대한수학교육학회지 <학교수학> 제 13 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.13, No.3 501-524. Sep. 2011

비형식적 활동을 통한 증명교육이 초등 영재학급 학생들의 증명 능력에 미치는 영향[1)]

고 준 석[*] · 송 상 헌[**]

본 연구는 초등 영재학급 학생들의 증명 능력 향상을 목적으로 증명의 본질과 구조를 경험할 수 있는 비형식적 활동 교수·학습 자료를 개발하고 이를 실제 현장에 적용한 사례들을 분석하여 초등학교 수준에서의 영재들을 위한 증명 교육의 가능성과 교육에서의 시사점을 제안하기 위한 것이다. 초등 영재학급 학생들은 비형식적 활동 교수·학습 자료를 통해 증명의 본질과 구조에 대한 기본적인 이해가 이루어졌으며 증명에 대한 중요성과 필요성을 인식하였다. 증명에 대한 흥미도도 높아졌지만 증명이 쉽다고 느끼지는 않았다. 학생들은 광고나 신문, 패러독스에서 가정을 분석할 수 있었으며, 자료 적용 후에는 어려운 증명 문제에 도전하고자 하는 의지를 보였다. 이를 바탕으로 영재학급 학생들을 대상으로 하는 증명교육의 시사점을 제안하였다.

Ⅰ. 들어가는 말

수학은 본질적으로 증명에 관한 학문이고(Almeida, 1996), 증명은 수학을 행하고 의사소통하며 기록하는 활동의 핵심으로 수학과 분리될 수 없을 정도로 수학에서 매우 중요한 위치를 차지하고 있다(Schoenfeld, 1994). 그러나 우리나라 중학교 2학년 학생들의 연역추론을 통한 증명 능력은 그리 뛰어나지 않은 것으로 여러 연구에서 드러나고 있다(우정호, 1994; 류성림, 1998; 서동엽, 1999). 한편, NCTM(2000)은 수학적으로 추론하는 것은 마음의 습관이기 때문에 다른 모든 습관과 마찬가지로 다양한 맥락에서의 지속적인 활용을 통해서 개발되어야 한다고 제안했다. 그러나 우리나라는 현재 '증명은 중학교 2학년부터' 라는 분리된 학습이 진행되고 있다(신송임, 2004).

중학교 2학년 단계에서 상당한 양의 연역추론을 다루는 경험 후에도 학생들이 여전히 이러한 반응을 보이는 이유는 그 이전까지의 학습이 주로 귀납 추론에 의지했던 경험에서 찾을 수 있는 것으로 보인다(서동엽, 1999).

우리나라 학교수학에서는 중학교 2학년 이전에는 연역추론을 다루지 않는 데, 그 배경으로는 피아제의 인지발달이론의 영향을 들 수 있다. 하지만 초등학교 수준의 수학 영재들은 이미 발견적 사고 이상의 연역적 정당화 수준을 보여주고 있으며, 높은 수준의 수학적 정당화 지도가 필요하다는 연구가 많이 나오고 있다(Ennis, 1970; King, 1973; NCTM, 1989; Reid, 1995; Russell, 1999; Reid, 2000; NCTM, 2000; Stylianides, 2007; 강문봉, 1996; 권성룡, 2003; 김정하, 2010에서 재인용).

* 인천축현초등학교 (manwonbus@hanmail.net)
** 경인교대/아주대 (song2343@hanmail.net)
1) 이 글은 고준석(2011)의 석사학위논문을 발췌하여 요약하고 재수정한 것임.

Stylianides(2007a, 2007b)는 초등학교 3학년, Reid (2000)는 초등학교 2학년, King(1970, 1973)은 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 연역적 정당화의 지도의 가능성을 밝혔다(김정하, 2010). 허지연(2005)은 초등 수학영재들에게서 단순히 귀납적인 사실들의 열거를 통해 규칙을 찾는 생각만이 아니라 그 안에 담겨진 원리를 찾아 이를 설명하고자 하는 경향이 강함을 발견하였다.

이와 같이 많은 선행 연구들이 초등학생들도 연역적 정당화가 가능하다는 것을 보여주고 있지만 현재의 초등학교 영재교육 프로그램은 귀납적·발견적 사고 신장 프로그램 위주로 운영되고 있다(장현선, 2005). 초등학교 영재학급 학생들을 보다 높은 수준으로 안내하는 적절한 교육적 처방을 위해서라도 이미 연역적 정당화 수준을 보이고 있는 학생들에게 제공하는 교수·학습 자료는 연역적 추론능력을 형식적 증명능력으로 이끄는 활동도 포함시킬 필요가 있다. 그러나 수학의 내용적 지식이 부족한 초등학생에게 지나치게 형식적인 활동 위주의 교수법은 형식적 고착화를 유발할 수 있으므로 그들에게 친숙한 비형식적 활동을 먼저 제공하여 학생 스스로 형식적 증명의 구조를 파악하여 연역하려는 태도를 가지게 할 필요가 있다.

이에 본 연구는 초등학교 영재학급 학생들의 증명 능력 향상을 목적으로 증명의 본질과 구조를 경험할 수 있는 비형식적 활동 교수·학습 자료를 개발하고, 이를 실제로 적용한 사례를 분석하여 초등학교 영재학급 학생들을 위한 증명 교육의 가능성과 교육에서의 시사점을 논하고자 다음과 같은 연구 내용을 설정하였다.

첫째, 증명의 본질과 구조를 경험할 수 있는 비형식적 활동소재를 추출하고 초등학교 영재학급 학생들에게 적용할 수 있는 교수·학습 자료를 개발한다.

둘째, 비형식적 활동 교수·학습 자료를 개발하는 과정에서 드러난 학생들의 반응과 증명 능력의 변화를 분석한다.

