응용통계연구 (2011)
24(4), 657–676

DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2011.24.4.657

관리도에서 Markov연쇄의 적용: 복습 및 새로운 응용

박창순[1]

[1]중앙대학교 응용통계학과

(2011년 5월 접수, 2011년 6월 채택)

요 약

통계적 공정관리절차의 특성은 해석적 해를 얻기가 어려운 경우가 많이 있으나 Markov연쇄를 적용하면 가능한 경우가 많이 있다. 이 논문에서는 공정 통계량이 Markov특성을 따르는 경우, Markov연쇄를 생성하는 방법과 이를 이용한 공정관리 절차의 특성을 도출하는 방법에 대해 설명하고 있다. 관리도의 통계적 설계, 경제적 설계 및 변량 표본 추출비 설계 등의 특성 규명을 위한 Markov연쇄의 적용에 대한 기존의 알려진 방법을 복습하고 또한 새로운 공정관리 분야인 재조정 관리도에의 적용방법에 대한 연구결과도 보여주고 있다. 공정관리의 특성연구에서 해석적 해가 가능한 경우에도 이 과정이 복잡하여 Markov연쇄를 병행 사용하면 특성 규명이 명확해지며, 모의실험보다는 짧은 시간에 더 정밀한 결과를 얻을 수 있어 널리 이용되고 있다.

주요용어: 공정관리, 일시영역, 흡수영역, 전이확률, 평균방문수, 재조정관리도.

1. 서론

통계적 공정관리 절차는 세 가지 요소로 구성된다: 관리통계량(control statistics), 표본추출시점(sampling time)과 관리한계(control limit). 즉 공정이 진행되는 중 지정된 표본추출시점에서 표본을 추출하여 관리통계량을 계산한 다음 이 통계량이 관리한계를 벗어나면 이상신호를 주고 그렇지 않으면 공정을 계속하는 것이다. 따라서 표본추출은 연속된 시간공간에서 이산적 시간에 한하여 이루어지고 있으나, 관리 통계량은 공정관리의 목적에 따라 이산적일 수도 또는 연속적일 수도 있다. 또한 관리 통계량은 표본크기(sample size)에 따라 달라질 뿐만 아니라 그 분포도 공정상태에 따라 영향을 받게 된다. 표본추출시점과 표본크기는 사전에 일정 값으로 정해지는 경우가 일반적이지만 공정관리의 효율을 높이기 위해 각 시점의 관리통계량 값에 따라 다르게 정해질 수 도 있다. 관리통계량은 현 시점에서의 표본으로만 구성된 경우도 있고 과거와 현재의 표본으로 구성되는 경우도 있다. 후자의 경우에는 관리통계량이 시점 별로 시간 종속(time-dependent)이 되고, 현 시점의 표본으로만 구성된 경우에도 그럴 수 있다.

이러한 공정관리의 통계적 설계에 대한 특성은 이상신호를 줄 때까지 관측된 표본수(number of samples to signal), 소요된 시간인 신호시간(time to signal)과 관측값의 수(number of observations to signal)에 의해 결정된다. 따라서 공정관리의 효율을 표현하는데는 평균신호표본수(average number of samples to signal; ANSS), 평균신호시간(average time to signal; ATS)과 평균신호관측수(average number of observations to signal; ANOS)가 주로 사용된다. 표본추출시점과 표본크기가 사전에 정

이 논문은 2009년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(2009-0073336).

[1](156-070) 서울시 동작구 흑석동 221, 중앙대학교 수학통계학부, 교수. E-mail: cspark@cau.ac.kr

해진 경우에는 공정관리의 특성은 평균신호표본수를 통해 알 수 있으며, 이는 흔히 평균런길이(average run length; ARL)로 알려져 있다.

공정관리의 특성을 해석적으로(analytically) 규명하는 것은 지극히 단순한 경우를 제외하고는 불가능하거나 매우 복잡한 경우가 많다. 여기서 지극히 단순한 경우의 예는 공정통계량이 현시점의 표본으로만 구성되고 시간독립(time-independent)이며 표본크기와 표본추출간격이 항상 동일한 경우를 들 수 있다. 예를 들면 공정 모형이 Shewhart 모형을 따를 때이다, 즉

$$X_t = \mu + \varepsilon_t,$$

단, μ는 공정 평균, ε_t는 확률오차. 이 때 Shewhart 관리도를 사용하면 런길이는 기하분포를 따르게 되어 평균신호시간과 평균신호관측수를 쉽게 알 수 있다. 이렇게 특별히 단순한 경우를 제외하면 관리특성을 해석적으로 규명하기는 매우 어렵다. 그 주된 이유는 관리통계량이 시간종속이기 때문이다. 관리통계량의 시간 종속성은 실제 제조업의 환경에 주로 기인한다. 현 시점의 공정 품질이 과거, 특히 바로 전 시점의 품질에 독립일 수 없기 때문이다. 이 문제를 해결하기 위해 사용되는 시간종속에 대한 통계적 가정은 Markov특성(property)이다. 공정 통계량이 Markov특성을 만족하는 경우는 관리통계량의 경신공식(updating equation)을 통해 쉽게 알 수 있다. 시점 t에서의 표본 통계량을 X_t, 공정 통계량을 S_t라 할 때 경신공식이, 어떤 함수 f에 대해

$$S_t = S_{t-1} + f(X_t) \tag{1.1}$$

로 표현되면 Markov특성을 만족한다. 이런 형태의 통계량에 대한 Markov연쇄의 적용은 Woodall과 Reynolds (1983) 이후 축차적 결정론(sequential decision theory) 분야에서 특성연구를 위해 많이 사용되어 오고 있다. 가장 대표적인 예는 공정 모형이 Shewhart 모형일 때 누적합(cumulative sum; CUSUM) 관리도와 지수이동가중평균(exponentially weighted moving average; EWMA) 관리도이다.

공정통계량이 Markov특성을 만족하면 Markov연쇄를 구성하기 위해 공정통계량이 취하는 연속적인 값을 이산화(make a discrete variable)한다. 공정 통계량의 이산화 작업은 공정통계량이 취할 수 있는 값의 범위를 다수의 부구간(sub-interval)으로 분할(partition)하고 부구간에 해당하는 값은 하나의 대표값(일반적으로 부구간의 가운데 값)으로 표현한다. 즉, 공정통계량의 이산화란 연속변수인 공정통계량을 이산변수로 근사(approximation)시키는 과정을 의미한다. 어떤 경우에는 공정분포의 속성상 관리통계량이 이미 이산값을 가져 이산화 할 필요 없이 Markov특성을 가지는 경우도 있다. 이런 경우에는 Markov연쇄의 적용이 용이하다. 이 논문에서는 Markov특성을 사용하여 공정관리절차의 특성이 연구되어진 대표적 내용을 복습하고, 또한 새로운 공정관리절차로 제안된 재조정관리도(reset chart)의 특성연구에 Markov연쇄를 적용하는 방법을 제시하고 있다.

2. 공정관리절차의 Markov연쇄 근사

관리통계량이 Markov특성을 만족할 때 이를 이산화하여 Markov연쇄를 생성하고 관리절차의 특성을 구하는 과정을 알아보자. 먼저 관리통계량이 취하는 값을 일시영역(transient region; R_T)과 흡수영역(absorbing region; R_A)으로 분할한다. 이 두 지역은 일반적으로 관리한계선에 의해 구분된다. 공정관리절차는 다음과 같이 정의한다.

시점 t에서 $S_t \in R_A$이면 이상신호를 주고, 그렇지 않으면 공정을 계속한다.

일시영역을 n개의 부구간으로 분할하고 각각의 부구간을

$$I_1, I_2, \ldots, I_n$$

이라 하고, 각 부구간의 중심점을

$$m_1, m_2, \ldots, m_n$$

로 나타내면, 각 중심점은 바로 Markov연쇄의 일시상태를 나타내고 있다. 관리통계량의 이산화는 그 값이 어떤 구간 I_i에 포함되면 $S_t = m_i$로 근사시키는 것을 의미한다. 이렇게 형성된 Markov연쇄를 M_t라 한다.

이산화된 관리통계량의 조건부 확률은 Markov연쇄의 전이확률(transient probability)에 해당되고 일시상태 내에서의 전이확률은 다음과 같이 근사된다. $i, j = 1, 2, \ldots, n$에 대해

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\left(M_t = m_j | M_{t-1} = m_i\right) \\ &\approx P\left(S_t \in I_j | S_{t-1} = m_i\right). \end{aligned}$$

일시상태의 전이행렬은

$$\mathbf{Q} = \Big[p_{ij}\Big]_{n \times n} \tag{2.1}$$

로 표현한다.

