대한수학교육학회지 <학교수학> 제 13 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.13, No.3 423-446. Sep. 2011

수학적 연결성을 고려한 연속확률분포단원의 지도방안 연구[1)]

황 석 근* · 윤 정 호**

학교수학에서 정적분과 치환적분법의 개념은 확률밀도함수의 도입, 연속확률변수의 기댓값, 정규분포의 표준화와 관련하여 수학적 연결성을 가진다. 그러나 개정교육과정의 '미적분과 통계 기본', '적분과 통계' 과목의 교육과정해설서와 검인정 교과서 및 익힘책에서 적분단원과 통계단원 사이의 수학적 연결성 고려가 어려움을 발견하였다. 본 연구는 학교수학에서 확률밀도함수의 도입, 연속확률변수의 기댓값, 정규분포의 표준화에 대하여 적분단원과의 수학적 연결성을 고려한 지도방안 마련을 목적으로 한다. 세 개념에 대한 학생대상 실태조사와 개정교육과정의 교육과정해설서, 교과서, 익힘책, 그리고 국내·외 통계학(확률론) 도서(국내 13종, 국외 22종)의 내용을 비교하였다. 이를 바탕으로 세 개념에 대한 지도내용을 개발하여 실제 수업에 적용해보았고, 교육과정개정이나 교과서의 내용구성 변화에 대한 시사점을 발견하여 그 결과를 제언하였다.

Ⅰ. 도입

수학과 개정교육과정(교육인적자원부 고시 제 2007-79호)에서 고등학교 인문계열의 변화중 하나는 '미적분과 통계 기본'과목의 신설이다. 인문계열의 적분단원은 제7차교육과정에서는 삭제되었다가 개정교육과정에서 다시 등장하였으므로 교육과정 간 이동으로 간주할 수 있고, 학교에서는 그 변화의 양상에 따른 현장 적용 관련 연구가 필요할 것이다(황석근, 윤정호, 2010).

개정교육과정에서 적분단원의 학습은 통계단원의 교수-학습 전개에 영향을 미칠 수 있다. 즉, 적분단원의 정적분과 치환적분법의 개념을 이용하여 연속확률분포단원의 확률밀도함수의 도입, 연속확률변수의 기댓값, 정규분포의 표준화를 설명할 수 있을 것이다.

이는 두 단원 간 수학적 개념 사이의 연결성을 강조하는 수단으로서, 가능하다면 새로운 개념은 친숙한 수학을 확장하는 방법으로 도입해야 하고(NCTM, 1989), 학생들이 수학적 사고를 연결할 수 있을 때, 학생들의 이해는 더 깊어지고 더 오래 지속됨으로서 수학이라는 학문 내의 연결성에 대해서 연구하고 생각할 필요성이 있다는 것을 부각시킨다(NCTM, 2000).

본 연구는 연속확률분포단원에서 확률밀도함수의 도입, 연속확률변수의 기댓값, 정규분포의 표준화에 대하여 적분단원과의 수학적 연결성을 고려한 지도방안 마련을 목적으로 한다.

지금까지 이루어진 학교수학에서의 통계교육 관련연구와 수학적 연결성 관련연구를 통해 '연속확률분포단원에서 수학적 연결성의 원리를 고

* 경북대학교 (sghwang@knu.ac.kr)
** 매천고등학교 (iwcth@hanmail.net)
1) 본 연구는 2011년 5월 28일 춘천교대에서 열린 제39회 수학교육학 연구논문 발표대회에서 발표한 내용을 수정·보완한 것이다.

려한 수업의 내용은 어떻게 구성되어야 하는가?' 라는 문제를 제기한다. 먼저 적분단원과 연속확률분포단원의 수학적 연결성 정도에 대한 학생들의 실태를 조사한 뒤, 개정교육과정의 '미적분과 통계 기본', '적분과 통계'과목의 교육과정해설서, 교과서 및 익힘책 전부[2](23종 전 46권)와 국내외 통계학(확률론) 도서(국내 13종, 국외 22종, 전 35권)에서 확률밀도함수의 도입, 연속확률변수의 기댓값, 정규분포의 표준화가 어떻게 다루어지는지를 비교해본다. 이를 통해 세 개념에 대한 수학적 연결성을 고려한 지도내용을 개발하여 고등학교 3학년 자연계열 학생들을 대상으로 실제 수업에 적용해봄으로써 교육과정이나 교과서의 구성 변화에 대한 시사점을 발견하고 그 결과를 제언하려고 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 학교수학에서 통계교육과 관련된 연구

학교수학에서의 통계교육과 관련된 선행연구는 통계교육의 방향에 대한 연구, 통계교육의 교수-학습 방법에 대한 연구, 통계적 소양교육의 중요성을 강조한 연구, 교과서 통계단원 내용의 수정에 대한 연구 등으로 크게 나누어볼 수 있다.

Freudenthal(1973)이 통계교육은 실제적인 자료를 활용하여 통계처리하고 분석하는 경험을 통해 이루어져야함을 강조한 이래, 국내･외에서도 Freudenthal의 주장을 지지하는 연구들(Moore, 1992; 이영하, 1992; 우정호, 2000; 홍석강, 마종철, 2003; 김원경, 백경호, 2005; Yee, 2006; Alvarez, Rosales-Moreno, Huete-Morales, 2010)이 이어졌다.

통계교육의 교수-학습 방법에 대한 연구는 크게 실험과 분석에 대한 토론 위주로 이루어져야 함을 강조한 연구(Cobb, 1992; 한진규, 서종진, 2004; Theoret, Luna, 2009)와 컴퓨터(그래픽이나 시뮬레이션)와 테크놀로지를 활용한 교수-학습을 강조한 연구(Thisted, Velleman, 1992; Moore, 1997; Batanero, Tauber, Sanchez, 2004; Garfield, Ben-Zvi, 2004; 김원경, 문소영, 변지영, 2006)로 구분할 수 있다.

학교수학에서 통계적 지식을 강조(NCTM, 1989, 2000)하고 실용적 측면에서 통계교육의 중요성을 강조하는 연구 경향(이수정, 2000; 신현용, 2003; Ben-Zvi, Garfield, 2004; 김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤, 2006)과는 별도로 기존의 수학적 사고와는 다른 능력으로써 통계적 사고를 설명한 연구(Cobb, Moore, 1997; Wild, Pfannkuch, 1999)는 수학우수아들의 통계적 개념 이해가 수학적 능력과는 독립적인 측면이 있으며 수학적 능력에 대한 관점에서 적절한 통계교육이 이루어지기 어려움을 확인한 연구(이경화, 유연주, 홍진곤, 박민선, 박미미, 2010), 수학적 소양과는 구분이 되는 개념으로써 통계적 소양을 기르는 것을 강조하는 연구(NCTM, 2000; Gal, 2004; Carmichael, Callingham, Hay, Watson, 2010)로 전개되고 있다.

이상의 연구들이 주장하는 바는 학교수학에서의 통계교육은 수학에 바탕을 둔 연역적 사고 능력의 신장보다 주로 실생활에서 자료를 수집하여 처리한 뒤 그 결과를 분석하는 능력의 신장을 강조하는 방향으로의 전환임을 알 수 있다.

한편, 교과서 통계단원 내용의 수정에 대한 연구는 주로 확률밀도함수의 도입과 관련하여 상대도수 히스토그램의 점근적인 의미로서 도입하는 방법(김응환, 김승동, 오후진, 1996; 김우철, 김재주, 박병욱, 박성현, 송문섭, 1997)과 밀도곡선[3]

---

2) 고등학교 1학년에서 '수학'과목을 학습한 학생이 선택하는 '수학의 활용'과목도 확률분포 단원에서 정규분포의 내용을 다루지만 학생들이 적분을 학습하지 않은 상태이므로 수학적 연결성을 고려할 수 없어서 본 연구에서는 제외한다.

을 이용한 도입방법(Moore, McCabe, 2000; 박영희, 2002), 그리고 밀도도수$\left(=\frac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}\right)$ 히스토그램을 이용한 도입방법(Wonnacott, Wonnacott, 1982; 유동선, 2000; 이영하, 남주현, 2005; 김원경, 문소영, 변지영, 2006)으로 분류해 볼 수 있다. 개정교육과정의 교과서에는 상대도수 히스토그램이나 밀도곡선을 이용한 과거 접근방법의 오류가 수정되어 주로 밀도도수 히스토그램을 이용한 방법으로 접근하고 있는데, 각 연구들은 해당 교육과정 시기의 교과서 내용에 반영됨으로서 교과서의 수학적 완성도를 높이는 역할을 하였다.

2. 수학적 연결성

수학적 연결성에 대하여 NCTM(1989)은 실생활 또는 수학 이외의 학문에서 제기되는 문제 상황과 수학적 표현과의 연결을 의미하는 '모델링 연결(수학외적 연결)'과 대등한 표현, 그리고 각각에 대응되는 과정 사이의 연결을 의미하는 '수학적 연결(수학내적 연결)[4]'의 두 가지로 나누어 설명하였다. 이러한 수학적 연결성을 지도할 수 있는 주제로 Coxford(1995), Crowley(1995)는 행렬과 변환을 각각 제안하였다.

한편, NCTM(2000)은 학교수학을 위한 원리와 규준집에서 연결성 규준을 학생들이 학교수학의 내용지식을 획득하고 활용하는 방법의 하나로 설명하였다. 즉, 학생들이 수업을 통해 수학적 아이디어가 서로 어떻게 연결되어 있는지 이해하고 각각의 아이디어에 기초하여 일관된 전체를 산출할 수 있도록 하는 수학적 연결을 강조하였다. 그러한 수업을 위한 교사의 역할이 중요하며, 수학 학습에서 연결성을 구축할 수 있는 다양한 수업 사례들을 제시하였다. 이에 Sfard(2003)는 학습자 중심의 교육과정 원리를 벗어나지 않은 범위에서 학생들로 하여금 구조를 이해시키기 위한 수학적 연결성의 의미를 강조하였는데, 그러한 균형 맞추기는 교사의 책임이자 의무라고까지 하였다.