셋째, 초등학교 영재학급 학생들을 대상으로 하는 증명교육의 시사점을 제안한다.

II. 이론적 배경

1. 증명

가. 증명의 구조

증명은 주어진 명제에서 가정과 결론이 무엇인지를 분명히 확인하고 관련된 추론 규칙을 이용하여 가정에서 결론을 유도하는 복합적인 활동이다(서동엽, 1999). 직관적으로 자명하게 참으로 인정하는 진리를 공리와 공준으로 상정한 다음, 공리와 공준으로부터 다른 수학적 명제를 이끌어 내는 것이다. 이러한 공리적 구조는 무정의 용어, 공리, 용어의 정의, 정리를 구성요소로 하여 증명방법의 근원을 공리와 공준의 맥락에서 체계화하여 형성하였다. 유클리드는 이러한 실질적 공리학의 구조를 따랐다(Eves, 1996; 전병임, 2007에서 재인용). 그러나 비유클리드 기하의 출현과 집합론과 함수론 등에서 나타난 처리하기 곤란한 여러 가지 패러독스들은 공리체계의 확실성과 공리적 방법에 대한 오류의 발견을 야기하였다. 그 결과 확실성과 절대적 기초를 재확립할 목적으로 Hilbert를 중심으로 한 형식적 공리학이 대두되었다(나귀수, 1998).

형식적 체계에서는 구조만 의미가 있다. 여기서의 증명은 초(超)수학으로서 완전한 형식화를 통해 수학의 무모순성을 증명하기 위한 하나의 기호 나열에 불과하며 이 때 기호의 의미는 전혀 고려되지 않는다(Yoshinaga, 2000). 증명을 의미가 배제된 기호의 형식적 계산으로 대치함으로써 의미를 포기한 대가로 엄밀한 방법을 통해 공리체계로서

의 완전성을 보이려고 하였다(나귀수, 1998).

증명을 심층적으로 살펴보기 위해서는 실질적 공리학이 증명의 외형적인 모습에 불과하고 가정으로부터 결론에 이르는 선형적인 구조라는 단점을 지니고 있기 때문에 형식적 공리학의 구조가 반영된 추상적인 연구가 필요한 것이 사실이다. 그러나 물리적이고 구체적으로 구성해 나가는 공리화 방법, 즉 실질적 공리학이라는 역사 발생적 관점을 학교 수학의 증명 과정에서 경험해야만 학생이 증명의 구조를 쉽게 이해할 수 있을 것이다. 따라서 아직 형식적 공리화의 방법을 알지 못하는 초등 영재학급 학생들에게 증명 구조의 이해를 돕기 위해서는 실질적 공리학의 증명의 구조를 바탕으로 한 교수·학습 자료를 개발하는 것이 필요할 것이다.

나. 증명의 본질

Fawcett(1938)의『증명의 본질』의 역사적 가치는 2000년 남캐롤라이나 교육박물관이 선정한 '세기의 도서' 65권에 선정된 만큼 교육 분야에서 가지는 위치를 짐작해볼 수 있다. 그는 교수실험에 앞서 문헌 연구를 통해 다음과 같은 증명의 본질을 제시한다.

① 모든 결론을 증명하는 데 있어서 무정의 개념의 의미와 역할
② 명확하게 정의된 용어의 필요성과 그것이 결론에 미치는 영향
③ 가정 또는 증명되지 않은 명제의 필요성
④ 가정이 함축하지 않는 것을 증명하는 경우는 없다는 것

이는 실질적 공리학 관점에서의 증명의 구조를 반영했다. 그는 학생들이 위의 증명의 본질 요소를 증명 자체가 가지는 연역적 체계의 어려움 때문에 학습하기 힘들며 연역적 증명 그 자체로 지도하기에는 수업이 복잡하고 어렵다는 점을 인식하면서 전이가 실행될 수 있는 상황들을 제안하였다. 그는 학생들의 사고 방법에 맞게 적용시킬 수 있는 일상 소재나 게임과 같은 비형식적 제재를 이용하여 직접 무정의 용어, 공리, 정의, 정리, 증명 등을 구성하게 하는 1년 이상의 학습 경험을 지도함으로써 공리적으로 접근하는 사고방식 교육에 상당한 효과가 있었음을 밝혔다. 또한 그는 학생들이 증명의 본질을 명확하게 이해했다면 발현될 행동으로 설정한 7가지의 행동을 다음과 같이 제시했다.

① 어떤 진술에서든 자신이 중요하게 생각하는 단어와 (문)구를 선택하고 그것들을 세심하게 정의할 것이다.
② 받아들여야 하는 결론에 대해 그것을 지지하는 증거를 요구할 것이다.
③ 그 증거를 분석하고, 가정과 사실을 구별할 것이다.
④ 결론에 필수적인 명시적 가정과 암묵적 가정을 인식할 것이다.
⑤ 이들 가정 중 어떤 것을 수용하고 어떤 것을 기각해야 할지를 평가할 것이다.
⑥ 주장을 평가하여 결론을 받아들이거나 기각할 것이다.
⑦ 신념의 배경이 되고 실행에 지표가 되는 가정을 끊임없이 재검토할 것이다.