자주 쓰는 벡터와 행렬표현을 위해 다음을 정의한다. 기본적으로 차원은 벡터나 행렬의 오른쪽 아래 첨자로 표현한다.

$\mathbf{1}_n$: 모든 요소가 1인 차원 n 벡터

$\mathbf{1}_{n,(i)}$: 차원 n인 0(zero) 벡터에서 i번째 요소만 1인 벡터

$\mathbf{I}_n$: 차원 n인 단위 행렬

공정관리의 한 주기는 정의된 Markov연쇄가 시작상태에서 출발한 후 흡수상태를 방문하게 되면 끝난다. M_t가 상태 m_i를 방문하는 시점을 $T(m_i)$라 하면 이에 대한 확률함수는, $t = 0, 1, \ldots$에 대해

$$P(T(m_i) = t) = \mathbf{s}_n' \mathbf{Q}^t \mathbf{1}_{n,(i)}$$

이다. 단, $\mathbf{s}_n$은 시작상태(starting state)벡터로서 시작상태 i_0번째만 1인 0벡터이다. 위의 확률함수를 이용하면, 한 주기 동안 상태 m_i를 방문하는 평균횟수 $V(m_i)$는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} V(m_i) &= \sum_{t=0}^{\infty} 1 \cdot P(T(m_i) = t) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{s}_n' \mathbf{Q}^t \mathbf{1}_{n,(i)} \\ &= \mathbf{s}_n' (\mathbf{I}_n - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}_{n,(i)}. \end{aligned}$$

한 시점에 한 상태를 방문하는 횟수는 1회임을 고려하면 모든 일시상태에 대한 방문횟수는 평균런길이가 된다, 즉 평균신호표본수는

$$\begin{aligned} E(N) &= \sum_{i=1}^{n} V(m_i) \\ &= \mathbf{s}_n' (\mathbf{I}_n - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}_n \end{aligned} \tag{2.2}$$

임이 됨을 알 수 있다. 이때 방문시점은 시작상태, 즉 $t = 0$도 포함하고 있다. 어떤 행렬 M의 (i, j)번째 요소를 $M[i, j]$로 표현하면, 행렬 $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$의 (i, j)번째 요소, $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}[i, j]$는 i번째 상태에서 출발하여 j번째 상태를 방문하는 평균횟수를 의미한다.

평균신호표본수는 런길이, N의 확률함수를 이용하여 구할 수도 있다. 먼저 런길이의 확률함수는, $t = 1, 2, \ldots$에 대해

$$P(N = t) = \mathbf{s}_n' \mathbf{Q}^{t-1} (\mathbf{I}_n - \mathbf{Q}) \mathbf{1}_n$$

이 됨을 알 수 있다. 여기서 벡터 $(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q})\mathbf{1}_n$의 i번째 요소는 i번째 일시상태에서 흡수상태로 가는 확률을 나타낸다. 따라서 평균런길이는

$$\begin{aligned} E(N) &= \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot \mathbf{s}_n' \mathbf{Q}^{t-1} (\mathbf{I}_n - \mathbf{Q}) \mathbf{1}_n \\ &= \mathbf{s}_n' \left(\sum_{t=1}^{\infty} t \cdot \mathbf{Q}^{t-1} \right) (\mathbf{I}_n - \mathbf{Q}) \mathbf{1}_n \\ &= \mathbf{s}_n' (\mathbf{I}_n - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

가 되어 동일한 표현을 얻게 됨을 알 수 있다. 식 (2.2)에서는 시작점을 한 시점으로 간주하고 끝나는 점을 고려하지 않는 방법이고, 식 (2.3)에서는 시작점은 고려하지 않으나 끝나는 점을 한 시점으로 간주하는 데에 두 방법의 차이가 있으나 평균런길이의 계산에 있어서는 동일한 결과를 얻는다. 하지만 식 (2.2)를 사용하면 특정 일시상태에 대한 평균 방문수를 알 수 있어 공정관리 특성을 구하는데 유용하다.

다음은 흡수영역을 분할하는 경우를 알아보자. 앞에서 일시영역을 분할하는 과정과 유사하게, 흡수영역을 n_A(짝수)개의 부구간으로 구분하고 (즉, $(-\infty, -L)$을 $n_A/2$개, (L, ∞)를 $n_A/2$개로 분할) 각각의 부구간을, $d = 2L/n$에 대해

$$\begin{gathered} \left(-L - \frac{n_A}{2} d, -L - \left(\frac{n_A}{2} - 1\right) d\right), \ldots, (-L - 2d, -L - d), (-L - d, -L), \\ (L, L + d), (L + d, L + 2d), \ldots, \left(L + \left(\frac{n_A}{2} - 1\right) d, L + \frac{n_A}{2} d\right) \end{gathered}$$

라 한다. 각 부구간의 중심점을

$$m_{A1}, m_{A2}, \ldots, m_{An_A}$$

으로 나타내면 각 중심점은 Markov연쇄의 흡수상태를 정의하고 있다. 흡수영역은 일시영역과 달리 유한구간으로 표현되지 않는 것이 일반적이다. 그러나 흡수영역 중에서 관리통계량이 포함될 확률이 0에 가까운 부분 (즉, 관리통계량이 취하는 값의 극단적 꼬리 부분(extreme tail region))을 제외하면 여전히 유한 구간으로 표현할 수 있다.

일시상태에서 흡수상태로의 전이확률은 다음과 같이 근사된다.

$$\begin{aligned} p_{A,ij} &= P\left(M_t = m_{Aj} | M_{t-1} = m_i\right) \\ &\approx P\left(S_t \in I_{Aj} | S_{t-1} = m_i\right) \end{aligned}$$

따라서 일시상태에서 흡수상태로 가는 전이행렬은

$$\mathbf{Q}_A = \left[P_{A,ij}\right]_{n \times n_A}$$

로 표현된다.

공정주기가 상태 m_i에서 시작하는 사건을 $b\{m_i\}$, 상태 m_j로 끝나는 사건을 $e\{m_j\}$로 표시하자. 공정주기가 일시상태 m_i에서 시작하여 흡수상태 $m_{A,j}$로 끝나는 확률은

$$\begin{aligned} P\left(e\{m_{A,j}\}|b\{m_i\}\right) &= \sum_{t=1}^{\infty} \mathbf{1}'_{n,(i)}\mathbf{Q}^{t-1}\mathbf{Q}_A\mathbf{1}_{n_A,(j)} \\ &= \mathbf{1}'_{n,(i)}(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}_A\mathbf{1}_{n_A,(j)} \\ &= \left[(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}_A\right][i,j] \end{aligned}$$

가 됨을 알 수 있다.

공정주기가 흡수상태 $m_{A,j}$로 끝나면서 일시상태 m_i를 방문하는 평균횟수는

$$V(m_i, e\{m_{A,j}\}) = V(m_i)P\left(e\{m_{A,j}\}|b\{m_i\}\right) \tag{2.4}$$

임을 알 수 있고, 따라서 공정주기가 흡수상태 $m_{A,j}$로 끝나는 조건에서 일시상태 m_i를 방문하는 평균횟수는

$$V(m_i|e\{m_{A,j}\}) = \frac{V(m_i, e\{m_{A,j}\})}{P\left(e\{m_{A,j}\}\right)} \tag{2.5}$$

가 된다. 위 식에서 분모는 공정의 시작이 m_{i_0}이므로 $P\left(e\{m_{A,j}\}\right) = P\left(e\{m_{A,j}\}|b\{m_{i_0}\}\right)$이다. 위의 결과로부터, 공정주기가 흡수상태 $m_{A,j}$로 끝나는 조건에서의 평균신호표본수는

$$E(N|e\{m_{A,j}\}) = \sum_{i=1}^{n} V(m_i|e\{m_{A,j}\}) \tag{2.6}$$

이다.

이와 같이 연속변수 값을 이산화시켜 다수의 일시 상태를 가진 Markov연쇄로 근사시키는 경우, 그 정확도는 전이행렬 $\mathbf{Q}$의 차수와 계산 값의 유효숫자의 크기에 달려있다. $\mathbf{Q}$의 차수가 클수록 참값에 가까운 값으로 나타낼 수 있어 정확도가 상승하지만 각 행렬요소에 나타나는 확률 값은 경우에 따라(특히 이상상태일 때) 매우 작은 값을 가지게 되어 컴퓨터를 사용할 때 유효숫자의 한계에 부딪쳐 행렬 $(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q})^{-1}$의 요소가 음수와 같은 불가능한 값으로 나타나 전체 값을 크게 오도하는 결과가 발생한다. 따라서 정확한 값의 계산을 위해서는 $\mathbf{Q}$의 차수를 크게 하면서 동시에 실수계산의 유효숫자를 크게 하기 위해 프로그램상의 정밀도(precision)을 2배정밀(double precision)이나 4배정밀(quadruple precision)을 사용하여 계산된 행렬 $(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q})^{-1}$의 각 요소가 음수나 특이한 값이 나오는지를 면밀히 검토해야 한다.