NCTM(2007)은 학생들이 수업시간에 수학적 연결성을 이해할 수 있도록 하는 교사의 수학적-교수법적 지식을 강조한 연구(Ball, Cohen, 1999; Hill, Rowan, Ball, 2005)와 학교수학을 위한 원리와 규준집(NCTM, 2000)에 근거하여 수학수업을 위한 전문성 규준집(NCTM, 1991)을 개정하였다. 교사는 학생들의 수학(내적-외적) 연결성 이해를 촉진할 수 있는 과제와 표현을 제공하는 데에서 나아가 그러한 이해를 확장시키는 수학적 담화(의사소통)에 대한 지식을 학습경험을 통해 습득하고 개선시켜 나감으로서 교사의 자발적이고 지속적인 전문성 신장 노력이 이루어져야 한다고 하였다.

국내에서는 최승현 외(2006)와 윤현진, 박선용, 김서령, 이영하(2009)가 수학과 교육과정(내용) 개선을 위한 관점에서 행렬과 그래프 단원의 연계성 측면을 고려한 교수-학습 계열을 제안하였다. 수학적 연결성을 강조한 연구는 고등학교에서 선형대수 개념지도에 관한 연구(허은숙, 2005), 도형수와 파스칼 삼각형, 피보나치 수열의 성질과 그들 사이의 관계에 대한 연구(손홍찬, 2010)가 있었다.

국내에서 통계단원과 관련된 연구는 한 과목 내에서 단원 간의 연결성에 대한 것이 아니라 주로 학년 간, 학교급간의 연계성을 강조한 지도에 관한 연구(김동화, 조은정, 2000; 신현용, 2003; 한진규, 서종진, 2004; 이영하, 남주현, 2005; 김원경, 문소영, 변지영, 2006) 들이 있었다.

---

3) Moore와 McCabe(2000)는 수평축 또는 그 위에 위치하는 곡선으로서 그 곡선과 수평축 사이의 넓이가 1이며 분포의 대략적인 모양을 나타내는 것을 밀도곡선으로 정의하였다.

4) 본 연구는 학교수학에서 적분단원의 정적분과 치환적분법의 개념이 통계단원의 연속확률분포의 내용 전개에 관련성이 있음을 바탕으로 하므로 수학외적 연결보다 수학내적 연결에 초점을 맞춘다.

이상에서 살펴본 바에 의하면 통계단원의 지도와 관련하여 적분단원과의 수학내적 연결성을 탐색하고, 그 지도내용을 교수-학습 전개에 적용한 선행 연구는 찾아보기 어려웠으므로 본 연구는 의미가 있을 것으로 생각된다.

3. 학교수학에서 연속확률분포단원의 내용 전개

가. 교육과정해설서

제6차교육과정기에도 적분을 이용하여 연속확률변수의 확률밀도함수와 기댓값을 정의하였으나 확률밀도함수의 도입은 공리적 성격이 강했고, 연속확률변수의 기댓값과 정규분포의 표준화는 '선언적 지식 학습[5]'의 성격이 강했다. 즉, 정적분 및 치환적분법의 개념과 확률밀도함수의 도입, 연속확률변수의 기댓값, 정규분포의 표준화는 서로 연결되지 못한 채 분리된 개념으로 존재하여 학생들에게는 서로 다른 두 종류의 절차로만 인식되었을 가능성이 높다. 제7차교육과정 시기에도 자연계열 학생들은 적분단원을 학습하였으나, 연속확률분포단원은 인문계열의 교육과정을 기준으로 하였으므로 적분과의 연결성을 전혀 고려할 수 없었다. 연속확률분포단원에 대한 개정교육과정의 내용은 '연속확률변수의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.', '정규분포의 뜻과 그 성질을 이해한다.'의 두 가지 뿐이다. 개정교육과정의 '미적분과 통계 기본'과목 교육과정해설서(교육과학기술부, 2008)에 제시된 연속확률분포단원의 지도상의 유의점은 다음 세 가지이다.

[1] 연속확률변수 X에 대하여 $\mathrm{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$를 만족하는 함수 $f(x)$를 확률밀도함수 $f(x)$로 정의한다(교육과정해설서에는 $\mathrm{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$로 표현되어 있다).

[2] 확률밀도함수 $f(x)$가 확률 그 자체를 의미하는 것이 아니다.

[3] 연속확률분포에서 $\mathrm{P}(X=a)=0$이고, 이산확률변수의 경우와는 달리 연속확률변수에서는 $\mathrm{P}(a \le X \le b) = \mathrm{P}(a < X \le b) = \mathrm{P}(a \le X < b) = \mathrm{P}(a < X < b)$가 된다.

[1]의 내용은 분포함수 $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$를 이용하여 연속확률변수의 확률밀도함수를 정의하는 것인데, 이는 '고급수학'(서울대학교 국정도서 편찬위원회, (주)지학사, 2005)에서 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$를 정의하는 방법과 일치한다. 이 내용은 이상적분의 정의를 필요로 하며 일반계고등학교 교육과정의 수준도 넘어서므로 '적분과 통계'과목의 지도상의 유의점[6]과 비교하였을 때 재고의 여지가 있다.

[2]의 내용은 확률밀도함수 $f(x)$가 확률 그 자체를 의미하는 것이 아님을 쉽게 알 수 있는 교수-학습 방법이 필요함을 의미한다.

[3]의 내용은 네 확률 $\mathrm{P}(a \le X \le b), \mathrm{P}(a < X \le b)$, $\mathrm{P}(a \le X < b)$, $\mathrm{P}(a < X < b)$의 값이 서로 같음을 $\mathrm{P}(X=a) = \int_{a}^{a} f(x)dx = 0$을 이용하여 지도하되, 반열린구간 또는 열린구간에서 정적분을 이용하여 넓이를 구하는 과정과 연결되어서는 안 될 것이다.

나. 교과서와 익힘책별 내용 비교

개정교육과정의 '미적분과 통계 기본'과목 교

5) Smith, Ragan(1999)에 의하면 '선언적 지식 학습'이란 맹목적으로 암기하는 것, 재미없는 것, 기계적인 학습으로 여겨지는 것을 의미한다(*Instructional Design(2nd Ed.)*, Wiley).

6) '적분과 통계'과목의 연속확률분포 단원에 대한 교육과정해설서의 내용은 [1]이 '연속확률변수 X에 대하여 $\mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$를 만족하는 함수 $f(x)$를 확률밀도함수 $f(x)$로 정의한다.'이고, [2], [3]의 내용은 각각 같다. 앞으로 교육과정해설서의 내용은 '미적분과 통계 기본'과목에 대하여 논의하기로 한다.

과서와 익힘책(각 13종), '적분과 통계'과목 교과서와 익힘책(각 10종)의 연속확률분포단원에 대하여 [1]은 단 한 종의 교과서(성지출판(주), 계승혁 외 5인)에서만 다루며, [2]도 단 한 종의 교과서((주)지학사, 이강섭 외 3인)에서만 다루고, [3]은 모든 교과서에서 다루고 있다. 교육과정해설서와 교과서 및 익힘책의 내용상 불일치는 교육과정해설서의 집필시기가 교육과정이 고시된 이후이며, 교과서 및 익힘책이 집필되는 시기와 비슷한데서 기인한 것으로 생각된다. 각 교과서 및 익힘책 별로 연속확률변수의 확률밀도함수를 도입하는 방법은 크게 다음의 두 가지로 나누어진다.

① '미적분과 통계 기본' 과목 7종[7]과 '적분과 통계' 과목 3종[8]의 교과서 및 익힘책에서 다루는 방법으로 그 절차는 다음과 같다.

i) 균등분포 상황에서 연속확률변수 X가 특정구간에 속할 확률은 어떤 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이와 같음을 보이고, 정적분을 이용하여 연속확률변수 X의 확률을 정의한다.

ii) 확률밀도함수 $f(x)$의 세 가지 성질[9]을 공리적으로 도입한다.

② '미적분과 통계 기본' 과목 6종[10]과 '적분과 통계' 과목 7종[11]의 교과서 및 익힘책에서 다루는 방법으로 그 절차는 다음과 같다.

i) 어떤 구간에서 연속적인 값을 가지는 확률변수 X에 대하여 $\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$의 분포를 히스토그램으로 나타낸 뒤 도수분포다각형을 그린다.

ii) 자료의 개수를 더 늘리고 계급의 크기를 더 작게 하면 위 i)의 도수분포다각형이 종 모양의 매끄러운 곡선에 가까워진다. 이 곡선은 항상 x축 위에 있고, 주어진 구간에서 이 곡선의 아랫부분과 x축 사이의 넓이는 1이 된다.

iii) 위 ii)의 곡선을 나타내는 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라 하고, 주어진 구간에 대한 연속확률변수 X의 확률을 그 구간에서 $f(x)$의 정적분으로 나타낸다.

iv) 확률밀도함수 $f(x)$의 세 가지 성질을 제시한다.

①의 절차는 내용 전개가 간단하다는 장점은 있지만, 히스토그램, 도수분포다각형, 정적분 개념과의 수학적 연결성을 고려하기가 어려우며, 확률밀도함수와 그 성질을 선언하는 성격이 강하다. 뿐만 아니라, 박영희(2002)가 제기한 것처럼 균등분포와 같은 아주 단순한 상황에서 성립한 사실이 비균등한 분포에서도 성립한다고 유도하는 데에는 비약이 있다.

②의 절차는 내용 전개 과정이 비교적 길지만 확률밀도함수의 그래프에 대하여 학생들의 직관적인 접근이 가능하고 히스토그램, 도수분포다각형, 정적분의 개념을 이용함으로서 수학적 연결성을 고려할 수 있다. 한편으로는 $\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$를

7) 더 텍스트(윤재한외 14인), (주)교학사(황석근외 12인), (주)박영사(우무하외 5인), (주)고려출판(이만근외 3인), 두산동아(주)(우정호외 7인), 법문사(이동원외 6인), 좋은책신사고(황선욱외 12인).

8) 더 텍스트(윤재한외 23인), (주)중앙교육진흥연구소(최봉대외 6인), 좋은책신사고(황선욱외 12인).

9) 구간 $[a, b]$의 모든 실수 값을 취하는 연속확률변수 X에 대하여 구간 $[a, b]$를 정의역으로 하는 어떤 함수 $f(x)$가 세 조건 ❶ $f(x) \ge 0 \ \ (a \le x \le b)$, ❷ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 1$, ❸ $\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx \ \ (a \le \alpha \le \beta \le b)$를 만족할 때, 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다.

10) 더 텍스트(김해경외 8인), (주)미래엔컬처그룹(유희찬외 12인), (주)지학사(이강섭외 3인), (주)금성출판사(양승갑외 7인), 천재교육(이준열외 9인), 천재교육(최용준외 9인).

