대한수학교육학회지 <학교수학> 제 13 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.13, No.2 345-362. June. 2011

중등 수학교사의 수학내용 지식[1)]

조 완 영[*]

본 연구의 목적은 중등 수학교사가 알아야 할 수학내용 지식에 관한 개념을 보다 명확히 하고, 이를 근거로 현직 수학교사의 수학내용 지식을 부분적으로 조사하는 데 있다. 수학교사가 알아야 할 수학내용 지식을 학교수학의 내용지식과 과정지식, 학교수학과 연결된 학문적 수학으로 구분할 수 있다. 학교수학과 연결된 학문적 수학, 학교수학의 과정 지식 중 수학외적 문제해결, 추론과 증명 영역을 중심으로 현직 수학교사들의 수학내용 지식을 조사하였다. 조사 결과 수학외적 문제해결력, 추론과 정당화 관련 문제는 물론 학교수학과 학문적 수학 사이의 연결 관련 문제 모두 타당한 설명을 포함한 정답률에 문제가 있는 것으로 나타났다.

Ⅰ. 서 론

수학자의 수학지식과 구분되는 수학교육 전문가로서의 수학교사의 지식이 무엇인가를 정립하려고 많은 학자들이 노력해 왔다. 대표적인 연구가 Shulman(1986)의 PCK에 대한 연구로, Shulman은 교사와 관련된 지식을 교과내용 지식(subject matter knowledge: 이하 SMK), 교수내용 지식(pedagogical content knowledge: 이하 PCK) 그리고 교육과정 지식으로 구분하였다. Shulman의 분류에서 SMK에는 학생들에게 가르쳐야 할 수학의 필수적인 정의, 개념, 원리, 절차, 아이디어 등을 포함된다. PCK는 학교수학의 내용을 학생들이 이해할 수 있도록 가르치는 방법에 대한 교사의 지식을 의미한다(Shulman, 1986: 1987). 여기에는 교과내용 지식을 효과적으로 표현하고 설명하는 방법, 적절한 유추와 예시, 학생들의 선행개념과 오개념 등에 대한 교사의 이해가 포함된다. Shulman(1987, 8쪽)의 연구에서 SMK와 PCK를 구분하면서 PCK를 내용전문가와 교육전문가를 구분하는 중요한 기준이며, SMK는 PCK에 영향을 끼치는 요소로 보았다.

Shulman 이후 PCK 개념을 중심으로 교사에게 필요한 지식을 개념화하거나 수학교사의 지식이 수업의 실제에 어떤 영향을 끼치는지에 대한 연구가 광범위하게 이루어져 왔다. 신현용과 이종욱(2004)은 수학교사의 지식을 ‘교과지식’, ‘교수법적 내용 지식(PCK), 교수법적 지식으로 개념화한 후 이를 토대로 수학교사의 지식이 수업의 실제에 어떤 영향력을 미치는 탐구하였다. 또한 조성민(2006)은 함수 영역에서 고등학교 교사의 PCK가 수업에 어떻게 반영되는지를 분석하였다. 이러한 연구에서는 PCK를 SMK와 구분하여 교사에게 필요한 지식으로 강조하였다.

반면 김구연(2007)은 중학교 수학 교사의 PCK를 탐구하기 위한 연구에서 PCK를 ‘수학에 대한 지식’, ‘학습자의 이해에 대한 지식’, ‘교수법에 대한 지식’의 세 가지로 구조화하여 SMK를 PCK에 포함시키고 있다. 김구연에 따르면 ‘수학

* 충북대학교 (wycho@cbu.ac.kr)
1) 이 논문은 2009학년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비 지원에 의해 연구되었음

에 대한 지식'은 각 개념과 주제들 간의 연계성, 다양한 형태의 문제해결력 그리고 교과서에 대한 이해를 포함한다. '학습자의 이해에 대한 지식'은 수학의 특정 개념과 주제에 대한 학생들의 잘못과서생각과 일반적인 오류, 학생들이 느끼는 어려움과 혼동에 대한 이해를 포함하였으며 이는 Shulman의 의미에서의 PCK와 관련이 있다.

한국교육과정평가원에서는 2005년부터 2010년 이후까지 장기 계획을 세우고 PCK에 대한 일련의 연구를 수행해 오고 있다(박경미, 2009). 한국교육과정평가원에서는 PCK를 '내용 교수 지식'으로 명명하고, PCK가 교사의 전문성을 규정짓고 보장하는 핵심 개념이라는 인식 하에 PCK를 수업 컨설팅과 연계시켜 연구하고 있다(박경미, 2009). 최승현(2007)는 PCK는 "교과내용, 교수법 및 상황에 대한 지식과 신념 등 교사지식을 구성하는 다른 영역들로부터의 지식이 변형된 결과"(34쪽)로 명시적 영역이며 실천적 지식이라 주장하였다. 반면 수학내용 지식 등 교사지식을 구성하는 다른 지식 영역은 묵시적 성격의 기초적인 교사 전문지식으로 구분하였다.

이러한 일련의 연구를 보면 수학교사의 전문적 지식과 관련하여 수학교사에게 필요한 수학내용 지식 보다는 PCK를 강조하고 있음을 알 수 있다. 또한 수학교사의 지식에 관한 최근의 연구를 보면 두 가지 어려운 점이 나타난다. 첫째는 수학교사 지식을 개념화할 때 수학내용 지식과 PCK 사이의 구분이 명료하지 않다는 것이고 둘째, 수학내용 지식에 관한 개념이 명확하지 않다는 점이다.

수학교사의 전문성은 일반적으로 예비교사 양성과정, 임용시험, 현직교사 연수 등을 통해 개발된다. 이러한 과정에서 PCK는 물론 수학내용 지식이 강조된다. 즉 크게 수학내용학과 수학교육학으로 구분되고 있는 현재의 수학교사 교육 프로그램과 임용고사 제도 등을 고려할 때, 수학교사의 전문성의 중요 부분으로 다루어지고 있는 수학교사의 수학내용 지식에 관한 연구가 심층적으로 이루어질 필요가 있다. 최근의 연구에서 수학내용 지식 자체에 관한 연구는 찾아보기 어렵다.

본 연구의 목적은 수학내용 지식을 보다 구체적으로 개념화하고 이를 근거로 현직 수학교사들의 수학내용 지식을 조사하는 데 있다. 이를 위해 먼저 문헌을 조사하여 수학내용 지식을 개념화하고 다음에 현직 수학교사들을 대상으로 수학내용 지식의 이해 정도를 조사한다.

II. MCK에 관한 선행연구 분석

1. MCK[1]에 관한 선행연구 분석

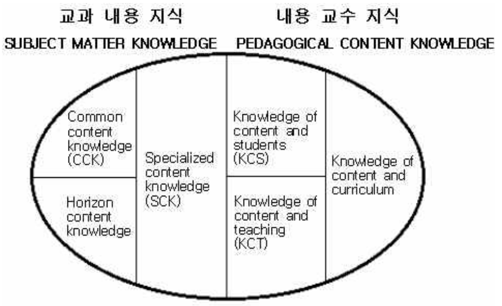
Shulman의 의미를 수학에 적용하면 MCK는 "수학 그 자체"를 의미하는 것으로 학문의 실체론적 구조와 구문론적 구조를 포함하는 지식(Schwab, 1978; Grossman, 1990)이라 할 수 있다. 여기서 실체론적 지식은 수학적 사실, 개념, 원리, 법칙 그리고 설명 형식을 의미하며, 구문론적 지식은 현재 수학자들에 의해 받아들여지는 새로운 지식의 정립 과정, 패러다임, 규준, 합의에 관한 지식을 의미한다(이기영, 2009에서 인용).

교과 내용의 구문론적 구조는 학자들이 해당 학문 분야에서 탐구를 안내해주는 표준이나 규

1) Shulman의 PCK(Pedagogical content knowledge)라는 용어는 교육학적 내용 지식, 내용 교수 지식, 교수법적 내용 지식, 교수 내용 지식 등으로, SMK(Subject matter knowledge)는 교과지식, 교과내용 지식 등으로 번역되었지만 본 연구에서는 각각 '교수내용 지식', '교과내용 지식'으로 명명한다. 이러한 용어를 수학 교과에 적용하여 수학 교과에서의 PCK를 수학 교수내용 지식(Mathematical pedagogical content knowledge, 이하 MPCK), 수학교과에서의 SMK를 수학내용 지식(Mathematical content knowledge, 이하 MCK)이라 한다.