일시 지역을 분할할 때 Gaussian 구적법(quadrature method)를 사용하면 더 적은 구간으로 정확한 근사값을 계산할 수 있는 것으로 알려져 있으나, 실제로 별 차이가 없는 경우가 많다. 오히려 지정된 구적점과 가중치를 사용해야 하기 때문에 동일 구간으로 분할하는 것보다 방법이 까다로워 사용에 불편하며 불편함에 대한 보상은 거의 없다고 봐도 무방하다.

표현의 단순성을 고려하여 공정통계량이 0을 중심으로 대칭인 경우만을 고려한다. 또한 관리한계는 항상 $\pm L$로 간주한다. 분할하는 부구간의 수는 홀수로 하면 가운데 부구간의 대표값에 0이 포함되어 대칭성을 유지할 수 있어 좋다.

3. 통계적 설계

공정관리의 통계적 설계에서는 관리(in control; IC)상태일 때의 평균런길이(ARL_0)와 이상(out of control; OC)상태일 때의 평균런길이(ARL_1)를 비교한다. 이때 ARL_0와 ARL_1는 공정분포가 처음부터 각

각 관리상태와 이상상태를 가정하고 계산하게 된다. Shewhart 관리도의 경우는 관리통계량의 분포가 동일독립이므로 가설검정의 제 1, 2종 오류를 각각 α, β라 할 때 관리절차는 가설검정의 연속적용과 동일하여

$$\mathrm{ARL}_0 = \frac{1}{\alpha}, \qquad \mathrm{ARL}_1 = \frac{1}{1-\beta}$$

의 관계가 성립한다. 이러한 이유로 통계적 설계로 관리도의 특성을 연구하는 것을 위험에 기초한 접근(risk-based approach)이라고도 한다.

3.1. 고정표본추출비

고정표본추출비(fixed sampling rate; FSR)는 표본추출구간과 표본크기가 사전에 결정되어 항상 동일한 값을 사용하는 것을 말한다. 고정표본추출비 관리도의 평균런길이의 계산은 식 (2.2)를 이용하여 쉽게 계산할 수 있다. 관리통계량이 식 (1.1)과 같고 관리한계선이 $\pm L$이면

$$R_T = (-L, L), \qquad R_A = (-\infty, -L) \cup (L, \infty)$$

이 된다. 구간 $(-L, L)$을 구간길이가 $d(= 2L/n)$인 n(홀수)개의 부구간으로 균등 분할하면, 부구간은

$$(l_1, u_1), (l_2, u_2), \ldots, (l_n, u_n), \quad (l_1 = -L, u_n = L)$$

이 되고 중심점은

$$m_1, m_2, \ldots, m_n$$

이 되어 전이확률은

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P\left(S_t \in (l_j, u_j) | S_{t-1} = m_i\right) \\ &= P\left(l_j - m_i < f(X_t) < u_j - m_i\right) \end{aligned}$$

로 계산할 수 있다. 이 전이확률을 식 (2.1)을 통해 식 (2.2)에 대입하면 평균런길이를 계산할 수 있다.

3.2. 변량표본추출비

다음은 공정관리 진행 중 관리통계량의 값에 따라 다음 표본추출구간과 표본크기가 결정되는 변량표본비(variable sampling rate; VSR)를 사용하는 경우를 생각해 보자. 변량표본비 설계 중 표본크기는 고정되고 표본추출구간만 변하는 경우는 변량추출구간(variable sampling interval; VSI), 표본추출구간은 고정되고 표본크기만 변하는 경우는 변량표본크기(variable sample size; VSS)라 한다. 변량추출구간이 취하는 값의 수와 변량표본크기가 취하는 값의 수는 일반적으로 2개씩만을 설정한다. 이 수가 2보다 클 때에는 이론적 효율은 증가할 수 있어도 실질적 운용이 복잡하여 소기의 효과를 발휘할 수 없게 된다. 변량추출비에 대한 연구로는 Reynolds (1996), Reynolds와 Arnolds (2001)과 Park 등 (2004) 등을 들 수 있다.

변량추출구간이 취하는 값을 h_1, h_2 $(h_1 \geq h_2)$라 하고, 변량표본크기가 취하는 값을 η_1, η_2 $(\eta_1 \leq \eta_2)$라 하자. 고정표본추출비에서와 마찬가지로 구간 $R_T = (-L, L)$을 구간길이가 $d\,(= 2L/n)$인 n(홀수)개의 부구간으로 균등 분할한 다음, 변량추출구간과 변량표본크기가 취하는 값에 따라 3개의 표본비 부구간그룹$(R_{T,1}, R_{T,2}, R_{T,3})$으로 분할하고 각 표본비 부구간그룹에 포함되는 부구간의 수를 $n_1, n_2, n_3\,(n =$

$n_1+n_2+n_3$)라 하자. 단, n_1은 홀수, n_2, n_3는 짝수. 분할된 표본비 부구간그룹과 그에 해당하는 부구간의 관계 및 표본추출간격과 표본크기는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
R_{T,1} &= (-L_1, L_1) = I_1 \cup \cdots \cup I_{n_1} && (h_1, \eta_1),\\
R_{T,2} &= (-L_2, -L_1) \cup (L_1, L_2) = I_{n_1+1} \cup \cdots \cup I_{n_1+n_2} && (h_*, \eta_*),\\
R_{T,3} &= (-L, -L_2) \cup (L_2, L) = I_{n_1+n_2+1} \cup \cdots \cup I_n && (h_2, \eta_2),
\end{aligned}
$$

여기서 (h_*, η_*)는 (h_1, η_2) 또는 (h_2, η_1)일 수 도 있고 더 간단한 경우에는 $R_{T,2}$를 고려하지 않을 수 도 있다.

직전 시점의 관리통계량이 k번째 부구간에 포함되고 이때 사용되는 변량표본비를 (H_k, N_k)라 하면 현 시점의 관리통계량은

$$S_t = S_{t-1} + f(X_t(H_k, N_k))$$

로 표현한다. 이 Markov연쇄의 전이확률은

$$
\begin{aligned}
P_{V,ij} &= P(S_t \in (l_j, u_j) | S_{t-1} = m_i)\\
&= P\left(l_j - m_i < f(X_t(H_i, N_i)) < u_j - m_i\right)
\end{aligned}
$$

으로 계산할 수 있다. 위의 전이확률로 이루어진 행렬은

$$\mathbf{Q}_V = \left[P_{A,ij}\right]_{n\times n}$$

가 된다.

다음은 표본추출비 벡터와 표본크기 벡터를 정의한다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}'_n &= (H_1, \ldots, H_1, H_2, \ldots, H_2, H_3, \ldots, H_3),\\
\mathbf{N}'_n &= (N_1, \ldots, N_1, N_2, \ldots, N_2, N_3, \ldots, N_3),
\end{aligned}
$$

각 벡터에서 동일한 값의 수는 순서대로 n_1, n_2, n_3개씩으로 나열되어 있다.

변량표본추출비를 사용한 관리도의 특성은 다음과 같이 표현된다.

$$
\begin{aligned}
\text{ANSS} &= \mathbf{s}'_n(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q}_V)^{-1}\mathbf{1}_n,\\
\text{ATS} &= \mathbf{s}'_n(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q}_V)^{-1}\mathbf{H}_n,\\
\text{ANOS} &= \mathbf{s}'_n(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q}_V)^{-1}\mathbf{N}_n.
\end{aligned}
$$

4. 경제적 설계

공정관리의 경제적 설계는 하나의 공정 주기를 설정한 다음 단위시간당 평균비용(average cost per unit interval; ACU)을 구하고, 이를 통해 효율을 판단하여 가장 효율적인 관리체계를 설정하는 것을 목표로 한다. 이러한 이유로 경제적 설계로 관리도의 특성을 연구하는 것을 비용에 기초한 접근(cost-based approach)이라고도 한다. 이때에 공정 모형은 관리상태에서 시작하고 공정 진행 중 이상원인이 발생하면 이상상태로 변하는 것을 가정한다. 이를 위해 이상원인이 발생하는 시점을 확률변수 U로 나타내고 있다. 이상원인의 발생을 연속변수로 나타낼 때는 지수분포, 이산변수로 나타낼 때는 추출한 표본

수를 의미하며 기하분포를 주로 사용한다. 두 변수 모두 기억불능(memoryless) 성질을 가지고 있어 공정의 어느 시점에서도 한 구간 내에 이상원인이 발생하지 않을 확률은 동일하다. 즉, 지수분포의 경우 ($f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$, $u > 0$), 단위표본추출구간이 h이면

$$P(U > t + h | U > t) = e^{-\lambda h}, \quad \forall t > 0.$$

기하분포의 경우 ($P(U = k) = (1 - p)^{k-1} p$, $k = 1, 2, \ldots$), 단위 표본추출구간 내에 이상원인이 발생할 확률을 p라 가정하면

$$P(U > t + 1 | U > t) = 1 - p, \quad \forall t > 0.$$

기존의 많은 연구에서는 공정주기를 표본수로 나타내는 것보다는 연속 시간으로 나타내는 것이 일반적인 경향이다. 따라서 이 연구에서도 지수분포를 사용한다. 경제적 관리도에서 Markov연쇄의 사용은 Park (2007)과 Park과 Reynolds (2008)를 예로 들 수 있다.