11) (주)미래엔컬처그룹(유희찬외 12인), (주)교학사(김수환외 13인), (주)지학사(이강섭외 3인), 천재교육(이준열외 9인), 천재교육(최용준외 9인), 성지출판(주)(계승혁외 5인), 두산동아(주)(우정호외 7인).

생각함으로써 히스토그램의 넓이 또는 도수분포 다각형 내부의 넓이를 1로 만들 수 있는 장점이 있다. 반면에 도수분포다각형의 넓이가 1이라고 해서 확률밀도함수 $f(x)$가 주어진 구간에서의 정적분 값으로 1을 가지는 것은 아니므로 그 부분에 대한 수학적 엄밀성이 요구된다. 이 상황에서 필요한 것이 '적분의 평균값 정리'이다. 즉, 구간 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, 3, \dots, n)$에 대하여 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=x_{i-1}$, $x=x_i$로 둘러싸인 도형의 넓이가 밑변의 길이는 (x_i-x_{i-1})이고 높이가 $f(t_i)$인 직사각형의 넓이와 같게 되는 t_i가 구간 (x_{i-1}, x_i)에 적어도 하나 존재함을 이용하면 된다. 이렇게 확률밀도함수 $f(x)$를 도입하면 확률밀도함수가 확률 그 자체를 의미하지 않음을 자연스럽게 보여줄 수 있고, 연속확률변수의 기댓값을 정의할 때에도 정적분과 무한급수의 관계를 연결시킬 수 있다.

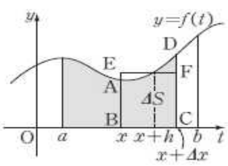
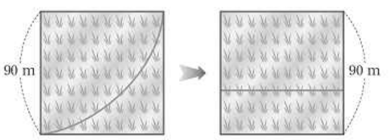
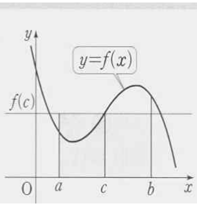
적분의 평균값 정리는 개정교육과정의 범위를 넘어서지만 다음 <표 Ⅱ-1>과 같이 일부 교과서와 익힘책에서는 이미 사용되고 있다.

한편, '미적분과 통계 기본', '적분과 통계'과목의 모든 교과서와 익힘책은 연속확률변수 X의 기댓값을 $E(X)=\int_a^b xf(x)dx$로 별다른 설명 없이 선언적으로 정의하였고, 치환적분법을 이용하여 정규분포의 표준화를 설명한 교과서는 '적분과 통계'과목에서 단 한 종(성지출판(주), 계승혁 외 5인) 뿐 이었다.

4. 국내·외 통계학(확률론) 도서의 내용 비교

연구자는 연속확률분포를 다루는 국내 13종,

<표 Ⅱ-1> 개정교육과정의 교과서와 익힘책에 사용된 적분의 평균값 정리의 예

이다. 여기서 x의 증분 Δx에 대한 $S(x)$의 증분을 ΔS라고 하면 오른쪽 그림에서 ΔS는 도형 ABCD의 넓이이다. 도형 ABCD와 넓이가 같도록 직사각형 EBCF를 만들면 변 EF는 곡선과 만난다. 	미적분과 통계 기본(교과서p.100) 적분과 통계(교과서p.38) ((주)지학사, 이강섭외 3인)
갑, 을이 소유한 농지가 [그림 1]과 같이 한 변의 길이가 90 m 인 정사각형 모양이고, 그 내부는 포물선을 경계로 나누어져 있다. 어느 날 집중 호우로 농지의 경계가 없어지는 상황이 발생하여 두 사람은 [그림 2]와 같이 원래 자신의 농지 넓이가 변하지 않도록 반듯한 직선을 경계로 농지를 나누려고 한다.  [그림 1] [그림 2] 위에서 농지를 나눌 때, 경계선을 어디에 만들어야 하는지 이야기하여 보자. (단, 경계의 넓이는 계산하지 않는다.)	미적분과 통계 기본(익힘책p.123) (더텍스트, 윤재한 외 14인)
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고, 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 등식 $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$ ……… ① 를 만족하는 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 	적분과 통계(익힘책p.33) ((주)중앙교육진흥연구소, 최봉대 외 6인)

국외 22종의 통계학(확률론) 도서에서 첫째, 확률밀도함수의 도입 방법, 둘째, 교육과정해설서의 지도상의 유의점 [1], [2], [3] 관련 내용, 셋째, 치환적분법을 이용한 정규분포의 표준화 설명을 중심으로 그 내용을 비교해 보았다.

확률밀도함수의 도입과 관련하여 5종12)의 도서내용이 앞의 ①의 절차와 동일하였고, 15종13)의 도서내용이 앞의 ②의 절차와 동일하였다. 한편 ①과 ②의 절차가 모두 존재하는 도서는 2종(Freund, Perles, 2004; 여인권, 송문섭, 허문열, 2009)이었다.

9종14)의 도서에서는 ①과 ②의 절차와는 달리 다음의 ③과 같이 적분의 평균값 정리를 이용하여 설명하는 경우가 있는 반면에, 연속확률변수나 확률밀도함수에 대한 설명 없이 바로 정규분포에 대한 정의로 넘어가는 경우도 4종15)의 도서에서 발견되었다.

③ 적분의 평균값 정리를 연속확률변수의 확률 정의에 이용하는 경우와 연속확률변수의 기댓값 정의에 이용하는 두 가지 경우로 구분하여 정리할 수 있다.

i) 확률밀도함수가 $f(x)$인 연속확률분포에 대하여, δ의 값이 아주 작을 때,

$$\mathrm{P}(x \le X \le x+\delta) = \int_x^{x+\delta} f(t)dt \approx f(x)\cdot\delta$$

가 성립한다(Mood, Graybill, Duane, 1974; Bain, Engelhardt, 2000; Bertsekas, Tsitsiklis, 2002; 박진호, 2005; 김우철, 김재주, 박병욱, 박성현, 송문섭, 2006).

ii) 구간 $[a, b]$에서 정의된 연속확률변수 X에 대하여 구간 $[x_{i-1}, x_i]$의 길이가 작으면 작을수록 $\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{P}(x_{i-1} \le X \le x_i)$ (단, $a \le x_{i-1} \le X \le x_i \le b$)의 값은 연속확률변수 X의 기댓값에 가까워질 것이므로 다음과 같이 나타내는 것이 바람직할 것이다.

$$\mathrm{E}(X) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{P}(x_{i-1} \le X \le x_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b xf(x)dx$$

(Hoel, 1984; Freund, Miller, Miller, 2004; Ross, 2008; 이태극, 2008)

한편, Ghahramani(2000)는 구간 $[a, b]$의 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$이고, $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$, $\cdots$, $x_n = a + n\Delta x = b$일 때, 적분의 평균값 정리를 이용하여 X의 확률은 $\mathrm{P}(x_{i-1} < X \le x_i) = f(t_i)\Delta x$ (단, $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$)로, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는

$$\mathrm{E}(X) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} t_i \mathrm{P}(x_{i-1} \le X \le x_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} t_i f(t_i)\Delta x = \int_a^b xf(x)dx$$

로 정의하였다.

다음 <표 Ⅱ-2>는 교육과정해설서의 지도상의 유의점 [1], [2], [3] 관련 내용이 있는 도서와 치환적분법을 이용하여 정규분포의 표준화를 설명한 도서를 각각 분류한 것이다.16)

<표 Ⅱ-2>에서 [1]과 [2]의 내용이 비교적 많지 않은 이유는 국내·외 통계학(확률론) 도서에서

12) Hogg, McKean, Craig(2005), 김홍준, 김진수, 전철호(2008), 박정식, 윤영선, 박래수(2010), 허문열, 송문섭(2011), 홍찬식(2011).

13) Weiss(1989), Jarrell(1994), 유동선(2000), Freund, Miller, Miller(2004), Hodges Jr., Lehmann(2005), Hogg, Tanis(2005), Johnson & Bhattacharyya(2006), Moore, Notz(2006), Weiers(2006), 김응환, 이석훈(2007), Brase, Brase(2008), McClave, Sincich(2009), Sullivan(2010), Triola(2010), 이원준, 김태웅(2010).

14) Mood, Graybill, Duane(1974), Hoel(1984), Bain, Engelhardt(2000), Ghahramani(2000), Bertsekas & Tsitsiklis(2002), 박진호(2005), 김우철, 김재주, 박병욱, 박성현, 송문섭(2006), 이태극(2008), Ross(2008).

15) Kim Jai Heui(2007), Roussas(2007), Wackerly, Mendenhall, Scheaffer(2008), 신태곤, 최성철(2009).

16) Freund, Perles(2004), Hodges Jr., Lehmann(2005), Moore, Notz(2006), Weiers(2006), 신태곤, 최성철(2009), 박정식, 윤영선, 박래수(2010)의 도서는 [1], [2], [3], 치환적분법을 이용한 정규분포의 표준화 설명 내용이 모두 없었다.

<표 Ⅱ-2> 지도상의 유의점 [1], [2], [3] 관련 내용과 치환적분법 이용에 따른 분류

[1] 12종(41%)	Mood, Graybill, Duane(1974), Bain, Engelhardt(2000), Ghahramani(2000), Bertsekas, Tsitsiklis (2002), Freund, Miller, Miller(2004), Weiss(2004), 박진호(2005), Hogg, McKean, Craig(2005), Hogg, Tanis(2005), McClave, Sincich(2005), 김홍준, 김진수, 전철호(2008), 이태극(2008), Ross (2008), 이원준, 김태웅(2010), 김응환, 이석훈(2008), 여인권, 송문섭, 허문열(2009), Triola (2010), 허문열, 송문섭(2011), 홍찬식(2011), Brase, Brase(2011).
[2] 10종(34%)	Jarrell(1994), Bain, Engelhardt(2000), Ghahramani(2000), Freund, Miller, Miller(2004), Weiss (2004), 박진호(2005), 김우철, 김재주, 박병욱, 박성현, 송문섭(2006), Johnson, Bhattacharyya (2006), Triola(2010), 홍찬식(2011).
[3] 17종(59%)	Jarrell(1994), Bain, Engelhardt(2000), Ghahramani(2000), Bertsekas, Tsitsiklis(2002), Freund, Miller, Miller(2004), Weiss(2004), 박진호(2005), Hogg, McKean, Craig(2005), Hogg, Tanis(2005), 김우철, 김재주, 박병욱, 박성현, 송문섭(2006), Johnson, Bhattacharyya(2006), Ross(2008), 여인권, 송문섭, 허문열(2009), 이원준, 김태웅(2010), Sullivan(2010), Triola(2010), 홍찬식(2011).
치환적분 14종(48%)	Hoel(1984), Bain, Engelhardt(2000), Ghahramani(2000), Bertsekas, Tsitsiklis(2002), Freund, Miller, Miller(2004), Roussas(2007), Kim(2007), 김홍준, 김진수, 전철호(2008), 이태극(2008), Ross(2008), Wackerly, Mendenhall, Scheaffer(2008), 여인권, 송문섭, 허문열(2009), Triola(2010), 허문열, 송문섭(2011).

