa. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 7(4) 226-231
- Cajori, F. (1905). *History of Mathematics*. London : the Macmillan Company.
- \_\_\_\_\_ (1917). *History of Elementary Mathematics with hints on methods of teaching*. London : the Macmillan Company.
- Chase, P. (1848). *The Elements of Arithmetic*. Philadelphia: Uriah Hunt and Son.

- Clarke, H. (1777). *The Rationale of Circulating Numbers*.
- Cocker, E. (1702). *Cocker's Arithmetick*.
- Colebrooke, H. (1817). *Algebra with Arithmetic and Mensuration*
- De Morgan, A. (1863). *Elements of Arithmetic*. London: Walton and Maberly.
- Drake, J., & Barlow, A. (2008). Assessing Students' Levels of Understanding Multiplication through Problem Writings. *Teaching Children Mathematics* 14(5) 272-277
- Fisher, G. (1734). *Arithmetick*.
- Flegg, G. (1983). *Numbers Their History and Meanings*. New York: Dover Publications, INC.
- Flowers, J., Krebs, A., & Rubenstein, R. (2006). Problems to Deepen Teachers' Mathematical Understanding: Examples in Multiplication. *Teaching Children Mathematics* 12(9), 478-484
- Jackson, L. (1906). *The Educational Significance of Sixteenth Century Arithmetic from the Point of View of the Present Time*. New York : Teacher's College Columbia University.
- Kaplan, R. (1999). *The Nothing that is : A Natural History of Zero*. New York: Oxford University Press.
- Lacroix, S., F. (1825). *An Elementary Treatise on Arithmetic*.
- Malcolm, A. (1718). *The New Treatise on arithmetic and book keeping*.
- Pike, N. (1812). *A new and complete System of Arithmetic*.
- Smith, D., E. (1925). *History of Mathematics vol. 2 special topics of elementary mathematics*
- Sadler, T. (1773). *A Complete System of Practical Arithmetic*.
- Sherin, B., & Fuson, K. (2005). Multiplication Strategies and the Appropriation of Computational Resources. *Journal for Reserach in Mathematics Education* 36(4), 347-395
- Swetz, F. (1987). *Capitalism & Arithmetic: the New Math of the 15th Century*. London: Open Court.
- Venable, C. (1858). *Bourdon's Arithmetick: containing a Discussion on the theory of Numbers*. Philadelphia: J.B. Lippincott & co.
- Walkingame, F. (1851). *The Tutor's Assistant: Being a Compendium of Practical Arithmetic*. Toronto: Brewer, McPhail & co.
- Weston, T. (1729). *A Treatise on Arithmetic in Whole Numbers and Fractions*.
- Wingate, E. (1629). *Mr. Winagte's Arithmetick*.

# An Investigation on the Historical Developments of the Algorithms for Multiplication of Natural Numbers

Joung, Youn-Joon (Chungnam National University)

In this paper I investigated the historical developments of the algorithms for multiplication of natural numbers. Through this analysis I tried to describe more concretely what is to understand the common algorithm for multiplication of natural numbers. I found that decomposing dividends and divisors into small numbers

and multiplying these numbers is the main strategy for carrying out multiplication of large numbers, and two decomposing and multiplying processes are very important in the algorithms for multiplication. Finally I proposed some implications based on these analysis.

\* key words : multiplication(곱셈), algorithm for multiplication(곱셈 계산법), history(역사), positional numeral system(위치 기수법), Zero(0)

논문접수 : 2011. 5. 8

논문수정 : 2011. 5. 26

심사완료 : 2011. 6. 9