관리도의 경제적 설계에서 구해야 하는 특성은 평균오경보수, 관리 및 이상상태에서 관측된 평균표본수 등이다. 만일 변량표본추출비가 사용된다면 추가적으로 관리 및 이상상태에서 관측된 평균관측수 및 이상상태에서 관측된 평균관측수, 이상상태에서 관측된 평균신호시간 등이 필요하다. 이와 같은 특성을 계산하기 위해서는 관리상태 하에서의 전이확률과 이상상태 하에서의 전이확률을 포함한 전이행렬을 구성해야 한다. 또한 오경보(관리상태일 때 이상신호를 주는 것) 이후에는 새로운 관리도가 시작된다는 사실을 고려해야 한다.

이를 위해 먼저 공정의 상태를 나타내는 새로운 변수를 아래와 같이 정의한다.

$$V_t = \begin{cases} 1, & \text{process in IC}, \\ 2, & \text{process is OC but no signal is given}, \\ 3, & \text{process is OC and a signal is given}. \end{cases}$$

제 3.1절처럼 일시영역을 분할하고 편리상 흡수영역 전체를 또 하나의 부구간 I_{n+1}로 표현하자. 관리상태에서 관리통계량이 부구간 I_{n+1}에 포함되면 오경보를 주는 것이 되고, 오경보 후에는 중심점 m_{i_0}에서 표본추출간격과 표본크기를 (H_{i_0}, N_{i_0})로 하여 새로 시작한다.

공정의 상태변수 V_t를 고려한 전이확률은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} p_{ij,kl} &= P(V_t = j, S_t \in I_l | V_{t-1} = i, S_{t-1} = m_k) \\ &= P(V_t = j, l_l - m_k < f(X_t(H_k, N_k)) < u_l - m_k | V_{t-1} = i) \end{aligned}$$

이 전이확률은 공정상태 변수 V_{t-1}, V_t에 따라 다음과 같이 구체적으로 명시된다.

- ($V_{t-1} = 1$, $V_t = 1$)인 경우,

$*$ $k, l = 1, 2, \ldots, n$에 대해

$$\begin{aligned} p_{11,kl} &= P(V_t = 1, l_l - m_k < f(X_t(H_k, N_k)) < u_l - m_k | V_{t-1} = 1) \\ &= P(l_l - m_k < f(X_t(H_k, N_k)) < u_l - m_k) \cdot e^{-\lambda H_k}. \end{aligned}$$

위의 경우에는 주어진 표본구간(H_k) 내에서 이상원인이 발생하지 않아야 하므로 $e^{-\lambda H_k}$가 곱해졌다.

$*$ $k = n + 1, l = 1, 2, \ldots, n$에 대해

이 경우는 오경보 후 0에서 다시 시작하므로 0이 포함된 $k = (n+1)/2$번째 상태의 전이확률과 동일하다. 즉,

$$p_{11,(n+1)l} = P\left(l_l - m_{(n+1)/2} < f(X_t(H_{(n+1)/2}, N_{(n+1)/2})) < u_l - m_{(n+1)/2}\right) \cdot e^{-\lambda H_{(n+1)/2}}.$$

$*$ $k = 1, 2, \dots, n+1, l = n+1$에 대해

이 경우는 오경보에 해당하여 관리통계량이 흡수상태에 포함되는 경우이므로

$$p_{11,k(n+1)} = P\left(f(X_t(H_k, N_k)) < -L \ \text{ or } \ f(X_t(H_k, N_k)) > L\right) \cdot e^{-\lambda H_{(n+1)/2}}$$

와 같이 계산할 수 있다.

이와 같이 $(V_{t-1} = 1,\, V_t = 1)$일 때의 부전이행렬을

$$\mathbf{Q}_{11} = \Big[p_{11,kl}\Big]_{(n+1)\times(n+1)} \tag{4.1}$$

로 정의한다.

- $(V_{t-1} = 1,\, V_t = 2)$인 경우,

$*$ $k = 1, 2, \dots, n+1, l = 1, 2, \dots, n$에 대해

$$\begin{aligned} p_{12,kl} &= P(V_t = 2, l_l - m_k < f(X_t(H_k, N_k)) < u_l - m_k | V_{t-1} = 1) \\ &= P(l_l - m_k < f(X_t(H_k, N_k)) < u_l - m_k) \cdot \left(1 - e^{-\lambda H_k}\right). \end{aligned}$$

위의 경우에는 주어진 표본구간(H_k) 내에서 이상원인이 발생해야 하므로 $(1 - e^{-\lambda H_k})$가 곱해졌다. 이 경우의 부전이행렬을

$$\mathbf{Q}_{12} = \Big[p_{12,kl}\Big]_{(n+1)\times n} \tag{4.2}$$

로 정의한다.

- $(V_{t-1} = 2,\, V_t = 1)$인 경우,

$*$ $k = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, n+1$에 대해

$$p_{21,kl} = 0.$$

- $(V_{t-1} = 2,\, V_t = 2)$인 경우,

$*$ $k, l = 1, 2, \dots, n$에 대해

$$\begin{aligned} p_{22,kl} &= P(V_t = 2, l_l - m_k < f(X_t(H_k, N_k)) < u_l - m_k | V_{t-1} = 2) \\ &= P(l_l - m_k < f(X_t(H_k, N_k)) < u_l - m_k). \end{aligned}$$

이 경우의 부전이행렬을

$$\mathbf{Q}_{22} = \Big[p_{22,kl}\Big]_{n\times n} \tag{4.3}$$

로 정의한다.

이렇게 정의된 부전이행렬들 식 (4.1), (4.2), (4.3)으로 부터 다음 전체 전이행렬을 구한다.

$$\mathbf{Q}_{V,tot} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{22} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}_{(2n+1)\times(2n+1)}.$$

위의 전체 전이행렬을 사용하면 관리절차의 특성은 다음과 같이 계산됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{ANSS} &= \mathbf{s}'_{2n+1}(\mathbf{I}_{2n+1} - \mathbf{Q}_{V,tot})^{-1}\mathbf{1}_{2n+1}, \\ \text{ATS} &= \mathbf{s}'_{2n+1}(\mathbf{I}_{2n+1} - \mathbf{Q}_{V,tot})^{-1}\mathbf{H}_{tot}, \\ \text{ANOS} &= \mathbf{s}'_{2n+1}(\mathbf{I}_{2n+1} - \mathbf{Q}_{V,tot})^{-1}\mathbf{N}_{tot}. \end{aligned}$$

단, $\mathbf{H}'_{tot} = (\mathbf{H}', h_2, \mathbf{H}')$, $\mathbf{N}'_{tot} = (\mathbf{N}', n_2, \mathbf{N}')$.

오경보에 해당하는 상태는 $(n+1)$번째 상태이므로 평균오경보수는 부전이행렬 $\mathbf{Q}_{11}$만을 이용해서

$$E(F) = \mathbf{s}'_{n+1}(\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q}_{11})^{-1}\mathbf{1}_{n+1,(n+1)}$$

로 표현하거나, 또는 전체 전이행렬을 이용하여

$$E(F) = \mathbf{s}'_{2n+1}(\mathbf{I}_{2n+1} - \mathbf{Q}_{V,tot})^{-1}\mathbf{1}_{2n+1,(n+1)}$$

로 구할 수 있다.

공정관리의 특성에 따라서는 관리통계량 자체가 공정의 품질인 목표치로 부터의 편차(deviation from target)을 나타내고 공정비용은 편차제곱평균에 비례(squared error loss)하는 필요한 경우가 있다. 주기당 총 편차제곱평균은 한 주기가 끝나기 직전까지의 편차제곱평균과 끝나는 시점에서의 편차제곱평균으로 나누어 계산한다. 한 주기가 끝나기 직전까지의 편차제곱평균은 모든 일시상태의 편차제곱평균에 해당되어 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$E\left(\sum_{t=1}^{N-1} S_t^2\right) = \mathbf{s}'_n(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R}_n$$

단, $R'_n = (m_1^2, m_2^2, \ldots, m_n^2)$. 수정시점에서의 편차제곱평균은 흡수상태의 편차제곱평균에 해당되어 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$E(S_N^2) = \mathbf{s}'_n(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}_A\mathbf{R}_{n_A}$$

단, $\mathbf{R}'_{n_A} = (m_{A,1}^2, m_{A,2}^2, \ldots, m_{A,n_A}^2)$.