밀도도수 히스토그램의 점근적인 의미를 이용하여 확률밀도함수를 도입하기 때문이다. 한편, [3]의 내용은 비교적 많았는데, 학교수학에서 정규분포의 표준화를 선언적으로 정의하거나 변수 변환으로 설명하는 현재의 내용 대신 치환적분법을 이용하여 정규분포를 표준정규분포로 바꾸는 내용으로 교체하는 것에 대하여 긍정적으로 고려할 수 있을 것이다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 검사지와 지도내용 개발

'적분과 통계'과목의 교육과정을 이수한 고등학교 3학년 자연계열 학생들이 정적분과 치환적분법의 개념을 확률밀도함수의 도입, 연속확률변수의 기댓값, 정규분포의 표준화에 어느 정도 연결시키고 있는가를 알아보기 위하여 다음의 7개 문항으로 구성된 지필형 검사지를 개발[17]하였다.

(1) 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 정의를 쓰시오.

(2) 극한 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^5}$의 값을 구하시오.

(3) 구간 $[a, b]$에 속하는 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 뜻을 쓰시오.

(4) 연속확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라고 할 때, $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$가 의미하는 바에 대하여 자신의 생각을 쓰시오.

(5) 구간 $[a, b]$에 속하는 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X의 확률밀도함수를 $y=f(x)$라고 할 때, $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이 됨을 설명하시오.

(6) 연속확률분포에서 $\mathrm{P}(a \le X \le b)=\mathrm{P}(a < X \le b)$ $=\mathrm{P}(a \le X < b)=\mathrm{P}(a < X < b)$가 성립하는 이유를 쓰시오.

(7) 치환적분법을 이용하여 $\int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$임을 보이시오.

17) 최초 개발된 검사지의 문항에 대하여 교수 2명(이학 박사 1명, 이학 및 수학교육학 박사 1명), 대학 강사 1명(이학 박사), 교사 8명(수학교육학 박사과정 6명, 교육대학원 석사과정 2명, 일반계고등학교 교육경력 평균 18년)으로 구성된 전문가 그룹의 문두 수정 및 내용타당도 검토과정을 거쳤다.

검사문항(1)은 정적분의 정의에 대한 이해정도를 알아보기 위한 문항으로서 Resslan과 Tall(2002), 신보미(2009)가 이용한 문항을 발췌하였고, 검사문항(2)는 자연수의 거듭제곱의 합 공식[18]을 이용하지 않고 정적분의 정의를 이용하여 무한급수의 합을 구할 수 있는 문항 중 가장 간단한 것으로서 정적분과 무한급수의 관계에 대한 학생들의 이해정도를 알아보기 위한 문항이었다. 검사문항 (3), (4), (5)는 [1], [2]가, 검사문항 (6)은 [3]이 학교수학에 어느 정도 반영되고 있는가를 알아보기 위한 것으로서 확률밀도함수의 도입과 관련하여 시사점을 얻기 위함이었다. 검사문항 (7)은 정규분포의 표준화와 관련하여 부정적분의 치환적분법을 이용하는 것으로 간단히 하였다.

위 검사문항 중 연속확률변수의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 직접 묻는 문항은 없는데, 검사문항(5)에서 $\int_a^b f(x)dx=1$임을 보이는 과정이 $\mathrm{E}(X)=\int_a^b xf(x)dx$로 정의하는 것에 대하여 정적분 개념과의 연결에 어느 정도 맥락이 통하는 부분이 있는 것으로 보고 간접적으로 살펴보기로 하였다.

연구대상 학생들에게 검사지를 적용하여 해당 단원에 대한 연결성 관련 실태를 파악하였고, 교육과정해설서, 교과서 및 익힘책 그리고 국내·외 통계학(확률론) 도서의 내용 비교를 바탕으로 전문가 그룹과의 논의[19]를 거쳐 수학적 연결성을 고려한 지도내용(<부록 1>)을 개발하였다.

2. 연구대상과 자료 수집

본 연구의 대상 학생은 2011학년도 ○○광역시교육청 토요논술학교 고등학교 3학년 자연계열 8개 학급의 186명 중 검사지에 성실하게 응답하고 수업과 수업 후 토론에 참석한 134명이다. 토요논술학교 수강 학생들은 ○○광역시 일반계 고등학교 전체 신청자 중에서 각 지역별로 골고루 선발되었으며, 대학진학 시 논술고사나 구술·심층면접고사 대비가 수강목적이므로 학생들의 성적은 중상위권[20] 이내였다. 연구대상 학생들은 이미 학교에서 '적분과 통계'과목의 학습을 마친 것으로 확인되었으며, 검사지 적용은 2011년 2월 19일 8개 학급에 동시에 20분간 실시하였다.

검사지 적용 후 연구자가 교과서 및 익힘책, 국내·외 통계학(확률론) 도서의 내용을 검토하여 개발한 <부록1>을 적용한 수업은 2011년 3월 12일부터 4월 16일까지 6주간 매주 토요일마다 한 학급 또는 두 학급에 실시되었다. 각 학급별로 <부록1>을 적용한 50분간의 수업에 이어 70분간의 수업 내용에 대한 토론을 실시하였다.[21]

---

18) $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

19) 최초 개발된 지도내용에 대한 논의과정에서 '구간 $[a, b]$의 모든 실수 값을 가지는 확률변수 X의 확률밀도함수를 $y=f(x)$라고 할 때, $y=f(x)$의 그래프와 x축사이의 넓이가 1이 된다.'를 적분의 평균값 정리를 이용하여 설명하는 방법이 개정교육과정의 범위를 넘어서는 문제가 제기되었고, 이에 연구자는 중간값 정리를 이용하는 방법으로 수정하였다.

20) 연구대상 학생들의 2011년 3월 10일 서울시교육청 주관 전국연합학력평가 수리가형 응시 결과는 다음과 같은데, 전체 9등급 중에서 연구대상 학생들은 모두 4등급 이내에 속하였다.

등급 / 성별	1등급	2등급	3등급	4등급	합계
남	46	27	24	8	105
여	3	7	11	8	29
합계(%)	49(37%)	34(25%)	35(26%)	16(12%)	134(100%)

3. 연구의 제한점

본 연구는 개정교육과정의 ‘미적분과 통계 기본’, ‘적분과 통계’과목의 검인정 교과서 및 익힘책은 전수조사를 실시하였으나 다소 제한된 수의 국내·외 통계학(확률론) 도서 내용을 비교하였고, 2011학년도 ○○광역시교육청 토요논술학교 참여 학생들을 연구대상으로 하였으므로 해당 단원에 대하여 전체 고등학교 3학년 학생의 수학적 연결성 결과로 일반화하는 데에는 제한점이 있다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 정적분과 무한급수에 대한 학생들의 이해

연구대상 학생들의 정적분 개념에 대한 이해 정도를 측정하여 확률밀도함수의 도입과의 연결 가능성을 알아보기 위한 검사문항(1)에 대한 응답유형 및 등급별 응답 수는 <표 Ⅳ-1>과 같다.

정적분의 정의를 식 대신 문장으로 기술한 경우도 정답으로 간주하였는데 정답 수와 오답 수가 각각 67(50%)로 서로 같았다. 오답의 경우, 수식 작성에 오류가 있었던 21명(16%)을 제외하고 가장 많은 16명(12%)의 학생들이 정적분을 $x=a$, $x=b$, x축, $y=f(x)$의 그래프로 이루어진 도형의 넓이라고 하였다. 또, 10명(7%)의 학생들이 구분구적법과 관련된 개념(직사각형 n개의 넓이의 합, 불가분량, 무한소 해석)으로, 5명의 학생들이 미적분학의 기본정리로, 3명은 범위가 정해진 적분으로, 1명이 미분법의 역연산으로 보고 있었으며 무응답의 경우도 11명(8%)이나 되었다.

이 결과를 통해 개정교육과정에서 정적분의 정의가 리만합의 극한으로 도입되고 있지만 연

<표 Ⅳ-1> 검사문항(1)에 대한 응답유형 및 등급별 응답 수

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">응답 유형</th><th colspan="4">등급별 응답 수</th><th rowspan="2">합계</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>정답</td><td colspan="2">$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$</td><td>22</td><td>19</td><td>18</td><td>8</td><td>67</td></tr>
<tr><td rowspan="10">오답</td><td colspan="2">정의에서 수식오류</td><td>11</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td><td>21</td></tr>
<tr><td rowspan="3">구분구적법 관련 개념</td><td>직사각형 n개의 넓이의 합</td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>불가분량(직사각형 n개의 넓이의 합의 극한)</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>무한소 해석(선분들의 무한합), 함수 값의 합의 극한</td><td>2</td><td></td><td></td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">정적분의 기본정리 $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$를 기술</td><td>2</td><td></td><td></td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=a$, $x=b$, x축, $y=f(x)$의 그래프로 이루어진 도형의 넓이</td><td>5</td><td>7</td><td>4</td><td></td><td>16</td></tr>
<tr><td rowspan="2">기타</td><td>범위가 정해진 적분</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>미분법의 역연산</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">무응답</td><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>11</td></tr>
<tr><td colspan="2">합계</td><td>27</td><td>15</td><td>17</td><td>8</td><td>67</td></tr>
</table>

21) 토요논술학교 수학과 담당 강사들(전체 5명)에게 본 연구에 대하여 간단히 소개한 후, 참여를 원하는 교사(3명-전원 교육대학원 석사과정 수료, 일반계고등학교 교육경력 평균 10년)는 8회에 걸친 수업 참관과 수업 후 학생과의 토론에 동참하였다.