범의 역할을 한다. 수학 지식의 구문론적 측면을 개발하기 위해서는 교사는 수학적 설명과 정당화를 이해해야 하며 이 과정에서 수학적 증거나 논리가 어떤 역할을 하는지에 대한 지식을 가지고 있어야 한다. 그러므로 수학의 구문론적 지식을 갖추지 못한 교사는 학생들에게 수학 내용을 표현하고 가르치는데 어려움을 겪게 된다. 따라서 수학 교사 교육에서 수학의 구문론적 구조를 가르치는 것은 당연하다. 수학 지식에 대한 실체론적, 구문론적 측면의 이해는 교사의 MPCK 개발을 위해 필수적이며, 이러한 교사들의 MPCK는 학생들이 보다 심층적으로 수학을 이해할 수 있도록 도울 수 있다. 마찬가지로 학생들이 가지고 있는 오개념을 옳지 않은 것으로 인식하지 못하는 교사는 오히려 이들의 오개념을 강화시켜준다. 그러므로 탄탄한 교과 내용적 기초 없이는 효과적이고 유용한 MPCK의 정립이 어렵다(이기영, 2009 참조).

Ball et al.(2008)은 수학교사의 지식을 ‘가르치는 데 필요한 수학내용 지식(Mathematical content knowledge for teaching, 이하 MKT)라는 개념으로 정의하였다. MKT는 교과내용 지식(SMK)과 PCK 크게 두 영역으로 구분되어 있다. PCK는 내용과 교수에 관한 지식, 교육과정에 관한 지식으로 구분되어 있으며 Shulman의 의미에서 PCK와 다르지 않다. 교과내용 지식은 공통 내용 지식



[그림 Ⅱ-1] MKT의 구성
Ball, D. L., Bass, H., Hill, C., & Phelps, M. (2006)(조선아, 2010에서 재인용)

(Common Content Knowledge: CCK)과 특수내용 지식(Specialized Content Knoledge: SCK)으로 구분된다([그림 Ⅱ-1], 조선아, 2010에서 재인용).

공통내용 지식은 학습자에게 가르칠 수학 지식을 의미하는 것으로 어떤 수학문제에 대해 단순히 답을 계산하거나 수학 문제를 옳게 해결하는 것을 나타낸다. 조선아(2010)은 미분 단원에서 공통내용 지식을 측정할 수 있는 문항으로 평균변화율과 순간변화율의 차이를 묻는 문제를 예로 제시하고 있다. 공통내용 지식은 학교수학의 내용에 초점을 둔 개념이다.

특수 내용 지식은 학습자에게 직접 가르치지 않지만 교사가 이해하고 있어야 할 수학 지식을 포함하는 개념으로 수학을 가르치는데 필요한 고유한 기술이라 할 수 있다. 교사의 수업은 일상적으로 반복되는 작업이지만 동시에 고유한 수학적 이해와 추론이 요구되며 교사는 학생들이 알아야 하는 지식보다 더 많은 수학 지식을 알아야 한다. 여기에는 수학을 필요로 하는 다른 직업 예를 들면 회계사나 엔지니어들이 사용하는 수학은 물론 왜 그런지를 설명하고 이를 위한 문제를 만드는 지식이 포함된다.

Ball et al.(2008)이 제시한 MKT의 교과지식이나 Shulman이 제시한 교과지식의 실체적 지식과 구문적 지식에 학교수학 자체는 물론 수학적 추론과 증명, 표현과 연결, 문제해결 등이 포함되는 것은 분명하다. 그러나 학문적 수학의 범위나 학교수학과의 관련성에 대해서는 명확하지 않다.

PCK에 관한 국내의 연구에서도 수학내용 지식을 다양하게 정의하고 있다. 김구연(2007)은 PCK를 수학에 대한 지식, 학습자의 이해에 대한 지식, 교수법에 대한 지식으로 구분하면서 수학 교과내용 지식을 “각 개념과 주제 사이의 연계성, 다양한 형태의 문제해결력, 교과서에 대한 이해”를 포함하는 것으로 정의하고 있다. 조성민(2006)은 교과 내용 지식을 “교과의 내용이 본

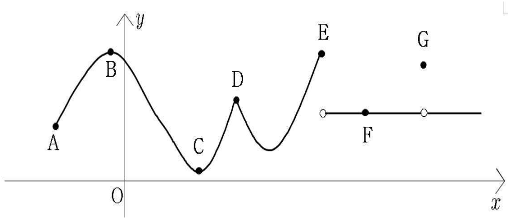
질적으로 가지고 있는 부분 즉 수학에 대한 지식을 의미하는 것”으로 정의하면서 학교수학 교육과정에 대한 전반적인 지식을 기반으로 개념에 대한 정의와 사례의 구분, 연결성에 대한 지식을 포함하고 있다고 주장하였다. 김구연과 조성민이 제시한 교과 지식에서도 학문적 수학을 어느 범위까지 포함할 것인지에 대한 명확한 주장은 보이지 않는다. 반면 신현용과 이종욱(2004)은 “수학과 학교수학에 대한 포괄적 이해로 수학 개념과 절차 및 연결성, 개념과 절차에 대한 다양한 표현, 추론을 통해 문제를 해결하고 의사소통하는 방법을 포함한다.”고 교과지식을 정의하여 학문적 수학이 교과지식에 포함되어야 함을 함축하고 있다.

2. 학교수학과 학문적 수학 사이의 연결

수학교사가 알아야 할 MCK에 학교수학의 내용과 과정은 물론 학교수학의 이론적 배경이 되는 학문적 수학, 수학의 철학적, 역사적 배경, 학교수학과 실세계와의 관련성 등에 관한 지식이 포함되어야 한다. Ferrini-Mundy, Floden, McGrory, Burrill, Sando(2005)는 대수를 가르치려면 학생들이 알고 있는 것과 대수 내용 지식을 연결하는 것, 수학적으로 정확성을 유지하면서 대수 내용 지식을 학생들이 이해할 수 있는 수준으로 변환하는 것 등의 교수 상황에서의 수학 활동이 필요하다고 주장하였다. Stacey(2008)는 중등수학을 가르치는데 필요한 수학을 ‘수학’을 아는 것, 활동으로서의 수학을 경험하는 것, 수학사와 수학철학 등과 같은 수학에 관하여 아는 것, 학습 방법을 아는 것 등 네 가지로 구분하였다. Stacey(2008)는 교사가 알아야 할 ‘수학’에 대하여 예비 수학교사들이 배우는 학문적 수학과 학교수학과의 연결을 이해하는 것이 중요하다고 주장하였다. 이러한 주장은 SMK에 학문적 수학이 포함되어야 함을 내포하고 있다.

수학교사가 학교수학의 이론적 배경이 되는 학문적 수학내용을 알아야 하는 것은 분명하다. 예를 들어 다음과 같은 수학 문제를 생각해 보자[2].

<문제> 다음은 함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. A-G 중 극값을 갖는 점은 모두 몇 개인가?



수학교사는 먼저 답이 무엇인가를 생각할 것이다. 답을 구하는 과정에서 B, C, D에서 극값을 갖는다는 것은 명확하지만 나머지 점에서 극값이 존재하는지는 명확하지 않을 수 있다. 고등학교 수준[3]과 대학 수준의 미적분학이나 해석학에서의 극대와 극소의 정의[4]는 다르기 때문이다. 교사는 먼저 교육과정에서 제시한 내용과 교과서의 기술 방식을 이해해야 한다. 교육과정 해설서에서는 함수의 극대와 극소에 대하

2) 조완영(2010) 참조

3) 고등학교 수준에서는 극대와 극소를 다음과 같이 정의한다(유희찬 외, 2009).

(i) 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, x가 감소하면서 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라 하고 그 때의 함숫값 $f(a)$를 극솟값이라고 한다. (ii) 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하고 그 때의 함숫값 $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

4) 대학 미적분학에서는 극대와 극소를 다음과 같이 정의한다(김원규 외, 2009).

A는 함수 f의 정의역이고 $c \in A$라고 하자.

(i) c의 근방 $U=(a,b)$가 존재해서 모든 $x \in U \cap A$에 대해 $f(x) \le f(c)$이면 $f(c)$를 함수 f의 극솟값이라

여 다음과 같이 기술하고 있다(교육과학기술부, 2009, 24).

④ 함수의 극대와 극소를 이해하고 이를 판정할 수 있다.

○ 극대, 극댓값, 극소, 극솟값의 뜻을 이해하게 한다.

극대, 극소, 극댓값과 극솟값의 뜻을 함수의 그래프를 이용하여 직관적으로 알게 하고, 이를 바탕으로 각 개념의 정의를 이해하게 한다. 극댓값과 극솟값을 극값이라고 함을 알게 한다.