2. 비형식적 활동

가. 게임

David(1995)는 수학은 '증명'이라 부르는 행위에 의해 독특하게 특성화된다고 주장하면서 일부의 견해로는 수학게임의 이름이 바로 증명이라고 소개했다. 증명이 없으면 수학도 없음을 강조하면서 수학에는 많은 게임이 존재함을 역설했다. 수학 게임이 증명이라고 소개한 이유는 게임이 갖는 특징은 연역적 증명방법과 유사한 구조가 존재하기 때문일 것이다. 즉, 무정의용어, 정의, 가정 또는 공리, 정리 등을 일상적인 게임에서도 나타낼 수 있기 때문이다. 이 때, 게임

에서는 무정의 용어를 게임에 필요한 요소, 공리를 규칙, 정리를 한 판의 경기 등의 다른 용어를 사용한다. 그리고 게임의 규칙은 공리처럼 구성원 모두가 참으로 받아들여진다(Gernes, 1999). 게임의 경기에 대한 해석은 자연스럽게 받아들이는 것이 아니라 규칙을 통해 이해하고 그것의 적용으로 정당화되는 것이다. 즉, 공리를 이해하고 그것을 통해서 증명하는 것이다.

나. 비수학적 상황(일상 생활 속의 광고, 이야기, 신문기사 등)

Fawcett(1938)은 학생들이 비수학적 주장에서 가정을 인식하는 정도를 파악하기 위해 다양한 소재를 개발하고 적용하였다. 그 예로 미국 독립선언서를 분석하고 토론하면서 가정을 분석하였다. 그 중 학생들이 쉽게 접할 수 있는 광고를 활용한 장면이 있다. 그는 광고가 증명의 아이디어가 포함된 상황을 탐구할 수 있는 또 하나의 풍부한 영역이라고 설명하였다. 왜냐하면 모든 광고 뒤에는 수많은 가정이 숨어 있고, 이 가정들이 일단 명시적으로 말해지고 나면 광고의 호소력이 상당히 떨어지기 때문이다. 또한 광고를 활용한 활동은 잘못된 추론과 숨어있는 가정을 이끌어내는 가장 좋은 방법이 될 수 있다(Paulos, 1996). 광고에 등장하는 생략법과 실제 내용과는 전혀 무관한 것들(아름다운 모델 자극적인 상황, 웅장한 배경 등)의 풍부한 등장은 광고로부터 속임수를 잡아내는 즐거움을 느낄 수 있게 해주고, 비판적 사고를 자극시키는 역할을 수행한다.

또 다른 종류의 비수학적 상황으로 이야기를 들 수 있다. 고대 이래 효과적인 교수방법으로 사용되어 온 이야기하기(storytelling)는 문제를 맥락 속에 위치시켜 그 문제와 다른 문제와의 관계를 드러내고 그 속에서 발생하는 개념을 간결하게 설계한다. 딱딱하게 느껴지는 수학과 부드러운 설명을 철저하게 구분하는 기존의 엄격한 관점은 이처럼 평이한 방법들이 수학 교육에 거의 사용되지 않은 이유가 되었다. 이러한 고정관념에서 벗어나 이야기를 수학교육의 소재로 활용한다면 학생들에게 보다 흥미롭게 전달될 수 있을 것이다. 특히 본 연구의 목적인 증명 교육에 있어서 이야기를 활용할 수 있는 대표적인 예로 패러독스 이야기를 들 수 있다.

이야기에 이어 다른 비수학적 상황으로서 신문기사를 들 수 있다. 수학자 Paulos는 그의 저서 ‘수학자가 읽는 신문읽기’라는 책을 통해 그 동안 신문기사는 여러 수준의 수학 학습에 많은 보기와 개념을 제공해 주는 공급원이면서도 그 가치가 올바로 평가받지 못했다는 점을 지적했다. 또한 <Newsweek>지의 칼럼니스트인 Adler는 언론인들이 신뢰할 만한 뉴스원을 발견하면 자신들의 소임이 완수된 것으로 생각하지만 불행히도 그렇지 않음을 강조하면서, 벤치마크 숫자, 통용되는 정의(operational definition), 그리고 간단한 산술은 모든 주요기사의 일부가 되거나, 최소한 진행 중인 보도 범위에 자주 언급되어야 한다고 주장했다. 그런 것들이 없는 한 우리 모두는 극적인 사건, 그래픽, 그리고 직감적인 무엇에 의해 부당하게 지배되고 말 것이라고 경고하면서 수학적 시각으로 신문을 비판적으로 읽기를 당부했다. 같은 맥락으로 Paulos(1996)는 “무지한 자들이 믿고 퍼뜨리는 1천 가지 이야기들은 수학자가 그것을 파악했을 때 한 순간에 모두 사라지고 만다.”라고 말하면서 수학적 시각의 비판적 읽기를 언급했다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 증명의 본질을 이해하기 위한 비형식적 활동 교수・학습 자료 개발

아직 형식적 공리화의 방법을 알지 못하는 초

등 영재학급 학생들에게 증명 구조의 이해를 돕기 위해 우선 실생활의 소재를 가지고 비형식적 활동으로부터 접근하는 교수·학습 자료를 개발하는 것이 필요하다. 이를 위해 수학영재학급 학생들을 대상으로 김양권(2009), 박지영(2010)이 개발한 교수·학습 자료 개발 모형 절차 순으로 증명의 구조를 익히기 위한 비형식적 활동 교수·학습 자료를 개발하였다.

가. 교육 대상자의 특성 및 교육 목표 확인

1차 적용에서는 6학년 영재학급 학생들을 대상으로 증명 학습의 난이도와 비형식적 활동에 대한 흥미도, 학생 주도적인 자연스러운 학습의 흐름이 될 수 있는지의 여부, 학습 후에 증명의 구조를 익히는지의 결과를 확인하였다.

2차 적용에서는 1차 적용을 통해 수정·보완한 자료를 적용해 봄으로써 5~6학년 영재학급 학생들을 대상으로 교수·학습 과정에서 보이는 행동과 반응을 분석하여 완성도 높은 교수·학습 자료를 개발하고, 증명 능력 향상 사례를 분석하여 증명 교육의 시사점을 도출하였다.