<표 Ⅳ-2> 검사문항 (2)에 대한 응답유형 및 등급별 응답 수

응답 유형		등급별 응답 수				합계
		1	2	3	4	
정답	$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^5}=\int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{5}$	48	34	30	11	123
오답	$\sum_{k=1}^{n}k^4$의 식을 구하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k^4$의 값을 구하려고 한다.(실패)	1			2	3
	$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2} \to \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{1}{n^2}\Rightarrow\frac{1}{2}$ $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \to \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\Rightarrow\frac{1}{3}$ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \to \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}\Rightarrow\frac{1}{4},\ \therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^5}=\frac{1}{5}$			3		3
	$\frac{\text{상수}}{\infty}$꼴로 생각하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k^4=0$			1	1	2
	무응답			1	2	3
	합계	1	0	5	5	11

구대상 학생들은 상위권 학생들조차도 정적분의 정의를 나타내는 관계식을 부정확하게 기술하거나 응답조차 못하였다. 또, 일부 학생들(16명, 12%)은 정적분의 정의를 도형의 넓이로 간주하고 있음을 알 수 있었다. 이는 신보미(2009)의 연구 결과를 재확인할 수 있는 것으로서, 연구대상 학생들의 상당수가 정적분의 정의에 대해 오개념을 가지고 있는 것으로 볼 수 있다.

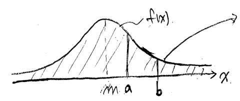
정적분과 무한급수의 관계에 대한 학생들의 이해정도를 알아보기 위한 검사문항 (2)에 대한 응답유형 및 등급별 응답수는 <표 Ⅳ-2>와 같다. 정적분과 무한급수의 관계는 제7차 교육과정의 교과서에도 제시되어 있었고, 또 검사문항이 간단하므로 오답 수가 11(9%)에 불과했다. 검사문항 (1)의 응답결과와 비교해보면 학생들이 정적분의 정의에 대한 이해보다 정적분을 이용한 무한급수의 계산에 치우친 것으로 볼 수 있다. 이는 신보미(2009)가 학생들이 정적분의 정의를 곡선도형의 넓이, 수열의 극한, 부정적분의 정의보다 무한급수와의 관계에 더 우선시하는, 이해수준의 적절성에 대해 제기한 문제를 재확인할 수 있었다. 연구대상 학생들 중 소수(8명, 6%)이긴 하지만 중상위 집단이 무한급수 문제를 해결하는데 정적분의 개념을 정확히 이용하지 못할 뿐더러 무한급수의 정의에 대해서도 오개념을 가지고 있음도 알 수 있었다.

2. 확률밀도함수에 대한 학생들의 이해

검사문항 (3), (4), (5), (6)은 확률밀도함수의 도입에 대한 시사점을 얻기 위한 것이었는데 [1], [2]와 관련된 검사문항 (3), (4), (5)와, [3]과 관련된 검사문항 (6)에 대한 응답유형 및 등급별 응답 수는 각각 <표 Ⅳ-3>, <표 Ⅳ-4>, <표 Ⅳ-5>, <표 Ⅳ-6>과 같다.

확률밀도함수의 정의를 쓰도록 한 검사문항 (3)에 대하여 정확히 기술한 학생은 23명(17%)에 불과하였고, 26명(19%)의 학생이 확률밀도함수 $f(x)$가 확률 그 자체를 의미하는 것으로 알고 있었으며, 3명(2%)의 학생은 확률의 기본성질을 기술하였다. 한편, 46명(34%)의 학생이 확률밀도함수의 정의를 불충분하게 기술하였으며, 31명(23%)의 학생이 응답하지 못하였다. 오답자(무응답 포함) 111명(83%)은 각 등급별로 비교

<표 Ⅳ-3> 검사문항(3)에 대한 응답유형 및 등급별 응답 수

응답 유형		등급별 응답 수 1	2	3	4	합계
정답	구간 $[a, b]$의 모든 실수 값을 가지는 확률변수 X에 대하여 다음을 만족하는 함수 $f(x)$(단, $a \le \alpha \le \beta \le b$) ❶ $f(x) \ge 0$, ❷ $\int_a^b f(x)dx = 1$, ❸ $\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$	13	1	7	2	23
오답	함숫값 $f(a)$가 $X = a$에서의 확률인 함수 $f(x)$	9	10	4	3	26
	❶, ❷, ❸ 세 가지 조건 중 하나 또는 두 가지만 기술	17	10	16	3	46
	확률의 기본성질 $0 \le f(x) \le 1$ 를 기술	1	1	1		3
	이산확률분포표를 이용한 설명: X | x_1 | x_2 | … | x_n | 합계 / P | p_1 | p_2 | … | p_n | 1 확률변수 X에 따라서 나오는 확률 p_k ∴ $f(x_k) = p_k$가 되는 꼴,	2				2
	정규분포를 이용한 설명:  → 그래프 아랫부분의 넓이는 1이다 ∘ f(x)와 x=a, x=b로 둘러싸인 부분의 넓이 = S < 1 ∘ 평균값 m을 기준으로 좌·우 넓이가 0.5로 같다.	1			1	2
	주어진 구간에서 그래프와 x축사이의 넓이의 함수		1			1
	무응답	6	11	7	7	31
	합계	36	33	28	14	111

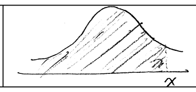
적 골고루 분포되어있었는데, 학생들이 확률밀도함수를 직관적으로 받아들이기가 쉽지 않으며, 선언적으로 정의하는 현재의 도입방법도 학생들의 이해에 어려움을 주고 있음을 알 수 있다. 특히, 확률밀도함수 $f(x)$가 확률 그 자체를 의미하는 것으로 잘못 알고 있는 학생 26명 중에서 1, 2등급의 학생이 19명이나 되어 확률밀도함수를 도입하는 지도방법에도 반성적인 검토가 요구된다고 할 수 있다.

교육과정해설서에서 확률밀도함수를 도입하는 방법으로 제시한 분포함수는 비록 일반계고등학교 학생들이 배우지 않은 내용이지만, 연구자는 검사문항(4)를 통해 분포함수에 대한 학생들의 직관적 이해를 알아보려고 하였다.

<표 Ⅳ-4>에 나타난 것처럼 절반이 넘는 수의 학생들(72명, 54%)이 교육과정상의 용어(기호)가 아닌 분포함수에 대하여 직관적으로 $\mathrm{P}(X \le x)$를 의미하는 것으로 인식하고 있었으며, 연속확률변수라는 조건이 있음에도 불구하고 14명(11%)의 학생들은 정적분으로, 1명의 학생이 이상적분으로 인식하였다. 일부 소수 학생들의 오답에서 연속확률분포의 정의를 정확히 이해하지 못한 경우가 발견되어 연속확률분포에 대한 오개념이 있음을 알 수 있었고, 응답하지 않은 36명(27%)의 학생들은 모두 처음 보는 기호라서 응답자체를 고려하지 않았다고 하였다.

구간 $[a, b]$에서 확률밀도함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1인 것과 정적분의 정의와의 연결 가능성을 탐색하기 위한 검사문항(5)에서 <표 Ⅳ-5>에 나타난 것처럼 많은 수(94명, 70%)의 학생들이 구간 $[a, b]$에서 확률이 1임에 대해서는 알고 있었으나 27명(20%)의 학생들이 응답하지 않았다. 이는 전체구간 $[a, b]$에서의 확률이 1이라는 확률의 기본성질에 대해서도 이해가 충분하지 않은 학생들이 존재함을 알 수 있었고, 검사문항(4)의 결과와도 일맥상통한다. 이는 $\int_a^b f(x)dx = 1$임을 정적분과 무한급수의 관계를 이용하여 보여주면 학생들의 이해를 촉진할 수

<표 Ⅳ-4> 검사문항(4)에 대한 응답유형 및 등급별 응답 수

응답 유형		등급별 응답 수				합계
		1	2	3	4	
정답	확률변수 X가 x이하일 확률 또는 $\mathrm{P}(X \leq x)$	33	19	16	4	72
오답	$-\infty$부터 x까지 함수 $f(x)$의 정적분, 즉 	4	3	6	1	14
	이상적분 $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{x} f(x)dx$ 으로 정의	1				1
	x 이상의 확률이 일어나지 않을 확률	1				1
	f(x)가 x 이하의 값을 가질 확률	1	1	1		3
	$\mathrm{P}(X = x)$		1			1
	어떤 것이 안 일어날 확률부터 x번만큼 일어날 확률의 합		1	2		3
	x가 일어나지 않을 확률	1				1
	어떤 사건이 최대 x번까지 일어날 확률				1	1
	사건이 일어날 확률이 0.5+x이다				1	1
	무응답	8	9	10	9	36
	합계	16	15	19	12	62

<표 Ⅳ-5> 검사문항(5)에 대한 응답유형 및 등급별 응답 수

응답 유형		등급별 응답 수				합계
		1	2	3	4	
정답	확률의 기본성질에 의하여 구간 $[a, b]$에서의 확률은 1이다.	40	25	19	10	94
오답	확률의 최댓값이 1이다.	1	1	3	1	6
	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \left(\lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} f(x)dx = 1 \right)$이므로 $\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$	1	2			3
	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$이고, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$이므로 $\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$			2		2
	특수한 하나의 예를 들어 설명	1	1			2
	무응답	6	5	11	5	27
	합계	9	9	16	6	40

있을 것으로 생각되고, 통계단원에서 개념과 관련된 교수-학습 전개는 좀 더 수학적인 관점에서 접근할 필요성이 있는 것으로 볼 수 있다.