5. 재조정 관리도

전통적인 관리도(traditional control chart; TCC)에서는 공정관리에서 신호 오류(signal error), 즉 제 1, 2종 오류만을 가정하고 있다. 그러나 실제의 공정환경에서는 이외에도 결정오류(decision error)가 항상 존재한다. 결정오류는 탐지오류(search error)와 판단오류(judge error)를 함께 일컫는 표현이다. 탐지오류는 이상원인을 찾는데 발생하는 오류, 즉 이상원인이 발생하지 않았는데 우연원인을 이상원인으로 착각하여 이상원인을 찾은 것으로 간주하는 오류(search error I)와 이상원인이 발생했는데 찾지 못하는 오류(search error II)를 의미한다. 판단오류는 이상원인이 발생하지 않았는데 발생한 것으로 판

표 5.1. 신호, 탐지, 판단 오류와 그에 따른 확률 및 조치

SC	Not Occurred				Occurred			
Signal Result	No Signal	Signal (signal error I)			No signal (signal error II)	Signal		
Search Result		Find SC (search error I)	Not find SC			Find SC	Not find SC (search error II)	
Judge Result		True signal (judge error I)		False signal		True Signal		False signal (Judge error II)
Probability	$1-\alpha$	$\alpha\alpha_1$	$\alpha\alpha_2$	$\alpha\alpha_3$	β	$(1-\beta)\beta_1$	$(1-\beta)\beta_2$	$(1-\beta)\beta_3$
Action	No action	Repair	Reset	No action	No action	Repair	Reset	No action
State	IC_1	IC_2	IC_3	IC_4	OC_1	OC_2	OC_3	OC_4

$*\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1,\ \beta_1+\beta_2+\beta_3=1$

* SC: 이상원인(special cause)

단하는 오류(judge error I)와 이상원인이 발생했는데 발생하지 않은 것으로 판단하는 오류(judge error II)를 의미한다.

탐지결과에서 이상원인을 찾게 되고 판단결과에서 이상원인이 발생한 것으로 판단하면 공정을 보수한다(repair). 반면에 탐지결과에서는 이상원인을 찾지 못했으나 판단결과에서 이상원인이 발생했지만 찾지 못한 것으로 판단하면 공정을 재조정한다(reset). 이러한 공정에 대한 조치(action)는 이상신호의 참, 거짓에 관계없이 취해진다. 공정에서 발생할 수 있는 오류들과 그에 따른 확률 및 조치는 표 5.1에 정리되어 있다.

전통적 관리도에서는 이러한 결정오류를 고려하여 관리도의 특성을 도출해야만 올바른 특성이 연구될 수 있다. 이 방식이 기존의 방식(결정오류를 무시한 관리도)과 다른 점은 이상원인이 발생하지 않아도 보수나 재조정을 할 수 있다는 점이고, 보수나 재조정을 한 후에는 새로운 관리도가 시작되므로 관리상태에서도 공정의 한 주기가 끝날 수 있다는 점이다. 기존의 방식에서는 이상상태에서만 공정의 한 주기가 끝나게 되어있다.

전통적 관리도에서 발생하는 결정오류는 기존 방식보다 다양한 오류들이 포함되어 있어 관리도의 효율이 떨어지게 되고 공정 운영자의 신뢰도를 잃을 수 있는 위험성을 내포하고 있다. 이런 문제를 개선하기 위해 재조정 관리도(reset chart)를 제안한다. 재조정 관리도는 관리통계량이 신호영역(signal region)에 포함되어 이상신호를 주면 이상원인을 탐지하는 대신 공정을 재조정하는 것이다. 사실 이상원인의 탐지과정도 공정 재조정 과정의 일부인 경우가 허다하다. 여기서는 재조정 관리도의 특성에 필요한 성질을 Markov연쇄를 이용하여 구해보기로 한다.

재조정 관리도에 대한 Markov연쇄의 상태는 4가지, A_1, A_2, B_1, B_2로 구분하고 표 5.1에서 정의된 상태를 이용하여 아래와 같이 정의한다.

$$A_1=\mathrm{IC}_1,\quad A_2=\mathrm{OC}_1,\qquad B_1=\mathrm{IC}_2\cup\mathrm{IC}_3\cup\mathrm{IC}_4,\quad B_2=\mathrm{OC}_2\cup\mathrm{OC}_3\cup\mathrm{OC}_4$$

이 경우 일시상태는 A_1, A_2, 흡수상태는 B_1, B_2이다. 즉, 신호영역은 흡수영역과 동일하다. 여기서 흡수상태는 자연적으로 이미 분할된 경우이다.

먼저 일시상태의 전이확률에 대해 알아보자. 한 추출구간 h에서 이상원인이 발생하지 않을 확률은 $e^{-\lambda h}$을 이용하면, 상태 A_1에서 A_1으로의 전이확률은 $(1-\alpha)e^{-\lambda h}$, 상태 A_1에서 A_2로의 전이확률은 $\beta(1-e^{-\lambda h})$ 상태 A_2에서 A_1으로의 전이확률은 0, 상태 A_2에서 A_2로의 전이확률은 β가 되어 재조정

표 **5.2.** 재조정 관리도의 Markov연쇄에 관한 특성

일시상태	흡수상태	$V(A_i)$	$P(e\{B_j\}\|b\{A_i\})$	$V(A_i, e\{B_j\})$
A_1	B_1	$\frac{1}{1-a}$	$\frac{\alpha e^{-\lambda h}}{1-a}$	$\frac{\alpha e^{-\lambda h}}{(1-a)^2}$
	B_2		$\frac{1-e^{-\lambda h}}{1-a}$	$\frac{1-e^{-\lambda h}}{(1-a)^2}$
A_2	B_1	$\frac{\beta(1-e^{-\lambda h})}{(1-\beta)(1-a)}$	0	0
	B_2		1	$\frac{\beta(1-e^{-\lambda h})}{(1-\beta)(1-a)}$

관리도의 일시상태 전이행렬은

$$\mathbf{Q}^R = \begin{bmatrix} (1-\alpha)e^{-\lambda h} & \beta\left(1-e^{-\lambda h}\right) \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

이 된다.

다음은 일시상태에서 흡수상태로의 전이확률에 대해 알아본다. 상태 A_1에서 B_1으로의 전이확률은 $\alpha e^{-\lambda h}$, 상태 A_1에서 B_2로의 전이확률은 $(1-\beta)(1-e^{-\lambda h})$, 상태 A_2에서 B_1으로의 전이확률은 0, 상태 A_2에서 B_2로의 전이확률은 $1-\beta$가 되어 재조정 관리도의 일시상태에서 흡수상태로의 전이행렬은

$$\mathbf{Q}_A^R = \begin{bmatrix} \alpha e^{-\lambda h} & (1-\beta)\left(1-e^{-\lambda h}\right) \\ 0 & 1-\beta \end{bmatrix}$$

행렬계산을 통해 다음 결과를 얻는다.

$$\left(I-\mathbf{Q}^R\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-a} & \dfrac{\beta\left(1-e^{-\lambda h}\right)}{(1-\beta)(1-a)} \\ 0 & \dfrac{1}{1-\beta} \end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

$$\left(I-\mathbf{Q}^R\right)^{-1}\mathbf{Q}_A^R = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha e^{-\lambda h}}{1-a} & \dfrac{1-e^{-\lambda h}}{1-a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

단, $a = (1-\alpha)e^{-\lambda h}$.

재조정 관리도의 Markov연쇄에 관한 특성은 식 (5.1), (5.2)와 식 (2.4)를 통해 표 5.2에 정리되어 있다.