교육의 목표는 연역적 증명구조의 파악을 통한 증명의 본질 이해이다. 따라서 교사는 학생들에게 친숙한 비형식적 활동을 제공하여 학생 스스로 연역적 증명의 구조를 파악하게 하고, 생활 속에서 발견할 수 있는 비수학적인 요소를 공리적 구조로 수학화하는 방법을 학습하게 하였다.

나. 학습 소재/주제의 발굴

학습 소재는 Fawcett(1938)의 ‘증명의 본질’과 Gernes(1999)의 ‘The Rules of The Game’, 전병임(2007)의 ‘소집단 내 비형식적 활동을 통한 공리적 사고가 증명학습에 미치는 영향’, 나귀수(2009)의 ‘분석법을 중심으로 한 기하증명지도에 대한 연구’, David(1995)의 ‘수학자의 신문읽기’ 등을 분석하고, 생활 주변에서 경험할 수 있는 광고와 이야기를 활용하여 1, 2차 적용을 통해 소재를 최종 선정하였다.

학습 주제는 Fawcett(1938)에서 제시한 증명의 본질의 행동적 요소와 송상헌, 장혜원, 정영옥(2006)에서 제시한 증명의 구조의 분석틀을 바탕으로 10차시에 해당하는 증명의 본질과 구조에 관한 주제를 선정하였다. 본 연구에서 선정한 학습 주제와 선정근거는 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 학습 주제와 선정 근거

학습 주제	선정 근거 (요소)
정의의 필요성과 조건 파악하기	Fawcett(1938)의 증명의 본질요소(정의)
무정의 용어 필요성 이해하기	Fawcett(1938)의 증명의 본질요소(무정의 용어) 송상헌 외(2006)의 증명의 구조요소(무정의 용어)
게임의 규칙과 구조 파악하기	Fawcett(1938)의 증명의 본질요소(공리) 송상헌 외(2006)의 증명의 구조요소(연역적 체계)
수학 증명 연역적 구조 분석하기	Fawcett(1938)의 증명의 본질(공리, 정리) 송상헌외(2006)의 증명의 구조요소(연역적 체계)
MIU 게임을 통한 공리 역할과 증명 과정 이해하기	Fawcett(1938)의 증명의 본질(가정, 공리) Gernes(1999)의 ‘The Rules of The Game’
비수학적 상황에서 가정 분석하기	Fawcett(1938)의 증명의 본질(가정 인식, 결론의 수용)
분석법 이해하고 활용하기	나귀수(2009)의 분석법 (수학 증명 해결법)
창의 산출물 만들기	김양권(2009)의 영재 영재 교수학습 자료 분석기준

다. 교수·학습 자료의 유형 결정

수학 영재 교수·학습 자료의 유형에는 크게 문제 해결형, 주제 탐구형, 과제 개발형, 연구형이 있다(송상헌, 2004; 김양권, 2009; 박지영 2010

에서 재인용). 이 중 단일 주제 심화형은 한 가지 주제에 대해 오랜 시간을 집중하면서 학생 스스로 수학적 개념이나 법칙을 발견하거나 수학적 지식을 통합, 발전시킬 수 있는 기회를 제공하는 방식이므로 본 연구에 적합한 유형이다. 본 교수·학습 자료는 '증명의 본질과 연역적 구조'라는 단일 주제에 초점을 맞추고 이를 심화시켜 개발한 단일 주제 심화형이다.

라. '증명의 구조'와 관련한 비형식적 활동 학습 요소의 추출

본 연구의 교수·학습 자료는 초등 수학영재들이 증명의 본질과 구조를 이해하고 비수학적 상황에도 적용할 수 있는 것을 목적으로 하고 있으므로 '증명의 구조'의 하위 요소인 무정의용어, 정의, 공리, 정리, 가정, 결론에 맞추어 활동을 선정하였다. 이러한 소재를 바탕으로 활동의 연계성, 과제의 난이도, 연구 대상자의 수준, 주제 탐구형이라는 교수·학습 자료 유형에 따라 학습활동의 순서를 결정했다.

마. 교수·학습 자료의 원형 개발

선행 연구에서 조사한 '증명의 구조와 본질'과 '비형식적 활동'을 바탕으로 추출한 '증명의 본질 이해를 돕기 위한 비형식적 활동' 학습 요소를 토대로 교수·학습 자료의 원형을 만들었고 이를 기반으로 자료를 만들어 1차 적용한 후 도출된 결과와 개선점을 바탕으로 수정·보완하여 2차 적용을 실시했다. 2차 적용을 통해 나타난 결과와 개선점을 수정·보완하여 최종 교수·학습 자료를 만들었다.

2. 자료 수집 및 분석 기준

본 연구는 연구자가 곧 수업자로서 참여 관찰을 실시하였다. 수업 전에 증명 능력 지필 검사, 증명 태도 검사와 면담을 실시했다. 교수 실험은 2011년 2월~4월에 1차 적용 8시간, 2차 적용 10시간동안 진행하였다. 분석된 자료는 학생들이 사용한 학습지와 사전·사후 평가 자료와 면담, 수업 전체를 촬영·녹음한 자료 등이다. 연구결과를 분석하기 위해 증명의 구조와 증명의 본질에 관한 학생 반응 분석틀을 <표 Ⅲ-2>와 같이 설정하였다. 또한 자료 개발의 타당성을 분석하기 위해 김양권(2009)의 수학 영재 교수·학습 자료의 분석기준을 본 연구 주제에 맞게 수정·보완하여 자료 개발의 분석 기준을 제작·활용하였다.