검사문항(6)에 대하여 <표 Ⅳ-6>에 나타난 것처럼 개정교육과정의 교육과정해설서, 교과서 및 익힘책에 언급되어 있는 대로 정확히 응답(정답 Ⅰ)한 학생은 22명(16%)에 불과했고, 60명(45%)의 학생이 적분단원에서 곡선으로 이루어진 도형의 넓이는 닫힌구간에서 구함을 학습하였음에도 불구하고 선분의 넓이가 0임을 이용하여 반열린구간 또는 열린구간에서 곡선 도형의 넓이를 구하는 것과 관련지어 기술(정답Ⅱ)하였다. 41명(31%)의 학생은 응답조차 하지 못했고, 오답 수가 각 등급별로 골고루 분포되어 있는데, 이 내

<표 Ⅳ-6> 검사문항(6)에 대한 응답유형 및 등급별 응답 수

응답 유형		등급별 응답 수				합계
		1	2	3	4	
정답 Ⅰ	$\mathrm{P}(X=a)=0,\ \mathrm{P}(X=b)=0$이므로 $\mathrm{P}(a \le X \le b)=\mathrm{P}(X=a)+\mathrm{P}(a<X\le b)=\mathrm{P}(a<X\le b)$ $=\mathrm{P}(a\le X<b)+\mathrm{P}(X=b)=\mathrm{P}(a\le X<b)$ $=\mathrm{P}(a<X<b)$	10	6	4	2	22
정답Ⅱ	선분은 넓이가 없으므로 경계선의 포함여부는 상관없다 (무한소 해석).	25	18	11	6	60
오답	확률밀도함수 $f(x)$가 연속함수이다.	3	2	2		7
	(아무 설명 없이) 확률변수에서 수 하나의 포함여부는 확률값에 영향을 주지 않는다.	1	1	1	1	4
	무응답	10	7	17	7	41
	합계	14	10	20	8	52

<표 Ⅳ-7> 검사문항(7)에 대한 응답유형 및 등급별 응답 수

응답 유형		등급별 응답 수				합계
		1	2	3	4	
정답	$z=\dfrac{x-m}{\sigma}$ 이면 $\sigma dz = dx,\ \displaystyle\int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$	47	31	25	11	114
오답	표준화 오류: $z=\dfrac{x-m}{\sigma^2}$ 로 두어 치환적분법 사용				1	1
	무응답	2	3	10	4	19
	합계	2	3	10	5	20

용에 대해서 적분과의 연결성을 신중하게 고려하여 학생들이 충분히 이해할 수 있는 교수-학습 전개가 이루어져야 할 것으로 생각된다.

3. 치환적분법과 정규분포의 표준화 사이의 연결 가능성 탐색

치환적분법과 정규분포의 표준화 사이의 연결 가능성을 탐색하기 위한 검사문항(7)에 대한 응답유형 및 등급별 응답 수는 <표 Ⅳ-7>과 같다. 이 문항에 대하여 114명(85%)의 학생이 정답을 제시함으로써 학교수학에서 치환적분법을 이용하여 정규분포의 표준화를 충분히 설명할 수 있음을 확인하였다. 다만 표준화 오류(1명)의 경우는 학생의 사소한 실수이고, 무응답(19명, 14%)은 앞의 검사문항에 집중하고 난 뒤에 오는 시간 부족으로 생각된다.

4. 개발한 지도내용에 대한 학생과 교사의 반응

본 연구에서 수학적 연결성을 고려하여 개발한 지도내용(<부록 1>)을 실제 수업에 적용한 후 학생과 교사의 반응을 알아보기 위해 연구자는 처음에 논제에 대한 찬성과 반대 중 어느 한 입장을 반드시 취해야 하는 교육토론[22]의 형태를 계획하였으나 찬성 122명, 반대 12명으로 학

22) 이정옥(2008)은 공적 대화를 '토의, 토론, 논쟁'의 세 가지로 분류하였고, 그 중에서 토론을 '자유토론, 교

<표 Ⅳ-8> 수업 후 수업내용에 대한 학생과 교사의 자유토론 내용

구분		토론 내용
학생	긍정	• 막연히 외우지 않아도 되고, 각 내용을 이해할 수 있는 수학 시간이 될 것이다. • 연속확률분포 단원의 내용에 대한 정리가 쉽다. • 정적분과 치환적분법의 내용을 다시 기억해낼 수 있어 좋았다. • 중간값의 정리가 활용되는 것을 통계단원에서 확인할 수 있어 좋았다. • 치환적분법을 이용하여 정규분포와 표준정규분포의 관계를 쉽게 알 수 있었다. • 적분단원과 통계단원이 서로 연결되어 있음을 알게 되어 좋았다. • 수학의 어느 한 단원을 공부할 때 연결되는 다른 단원을 찾아볼 것이다.
	부정	• 적분단원의 내용을 다시 기억해내야 되므로 어렵다. • 그냥 공식으로 외우고 넘어가도 되는 데 공부해야 할 분량이 많게 되었다.
교사	긍정	• 일목요연하고 수학적으로 잘 정리가 된 지도내용이다. • 단순 암기보다 학생들의 사고를 이끌어낼 수 있는 지도내용이다. • 직관뿐만 아니라 수학적 논리에 바탕을 둔 지도가 가능하다. • 학생들에게 수학의 단원들이 서로 연결되어 있음을 보여주는 좋은 예이다. • 현재 자신이 연속확률분포단원의 수업을 전개해나가는 과정을 반성해보게 된다.
	부정	• 분량이 많고, 학급 내에서 다수인 중하위권 학생들에게는 어려울 것이다. • 적분단원의 학습에 결손이 있는 학생의 경우, 내용 이해가 오히려 더 어렵다.

생 수의 차이가 너무 커서 학급별로 자유토론의 형태를 취하였다. 자유토론은 찬-반의 입장 차이보다는 논제에 대한 다양한 관점과 입장을 전제하고, 나중에 입장이 바뀌는 것을 인정하는 방법이다.

학급별로 찬성 측과 반대 측에서 각 1명의 학생을 뽑아 70분간의 토론[23] 내용을 기록하게 하였고, 토론이 끝난 후 기록한 내용을 정리하여 연구자가 참관 교사와 학생들에게 발표하였다.

자유토론에 참가한 학생들과 참관한 교사들의 주요 토론 내용을 정리하면 다음 <표 Ⅳ-8>과 같다.

<표 Ⅳ-8>에서 알 수 있듯이 학생과 교사 모두 본 연구에서 개발한 <부록 1>에 대하여 수학적, 교수-학습 면에서 긍정적인 반응이 지배적이다. 학생은 자신의 수학 학습에 대한 태도변화를 암시하였고, 교사는 연속확률분포단원에 대한 자신의 교수방법을 반성하고 개선시키려 함으로써 전문성 신장 노력과 더불어 정의적 영역에서의 변화도 함께 불러왔음을 알 수 있었다. 따라서 이 내용은 새로운 교육과정에 의한 교과서와 익힘책이 집필될 때 반영을 검토해 보아야 할 것으로 생각된다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구의 목적은 학교수학의 연속확률분포 단원에서 확률밀도함수의 도입과 연속확률변수의 기댓값을 정의하는 데 중간값 정리, 정적분

육토론, 법정토론'의 세 가지로 다시 분류하였다.(토론의 전략, 서울: 문학과 지성사)

23) 수학교육 개혁의 한 방안으로서의 토론에 대하여 NCTM(2000)은 수학교실에서의 토론 공동체(Discourse Community) 발전을, Huffered-Ackles, K., Fuson, K. C. & Sherin, M. G.(2004)는 수학토론 학습 공동체(Math-Talk Learning Community)의 구성을 주장하였다.

의 정의 및 정적분과 무한급수의 관계에 대한 개념을 연결시키고, 정규분포의 표준화를 치환적분법과 연결시키는 지도방안을 마련하는데 있다.

이를 위하여 확률밀도함수의 도입과 연속확률변수의 기댓값, 정규분포의 표준화에 대한 학생들의 이해 정도와 수학적 연결성의 가능성을 탐색할 검사문항을 개발하였다. 개발된 검사지를 고등학교 3학년 자연계열 학생 134명에게 적용한 다음, 개정교육과정의 교육과정해설서, 교과서 및 익힘책, 국내·외 통계학(확률론) 도서의 관련 단원 내용 비교를 바탕으로 정적분 및 치환적분법의 개념과 수학내적 연결성을 가지는 연속확률분포단원의 지도내용(<부록1>)을 개발하였다. <부록1>을 적용한 수업은 8번의 사고실험, 교수실험, 회고분석의 순환과정(Akker, Gravemeijer, McKenney, Nieveen, 2006)을 거쳐 이루어졌고, 수업과 토론에 참여한 학생들과 교사들, 수업을 참관한 교사들의 반응을 중심으로 본 연구에서 얻은 시사점을 기술하면 다음과 같다.

첫째, ‘미적분과 통계 기본’, ‘적분과 통계’과목의 확률밀도함수에 대한 교육과정해설서의 내용이 서로 다르며, 그 내용에 있어 교육과정의 수준을 넘어서는 이상적분의 개념이 사용되고 있는 문제점이 있다. 이미 검사문항(4), (5)에 대한 응답에서 일부 학생들이 이상적분을 이용함을 발견하였는데, 교과서의 정규분포곡선에 대한 설명에서 곡선과 x축 사이의 넓이가 1이라고 하는 설명은 실제로 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$임을 의미하고, 고급수학에도 나오는 내용이므로 교육과정 내에 이상적분의 정의를 둘 필요가 있을 것이다.

둘째, 개정교육과정의 교과서 및 익힘책에서 확률밀도함수의 도입, 연속확률변수의 기댓값, 정규분포의 표준화는 선언적 정의의 형태로 기술되어 있는데, 이는 상당수의 연구대상 학생들이 적분단원과 통계단원의 수학적 연결성을 인식하지 못하고 있는 현상의 한 원인으로 볼 수 있다. 두 단원 간의 수학적 연결성에 기초한 본 연구의 <부록1>을 통해 학생들이 서로 다른 영역의 수학 사이의 연결성을 이해할 수 있을 때 수학을 통합된 전체로 보게 되고, 낱낱이 아닌 수학적 개념의 연결망을 중시하는 수업은 학생들로 하여금 수학적 힘과 아름다움을 음미하고 이해하게 된다(NCTM, 1989). 더불어 수학적 연결성이 갖추어지면 학생들이 선행지식 위에 새로운 이해를 구축할 수 있음(NCTM, 2000)을 확인할 수 있었다.

셋째, 본 연구를 통해 수학적 연결성을 고려한 교수-학습 전개에 대한 관심과 연구가 요구된다. 잘 연계된 개념에 바탕을 둔 사고는 새로운 상황에서 사용될 때 훨씬 쉽게 응용될 수 있으며(Skemp, 1976), 수학에서 학생들이 새로운 지식을 기존의 지식에 의미 있게 연결할 때 기억하거나 적용하는 것이 더 쉽고 더 잘 이해된다(Schoenfeld, 1988). 본 연구에서 연구자는 학생들이 이미 학습한 적분의 개념들을 토대로 통계단원의 새로운 수학 개념을 구성할 때, 두 수학영역 사이의 연결성을 더 깊이 인식하게 됨(NCTM, 2000)을 확인할 수 있었다. 이러한 수학적 연결성을 강조하기 위하여 먼저 교사는 학생들이 이전 단원(과목)에서 배운 수학과 이후 단원(과목)에서 배울 수학을 알아야 한다. 다음으로 수학적 기능과 개념을 개별적인 주제로 지도해서는 안 되며, 가치 있고 연결되며 유용한 경험의 일부분으로 지도할 수 있도록 수업을 계획해야 한다(NCTM, 2000).