○ 도함수를 이용하여 극대와 극소를 판정하고, 극댓값과 극솟값을 구할 수 있게 한다.

미분가능한 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때 $x=a$의 좌우의 부호 변화에 따라 극대, 극소를 판정함을 알게 한다. 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때, $f''(x)>0$이면 $x=a$에서 극솟값을 가지고 $f''(x)<0$이면 $x=a$에서 극댓값을 가짐을 알게 한다. 이와 같은 방법으로 극대와 극소를 판정하고 함수의 극값을 구할 수 있게 한다.

다음에 수학교사는 어떻게 가르칠 것인지를 판단해야 한다. 고등학교 수준에서는 연속인 함수를 전제로 극값을 논의하고 있기 때문에 연속이면서 미분계수가 0인 점과 미분불가능한 점에서 극값이 존재할 가능성이 있음을 이해해야 한다. 또한 고등학교 수준에서는 대부분의 교과서에서 감소상태와 증가상태를 이용하여 극값을 정의하기 때문에 닫힌구간의 양 끝 점이나 불연속인 점, 상수함수 등에서의 극값의 존재성 여부는 판단하기 어려움을 이해해야 한다. 고등학교 수준에서의 증가상태와 감소상태의 정의에 따르면 상수함수 $f(x)=c$(일정)는 모든 구간에서 증가상태도 감소상태도 아니다. '상수함수는 극값을 갖지 않는다.'라고 판단할 수 있다. 그러나 대학 미적분학에서의 정의를 따르면 상수함수는 정의역의 모든 점에서 극대이고 극소이다. 이러한 의미에서 고등학교 수준에서 증가상태와 감소상태 개념[5]을 이용하여 극값을 설명하기 위해서는 '상수함수가 아닌 연속함수'라는 조건이 필요함을 이해하는 것이 중요하다.

두 종류의 교사를 가정할 수 있다. 고등학교 수준에서의 극대와 극소의 정의만을 이해하고 있는 A교사와 대학 수준의 미적분학이나 해석학에서의 극대와 극소의 정의와 교수학적 변환 관계를 이해하고 있는 B교사를 생각해 보자. 두 교사의 MPCK의 수준은 다를 것이다. B교사는 교과서의 서술 방식만을 가르치는 A교사와 달리 학생들의 수준을 고려하여 연속이 아닌 점, 상수함수의 경우, 끝 점에서 극값을 갖는지를 추가적으로 질문할 수 있고[6], 이러한 불확실하고 애매한 상황에 대한 논의를 통해 학생들의 수학적 탐구심을 자극할 수 있을 것이다. 또한 이러한 논의를 통해 극값의 의미와 개념을 명확히 할 수도 있을 것이다.

그러나 문제는 학문적 수학을 어느 정도까지 포함시킬 것인가에 있다. MCK를 개념화하는 과정에서 학문적 수학의 범위를 고려할 때 한 가

고 한다.

(ii) c의 근방 $U=(a,b)$가 존재해서 모든 $x\in U\cap A$에 대해 $f(x)\le f(c)$이면 $f(c)$를 함수 f의 극솟값이라고 한다.

5) 고등학교 수준에서는 증가와 감소를 다음과 같이 정의한다(유희찬 외, 2009).

(i) 함수 $y=f(x)$가 어떤 구간의 임의의 x값 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이면 $y=f(x)$는 그 구간에서 **증가**한다고 한다. 함수 $y=f(x)$에서 충분히 작은 모든 양수 h에 대하여 $f(a-h)<f(a)<f(a+h)$이면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **증가상태**에 있다고 한다.

(ii) 함수 $y=f(x)$가 어떤 구간의 임의의 x값 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$이면 $y=f(x)$는 그 구간에서 **감소**한다고 한다. 함수 $y=f(x)$에서 충분히 작은 모든 양수 h에 대하여 $f(a-h)>f(a)>f(a+h)$이면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **감소상태**에 있다고 한다.

6) 이러한 문제를 본격적으로 다루지 않고 질문만 던지거나 간단하고 직관적인 설명을 하면서 대학 미적분학에서 상세히 배울 것임을 알려 줄 수도 있다.

지 분명한 것은 수학교사가 알아야 하는 수학과 수학자들의 수학은 목적이 다르기 때문에 달라야 한다는 것이다.[7] 이러한 차이에 대하여 Dewey (1902, pp. 29-30)는 다음과 같이 주장하였다(Sowder, 2007, pp. 162-163에서 재인용).

> 모든 학문 또는 교과는 두 가지 측면이 있다. 하나는 과학자를 위한 것이고 다른 하나는 교사를 위한 것이다. 이러한 두 가지 측면이 결코 상반되거나 갈등상태에 있는 것은 아니다. 그러나 두 가지 측면이 동일하지도 않다. …

20세기 초 Felix Klein도 수학 교사 교육의 '이중단절' 문제를 지적한 바 있다. 예비 수학교사는 대학에서 중등학교 수학과 차원이 다른 추상적인 순수 수학을 배우게 되면서 한 번의 단절을 경험하고, 현직교사가 되면 대학에서 배운 순수 수학은 거의 망각한 채 중등학교에서 배운 수학을 토대로 수학을 가르치게 되면서 또 한 번의 단절을 경험한다는 것이다(박경미, 2009). Klein은 예비 수학교사 교육이 학문적 수학 자체에 지나치게 집중되어 있다는 문제를 지적한 것으로 오늘날 예비 수학교사들도 이미 100여 년 전 Klein이 지적했던 '이중단절'의 문제에서 벗어나지 못하고 있다. 현재 대부분의 사범대학에서 전공영역을 수학내용학과 수학교육학으로 명백히 구분한 후, 수학 내용학에서 학문적인 수학만을 가르치고 수학교육학에서는 학교수학과 수학교육 관련 이론을 중심으로 가르치면서, 학교수학과 학문적 수학 사이의 관계를 소홀히 다루고 있다[8].

그렇지만 최근 한국과 중국에서는 학교수학과 학문적 수학 사이를 연결시키려는 시도가 있어 왔다. Li와 Haung, Shin(2008)은 동아시아의 관점에서 중등 예비교사를 위한 수학 교과 지식에 대한 최근의 동향을 비교하였다. 예비 수학교사를 위한 수학내용학의 전체적인 교육과정 체제를 보면 중국과 한국에서는 전통적인 프로그램과 혁신적인 프로그램 모두 기본적으로 학문적인 수학지식과 논리적인 추론을 강조하고 있다.

중국의 경우 혁신적인 수학 과정에서 추상대수와 해석기하 그리고 해석학 등에서는 어려운 학문적 수학 지식을 예비교사들이 이해하기 쉽게 구성하려는 노력이 없는 것은 아니지만 본래의 목적은 어려운 학문적인 수학 내용을 유지하는 데 있었다. 이러한 교과에서는 학교수학과의 관계를 탐구할 기회를 제공하지 못했다. 그렇지만 현대수학과 학교수학, 중등 대수 연구, 중등 기하 연구, 중등 확률과 통계 연구 등의 교과에서는 학문적 수학과 학교수학 사이의 연결을 다루고 있다. 수학사 교과에서는 수학의 역사적인 관점에서 학교수학을 다루는데 도움이 되는 내용을 다루고 있다.

한국의 혁신적인 예비수학교사 교육프로그램에서는 학문적 수학과 학교수학 사이의 내적 연결과 수학과 그 수학내용의 교수법 사이의 관련성 모두를 포함시키려고 노력하였다(83쪽). 예비 교사 교육 프로그램에서 수학을 강조하면 교수법과 같은 다른 한 쪽의 영역이 축소되는 경향이 있지만(Jermy et al., 2003), 한국의 혁신 프로그램에서는 관련된 수학 내용의 교수학습에 적절한 방식으로 교과 지식과 교수법을 연결시키는 통합적인 방법을 택하려고 노력하였다. Li와 Haung, Shin(2008)은 Kant는 "수학 없는 교수법은 공허하고, 교수법 없는 수학은 무의미하다"고 주장하였듯이 수학내용과 교수법[9]이 동시에

---

7) 본 논문에서는 이 문제를 심층적으로 다루지 않는다. MCK에 포함되어야 할 학문적 수학의 최소 범위를 중심으로 논의한다.

8) 최근 일부 수학자를 중심으로 교사를 위한 학문적 수학에 대한 내용을 출판하고 있다. 국가적인 차원에서 이 부분에 대한 연구가 필요하다.

9) '수학내용과 교수법'에서 수학내용은 수학내용학을 교수법은 수학교육학을 의미하는 것으로 해석된다.

중요하다고 주장하였다.