<표 Ⅲ-2> 학생 반응 분석틀

증명의 구조	증명의 본질
S1. 무정의 용어 필요성 이해 S2. 정의의 필요성 이해 S3. 정의의 성립조건 이해 S4. 공준의 역할과 필요성 이해 S5. 정리의 역할과 필요성 이해 S6. 숨겨진 가정 파악 S. 연역적 체계로의 확장	E1. 어떤 진술에서든 자신이 중요하게 생각하는 단어와 (문)구를 선택하고 그것들을 세심하게 정의한다. E2. 받아들여야 하는 결론에 대해 그것을 지지하는 증거를 요구한다. E3. 증거를 분석하고, 가정과 사실을 구별한다. E4. 결론에 필수적인 명시적 가정과 암묵적 가정을 인식한다. E5. 가정 중 어떤 것을 수용하고 어떤 것을 기각해야 할지를 평가한다. E6. 주장을 평가하여 결론을 받아들이거나 기각한다. E7. 신념의 배경이 되고 실행에 지표가 되는 가정을 끊임없이 재검토한다.

<표 Ⅲ-3> 연구 대상자들의 특성

학생ID	학년	성별	소속학급	학생의 개별 특성
S6A	6	남	C초부설 지역공동 영재학급	수학문제 해결에 적극적, 자신감이 넘침. 질문이 많음. 문제를 명확히 이해하려는 성향이 강함. 민감함. * 선수학습 수준 : 중1
S6B	6	남	I대학 부설 과학영재 교육원	경쟁심이 있으며, 자신의 의견을 정당화하려는 경향이 강함. 다소 산만한 기질이 있음. * 선수학습 수준 : 중2
S5C	5	남	C초부설 지역공동 영재학급	차분한 성격을 가지고 있으며 운동을 잘하고 교우관계가 원만함. 수업태도가 바름. 중1 수준까지 선행되어 있음. * 선수학습 수준 : 초6
S5D	5	남	I대학 부설 과학영재교육원	활달한 성격을 가지고 있으며 문제 만들기를 좋아함. 퍼즐 맞추기에 재능이 있음. 어려운 문제를 좋아함. 자신이 알고 있는 문제에는 관심이 없음. 중 2 수준까지 선행되어 있음. * 선수학습 수준 : 중3 (계산 위주의 학습지를 통한 대수 영역만 해당함)

3. 연구 대상자

연구대상자들은 연구자가 직접 수업한 두 집단(I대학부설 과학영재교육원, C초부설 지역공동영재학급)의 5, 6학년 학생들이다. 각 학생들에게 부여한 ID의 순서는 6학년과 5학년 순이지만 그들의 수학 문제해결 능력 순으로 볼 수도 있다. 사전 면담을 통해 각 학생들의 개별적인 특성을 정리하면 <표 Ⅲ-3>과 같다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 개발한 교수·학습 자료의 각 차시별 사례 분석

본 연구에서 개발한 교수·학습 자료를 차시 순으로 활동 선정 이유, 증명의 본질 및 구조와 관련요소, 학생들의 주요 반응을 본 검사 성격의 2차 적용 사례를 중심으로 제시하고자 한다. 5-6학년 영재학급 학생들에게 1·2차 적용·수정·보완하여 최종적으로 선정한 교수·학습 자료의 차시는 <표 Ⅳ-1>와 같으며 실제적인 자료는 고준석(2011)에 있다.

<표 Ⅳ-1> 개발한 교수·학습 자료 차시별 주제

차시	주 제
1	정의의 필요성과 조건
2	무정의 용어의 필요성
3	친숙한 게임의 연역적 구조 파악
4~5	수학 증명 구조 분석 수학 증명과 구조화된 게임과 연결활동 연역적 체계의 용어와 의미 파악활동
6	MIU게임 활동(공리-연역적 증명학습)
7~8	비수학적 상황에서 가정 인식하기 - 일상생활·광고·신문기사·이야기 -
9	분석법 탐구
10	창의산출물

가. 1차시: 정의의 필요성과 조건 이해

1) 활동 선정 이유

이 차시는 학생들이 스스로 '학교'에 대한 정의(definition)를 세운 후 '링컨은 학교에 거의 다니지 않았다.'(이하 링컨 명제)라는 명제의 참·거짓이 '학교'를 어떻게 정의하느냐에 따라 달라진다는 것을 느끼도록 하는 단계이다(E1). 정의에 따라 명제의 참, 거짓이 달라진 이유를 학생 스스로 탐구해 봄으로써 명확한 정의의 필요성

을 인식하게 하고(S2), 자연스럽게 수학에서 사용하는 용어 역시 정의가 중요함을 느낄 수 있도록 제시하는 것을 목적으로 한다.

이 활동을 1차시로 편성한 이유는 학생들이 증명의 본질을 이해하기 위해서는 명확한 사고가 필수적이기 때문이다(Fawcett, 1938). 애매모호한 일상 언어가 반성적 사고에서 심각한 오류를 어떻게 불러일으키는가를 이해하는 것은 모든 전문적인 어휘에서 명료하게 정의된 개념의 중요성을 인정하는 것이기 때문에 정의의 중요성으로 시작하는 것이 증명의 본질을 이해하는 측면에서 바람직하다.

2) 분석틀 관련 요소 및 적용 결과 학생 반응 분석

<표 Ⅳ-2> 학생 반응 분석틀과 학생별 반응 결과 (1차시)

관련 요소	S6A	S6B	S5C	S5D
S2. 정의의 필요성 이해	○	○	○	○
S3. 정의의 성립조건 이해	○	○	○	○
E1. 어떤 진술에서든 자신이 중요하게 생각하는 단어와 (문)구를 선택하게 그것들을 세심하게 정의한다.	○	○	○	○

3) 학생들의 주요 반응

가) 정의의 필요성 이해(S2, E1)

학생들은 학교를 정의해 보는 활동으로 시작했다. 이후 링컨 명제의 참·거짓을 묻는 질문에 모두 참이라 대답했지만 자신이 세운 학교 정의와 비교한 후에는 명제의 진위가 모두 거짓으로 달라졌다. 명제의 진위가 달라진 이유는 <표 Ⅳ-3>과 같다.