넷째, 확률밀도함수의 개념을 묻는 검사문항(3), (4), (6)에 대한 오답 수가 각각 111, 62, 52로 비교적 많은데, 이는 통계적 개념에 대한 학생들의 이해에 어려움이 있는 것으로 보인다. 학교수학의 통계교육에서 수학적 원리는 하나의 수단이 되어야 하며 내용이 형식을 지배해

야 하고(Kempthome, 1980), 학생들이 통계적 절차가 마술처럼 기초적인 수학적 지식 없이 이루어지는 것으로 여기도록 해서는 안 된다(Moore, 1997; Wild, Pfannkuch, 1999). 즉, 학교수학에서 개념 지도와 관련된 경우는 좀 더 수학적인 접근방법이 필요하다는 점이다. 그러나 통계는 실제 생활과 연관되어 발전해왔으므로 맥락을 배제하고 수학적 표현으로만 이해하기에는 어려운 점이 많으며(박영희, 2002), 학생들은 통계적 방법을 어떻게 적용하고 결과를 어떻게 해석 하는지 알지 못한 채 단지 기술만을 익히게 된다(Mallows, 1998). 따라서, 본 연구에서는 학생들의 확률밀도함수 개념에 대한 이해를 돕기 위하여 이산확률변수의 밀도도수 히스토그램을 근사시킨 하나의 모형으로서 연속확률변수의 확률밀도함수를 도입하되, 중간값 정리, 정적분, 무한급수의 개념을 연결시켜 확률밀도함수의 세 가지 성질을 제시하였다. 나아가 연속확률변수의 기댓값을 정의할 때에는 정적분과 무한급수의 개념을 연결시켜 정의하였다. 또, 정규분포의 표준화는 치환적분법의 개념과 연결시켜 설명하였다. 이는 절차와 개념 연결을 학교수학의 핵심으로 보는 NCTM(2000)의 관점에서 개념, 절차, 그리고 지적인 과정은 서로 관련되어 있으므로 서로 다른 수학적 내용과 다른 내용 영역의 개념과 절차들을 연결하려는 시도를 포함한 것이다. 수업 후에 이루어진 연구대상 학생들과 교사들의 자유토론을 통해 수학적 연결성과 관련하여 반성적 사고가 촉진되었음(Bakker, Gravemeijer, 2004)을 알 수 있었다.

다섯째, 고등학교 교육과정에서 선분의 넓이를 정의할 수 없음에도 불구하고 [3]에 대한 검사문항(6)의 응답에서 60명의 학생들이 선분의 넓이가 0임을 이용(무한소 해석을 일부 이용)하였다. 이는 학생들이 적분단원에서는 닫힌구간에서 정적분과 넓이를 정의하는데 비해 통계단원에서는 열린구간 또는 반열린구간에서의 정적분으로 연속확률변수의 확률을 구하는 데서 비롯된 것으로 보인다. 이 과정에서 학생들의 개념적 혼란이 생기는 현상을 확인하였고, 이 부분의 개선에 대한 심도 있는 논의가 필요함을 알 수 있다.

현재 교과서의 연속확률분포단원의 내용진술에 이론적으로 오류가 없더라도 학생들의 수학적 개념에 대한 이해를 증진시키고, 고등학교 교육과정이 내적 일관성을 가지고 있음을 발견할 수 있도록 학습내용을 조직하는 수업설계 활동은 중요한 일이다. 본 연구는 교육과정상 한 과목-'미적분과 통계 기본' 또는 '적분과 통계'-내에서 단원 간의 수학적 연결성을 고려한 지도내용을 개발한 뒤, 실제 수업에의 적용 효과를 기술하였다. 앞으로 본 연구에서 개발한 <부록 1>을 중하위권 학생들을 대상으로 적용하는 연구, 통계단원 외에 다른 단원에 대하여 수학적 연결성을 가지는 단원을 찾아 교수학적 전략을 고안하는 연구, (반)열린구간에서의 정적분을 다루는 [3]에 대한 측도론(Measure theory) 관점에서의 연구 등으로 이어지기를 기대해 본다.

참고문헌

교육과학기술부(2008). **고등학교 교육과정 해설 ❺ 수학.** 교육과학기술부, 서울: 신생인쇄조합.

김동화・조은정(2000). 확률・통계의 연계성에 관한 연구. **교육이론과 실천, 10**(2), 345-373.

김남희・나귀수・박경미 외(2006). **수학교육과정과 교재연구.** 서울: 경문사.

김응환・김승동・오후진(1996). 확률밀도함수의 지도를 위한 고등학교 교과서내용의 재구성. **수학교육, 35**(2), 117-123.

김원경・백경호(2005). 고등학교 확률과 통계

영역에서 현실적 수학교육의 적용 효과. **수학교육**, **44**(3), 435-456.

김원경・문소영・변지영(2006). 수학교사의 확률과 통계에 대한 지식과 신념. **수학교육**, **45**(4), 381-406.

박영희(2002). 연속확률변수 개념의 직관적 이해에 관한 고찰. **학교수학**, **4**(4), 675-686.

손홍찬(2010). 수학적 추론과 연결성의 교수・학습을 위한 소재 연구-도형수, 파스칼 삼각형, 피보나치 수열을 중심으로-. **학교수학**, **12**(4), 619-638.

신보미(2009). 고등학생들의 정적분 개념 이해. **학교수학**, **11**(1), 93-110.

신현용(2003). 교사 양성 대학 수학교육과 교육과정 및 교수-학습 방법 개발에 관한 연구. **수학교육**, **42**(4), 431-452.

우정호(2000). 통계교육 개선방향 탐색. **학교수학**, **2**(1), 1-27.

윤현진・박선용・김서령・이영하(2009). **수학과 교육내용 개선방안 연구-이산수학, 확률과 통계 영역을 중심으로- RRC 2009-3-3.** 서울: 한국교육과정평가원.

이경화・유연주・홍진곤・박민선・박미미(2010). 수학 우수아의 통계적 개념 이해도 조사, **학교수학**, **12**(4), 547-561.

이수정(2000). **통계지도에 관한 고찰.** 서울대학교 대학원 석사학위 논문

이영하(1992). 고등학교 확률・통계교육의 현황과 개선 방향에 관하여. **청람수학교육학회지**, **2**(1), 71-91.

이영하・남주현(2005). 통계적 개념 발달에 관한 인식론적 고찰. **수학교육**, **44**(3), 457-475.

최승현・고정화・도종훈 외(2006). **고등학교 수학과 선택중심 교육과정 개선 방안 연구 RRC 2006-6.** 서울: 한국교육과정평가원.

한진규・서종진(2004). 한국과 미국(North Corolina주)의 확률과 통계교육 내용 비교. **수학교육논문집**, **18**(1), 89-98.

허은숙(2005). **고등학교에서의 선형대수 개념 지도에 관한 연구-수학적 연결을 중심으로-**, 서울대학교대학원 석사학위 논문

홍석강・마종철(2003). 제7차 교육과정에서의 고등학교 통계영역의 지도와 개선방안에 관한 교사의 의견조사 및 분석, **수학교육논문집**, **16**, 219-243.

황석근・윤정호(2010). 수학과 개정교육과정의 그래프와 일차변환 단원에 대한 고찰. **한국수학사학회지**, **23**(4), 83-100.

Akker, J. V., Gravemeijer, K., McKenney, S. & Nieveen, N. (2006). *Educational Design Research*. Routledge.

Alvarez, E. N., Rosales-Moreno, M. J. & Huete-Morales, M. D. (2010). Teaching Statistics in labor, social, juridical or economic studies, *US-China Education Review*, 7(10), 36-41.

Bain, L. J. & Engelhardt, M. (2000). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics (2nd ed.)*, Thomson Learning

Bakkar, A. & Gravemeijer, K. (2004). *Learning to Reason about Distribution*, In D. Ben-Zvi & J. Garfield(Eds.), The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking, Dordrect, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ball, D. L. & Cohen, D. K. (1999). *Developing Practice, Developing Practitioners: Toward a Practice-Based Theory of Professional Education.* In L. Darling-Hammond & G. Sykes, Teaching as the Learning Profession: Handbook of Policy and Practice, 3-32, San Francisco: Jossey-Bass.

Bertsekas, D. P. & Tsitsiklis, J. N. (2002). *Introduction to Probability*, Massachusetts: Athena Scientific

Batanero, C., Tauber, L. M. & Sanchez, V. (2004). S*tudent's Reasoning about the Normal Distribution*, In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking, Dordrect, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ben-Zvi, D. & Garfield J. (2004). *Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges*, In D. Ben-Zvi & J. Garfield(Eds.), The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking, Dordrect, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Carmichael, C., Callingham, R., Hay, I. & Watson, J. (2010). Measuring Middle School Students' Interest in Statistical Literacy. *Mathematics Education Research Journal,* 22(3), 9-39.

Cobb, G. W. (1992). *Teaching statistics.* In L. A. Steen(Ed.), Heeding the call for change: Suggestions for curricular action, pp.3-43. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Cobb, G. W. & Moore, D. S. (1997). Mathematics, statistics and teaching. *The American Mathematical Monthly,* 104(9), 801-823.

Coxford, A. (1995). *The Case for Connection.* In House, P. A. & Coxford, A. F.(Eds.). Connecting Mathematics across the Curriculum, 3-12, NCTM.

Crowley, L. (1995). *Transformations: Making Connections in High School Mathematics.* In House, P. A. & Coxford, A. F.(Eds.) Connecting Mathematics across the Curriculum, 79-91, NCTM.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task, D*. Reidel Publishing Company.

Freund, J. E., Miller, I & Miller, M. (2004). *John E. Freund's Mathematical Statistics With Applications(7th ed.)*, Prentice-Hall

Gal, I. (2004). *Statistical literacy: Meanings, Components, Responsibilities*, In D. Ben-Zvi & J. Garfield(Eds.), The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking, Dordrect, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2004). *Research on Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Issues, Challenges, and Implications*, In D. Ben-Zvi & J. Garfield(Eds.), The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking, Dordrect, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ghahramani, S. (2000). *Fundamentals of Probability(2nd ed.),* New Jersey: Prentice-Hall.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal,* 42(Summer), 371-406.

Hoel, P. G. (1984). *Introduction to Mathematical Statistics(5th ed.)*, John Wiley & Sons Inc.