한국과 중국에서의 예비 수학교사 교육프로그램에 대한 개혁 노력이 안정적으로 정착이 되고 있는지에 관한 논란과 무관하게 수학계에서도 학문적 수학과 학교수학 사이, 학문적 수학과 학교수학의 교수 내용 지식 사이를 연결시키는 것이 교사교육에서 중요하다는 것을 인식하고 있는 것으로 해석된다.

III. 대안적인 MCK 개념[10)]

Shulman이후 대부분의 교사지식에 관한 연구에서는 수학내용 지식을 수학이란 교과가 가지고 있는 부분 즉, 수학에 대한 지식으로 수학 개념, 연결성, 표현 등에 대한 다양한 수준과 형태의 지식을 포함하는 것으로 정의하고 있다. 이 때의 수학내용 지식은 대학수준의 수학 지식이라기보다 중등학교 수준에서의 수학 지식을 의미하는 것으로, 학교 교육과정에 대한 지식을 기반으로 개념에 대한 정의, 사례의 구분, 연결성 등을 포함하는 것으로 개념화하였다(최승현, 2007, 46). 이런 측면에서 볼 때 MCK에 학교수학의 내용과 과정이 포함되는 것은 자연스러운 결과이다. 학교수학의 내용은 학교 교육과정을 중심으로 범위를 정할 수 있고, 수학의 과정은 NCTM(2000)에서 제시한 문제해결, 추론과 증명, 표현과 의사소통, 연결성 등으로 범주를 정할 수 있다.

문제는 학문적 수학을 어느 정도까지 포함시킬 것인가에 있다. 앞에서 논의했듯이 예비 수학교사 교육 프로그램에서는 학문적 수학이 매우 강조되고 있으며 교사 선발 과정에서 차지하는 비중도 매우 높다. 학문적인 수학을 MCK에 포함시킬 때 다음 몇 가지를 고려해야 한다. 첫째, 학교수학과의 관련성을 고려할 필요가 있다. 학문적 수학을 가능한 많은 양을 연구하면 좋겠지만 시간, 개인적인 능력 등의 제한이 따른다. 따라서 학문적 수학은 학교수학과의 관련성을 고려하여 최소기준의 개념으로 포함시키고 필요하면 추후 더 학습할 기회를 제공하는 것이 타당하다. 최근 한국과 중국에서 혁신적인 교사 교육 프로그램을 개발하면서 학교수학과 학문적 수학 사이의 연결을 강조한 것은 매우 바람직하다 할 수 있다. '이중 단절'을 예방하고 수학교육 전문성을 극대화할 수 있도록 범주를 정하는 연구가 이루어질 필요가 있다. 둘째, 학문적 수학 내용의 범위와 방법을 결정할 때 수학교육 전문가 양성이라는 목적을 고려해야 한다. 수학자가 연구하는 해석학과 수학교육자가 연구하는 해석학은 본질적으로 다르다. 또한 수학교사 교육의 목적은 수학철학 또는 수학교육 철학과도 관련이 있다. 따라서 학문적 수학을 어느 정도까지 그리고 어떤 방법으로 학교수학으로 변환시킬 것인가가 달라지면 이에 따라 수학교사의 MCK도 달라질 수 있다. 이에 대한 논의는 또다른 연구를 요구한다.

본 장에서는 MCK의 개념을 학교수학의 내용과 과정, 학교수학과 연결된 학문적 수학으로 개념화하고 이에 대해 구체적으로 논의한다.

1. 학교수학의 내용과 과정

본 연구에서 학교수학의 내용은 수학과 교육과정이나 교과서에 제시된 수학내용을 의미한다. 황선욱 등(2011)은 2009 개정 수학과 교육과정에 관한 시안연구에서 창의성과 인성을 강조하는 교육과정을 구현하기 위해 학교수학의 내용은 물론 문제해결, 추론과 증명, 의사소통 등 학교수학의 과정을 명시적으로 강조하였다.

학교수학의 과정은 수학 내・외적 문제해결,

10) 이 부분은 예비수학교사를 대상으로 한 조완영(2010)의 연구에서의 내용을 수정·보완한 것임

추론과 증명, 표현과 의사소통 등을 의미한다. 예를 들어 수학교사는 증명을 할 수 있어야 함은 물론 교육과정의 각 수준에서 증명을 다루는 이유를 이해해야 한다. 고등학교 1학년에서 다루는 "명제 $(-a)(-b)=ab$를 증명하시오"와 같은 증명 문제는 직관적으로 자명한 명제를 실수의 연산에 대한 기본 성질을 이용하여 증명하도록 요구하는 문제이다. 교육과정에서의 의도는 이미 참이라고 믿고 이용해 왔던 명제들이지만 실수의 연산에 대한 기본 성질을 기본 공리로 받아들이고 이들 공리를 이용하여 증명하라는 것이다. (1)은 덧셈에 대한 항등원과 역원의 의미와 항등원과 역원의 유일성을 이용하여 증명할 수 있다. 즉, $x+a=a+x=0$일 때 $x=-a$는 a의 덧셈에 대한 역원임을 이용하여 $(-a)(-b)$와 $-ab$가 역원관계에 있음을 증명하면 된다.

$$\begin{aligned}&(-a)(-b)+(-ab)\\&=(-a)(-b)+(-a)b\\&=(-a)\{(-b)+b\}\\&=0\end{aligned}$$

같은 방법으로

$$(-ab)+(-a)(-b)=0$$

따라서 $(-a)(-b)=ab$

학생들은 이 문제를 직관적으로 자명한 것으로 생각하고 있기 때문에 증명의 필요성을 이해하기 어려우며, 더욱이 이러한 방법은 공리적인 방법으로 높은 수준의 엄밀성을 요구하는 연역적 증명이기 때문에 학생들이 이해하기가 쉽지 않다. 학생들은 직관적으로 자명한 것처럼 보이지만 오류가 있을 수 있고, 참임이 확실한 실수의 연산에 대한 성질을 이용하여 증명해야 한다는 것을 이해해야 한다.

고등학교 1학년의 추론과 증명에서는 보다 더 엄밀한 수준을 요구하며 다양한 증명방법들이 다루어진다. 학생들은 주어진 조건으로부터 얻은 일반적인 결과의 타당성을 입증하기 위하여 연역적 증명을 할 수 있어야 한다. 그러나 증명의 형식(예, 문단증명이나 2단 증명)보다 주의 깊게 추론하고 논리적으로 설명을 하였는가에 초점을 맞출 필요가 있다. 이 때 교사들은 학생들이 탐구, 추측하고 이를 반증 또는 증명할 필요성이 있음을 이해하도록 도와주는 역할을 해야 한다. 특히 학생들의 증명 수준이 요구하는 수준이 아닌 경우, 갈등을 유발하여 더 높은 수준의 증명이 필요함을 이해시킬 필요가 있다[11].

2. 학교수학과 연결된 학문적 수학

학교수학과 연결된 학문적 수학은 학교수학의 이론적 배경이 되는 학문적 수학을 의미한다. 다음 어느 교사의 질문을 예로 들어 보자.

> 교사: "$3x(x+2)$의 인수를 모두 구하여라."는 문제에서 학생이 "선생님, 답은 $x, x+2, x(x+2)$가 아닌가요?"라는 질문을 했을 때 당황하였어요. 나는 3도 인수에 포함시켰거든요. 어떤 것이 정답인가요?

이 교사는 교과서에서 제시된 "다항식의 약수, 배수에서는 수인수를 고려하지 않는다."를 주의 깊게 확인하지 않은 것으로 보인다. 바람직한 수학교사의 수학내용 지식이라는 측면에서 보면 왜 수인수를 고려하지 않는지를 학생들의 사고 수준에서 그 이유를 설명할 수 있어야 함은 물론 보다 근원적이고 학문적인 이유를 이해해야 한다. 즉 학교수학과 연결된 대수학적 지식을 알아야 한다.

11) 이러한 관점에서 MCK와 MPCK의 구분이 모호하며 이를 기반으로 수학교사의 전문적 지식을 어떻게 개념화할 것인지에 대한 후속연구가 필요하다.