재조정 관리도의 한 공정 주기동안 관측되는 표본수를 N_R이라 하면, 표 5.2로부터 공정주기의 평균표본수는

$$\begin{aligned} E(N_R) &= V(A_1) + V(A_2) \\ &= \frac{1-\beta e^{-\lambda h}}{(1-\beta)(1-a)} \end{aligned}$$

흡수영역의 특정상태로 공정이 끝날 때 (표본추출시점을 기준으로 할 때) 공정주기의 평균표본수는

$$\begin{aligned} E(N_R, e\{B_1\}) &= V(A_1, e\{B_1\}) + V(A_2, e\{B_1\}) \\ &= \frac{\alpha e^{-\lambda h}}{(1-a)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(N_R, e\{B_2\}) &= V(A_1, e\{B_2\}) + V(A_2, e\{B_2\}) \\ &= \frac{(1-e^{-\lambda h})(1-\beta a)}{(1-\beta)(1-a)^2}. \end{aligned}$$

재조정 관리도에서 표본추출부터 데이터 수집 및 분석에 소요되는 시간을 gn, 재조정하는데소요되는 시간을 D_R이라 하자. 또한, $T_R = hN_R + gn + D_R$이면, 재조정 신호시간(reset signal time)은 hN_R, 공정주기시간(cycle length time)은 T_R이 된다. 위 두 종류의 시간에 대한 다음 세가지 조건을 고려할 필요가 있다.

Case R_I: $U > T_R$

Case R_{II}: $hN_R < U \le T_R$

Case R_{III}: $U \le hN_R$

조건 R_I은 이상원인 발생 전 공정이 끝나는 것을 의미하고, 조건 R_{II}와 R_{III}는 이상원인 발생 후 공정이 끝나는 것을 의미한다. 다만, R_{II}와 R_{III}의 차이는 이상원인이 hN_R 보다 후에 또는 전에 나타난다는 데에 그 차이가 있다.

표본추출시점부터 시간 $gn + D_R$까지 이상원인이 일어나지 않을 확률은 $e^{-\lambda(gn+D_R)}$. 이 확률과 표 5.2의 $P(e\{B_j\}|b\{A_i\})$를 이용하면 다음 확률을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} P(R_I) &= \frac{\alpha e^{-\lambda(h+gn+D_R)}}{1-a}, \\ P(R_{II}) &= \frac{\left\{1-e^{-\lambda(gn+D_R)}\right\}\alpha e^{-\lambda h}}{1-a}, \\ P(R_{III}) &= \frac{1-e^{-\lambda h}}{1-a}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

표본추출시점을 기준으로 할 때, Cases R_I과 R_{II}은 공정이 관리상태에서 끝나는 경우를 의미하고, Case R_{III}은 이상상태에서 끝나는 것을 의미한다. 따라서, 관리상태와 이상상태에서 끝나면서 한 공정주기에서 취한 평균표본수는 각각 $V(A_1, e\{B_1\}) + V(A_2, e\{B_1\})$와 $V(A_1, e\{B_2\}) + V(A_2, e\{B_2\})$가 된다. 관리상태와 이상상태에서 끝나는 조건하에서 한 공정주기에서 취한 평균표본수는 식 (2.5)와 (2.6)처럼 각각 해당 확률 $\alpha e^{-\lambda h}/(1-a)$와 $(1-e^{-\lambda h})/(1-a)$로 나누어 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} E(N_R|R_I) = E(N_R|R_{II}) &= \frac{1}{1-a}, \\ E(N_R|R_{III}) &= \frac{1-\beta(1-\alpha)e^{-\lambda h}}{(1-\beta)(1-a)}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

다음은 세 가지 경우에 따른 이상원인의 발생시점에 대해 알아보자. 이상원인의 발생시점이 지수분포를 따르므로 기억불능 성질에 의해

$$\begin{aligned} E(U|U > X) &= E(U) + E(X|U > X) \\ &= \frac{1}{\lambda} + E(X|U > X) \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서,

$$E(U|R_I) = E(U|U > hN_R + gn + D_R)$$

$$= E(U) + E(hN_R + gn + D_R | U > hN_R + gn + D_R)$$
$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-a} + gn + D_R \tag{5.5}$$

위 식에서 $gn + D_R = 0$을 대입하면

$$E(U|U > hN_R) = \frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-a}$$

이 되고 또한

$$P(U > hN_R) = \frac{\alpha e^{-\lambda h}}{1-a}$$

을 이용하여

$$\begin{aligned} E(U|R_{III}) &= \frac{E(U) - E(U|U > hN_R)P(U > hN_R)}{P(R_{III})} \\ &= \frac{1-a}{\alpha e^{-\lambda h}} \left\{ \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-a} \right) \frac{\alpha e^{-\lambda h}}{1-a} \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{h\alpha e^{-\lambda h}}{(1-a)(1-e^{-\lambda h})} \end{aligned} \tag{5.6}$$

을 얻는다. 이와 유사하게

$$\begin{aligned} E(U|R_{II}) &= \frac{E(U) - E(U|R_{III})P(R_{III}) - E(U|R_I)P(R_I)}{P(R_{II})} \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-a} - \frac{t_R e^{-\lambda t_R}}{1-e^{-\lambda t_R}} \end{aligned} \tag{5.7}$$

을 얻을 수 있다.

위의 결과에서 식 (5.3), (5.4), (5.5), (5.6), (5.7)을 이용하면 재조정 관리도의 단위시간당 평균비용을 계산할 수 있다.

6. 결정오류를 고려한 전통적 관리도

다음은 결정오류를 고려한 전통적 관리도(traditional control chart; TCC)의 특성에 대해 알아보자. 이 관리도는 표 5.2의 action이 repair 또는 reset 이면 공정의 한 주기가 끝나고, 그렇지 않으면 공정을 계속하는 것이다. 재조정 관리도에서는 이상신호가 발령되면 항상 재조정하여 공정의 한 주기가 끝남을 상기할 필요가 있다. 전통적 관리도에서 Markov연쇄는 표 5.2의 8개 상태를 다음과 같이 재 명명한다.

$$A_1 = \mathrm{IC}_1, \quad A_2 = \mathrm{IC}_4, \quad A_3 = \mathrm{OC}_1, \quad A_4 = \mathrm{OC}_4,$$
$$B_1 = \mathrm{IC}_2, \quad B_2 = \mathrm{IC}_3, \quad B_3 = \mathrm{OC}_2, \quad B_4 = \mathrm{OC}_3,$$

여기서 A_1, A_2, A_3, A_4는 일시상태, B_1, B_2, B_3, B_4는 흡수상태에 해당된다. 신호오류와 이상원인의 분포를 고려하면 일시상태의 전이행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} (1-\alpha)e^{-\lambda h} & \alpha\alpha_3 e^{-\lambda h} & \beta\left(1-e^{-\lambda h}\right) & (1-\beta)\beta_3\left(1-e^{-\lambda h}\right) \\ (1-\alpha)e^{-\lambda h} & \alpha\alpha_3 e^{-\lambda h} & \beta\left(1-e^{-\lambda h}\right) & (1-\beta)\beta_3\left(1-e^{-\lambda h}\right) \\ 0 & 0 & \beta & (1-\beta)\beta_3 \\ 0 & 0 & \beta & (1-\beta)\beta_3 \end{bmatrix}$$

또한, 일시상태에서 흡수상태로의 전이행렬은

$$\mathbf{Q}_A^T = \begin{bmatrix} \alpha\alpha_1 e^{-\lambda h} & \alpha\alpha_2 e^{-\lambda h} & (1-\beta)\beta_1\left(1-e^{-\lambda h}\right) & (1-\beta)\beta_2\left(1-e^{-\lambda h}\right) \\ \alpha\alpha_1 e^{-\lambda h} & \alpha\alpha_2 e^{-\lambda h} & (1-\beta)\beta_1\left(1-e^{-\lambda h}\right) & (1-\beta)\beta_2\left(1-e^{-\lambda h}\right) \\ 0 & 0 & (1-\beta)\beta_1 & (1-\beta)\beta_2 \\ 0 & 0 & (1-\beta)\beta_1 & (1-\beta)\beta_2 \end{bmatrix}$$

이 된다. 따라서 행렬계산을 통해 다음 두가지 표현을 얻게 된다.

$$\left(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha\alpha_3 e^{-\lambda h}}{1-\xi_1} & \frac{\alpha\alpha_3 e^{-\lambda h}}{1-\xi_1} & \frac{\beta(1-e^{-\lambda h})}{(1-\xi_1)(1-\xi_2)} & \frac{(1-\beta)\beta_3(1-e^{-\lambda h})}{(1-\xi_1)(1-\xi_2)} \\ \frac{(1-\alpha)e^{-\lambda h}}{1-\xi_1} & \frac{1-(1-\alpha)e^{-\lambda h}}{1-\xi_1} & \frac{\beta(1-e^{-\lambda h})}{(1-\xi_1)(1-\xi_2)} & \frac{(1-\beta)\beta_3(1-e^{-\lambda h})}{(1-\xi_1)(1-\xi_2)} \\ 0 & 0 & \frac{1-(1-\beta)\beta_3}{1-\xi_2} & \frac{(1-\beta)\beta_3}{1-\xi_2} \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{1-\xi_2} & \frac{1-\beta}{1-\xi_2} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

$$\left(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^T\right)^{-1}\mathbf{Q}_A^T = \begin{bmatrix} \frac{\alpha\alpha_1 e^{-\lambda h}}{1-\xi_1} & \frac{\alpha\alpha_2 e^{-\lambda h}}{1-\xi_1} & \frac{\beta_1(1-e^{-\lambda h})}{(1-\xi_1)(1-\beta_3)} & \frac{\beta_2(1-e^{-\lambda h})}{(1-\xi_1)(1-\beta_3)} \\ \frac{\alpha\alpha_1 e^{-\lambda h}}{1-\xi_1} & \frac{\alpha\alpha_2 e^{-\lambda h}}{1-\xi_1} & \frac{\beta_1(1-e^{-\lambda h})}{(1-\xi_1)(1-\beta_3)} & \frac{\beta_2(1-e^{-\lambda h})}{(1-\xi_1)(1-\beta_3)} \\ 0 & 0 & \frac{\beta_1}{1-\beta_3} & \frac{\beta_2}{1-\beta_3} \\ 0 & 0 & \frac{\beta_1}{1-\beta_3} & \frac{\beta_2}{1-\beta_3} \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

단, $\xi_1 = \{1-\alpha(1-\alpha_3)\}e^{-\lambda h}$, $\xi_2 = \beta + (1-\beta)\beta_3$.