학생들은 한 문장의 진위가 정의에 따라 달라지면 심각한 혼란을 야기할 수 있다는 것에 동의하고(S2) 링컨 명제의 참·거짓이 일치하도

<표 Ⅳ-3> 활동전 학생들이 세운 학교의 정의와 링컨 명제의 진위가 달라진 이유

학생	활동 전 학생들이 세운 학교의 정의	링컨 명제의 진위가 달라진 이유
S6A	사회에서 적응하기 위해 다니고 공부도 배우는 곳	학교에 대한 정의를 내린 것이 거짓이어서
S6B	배우는 조그마한 사회, 무언가를 배우는 곳	학교라는 단어의 정의가 바뀌어 사용되었기 때문에
S5C	무언가를 배우러 오는 곳	생각하는 방향이 달라졌으니까
S5D	자신의 생각을 파헤쳐 내기 위해서 다니는 곳	거의 다니지 않은 것은 참이지만 학교의 정의가 달랐기 때문에

록 학교 정의를 세워보았는데 최종적으로 결정한 학교의 정의는 ‘법률에 의하여 교사가 학생에게 일정한 나이에 해당하는 정규 교육을 실시하는 기관’이었다(E1). 2차 적용에 참가한 4명의 학생 모두 용어의 정의는 꼭 필요하다고 했으며 용어를 명확하게 생각해야 정확한 판단을 할 수 있다고 생각했다.

나) 정의의 조건 이해(S3)

정의의 필요성을 인식한 학생들은 토의를 통해 정의의 조건은 모든 사람들이 인정해야 한다는 객관성, 특정한 누군가에 유리하게 작용하면 안된다는 공정성, 용어의 뜻이 서로 간섭하지 않고 정확해야 한다는 명확성을 이야기했다(S3). 이후에 교사는 학습지를 통해 전문 분야에서 사용하는 언어에서 정의의 조건에 대해 물어보았고 4명 모두 전문분야 용어의 정의는 특히 더욱 명확해야 함에 동의하였다. 이 결과는 전문분야에 속하는 수학에서 정의가 명확해야 함을 안내하는데 도움을 주었다. 용어 정의의 성립 조건에서 언급했던 객관성, 공정성, 명확성이 수학용어의 정의 성립조건에도 적용이 되었다(S3). 학생들은 일

상생활에서와 수학에서 용어의 정의의 필요성과 성립 조건에 대해 이해했다.

나. 2차시: 무정의 용어의 필요성

1) 활동 선정 이유

증명의 구조에서는 무정의 용어가 가장 먼저 등장해야하지만, 학생들이 무정의 용어에 대한 필요성을 이해하기 위해서는 정의의 개념이 형성되고 나서야 가능하기 때문에 2차시에 편성하였다. 왜냐하면 용어의 정의를 실제로 수용한다는 것은 그 정의 안에서 사용한 단어를 동일한 의미로 이해한다는 것이고(Fawcett, 1938), 이렇게 정의를 내리는 과정이 거듭되면서 그 의미가 모호하지 않고 너무나 명백해서 정의가 필요하지 않은 몇 개의 개념이 존재한다는 것을 학생들이 인식한다면 일관성 있는 논리 체계를 형성하기 위해서는 무정의 용어가 필요함을 이해할 수 있기 때문이다.

이러한 이해를 돕고자 비수학적인 질문으로 '우리 몸의 구성'과 '생명의 탄생'을 제시했다. 차시 학습 목표는 '수학에서 무정의 용어의 필요성을 이해할 수 있다.'이다.

2) 분석틀 관련 요소 및 적용 결과 학생 반응 분석

<표 Ⅳ-4> 학생 반응 분석틀과 학생별 반응 결과 (2차시)

관련 요소	S6A	S6B	S5C	S5D
S1. 무정의 용어의 필요성 이해.	○	○	○	○

3) 학생들의 주요 반응

가) 무정의 용어의 필요성 이해(S1)

'우리의 몸은 무엇으로 이루어져 있습니까?' 라는 질문을 통해 학생들은 전체에서 부분으로 관심을 가지게 되었고 최종적으로 에너지, 원자(쿼크), 칼슘, 핵, C,H,O,N, 미토콘드리아 등 다양한 의견이 제시되었다. 학생들은 토의하면서 상위 개념으로 갈수록 용어 개념의 끝이 없음을 느꼈다. 이 후에 [장면 1]과 같은 토의가 전개되었다.

[장면 1]

교사 : 우리의 몸은 무엇으로 이루어져 있는지 알아볼 때, 그 끝이 있을까요?

S5C : 음.. 이거 끝없이 가겠는데요. 이상하다. 끝이 없어도 되나?

S6A : 끝은 있겠지. 만약 없으면 우리 몸이 존재하지 않는 건가요? (웃음)

교사 : 만약 끝이 없다면 이론적으로 설명이 가능할까요?

S6B : 불가능해요. 말로 표현할 수 없잖아요. 용어가 있어야 제대로 설명할 수 있어요.

교사 : 분명 존재하고 있는 우리 몸을 명확하게 설명하기 위해서는 무엇이 필요할까요?

S5B : 정의할 수 없지만 그 끝(또는 처음)에 해당하는 용어를 정해줘야 해요.(S1)

교사 : 오~ 좋은 생각입니다. 여러분이 얘기한 원자, 에너지, CA과 같이 사람들끼리 의견 차이 없이 특별히 정의가 필요하지 않지만 다른 용어를 정의하는데 꼭 필요한 용어들에게 정의 없이 이름을 붙여주는 것이죠.