유리수 환에서 정의된 다항식환 $\mathbb{Q}[X]$에서 다항식의 최대공약수와 최소공배수는 단원인 인수를 무시하면(동반원을 같은 것으로 보는 것과 같다) 유일하게 존재한다. 유리수체에서는 0을 제외한 모든 유리수의 가역원이 존재하기 때문에 수인수를 고려하면 한 가지로 결정되지 않는다. 따라서 단원인 인수를 무시하는 것이 일반적이다. $\mathbb{Q}[X]$에서 $f(x)=-4x^2$, $g(x)=6x(x+1)$의 최대공약수와 최소공배수는 각각 x, $x^2(x+1)$이다(김응태 · 박승안, 2009, 236). 앞의 문제에서 수인수를 고려하지 않는 것은 이와 관련된다. 이러한 대수학의 지식이 학교수학과 직접적으로 연결된 학문적 수학이다. 일반적인 학문적 수학은 학교수학과 직접 관련이 없는 순수한 학문적 수학을 의미한다. 예를 들어 중등 임용시험의 추상대수학 분야의 평가요소에 포함된 갈루아 이론(김홍기 외, 2008)은 학교수학과 직접 관련이 있다고 보기 어렵다.

여기서는 학교수학과 직접 연결되지 않은 일반적인 학문적 수학을 수학교사가 알아야 할 내용지식에 포함시키지 않았다. 수학교사, 수학교육학자 또는 수학 교사 교육 전문가, 수학자에 따라 또는 개인적인 차원에서 수학교사의 지식으로서의 MCK의 범위를 다양하게 정의할 수 있을 것이다[12]. 그러나 수학을 가르치는데 필요한 수학이라는 관점에서 보면 학교수학 그리고 학교수학과 직접 연결된 학문적 수학을 MCK에 포함시키는 것이 타당할 것이다.[13]

이 외에 수학사와 수학철학 등도 수학교사가 알아야 할 수학내용 지식에 포함시킬 수 있다.

Ⅳ. 현직교사의 수학내용 지식

1. 연구대상 및 자료수집

본 연구에서는 심화연수에 참여한 25명의 교사와 C 대학의 대학원 수학교육 전공 석·박사 대학원생인 현직 수학교사 18명을 대상으로 검사지를 이용하여 수학내용 지식을 조사하였다. 경력 연도별로는 3년 미만이 6명, 3-5년 경력의 교사가 5명이고 32명의 교사가 교사경력 6년 이상이었으며 조사대상 모든 교사들이 고등학교 근무 경력이 있다. 조사 대상 선정의 어려움 때문에 의도적인 표집을 하기 어려웠으며 불가피하게 연수 교사들과 대학원 학생들을 연구 대상으로 선정하였다. 따라서 교사 경력별로 구분하여 분석하는 것이 일반적인 해석의 자료로 사용되지는 않는다.

본 연구에서의 검사 문항은 MCK의 모든 영역을 포함하지는 않았으며 특히 논란의 여지없이 MCK에 포함될 수 있는 학교수학의 내용 부분은 제외되었다. 문항은 학교수학의 과정 중 수학외적 문제 해결 문제 1문항(<문제1>), 추론과 정당화 문제 1문항(<문제2>), 학교수학의 내용과 학교수학과 연결된 학문적 수학이 혼재된 문항 2문항(문제3>, <문제4>) 모두 4문항으로 구성되었다.

교사들의 반응 유형별 빈도수를 중심으로 각 문항에 대한 반응을 분석하였으며 필요한 경우 백분율을 제시하였다. 본 연구의 목적이 중등수학교사들의 MCK에 대한 일반적인 경

12) 학교수학과 직접 관련이 있는 학문적인 수학은 당연히 포함되어야 하지만 순수수학 또는 응용수학을 어느 범위까지 포함시켜야 하는 것은 많은 논의가 필요하다. 즉 수학내용학 영역도 PCK와 관련하여 재구성할 필요가 있지만 이 문제는 매우 민감한 문제로 수학교사 교육을 담당하고 있는 교사 교육자들(교과내용 전공, 교과 교육 전공 모두)의 공동연구와 합리적인 합의가 있어야 할 것이다. 장기적으로는 사범대학교과 교육대학교의 교육과정을 PCK를 중심으로 재구성하여 수학교육과의 수학내용학의 수준과 내용을 수학과와 차별화하여야 할 것이다.

13) 이러한 주장이 수학교사가 더 많은 학문적 수학을 알 필요가 없다는 것을 의미하지는 않는다. 더 광범위한 수학을 이해할수록 좋을 것이다. 여기서는 교사가 알아야 할 MCK의 최소 범위를 의미한다.

향을 알아보는 데 있기 때문에 학교수학의 모든 영역를 본격적으로 조사하지는 않았다. 따라서 중등 수학 교사의 수학내용 지식을 심층적으로 조사하기 위해서는 수학 영역별로 MCK를 개념화하고 다양한 계층의 수학교사들을 대상으로 한 조사연구가 더 이루어질 필요가 있다.

2. 현직교사의 수학내용 지식

가. 수학의 과정에 대한 지식

문제해결, 추론과 정당화, 연결성, 표현과 의사소통 등의 수학의 과정 중 수학 외적 문제해결력과 정당화 능력을 조사하였다.

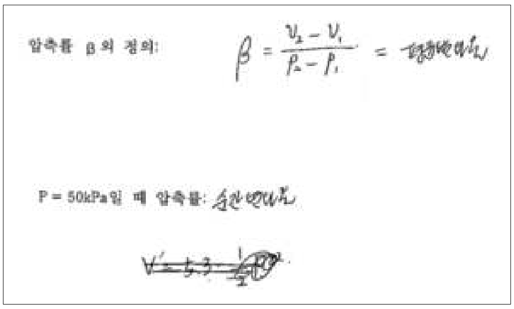
수학외적 문제해결력

<문제1> 온도가 일정할 때, 단위 부피를 기준으로 압력에 관한 부피의 변화율을 양수로 나타낸 값을 압축률(β)이라고 한다. 25°C에서 표본 공기의 부피 V(m^3)와 압력 P(kilopascal) 사이에 다음과 같은 관계가 성립한다고 할 때 압축률β를 정의하고 P＝50kPa일 때의 압축률을 구하여라.

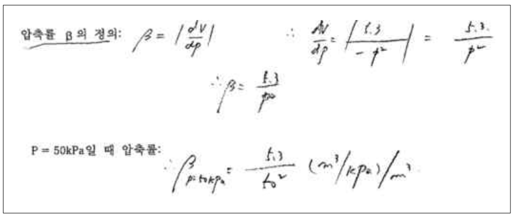
$$V = \frac{5.3}{P}$$

이 문제에서는 줄친 부분을 세 부분즉 '단위 부피를 기준으로', '압력에 관한 부피의 변화율', '양수로'로 나누어 수학적으로 해석해야 한다.

조사 결과 세 조건 모두를 적용하여 압축률을 $\beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$로 정확하게 반응한 교사들은 한 명도 없었다. 31명(72%)의 수학교사들이 시도하지 않았거나 오류를 보였다. 오류 중에는 평균변화율 개념으로 설명을 시도한 오류가 3명이었으며 그 중의 한 예는 평균변화율과 순간변화율을 혼란스럽게 사용하기도 하였다([그림 Ⅳ-1]).



[그림 Ⅳ-1] 평균변화율 이용



[그림 Ⅳ-2] $|\frac{dV}{dP}|$ 이용

<표 Ⅳ-1> 압축률 문제

구분 / 근무년	$\frac{dV}{dP}$	$\lvert\frac{dV}{dP}\rvert$	$-\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$	오류/무응답	계
3년 미만	0	0	0	6	6
3-5년	1	0	0	4	5
6년 이상	7	4	0	21	32
계	8	4	0	31	43

압축률을 '압력에 관한 부피의 변화율'이라는 한 조건만 적용하여 $\frac{dV}{dP}$로 해석한 수학교사가 8명, '압력에 관한 부피의 변화율'과 '양수로'라는 두 조건을 적용하여 $|\frac{dV}{dP}|$로 해석한 수학교사들이 4명으로 나타났다([그림 Ⅳ-2]). 이 경우 $\frac{dV}{dP}$가 음수이기 때문에 압축률을 양수로 나타내기 위해 '-'를 이용할 수 있음에도 불구하고 4명모두 절대기호를 이용한 것은 흥미로운 결과이다. 경력 연수에 따른 비교가 큰 의미가 있는 것은 아니지만 6년 이상의 교사들이 5년 이내의 교사들보다 부분적인 답을 더 많이 보여준 것은 의미가 있는 현상이다.

조완영(2010)이 예비교사들을 대상으로 한 연구에서 오류 또는 무응답이 22명(59%), 부분 응

답자 중 $\frac{dV}{dP}$가 8명, $|\frac{dV}{dP}|$가 7명으로 나타난 바 있다. 본 연구에서는 조사 후 면담을 하지 않았지만 “교과서의 대부분 문제들이 상황을 해석하고 그 의미를 이해하지 않고 단순히 도함수만 구하면 되었기 때문에 ‘압력에 관한 부피의 변화율’에만 주목했다.”, 특히 “‘단위 부피를 기준으로’의 의미를 이해할 수 없었다.”고 응답한 예비교사들의 경우와 크게 다르지 않을 것으로 해석된다. 대부분의 예비 수학교사들은 이러한 현상의 원인을 중·고등학교 시절의 수학 수업과 대학에서의 수학 수업에서 이러한 유형의 문제해결 활동을 한 경험이 없기 때문이라고 대답하였다.