Huffered-Ackles, K., Fuson, K. C. & Sherin, M. G. (2004). Describing Levels and Components of a Math-Talk Learning Community, *Journal for Research in Mathematics Education,* 35(2), 81-116.

Kempthome, O. (1980), The teaching of statistics:

Content versus Form. *The American Statistician,* 34(1), 17-21.

Mallows, C. (1998). 1997 Fisher Memorial Lecture: The zeroth problem. *American Statistician,* 52(1), 1-9.

Mood, A. M., Graybill, F. A. & Duane C. B. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics(3th ed.),* McGraw-Hill Higher Education

Moore, D. S. (1997). New Pedagogy and new content: The case of Statistics. *International Statistical Review,* 65, 123-165.

Moore, D. S. (1992). *Teaching Statistics as a respectable subject.* Floernce Gorden & Sheldon Gorden(Ed.), Statistics for the Twenty First Century, Issues in Statistical Education, The Mathematical Association of America.

Moore, D. S. & McCabe (2000). *Introduction to the Practice of Statistics.* NY: W. H. Freeman & Co.

NCTM (2007). *Mathematics Teaching Today: Improving Practice.* Improving Student Learning, NCTM.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Resslan, S. & Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology in *Mathematics Education,* 4, 89-96.

Ross, S. (2008). *A First Course in Probability(8th ed.),* Pearson Group

Schoenfeld, A. H. (1988). "When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of Well Taught Mathematics Classes." *Educational Psychologist,* 23(Spring), 145-166.

Sfard, A. (2003). *Balancing the Unbalanceable: The NCTM Standards in Light of Theories of Learning Mathematics.* In J. Kilpatrick, W. G. Martan & D. Schifter(Eds.), A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics, Reston, VA: NCTM.

Skemp, R. R. (1976) “Relational Understanding and Instrumental Understanding." Mathematics Teaching 77 (December), 20-26. *Reprinted in Arithmetic Teacher,* 26(November 1978), 9-15.

Theoret, J. M. & Luna, A. (2009). Thinking Statistically in Writing: Journals and Discussion Boards in an Introductory Statistics Course. *International Journal of Teaching and Learning in Higher Education,* 21(1), 57-65.

Thisted, R. A. & Velleman, P. F. (1992). Computer and Modern Statistics, In D. C. Hoaglin & D. C. Moore(Eds.), Perspectives on Contemporary Statistics. *The Mathematical Association of America,* 41-53.

Wonnacott, R. J. & Wonnacott, T. H. (1982). *Statistics: Discovering Its Power.* NY: John Wiley & Sons Inc.

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical inquiry. *International Statistical Review,* 67(3), 223-265.

Yee (2006). *Teaching Secondary School Mathematics a Resource Book.* McGraw-Hill Education.

A Study on Teaching Continuous Probability Distribution in Terms of Mathematical Connection

Hwang, Suk Geun (Kyungpook University)
Yoon, Jeong Ho (Maecheon High School)

In school mathematics, concepts of definite integral and integration by substitution have mathematical connection with introduction of probability density function, expectation of continuous random variable, and standardization of normal distribution. However, we have difficulty in finding mathematical connection between integration and continuous probability distribution in the curriculum manual, 13 kinds of 'Basic Calculus and Statistics' and 10 kinds of 'Integration and Statistics' authorized textbooks, and activity books applied to the revised curriculum. Therefore, the purpose of this study is to provide a teaching method connected with mathematical concepts of integral in regard to three concepts in continuous probability distribution chapter-introduction of probability density function, expectation of continuous random variable, and standardization of normal distribution. To find mathematical connection between these three concepts and integral, we analyze a survey of student, the revised curriculum manual, authorized textbooks, and activity books as well as 13 domestic and 22 international statistics (or probability) books. Developed teaching method was applied to actual classes after discussion with a professional group. Through these steps, we propose the result by making suggestions to revise curriculum or change the contents of textbook.

* key words : mathematical connection(수학적 연결성), continuous probability distribution(연속확률분포), integration(적분), revised curriculum(개정교육과정).

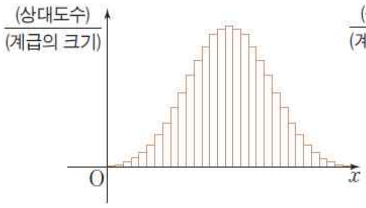
논문접수 : 2011. 7. 29
논문수정 : 2011. 9. 01
심사완료 : 2011. 9. 09

<부록 1> 수학적 연결성을 고려한 연속확률분포 단원의 지도내용

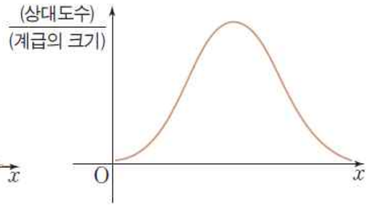
1 확률밀도함수의 도입

어떤 이산확률변수 X의 $\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$를 히스토그램으로 나타내면 [그림1]과 같다고 하자.

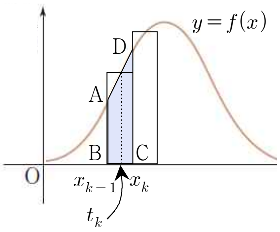
[그림 1]에서 각 구간에서의 직사각형의 넓이 $\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}\times(\text{계급의 크기})$는 그 구간의 상대도수를 나타내고, 상대도수의 합은 1이므로 직사각형들의 넓이의 합은 항상 1이다. 또, 대상의 수를 한없이 늘리고, 계급의 크기를 더욱 줄여 나타낸 히스토그램의 윗변의 중점을 연결하여 그린 도수분포다각형은 [그림 2]와 같이 항상 x축의 위쪽 부분에 있는 종모양의 매끄러운 곡선에 가까워 질 것이다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

확률변수 X가 구간 $[a,b]$의 모든 실수 값을 가지고, [그림 2]의 곡선을 $y=f(x)$라 하자.

구간 $[a,b]$를 n등분하여 그 분점과 양 끝점을 차례로 $x_0(=a), x_1, x_2, \dots, x_n(=b)$라 하고, $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$로 놓으면 $x_k=a+\dfrac{b-a}{n}k$ $(k=0, 1, 2, \dots, n)$이다.

[그림3]에서 구간 $[x_{k-1}, x_k]$위의 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분과 x축이 이루는 도형 ABCD의 넓이를 S_k, 이 구간에서 $f(x)$의 최솟값, 최댓값을 각각 m_k, M_k 라고 하면 $m_k\Delta x\le S_k\le M_k\Delta x$이고, 중간값 정리에 의하여 $S_k=f(t_k)\Delta x$가 성립하도록 하는 $m_k\le f(t_k)\le M_k$인 t_k가 구간 (x_{k-1}, x_k)에 존재한다.

n에 관계없이 S_k들의 합은 1이므로 정적분과 무한급수의 관계를 이용하면 다음이 성립한다.

$$1=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(x_{k-1}\le X\le x_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

따라서 구간 $[a,b]$에서 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분과 x축 사이의 넓이가 1이 됨을 알 수 있다.

이러한 곡선은 어떤 함수의 그래프가 되는데 이 함수를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다.

일반적으로 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)\,(a\le x\le b)$이면 다음이 성립한다.

❶ $f(x)\ge 0$ ❷ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=1$ ❸ $\mathrm{P}(\alpha\le X\le\beta)=\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx$ (단, $a\le\alpha\le\beta\le b$)

이상에서 연속확률분포의 경우 확률밀도함수의 값 $f(\alpha)$가 $\mathrm{P}(X=\alpha)$을 의미하지 않음을 알 수 있고, ❸에서 $\mathrm{P}(X=a)=0$이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}(a<X\le b)=\mathrm{P}(a\le X<b)=\mathrm{P}(a<X<b)$$

2 연속확률변수의 기댓값

구간 $[a, b]$의 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X의 확률밀도함수를 $y=f(x)$라고 하자.

구간 $[a, b]$를 n등분하여 그 분점과 양 끝점을 차례로 $x_0(=a), x_1, x_2, \dots, x_n(=b)$라 하고, $\Delta x=\frac{b-a}{n}$로 놓으면 $x_k=a+\frac{b-a}{n}k$ $(k=0, 1, 2, \dots, n)$이다.

구간 $[x_{k-1}, x_k]$위의 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분과 x축이 이루는 도형 ABCD의 넓이를 S_k, 이 구간에서 $f(x)$의 최솟값, 최댓값을 각각 m_k, M_k 라고 하면 $m_k\Delta x \le S_k \le M_k\Delta x$이고, 중간값 정리에 의하여 $S_k=f(t_k)\Delta x$가 성립하도록 하는 $m_k \le f(t_k) \le M_k$인 t_k가 구간 (x_{k-1}, x_k)에 존재한다.

이 n에 대하여 확률분포가 다음 표와 같은 이산확률변수 T_n을 생각할 수 있다.

구간	$[x_0, x_1]$	$[x_1, x_2]$	$\cdots$	$[x_{n-1}, x_n]$	$[a, b]$
T_n	t_1	t_2	$\cdots$	t_n	계
$\mathrm{P}(T_n=t_i)$	$f(t_1)\Delta x$	$f(t_2)\Delta x$	$\cdots$	$f(t_n)\Delta x$	1

위의 이산확률변수 T_n에 대하여 정적분과 무한급수의 관계를 이용하면 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(T_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_k\mathrm{P}(x_{k-1}\le X\le x_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_kS_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_kf(t_k)\Delta x=\int_a^b xf(x)dx$$

이산확률변수 T_n은 연속확률변수 X에 수렴하므로 연속확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{E}(X)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(T_n)=\int_a^b xf(x)dx$$

3 정규분포의 표준화

연속확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 정적분 $\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}dx$로 주어진다. 피적분함수에서 $\frac{x-m}{\sigma}=z$로 놓으면 $dx=\sigma dz$이고, x가 a에서 b까지 변할 때, z는 $\frac{a-m}{\sigma}=c$에서 $\frac{b-m}{\sigma}=d$까지 변하므로 치환적분법에 의하여 $\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}dx=\int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$가 성립한다.

함수 $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$를 따르는 확률변수 Z의 확률밀도함수이므로 확률변수 X가 어떤 구간에서 값을 취할 확률은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 이용하여 확률변수 Z의 구간에 대한 확률의 값으로 구할 수 있다.

이와 같이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$를 이용하여 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꾸는 것을 정규분포의 표준화라고 한다.