정의를 계속 하다보면 결국에 순환 오류에 빠지지 않기 위해서는 정의를 내릴 수 없는 용어가 존재하게 되고 그것을 용어로서 받아들여야 설명이 가능하다는 것을 알게 되었다. 이렇게 비수학적인 상황에서 '정의할 수 없는 용어'가 무엇인지 알게 된 것을 수학으로 발전시키기 위해 4개의 수학에 관한 명언을 참고로 하여 수학의 정의를 세워보았다. 이를 통해서 학생들은 "수학이란 단순히 계산만 수행하는 학문이 아니라 이 세계에서 일어나는 현상을 수나 논리로 설명하는 학문"이라고 정의하였다.

이 수학의 정의를 생각해볼 때, 수학에도 '더

이상 정의할 수 없는 용어'가 필요한지 물어보자 처음에는 무정의 용어의 필요성을 알지 못한 학생(S5C, S5D)도 있었으나, 토의 결과 필요하다는 것을 4명 전원 이해했다. 그 필요성을 처음에는 알지 못했던 이유를 확인해본 결과 S5D는 1차시에 배웠던 정의 활동에서 모든 용어를 명확하게 정의해야 한다는 생각이 강하게 작용되었기 때문이라고 설명했다. 하지만 수학의 의미를 이해한 후 이 세계를 설명하기 위해서는 '무정의 용어-더 이상 정의할 수 없는 용어'가 필요함을 이해했다. 수학에서 필요한 '무정의 용어'의 예로 학생들은 점, 선, 면, 입체 등을 이야기 했다.

다. 3차시: 게임의 구조 파악하기

1) 활동 선정 이유

일상적인 게임에도 연역적 증명 구조와 유사한 구조를 가지고 있다. 다만 게임에서는 게임을 위한 준비 재료를 무정의 용어로 사용하면서 규칙에 사용되는 용어를 정의로, 게임 규칙을 가정이나 공리처럼 사용하고, 실제 경기는 해결해야 하는 정리로 사용한다. 또한 게임에서 심판을 보기 위해서는 규칙과 용어를 명확하게 이해해야 하듯이 수학에서 증명을 하려면 공준과 용어의 정의를 이해해야 한다.

따라서 학생들에게 친숙한 게임을 활용하여 수학의 증명 구조와 유사한 게임의 비형식적 연역 구조에 익숙해진다면 그들이 수학에서의 증명의 구조와 본질을 이해하는데 도움을 줄 수 있을 것이다. 이번 차시의 주요 활동으로는 경기에서 규칙이 하는 역할과 증명에서 공준의 역할, 게임의 연역적 구조 분석과 수학 증명 구조 분석, 게임을 하기 위한 조건 분석과 증명의 본질 이해, 규칙의 변화가 게임에 미치는 영향과 공리의 변화가 수학에 미치는 영향에 대해 상호 연결하며 학습하고자 한다.

2) 분석틀 관련 요소 및 적용 결과 학생 반응 분석

<표 Ⅳ-5> 학생 반응 분석틀과 학생별 반응 결과 (3차시)

관련 요소	S6A	S6B	S5C	S5D
S1. 무정의 용어의 필요성 이해.	○	○	○	○
S2. 정의의 필요성 이해	○	○	○	○
S4. 공준의 역할과 필요성 이해	○	○	○	○
S5. 정리의 역할과 필요성 이해	○	○	○	○

3) 학생들의 주요 반응

가) 게임의 연역적 구조 분석

축구를 소재로 하여 게임의 연역적 구조를 분석한 결과, 1차 적용 때와 마찬가지로 학생들은 준비요소(무정의 용어)와 규칙에 사용되는 용어(정의)를 작성하고 규칙(공리)을 설명했다. 이러한 기본 구조를 바탕으로 하나의 완전한 축구경기(정리)가 성립할 수 있다는 것을 느낄 수 있었다. 이는 한 판의 축구경기처럼 하나의 수학 정리도 연역적 구조를 통해 하나의 완전한 증명이 될 수 있음을 이해하도록 돕는 경험이 되었다(S1, S2, S4, S5).

나) 규칙의 변화가 게임에 미치는 영향 인식

[장면 2]와 같이 게임에서의 규칙을 확인하는 과정에서 규칙이 다르면 게임도 달라진다는 것을 확인하면서 공준의 역할과 필요성을 이해했다(S4).

[장면 2]

교사 : 윷놀이에는 어떤 규칙이 있나요?

S6B : 말판에서 꼭짓점에 말이 가면 대각선 방향 또는 수직방향으로 이동할 수 있어요.

S6A : 어? 꼭짓점에서는 무조건 대각선 방향으로 가는 것 아닌가요?

S5A : 아니야 형! 선택할 수 있어.

교사 : 좋습니다. 규칙이 서로 다른데 게임 시작 전에 이 규칙을 통일시키고 시작한다면 괜찮을까요?

학생들 : 예

교사 : 그러면, 규칙을 다른 것으로 선택했다면 게임은 어떻게 될까요?

S6A : 규칙에 따라 게임도 달라져요.

S5C : 꼭짓점 위치에서는 잡을 수 있는 경우가 못 잡을 수도 있게 되요

규칙을 어떻게 정하느냐에 따라 게임의 방향이 달라진다는 것과 규칙을 정하고 학생들끼리 합의 과정을 거친다면 게임의 구조를 완성할 수 있다는 것을 보여주었다(S4). 이것은 [장면 3]과 같이 수학에서도 규칙(공리)를 바꾸면 새로운 수학이 형성될 수 있다는 것을 학생들이 이미 알고 있을 법한 비유클리드 기하학의 예시를 통해 이해를 도와주었고, 결론이 참이라는 것은 절대 진리의 문제라기보다는 일관성에 대한 문제라는 것을 알 수 있도록 도와주는 경험이었다(S5).