추론과 정당화

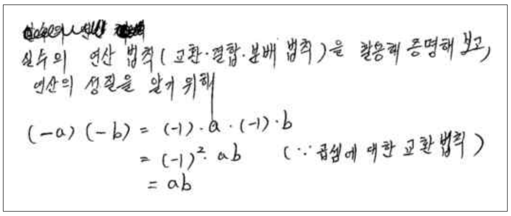
<문제2> 고등학교 수준에서 실수의 연산의 기본 성질을 배운 후 $(-a)(-b)=ab$를 증명하는 문제를 다룬다. $(-a)(-b)=ab$를 증명해야 하는 이유를 설명하고 증명하시오.

<문제2>에 대한 교육과정에서의 의도는 이미 참이라고 믿고 이용해 왔던 명제들이지만 실수의 연산에 대한 기본 성질을 기본 공리로 받아들이고 이들 공리를 이용하여 증명하라는 의미가 내포되어 있다. 이 문제는 덧셈에 대한 역원의 의미와 역원의 유일성을 이용하여 각각 다음과 같이 증명할 수 있다. $x+a=a+x=0$일 때 $x=-a$는 a의 덧셈에 대한 역원이다. $(-a)(-b)$와 $-ab$가 역원관계에 있음을 이용하여 $(-a)(-b)=ab$을 증명하면 된다. 즉 수학교사는 증명의 필요성을 이해하고 역원을 이용한 증명 방법을 알아야 하며, 또한 역원임을 증명할 때 교환성을 보여줄 필요가 있음을 이해해야 한다.

이 문제에 대해 43명의 수학교사들 중 7명만 이유를 타당하게 설명한 것으로 나타났다. 타당한 이유를 제시하지 못한 경우 “부호가 같은 두 수의 곱은 항상 양수이다.”, “음수와 음수의 곱은 항상 양수이다.”와 같은 사례가 나타났다. 이는 조완영(2010)의 연구에서 나타난 예비교사 37명 중 5명의 경우와 비슷한 결과이다. 증명을 비교적 타당하게 제시한 수학교사는 8명(19%)으로 나타났으며 이는 앞의 연구에서 타당한 증명을 제시한 예비 수학교사가 25명(68%)인 것과 대조된다. 예비 수학교사의 경우도 왜 증명해야 하는지 이유를 설명하지 못하면서 타당한 증명을 제시한 학생이 20명이나 되었다. 무응답 또는 타당한 증명을 제시하지 못한 수학교사는 모두 35명으로 나타났는데, 이 중 $(-1)(-1)=1$이 참이라고 주장한 후 주어진 명제가 참임을 주장하여 순환의 오류를 보인 교사가 7명이었다([그림 Ⅳ-3]).

<표 Ⅳ-2> $(-a)(-b)=ab$ 증명 문제

구분 / 근무년	타당한 이유 ○	타당한 이유 ×	증명	무응답 오류	계
3년 미만	2	4	2	4	6
3-5년	0	5	2	3	5
6년 이상	5	27	4	28	32
계	7	36	8	35	43



[그림 Ⅳ-3] 순환의 오류

나. 학교수학과 연결된 학문적 수학

학교수학 그리고 학교수학과 연결된 학문적 수학에 관한 조사 문항은 크게 두 문항이다. <문제3>은 대수 문항이며 <문제4>는 해석학 관련 문항이다.

<문제3> 다음은 어느 수학교사의 질문이다. 이 교사의 질문에 답하고 그 이유를 설명하시오. 또 이 문제와 관련된 현대대수학에서 배운 내용을 아는 대로 기술하시오.

교사: "$3x(x+2)$의 인수를 모두 구하여라."는 문제에서 학생이 "선생님, 답은 $x, x+2, x(x+2)$가 아닌가요?"라는 질문을 했을 때 당황하였어요. 나는 3도 인수에 포함시켰거든요. 어떤 것이 정답인가요?

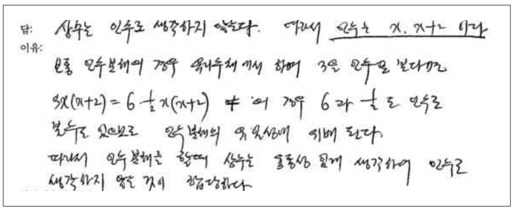
위 문제에 대하여 현직 수학교사들은 <표 Ⅳ-3>과 같이 응답하였다.

<표 Ⅳ-3> 수인수 문제

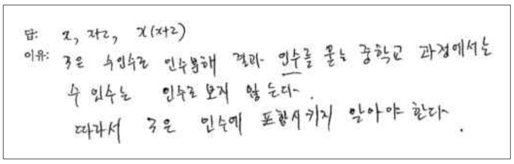
근무년 \ 구분	수인수 포함	수인수 제외	무응답 기타	계
3년 미만	1	3	2	6
3-5년	2	3	0	5
6년 이상	13	15	4	32
계	16	21	6	43

$\mathbb{Q}[X]$에서의 약수 문제에서 수인수를 고려할 수도 있고 하지 않을 수도 있다. 그러나 수인수를 고려하면 약수가 무수히 많아진다. 이러한 문제를 해결하기 위해 수학과 7차 개정 교육과정의 고등학교에서는 '수인수를 고려하지 않는다.'고 약속을 한다. 이러한 관점에서 보면 $\mathbb{Q}[X]$에서 정의된 다항식 $3x(x+2)$의 약수는 $x, x+2, x(x+2)$뿐이다. 그러나 중학교에서는 수인수를 고려한다. 따라서 '수인수를 고려한다.' 또는 '수인수를 고려하지 않는다.' 중 어느 것은 정답 어느 것은 오답으로 해석하기 어렵다. 그렇지만 자신의 선택에 대한 이유를 타당하게 설명할 수 있어야 한다.

'수인수를 포함하지 않는다.'라고 응답하면서 인수를 $x, x+2, x(x+2)$로 제시한 현직교사는 모두 21명으로 이 중 '$\mathbb{Q}[X]$에서 정의된 다항식에서 수인수를 고려하면 무수히 많은 약수가 존재


답: 상수는 인수로 생각하지 않는다. 따라서 인수는 x, x+2 이다
이유:
보통 인수분해의 경우 유리수체계에서 하며 3을 인수로 본다면
$3x(x+2) = 6 \cdot \frac{1}{2}x(x+2)$ 이 경우 6과 $\frac{1}{2}$도 인수로
볼 수도 있으므로 인수분해의 유일성에 위배된다.
따라서 인수분해를 할때 상수는 공통성 없게 생각하여 인수로
생각하지 않는 것이 합당하다

[그림 Ⅳ-4] 교육과정의 잘못 이해


답: x, x+2, x(x+2)
이유: 3은 수인수로 인수분해 결과 인수를 물는 중학교 과정에서는
수 인수는 인수로 보지 않는다.
따라서 3은 인수에 포함시키지 않아야 한다.

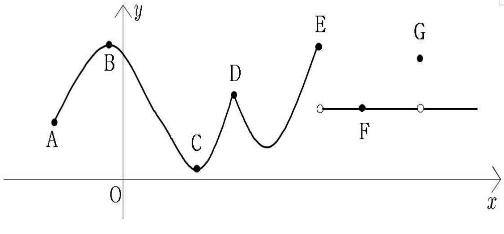
[그림 Ⅳ-5] 교육과정의 잘못 이해

함으로 수인수를 고려하지 않는다.'는 의미로 이유를 설명한 교사는 1명뿐이었다([그림 Ⅳ-4]).

대부분의 교사들은 '수인수를 고려하지 않는다.'라는 선언적인 이유를 제시하였다. '3을 인수로 포함시켜야 한다.'고 응답한 교사는 16명으로 나타났으며, 대부분 자연수의 약수와 배수 개념으로 이유를 제시하거나 이유를 타당하게 제시하지 못하였다. 두 가지 모두 가능하다고 응답한 교사는 3명이었지만 모두 타당한 이유를 제시하지 못하였다. 현대대수학의 관점에서 타당한 설명을 한 교사는 한 명도 없었다. 현행 교육과정에서 고등학교의 경우만 수인수를 고려하지 않음에도 불구하고 중학교 과정에서 수인수를 고려하지 않는다고 응답한 경우도 있다([그림 Ⅳ-5]).