전통적 관리도의 Markov연쇄에 관한 특성은 식 (6.1), (6.2)와 식 (2.4)를 통해 표 6.1에 정리되어 있다. 표 6.1의 결과를 이용하면 결정오류를 고려한 관리도의 주기당 평균 추출표본수는

$$\begin{aligned} E(N_T) &= \frac{1-b_3}{a_1} + \frac{b_3}{a_1} + \frac{\beta(1-e^{-\lambda h})}{a_1 a_2} + \frac{(1-\beta)\beta_3(1-e^{-\lambda h})}{a_1 a_2} \\ &= \frac{1-\xi_2 e^{-\lambda h}}{a_1 a_2} \end{aligned}$$

이 되고, 또한 특정 흡수상태로 공정이 끝날 때의 평균 추출표본수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(N_T, e\{B_1\}) &= \frac{b_1(1-b_3)}{a_1^2} + \frac{b_1 b_3}{a_1^2} + 0 + 0 \\ &= \frac{b_1}{a_1^2}, \\ E(N_T, e\{B_2\}) &= \frac{b_2(1-b_3)}{a_1^2} + \frac{b_2 b_3}{a_1^2} + 0 + 0 \\ &= \frac{b_2}{a_1^2}, \\ E(N_T, e\{B_3\}) &= \frac{(1-b_3)\beta_1(1-e^{-\lambda h})}{a_1^2(1-\beta_3)} + \frac{b_3\beta_1(1-e^{-\lambda h})}{a_1^2(1-\beta_3)} + \frac{\beta\beta_1(1-e^{-\lambda h})}{a_1 a_2(1-\beta_3)} + \frac{\beta_1\beta_3(1-\beta)(1-e^{-\lambda h})}{a_1 a_2(1-\beta_3)} \end{aligned}$$

표 6.1. 전통적 관리도의 Markov연쇄에 관한 특성

Transient.	Absorbing.	$V(A_i)$	$P(e\{B_j\}\|b\{A_i\})$	$V(A_i, e\{B_j\})$
A_1	B_1	$\frac{1-b_3}{a_1}$	$\frac{b_1}{a_1}$	$\frac{b_1(1-b_3)}{a_1^2}$
	B_2		$\frac{b_2}{a_1}$	$\frac{b_2(1-b_3)}{a_1^2}$
	B_3		$\frac{\beta_1(1-e^{-\lambda h})}{a_1(1-\beta_3)}$	$\frac{(1-b_3)\beta_1(1-e^{-\lambda h})}{a_1^2(1-\beta_3)}$
	B_4		$\frac{\beta_2(1-e^{-\lambda h})}{a_1(1-\beta_3)}$	$\frac{(1-b_3)\beta_2(1-e^{-\lambda h})}{a_1^2(1-\beta_3)}$
A_2	B_1	$\frac{b_3}{a_1}$	$\frac{b_1}{a_1}$	$\frac{b_1 b_3}{a_1^2}$
	B_2		$\frac{b_2}{a_1}$	$\frac{b_2 b_3}{a_1^2}$
	B_3		$\frac{\beta_1(1-e^{-\lambda h})}{a_1(1-\beta_3)}$	$\frac{b_3\beta_1(1-e^{-\lambda h})}{a_1^2(1-\beta_3)}$
	B_4		$\frac{\beta_2(1-e^{-\lambda h})}{a_1(1-\beta_3)}$	$\frac{b_3\beta_2(1-e^{-\lambda h})}{a_1^2(1-\beta_3)}$
A_3	B_1	$\frac{\beta(1-e^{-\lambda h})}{a_1 a_2}$	0	0
	B_2		0	0
	B_3		$\frac{\beta_1}{1-\beta_3}$	$\frac{\beta\beta_1(1-e^{-\lambda h})}{a_1 a_2(1-\beta_3)}$
	B_4		$\frac{\beta_2}{1-\beta_3}$	$\frac{\beta\beta_2(1-e^{-\lambda h})}{a_1 a_2(1-\beta_3)}$
A_4	B_1	$\frac{(1-\beta)\beta_3(1-e^{-\lambda h})}{a_1 a_2}$	0	0
	B_2		0	0
	B_3		$\frac{\beta_1}{1-\beta_3}$	$\frac{\beta_1\beta_3(1-\beta)(1-e^{-\lambda h})}{a_1 a_2(1-\beta_3)}$
	B_4		$\frac{\beta_2}{1-\beta_3}$	$\frac{\beta_2\beta_3(1-\beta)(1-e^{-\lambda h})}{a_1 a_2(1-\beta_3)}$

$*\ a_1 = 1-\xi_1,\ a_2 = 1-\xi_2,\ b_1 = \alpha\alpha_1 e^{-\lambda h},\ b_2 = \alpha\alpha_2 e^{-\lambda h},\ b_3 = \alpha\alpha_3 e^{-\lambda h}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\beta_1(1-e^{-\lambda h})}{a_1(1-\beta_3)}\left\{\frac{1}{a_1}+\frac{\beta+(1-\beta)\beta_3}{a_2}\right\},\\
E(N_T, e\{B_4\}) &= \frac{(1-b_3)\beta_2(1-e^{-\lambda h})}{a_1^2(1-\beta_3)} + \frac{b_3\beta_2(1-e^{-\lambda h})}{a_1^2(1-\beta_3)} + \frac{\beta\beta_2(1-e^{-\lambda h})}{a_1 a_2(1-\beta_3)} + \frac{\beta_2\beta_3(1-\beta)(1-e^{-\lambda h})}{a_1 a_2(1-\beta_3)}\\
&= \frac{\beta_2(1-e^{-\lambda h})}{a_1(1-\beta_3)}\left\{\frac{1}{a_1}+\frac{\beta+(1-\beta)\beta_3}{a_2}\right\}.
\end{aligned}
$$

결정오류를 고려한 관리도에서 표본추출부터 데이터 수집 및 분석에 소요되는 시간을 gn, 공정의 수리 또는 재조정하는 데 소요되는 시간을 D_T이라 하자. 또한, $T_T = hN_T + gn + D_T$이면, 이상 신호시간(OC signal time)은 hN_T, 공정주기시간(cycle length time)은 T_T이 된다. 위 두 종류의 시간에 대한 다음 세가지 조건을 고려할 필요가 있다.