예비교사 37명을 대상으로 한 조완영(2010)의 연구에서는 인수를 $x, x+2, x(x+2)$이라고 응답한 예비교사 10명 중 수인수를 고려하지 않는 타당한 이유를 제시한 예비교사는 5명이었다. 또한 <문제3>에서 수인수를 고려하지 않는 이유를 대수학의 내용과 관련하여 타당한 설명을 한 예비수학교사도 4명으로 나타난 바 있다.

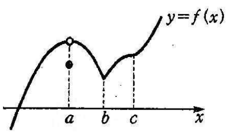
<문제4-1> 다음은 함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. A-G 중 극값을 갖는 점은 모두 몇 개인가? 그 이유를 설명하시오.



<문제4-2> 고등학교 수준과 대학 수준에서 극

댓값의 정의를 기술하시오.

<문제4-3> 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같이 주어질 때, 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? 그 이유를 간단히 설명하시오.



㉠ $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분불가능하고, $x=b$에서 미분가능하다.
㉡ 이 그래프의 극값은 두 개다.
㉢ $x=a$ 에서 불연속이며, 접선이 존재하지 않는다.
㉣ 구간 (a,b)에서 $f'(x)<0$임을 보여 주고 있다.

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉡,㉢ ④ ㉢,㉣ ⑤ ㉡,㉢,㉣

위 <문제4-1>과 <문제4-2>는 학교수학과 학문적 수학 사이의 관계를 잘 보여주는 문제이다. 앞에서 논의했듯이 고등학교 수준에서는 극값을 직관적으로 정의하며 대학 수준에서의 정의 방식과 다소 다르다. <문제 4-3>은 이러한 정의 방식 차이로 인해 문제 오류의 소지가 있는 문제이다. ㉡은 고등학교 수준에서는 거짓이지만 대학 수준에서는 참이다. 위 문제에 대한 수학교사들의 반응은 <표 Ⅳ-4>와 <표 Ⅳ-5>와 같다.

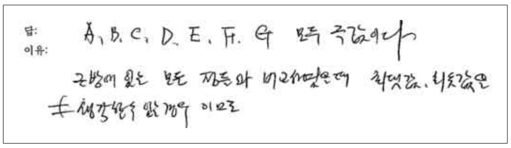
<표 Ⅳ-4> <문제4-1>에 대한 반응

근무년 \ 구분	고교 수준	대학 수준	무응답 기타	계
3년 미만	1	0	5	6
3-5년	0	3	2	5
6년 이상	7	0	25	32
계	8	3	32	43

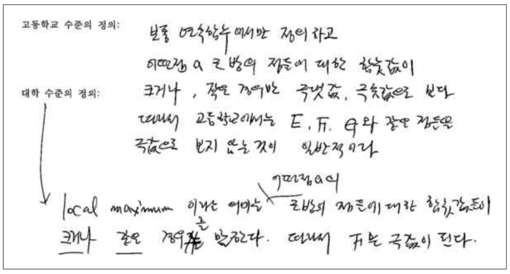
<표 Ⅳ-5> <문제4-3>에 대한 반응

근무년 \ 구분	④	⑤	무응답 /기타	계
3년 미만	2	0	4	6
3-5년	0	2	3	5
6년 이상	7	0	25	32
계	9	2	32	43

<문제4-1>에서 고등학교 수준과 대학수준의 응답으로 구분하였으며 극점의 개수와 그 이유가 타당한 경우만 정답으로 처리하고 나머지는 무응답과 오답으로 처리하였다. 대학수준에서 타당한 이유와 더불어 정답을 제시한 교사는 3명이었다([그림 Ⅳ-6], [그림 Ⅳ-7]).

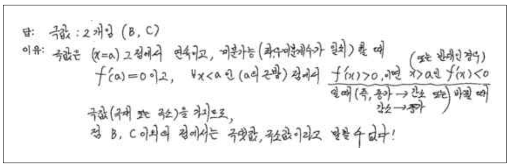


[그림 Ⅳ-6] 대학수준에서의 극값



[그림 Ⅳ-7] 대학수준에서의 극값

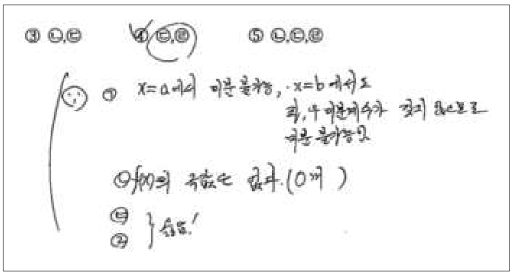
고교 수준에서도 답을 3개(B, C, D)라고 응답하였지만 잘못된 이유를 제시한 경우가 많았다. 극값은 미분가능한 점에서만 존재한다거나 주어진 점의 근방에서 미분계수의 부호가 바뀌는 경우에 극값이 된다고 이유를 제시한 경우도 있다([그림 Ⅳ-8]).



[그림 Ⅳ-8] 미분가능성 이용

<문제4-2>에서 고등학교 수준의 극값의 정의를 비교적 옳게 표현한 교사는 9명이고 고등학교 수준과 대학 수준을 모두 옳게 표현한 교사는 8명이었으며 대학 수준의 정의만 응답한 교사는 없었다.

<문제4-3>에 대한 반응에서도 답은 맞았지만 이유를 타당하게 설명하지 못한 경우 교사는 정답뿐 아니라 왜 그런지를 설명할 수 있어야 하기 때문에 무응답/기타로 처리하였다. 고등학교 수준에서 정답인 ④를 선택하였지만 타당한 이유를 설명하지 못한 교사는 16명이고 대학수준에서 정답인 ⑤를 선택하였지만 역시 이유를 설명하지 않거나 잘못된 근거를 제시한 경우는 4명이었다([그림 Ⅳ-9]).



[그림 Ⅳ-9] <문제4-3>의 오류

Ⅴ. 결론

본 연구의 목적은 수학교사가 알아야 할 수학내용 지식을 개념화하고 이를 토대로 예비 수학교사의 수학내용 지식을 조사하는 데 있다. 이를 위해 먼저 문헌 분석과 연구자의 수학 교육 경험을 토대로 수학내용 지식을 학교수학의 내용 지식, 학교수학의 과정 지식, 학교수학과 연결된 학문적 수학으로 구분하였다. 이는 학교수학, 학교수학과 연결된 학문적 수학을 명확히 구분하였다는 점에서 Stacey(2008)가 제시한 가르치는 데 필요한 수학 지식의 구분과 다르다.

또한 본 연구에서는 수학교사의 수학내용 지식에 대한 새로운 개념을 토대로 검사지를 이용하여 현직 중등 수학교사의 수학내용 지식의 일부를 조사하였다. 조사결과를 일반화하여 해석하기는 어렵지만, 현직 중등 수학교사들이 학교수학의 과정 중 문제해결, 추론과 증명 그리고 학교수학과 연결된 학문적 수학 분야에 대한 수학내용 지식 이해가 제한적임을 알 수 있었다. 조사 결과는 다음과 같다.

첫째, 학교수학의 과정 지식 중 열역학 분야의 압축률을 구하는 수학외적 문제인 <문제1>에서 정보가 충분히 주어졌음에도 불구하고 정확히 해결한 현직 수학교사가 한 명도 없었다. 문제의 뜻을 이해하지 못하거나 주어진 정보의 일부만 사용하는 경우가 대부분이었다. 이러한 원인은 현직 수학교사 각 개인의 문제라기보다는 현재 우리나라의 수학교육의 문제라 해석된다.

둘째, $(-a)(-b)=ab$를 증명하는 이유와 증명을 요구한 학교수학의 정당화에 관한 문제에서조사 대상 43명의 교사 중 증명의 필요성을 타당하게 설명한 교사가 7명, 의미 있게 증명을 한 교사가 8명으로 나타났다. 수학교사는 학생들을 가르칠 때 증명의 필요성과 증명의 아이디어를 논의해야 하기 때문에 이 결과는 교사의 MPCK에 심각한 영향을 끼칠 수 있다.

셋째, 학교수학과 학문적 수학의 연결과 관련된 <문제3>에서 수인수를 포함해야 한다는 경우가 16명, 제외해야 한다는 경우가 21명으로 비슷하게 나타났다. 수인수를 포함하지 않는다고 응답한 교사 중 “유리수 범위에서 수인수를 고려하면 무수히 많은 약수가 존재하기 때문에 수인수를 고려하지 않는다.”는 의미로 이유를 설명한 교사는 1명뿐이었다.

극값을 갖는 점을 묻는 <문제 4-1>에서 타당한 이유를 들어 극점의 개수를 옳게 제시한 경우는 많지 않았다. 특히 고등학교 수준의 문제인 <문제4-3>에서 고등학교 수준인 정답 ④를 선택하였지만 타당한 이유를 제시하지 못한 교사가 16명이었다. 수학교사는 정답은 물론 왜 그것이 정답인지를 탐구하는 능력이 있어야 한다.

많은 문항을 가지고 현직 수학교사의 수학내

용 지식을 조사한 것은 아니지만 검사 결과는 현행 교사 교육 시스템에 문제가 있음을 시사한다. 특히 <문제1>에서 주어진 정보를 수학적 언어로 번역하여 정확히 답을 한 교사가 없었고, <문제2>의 증명과 정당화 문제에서 증명의 필요성을 타당하게 설명한 교사가 적은 것은 교사들이 이러한 문제를 생각할 기회가 부족했음을 시사하고 있다. 수학교사 양성과정에서 수학 내용학을 충분히 공부할 기회가 있었고 학문적 수학의 관점에서 볼 때 어렵지 않은 내용임에도 불구하고 학교수학과 학문적 수학 사이의 관계를 묻는 <문제3>과 <문제4>에서 타당한 설명을 제시한 교사가 소수로 나타난 것 역시 같은 맥락에서 해석할 수 있다. 중등 수학교사들의 MCK 이해 수준은 단순히 교사의 이해 수준의 문제가 아니라 사범대학의 교육 프로그램, 교사 임용시험 문제, 교사 연수 프로그램에 문제가 있음을 시사한다.

최근 수학교사의 지식에 관한 연구들은 교수 내용 지식에 초점이 맞추어져 있다. MPCK는 수학 내용을 학생들이 이해할 수 있도록 가르치는 방법에 대한 교사의 지식을 말한다(Shulman, 1986; 1987). 즉, MPCK는 수학 내용을 학생들이 잘 이해할 수 있도록 표현하고 공식화하는 방법이다. 이러한 관점에서 MCK를 MPCK에 포함시킬 수 있으며 수학교사의 지식을 MPCK로 개념화할 수 있을 것이다.

이러한 관점에서 다음과 같은 제언을 한다.

첫째, 예비 수학교사 또는 현직 수학교사의 수학내용 지식에 관한 조사연구가 학교수학의 각 내용 영역을 중심으로 광범위하게 이루어질 필요가 있다. 이 때 학교수학의 내용도 포함시킬 수 있다.

둘째, 중등수학교사의 MCK와 MPCK 및 그 관련성을 기반으로 수학교사의 지식을 개념화하는 연구가 요구된다.

셋째, 중등수학교사의 MCK와 MPCK에 관한 연구를 기반으로 현재의 교사 양성 프로그램, 교사 임용시험, 현직 교사 교육 등에 관한 대안적인 프로그램을 개발하는 연구가 요구된다.

참고문헌

교육과학기술부(2009). 교육인적자원부 고시 제 2007-79호에 따른 **고등학교 교육과정 해설 5- 수학**.

김구연(2007). Pedagogical content knowledge: A case study of a middle school mathematics teacher, **수학교육학연구, 17** (3), pp. 295-308.

김원규 외(2009). **미분적분학**. 서울: 교우사.

김응태・박승안(2009). **현대대수학**. 서울: 경문사.

김홍기 외(2008). 2009학년도 개편 중등교사임용후보자선정경쟁시험 표시과목「수학」의 교사자격기준 개발과 평가영역 상세화 및 수업능력 평가 연구. **한국교육과정평가원 연구보고** CRE 2008-6-2.

박경미(2009). 수학의 교수학적 내용 지식(PCK)에 대한 연구의 메타적 검토. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 48(1), 93-105.

부성희(2007). **폴라니 인식론에 기초한 교사 지식의 성격 탐구: 이론-실천 간의 통합적 발달**. 이화여자대학교 박사학위 논문.

신현용・이종욱(2004). 수학교사의 지식에 관한 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육>, 18**(1), PP. 297-308.

유희찬 외(2009), **수학 II 교과서**. 서울: 미래엔컬처, 176(익힘책 160).

이기영(2009). 지구과학 교사의 주제-특정적 PCK 분석: 예비 교사와 현직 교사 사례. **Jour. Korean Earth Science Society, v. 30,** pp. 330-343.

조선아(2010). **고등학교 2학년 미분 단원에서 교

사에게 필요한 수학적 지식에 관한 연구. 이화여자대학교 석사학위 논문.

조성민(2006). **교육과정 실행의 관점에서 본 수학교사 지식과 수업의 관련성 연구: 고등학교 함수내용을 중심으로.** 이화여자대학교 박사학위 논문.

조완영(2010). 예비교사의 수학내용 지식. **교육연구논총, 31**(2), pp. 141-156.

최승현(2007). 교육과정 개정에 따른 수학과 내용 교수 지식(PCK) 연구. **한국교육과정평가원 연구보고** RRI 2007-3-2.

황선욱 외(2011). **창의 중심의 미래형 수학과 교과내용 개선 및 교육과정 개정 시안 연구.** 한국과학창의재단 연구보고서.

Ball, D. L., Bass, H., Hill, C., & Phelps, M. (2006). What is special about knowing mathematics for teaching and how can it be developed? Presentation made at the Teachers' Program and Policy Council, American Federation of Teachers, Washington, DC, May 31, 2006

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education,* 59(5), p.389-407.

Dewey, J. (1902). *The child and the curriculum*. Chicago: University of Chicago Press.

Ferrini-Mundy, J., Floden, R., McGroy, R., Burril, G., & Sandow, D. (2005). Knowledge for teaching school algebra: Challenges in developing and analytic framework. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Quebec.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York, Teachers College Press.

Grossman, P. L., Wilson, S, M., & Shulman, L. S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. In M. Reynolds(Ed.). *Knowledge base for the beginning teacher,* pp. 23-36. New York: Pergamon.

Jermy, A. K., Duane, A. C., & Kimberly, A. B. (2003). The role of mathematicc teacher's content knowledge in their teaching: A framework for research applied to a study of student teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6,* pp. 223-252.

Klein, F. (1932). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: arithmetic, algebra, analysis*(Vol. 1, 3rd ed. E. R. Hedrick & C. A. Noble, trans) New York: Macmillan.

Li, S., Huang, R., & Shin, H.(2008). Discipline knowledge preparation for prospective secondary mathematics teachers: An east perspective. In P. Sullivan & T. Wood(Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education volume 1,* pp. 63-86. Rotterdam: Sense Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author. 류희찬 외(역) (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. & Ball, D. L. (2007). Assessing teacher's mathematical knowledge. In F. Lester(Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 111-155. Reston, VA: NCTM.

Park, S. & Oliver, S. (2008). Revisiting the conceptualization of pedagogical content knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education*, 38, 261-284.

Boero, P. & Guala E. (2008). Development of mathematical knowledge and beliefs of teachers: The role of cultural analysis of the content to be thaught. In P. Sullivan & T. Wood(Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education volume 1*, pp. 223-244. Rotterdam: Sense Publishers.

Schwab, J. (1978). Education and the structure of the discipline, in I. Estbury and N. J. Wilkof(Eds.). *Science, curriculum and liberal education*, 229-272. Chicago: University of Chicago.

Shulmann, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), pp.1-22.

Shulmann, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15, pp.4-14.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester(Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 157-223. Reston, VA: NCTM.

Stacey, K.(2008). Mathematics for secondary teaching: Four components of discipline knowledge for a changing teacher workplace. In P. Sullivan & T. Wood(Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education volume 1*, pp. 88-111. Rotterdam: Sense Publishers.

Mathematical Content Knowledge of Secondary Mathematics Teachers

Cho, Wan Young(Chungbuk National University)

This paper addresses mathematics content knowledge required for teaching in secondary school. Three components of mathematical knowledge are needed for teaching: (i) knowing school mathematics, (ii) knowing process of school mathematics, (iii) making connections between school mathematics and advanced mathematics.

We investigated mathematics content knowledge of secondary teachers.

We found that secondary mathematics teachers have a lack of understanding in solving realistic problem, reasoning and proof, and making connections between school mathematics and advanced mathematics.

* key words : secondary mathematics teacher(중등 수학교사), MCK(mathematics content knowledge: 수학내용 지식), MPCK(mathematical pedagogical content knowledge:수학교수내용 지식)

논문접수 : 2011. 5. 8
논문수정 : 2011. 5. 27
심사완료 : 2011. 6. 9