Case V_I: $U > T_T$

Case V_{II}: $hN_T < U \le T_T$

Case V_{III}: $U \leq hN_T$

표본추출시점부터 $gn + D_T$시간 까지 이상원인이 일어나지 않을 확률은 $e^{-\lambda(gn+D_T)}$. 이 확률과 표 5.2의 $P(e\{B_j\}|b\{A_i\})$를 이용하면 다음 확률을 얻게 된다.

$$
\begin{aligned}
P(V_I) &= \frac{\alpha(1-\alpha_3)e^{-\lambda(h+gn+D_T)}}{1-\xi_1}, \\
P(V_{II}) &= \frac{\alpha(1-\alpha_3)e^{-\lambda h}\left(1-e^{-\lambda(gn+D_T)}\right)}{1-\xi_1}, \\
P(V_{III}) &= \frac{1-e^{-\lambda h}}{1-\xi_1}.
\end{aligned}
$$

관리상태와 이상상태에서 끝나는 공정주기 동안 추출된 평균 표본수는 각각

$$
\sum_{i=1}^{4} V(A_i, e\{B_1\}) + \sum_{i=1}^{4} V(A_i, e\{B_2\}), \qquad \sum_{i=1}^{4} V(A_i, e\{B_3\}) + \sum_{i=1}^{4} V(A_i, e\{B_4\})
$$

이 된다. 이를 이용하면 공정주기가 관리상태와 이상상태에서 끝나는 조건하에서 공정 주기 동안 추출된 평균 표본수는 해당 확률로 나누어 각각 다음과 같이 구해진다.

$$
\begin{aligned}
E(N_T|V_I) = E(N_T|V_{IIP}) &= \frac{1}{1-\xi_1}, \\
E(N_T|V_{III}) &= \frac{1}{1-\xi_1} + \frac{\xi_2}{1-\xi_2}.
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

재조정 관리도에서와 유사한 과정을 통해 다음 결과를 얻는다.

$$
\begin{aligned}
E(U|V_I) &= \frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-\xi_1} + gn + D_T, \\
E(U|V_{II}) &= \frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-\xi_1} - \frac{(gn+D_T)e^{-\lambda(gn+D_T)}}{1-e^{-\lambda(gn+D_T)}}, \\
E(U|V_{III}) &= \frac{1}{\lambda} - \frac{h\alpha(1-\alpha_3)e^{-\lambda h}}{(1-\xi_1)(1-e^{-\lambda h})}.
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

다음은 평균오경보수의 계산에 대해 알아보자. 먼저 결정오류를 고려한 관리도에서는 두 종류의 오경보가 있다. 하나는 공정이 관리상태일 때 신호를 주고 탐색과정에서 이상원인을 발견하지 못하여 오경보로 판단하는 경우로서 이는 표 5.2의 IC_4 (즉 A_2)에 해당한다. 이를 참 오경보(true false signal)라 한다. 또 다른 하나는 공정이 이상상태일 때 신호를 주었으나 탐색과정에서 이상원인을 발견하지 못하여 오경보로 판단하는 경우로서 이는 표 5.2의 OC_4 (즉 A_4)에 해당한다. 이를 거짓 오경보(false false signal)라 한다. 이 두 가지 오경보가 공정에 미치는 영향은 서로 비슷하여 큰 차이가 나지 않지만 어느 것이나 공정관리에 심각한 부작용을 초래함은 분명하다. 각각의 평균 오경보수는 행렬 $(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^T)^{-1}$의 $(1,2)$와 $(1,4$번째 요소에 해당되어

$$
\begin{aligned}
E(F_T) &= \frac{\alpha\alpha_3 e^{-\lambda h}}{1-\xi_1} \\
E(F_F) &= \frac{(1-\beta)\beta_3(1-e^{-\lambda h})}{(1-\xi_1)(1-\xi_2)}
\end{aligned} \tag{6.5}
$$

임을 알 수 있다.

식 (6.3), (6.4), (6.5)를 이용하면 결정오류를 고려한 전통적 관리도의 단위시간당 평균비용을 계산할 수 있다.

7. 점근적 Markov연쇄

공정관리에서 관리통계량이 점근적 Markov특성(asymptotic Markov property)을 만족하는 경우가 있다. 이는 어떤 시점에서의 일시영역에 대한 전이행렬이 시간종속이지만 점근적으로는 시간독립이 되는 경우를 의미한다. 이에 대한 예를 들어보자.

시점 $t-1$에서 시점 t로의 전이행렬이 시간종속인

$$\mathbf{Q}_t$$

이고, 점근전이행렬이

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{Q}_t = \mathbf{Q}$$

를 만족하여 점근적 시간독립이라고 가정하자. 이 때 상수 r은 어떤 $\varepsilon > 0$에 대해서

$$\max_{i,j} |Q_r[i,j] - Q_{r-1}[i,j]| < \varepsilon$$

을 만족한다고 가정한다. 이 경우 공정상태 m_i를 시점 t에 방문하는 확률은

$$P(T(m_i) = t) = \mathbf{s}_n'\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_t\mathbf{1}_{n,(i)}$$

이 되고, 공정상태 m_i의 평균 방문횟수는 다음과 같이 근사적으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}
V(m_i) &= \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{s}_n'\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_t\mathbf{1}_{n,(i)} \\
&\approx \mathbf{s}_n' \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_r\mathbf{Q}^{t-r}\mathbf{1}_{n,(i)} \\
&= \mathbf{s}_n' \left[\sum_{k=0}^{r-1} \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_k + \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_r \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{Q}^k\right]\mathbf{1}_{n,(i)} \\
&= \mathbf{s}_n' \left[\sum_{k=0}^{r-1} \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_k + \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_r (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\right]\mathbf{1}_{n,(i)}.
\end{aligned}$$

위의 표현을 사용하면 공정특성 연구에 필요한 특성들을 근사적으로 구할 수 있음을 알 수 있다.

8. 결론

이 논문에서는 통계적 공정관리의 특성 연구를 위해 Markov연쇄를 사용하는 방법에 대해 알아보았다. 연속적 값을 가지는 공정통계량의 특성의 규명이 해석적으로는 불가능할 때, 이를 이산화시켜 Markov연쇄를 생성한 다음 그 특성을 근사적으로 구할 수 있도록 해주는 유용한 도구이다. 경우에 따라서는 관리통계량의 확률적 속성을 이용하여 관리도의 특성을 해석적으로 구할 수 있는 경우가 있다. 그렇다 하더라도 이런 해석적 방법은 매우 복잡하여 올바른 표현을 구하기가 어려울 뿐만 아니라, 종종 표현이 잘못될 가능성이 많아 Markov특성을 이용한 방법이 더 권장된다. 해석적 방법과 Markov특성을 이용한 방법이 모두 또는 부분적으로 가용한 경우에는 서로 보완적으로 도출한 결과를 비교 및 보완을 할 수 있어 정확한 표현을 구하는데 도움이 된다. 이렇게 Markov특성을 이용한 근사 방법은 관리도를 통한 공정탐색(process monitoring)뿐만 아니라 공정수정(process adjustment)에도 유사하게 적용될 수 있다.

문헌에 나타나는 기존의 연구에서는 모의실험을 하여 공정관리의 특성을 규명하는 경우를 많이 볼 수 가 있는데 이는 Markov연쇄를 사용한 방법보다 정도(precision)가 떨어질 뿐만 아니라 경우에 따라서는 많은 시간이 소요되어 다양한 특성연구가 어려워지는 문제점이 있다. 이러한 이유 때문에 될 수 있으면 Markov연쇄를 사용하기를 권장한다.

끝으로, Markov연쇄가 적용되는 경우를 모두 표현하기는 어렵지만 이 논문에서 표현한 내용들을 필요에 따라 수정 적용하면 대부분의 경우에 적용할 수 있음을 밝힌다.

참고문헌

Park, C. (2007). An algorithm for the properties of the integrated process control with bounded adjustments and EWMA monitoring, *International Journal of Production Research*, **45**, 5571–5587.

Park, C., Lee. J. and Kim. Y. (2004). Economic design of a variable sampling rate EWMA chart, *IIE Transactions*, **36**, 387–399.

Park, C. S. and Reynolds, M. R. (2008). Economic design of an integrated process control procedure with repeated adjustments and EWMA monitoring, *Journal of the Korean Statistical Society*, **37**, 155–174.

Reynolds, M. R. (1996). Variable-sampling-interval control charts with sampling at fixed time, *IIE Transactions*, **29**, 497–510.

Reynolds, M. R. and Arnolds, J. C. (2001). EWMA control charts with variable sample sizes and variable sampling intervals, *IIE Transactions*, **33**, 511–530.

Woodall, W. H. and Reynolds, M. R. (1983). A discrete Markov chain representation of the sequential probability ratio test, *Sequential Analysis: Design Methods and Applications*, **2**, 27–44.

Implementation of Markov Chain: Review and New Application

Changsoon Park[1]

[1]Department of Statistics, Chung-Ang University

(Received May 2011; accepted June 2011)

Abstract

Properties of statistical process control procedures may not be derived analytically in many cases; however, the application of a Markov chain can solve such problems. This article shows how to derive the properties of the process control procedures using the generated Markov chains when the control statistic satisfies the Markov property. Markov chain approaches that appear in the literature (such as the statistical design and economic design of the control chart as well as the variable sampling rate design) are reviewed along with the introduction of research results for application to a new control procedure and reset chart. The joint application of a Markov chain approach and analytical solutions (when available) can guarantee the correct derivation of the properties. A Markov chain approach is recommended over simulation studies due to its precise derivation of properties and short calculation times.

Keywords: Process control, transient region, absorbing region, transition probability, average number of visits, reset chart.

This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology(No.2009-0073336).

[1]Professor, Department of Statistics, Chung-Ang University, 221 Heukseok-Dong, Dongjack-Gu, Seoul 156-756, Korea. E-mail: cspark@cau.ac.kr