[장면 3]

교사 : 수학에서도 규칙이 바뀐다면 새로운 수학이 생기겠네요.

학생들 : 예

교사 : 그렇다면 여러분 삼각형의 내각의 합은 몇 도예요?

학생들 : 180도입니다.

교사 : 그렇죠. 하지만 270도가 되는 경우도 있다던데요?

S5B : 어떻게요?

S6A : 아~ 알아요. 비유클리드 기하학이죠?

교사 : 빙고! 어떻게 가능하죠?

S6A : 책에서 봤는데요. 평면이 아니라 지구 표면 위에서 큰 삼각형을 그리면 270도가 된다고 했어요.

교사 : 그런데 그처럼 결론이 이전과 다르게 나올 수 있게 된 이유가 뭐죠?

S6B : 평면이 아닌 입체로 규칙을 바꿔서요(S4).

라. 4~5차시: 구조화한 게임과 연역적 증명방법의 구조적 연결활동

1) 활동 선정 이유

이전 차시에서 게임을 통해 분석한 연역적 구조를 수학 증명과 연결시키기 위한 활동이다. 학생들은 ‘맞꼭지각은 서로 같다.’를 증명해 본 후, 증명 방법을 비형식적 자료인 이야기를 통해 제시하여 자연스럽게 증명의 가치와 흥미를 느낄 수 있도록 설계하였다. 이 후에 게임에서 사용하는 용어와 증명에서 사용하는 용어를 서로 연결시키는 활동을 통해 수학 증명은 게임의 구조와 유사함을 느끼면서 친밀감을 형성시키고자 한다.

2) 분석틀 관련 요소 및 적용 결과 학생 반응 분석

<표 Ⅳ-6> 학생 반응 분석틀과 학생별 반응 결과 (4-5차시)

관련 요소	S6A	S6B	S5C	S5D
S7. 연역적 체계로의 확장	○	○	○	○

3) 학생들의 주요 반응

가) 이야기를 통해 증명방법 제시 후 수학 증명 연역적 구조로 분석(S7)

1ㆍ2차 적용에 참가한 학생 8명 중 3명만 ‘맞꼭지각은 서로 같다’라는 정리를 해결하였다. 이후 증명 방법을 교육할 때 국문학자 양주동이 쓴 수필 ‘몇 어찌’라는 이야기라는 비형식적 소재를 통해 제시했다. 학생들은 이야기를 통해 수학의 아름다움과 연역적 사고의 힘을 느꼈다고 했다. 증명 방법을 이해한 후 증명을 연역적 구조로 분석해보았다. 참가한 학생들은 증명의 구조에 맞게 분석했고, 그 중 S5C의 분석 결과는 [그림 Ⅳ-1]과 같다(S7).

수학 증명을 구조적으로 분석할 때 S5C는 선분을 무정의용어라고 했다. 2차시 때 무정의 용어의 필요성을 이해했지만 그것이 무정의 용어

4. 위의 맞꼭지각 증명에서 사용된 수학 증명의 구조를 분석해 봅시다.

무정의 용어	선분, 아래위 각이 서로 같은 것, 각, =, +
정 의	교차, 맞꼭지각, 교점
공준(공리)	a+b=180° c+b=180° a+b=b+c = a=c
정 리	a+b=b+c =a=c

[그림 Ⅳ-1] 수학 증명 구조 분석(S5C).

의 정확한 구별로 이어지지 않았다. 따라서 교사는 학생들의 답변이후에 적절한 오류 수정 활동을 할 필요가 있다.

또한 S5C와 S5D는 덧셈을 무정의 용어로 보았다. 역시 학생들이 스스로 실수의 대수적 성질을 공리로 정의한다는 것을 아는 것은 어려운 것이었다. 하지만 이 프로그램의 목적은 세부적으로 수학 용어를 분류하는 것이 목적이 아니라 수학 증명의 구조를 이해하는 것이 목적이기 때문에 연역적 구조를 이해하는 방향으로 프로그램을 운영해야한다. 따라서 이 단계의 활동은 초등 수학 영재들이 스스로 해결하기를 기대하기 보다는 탐구활동을 통해 학생들이 고민한 후 교사의 도움으로 올바르게 구조를 세우는 활동으로 전개하고, 학생들이 이러한 요소들을 근거로 하여 하나의 완전한 정리가 증명됨을 이해할 수 있도록 도와주어야겠다.

나) 축구 경기와 수학 증명 구조 연결(S7)

축구 경기에서 분석한 연역적 구조와 수학 증명 구조의 유사한 부분을 1·2차 적용에 참가한

5. 축구 게임을 하기 위해 필요한 조건들과 위의 수학 증명 구조를 서로 연결시켜 봅시다.

게임하기 위해 필요한 준비요소 --------(무정의용어)　규칙에 사용되는 용어 --------(정의)

규 칙 --------(공준(공리))　경 기 --------(정리)

[그림 Ⅳ-2] 게임과 수학 증명의 구조 연결 (S6A).

8명 모두 [그림 Ⅳ-2]와 같이 알맞게 연결하였다. 한 판의 경기가 완전하게 이루어지듯 하나의 정리도 이러한 연역적인 구조를 지녀서 완성된다는 것을 이해하는데 도움을 주었다.

다) 수학 용어를 연역적 체계 구성요소로 구분(S7)

연역적 체계 구성요소(무정의 용어, 정의, 공준, 정리)를 학생들이 알고 있는 것이 수학 용어를 구성요소별로 옳게 구분하는 것으로 연결되지 않았다. 학생들은 '부피', '거리', '높이'가 정의와 무정의 용어 중 어디에 해당하는지 고민을 많이 했다. 토의 결과 '부피'와 '거리'는 정의를 내리지 않아도 명백한 의미로 개념이 존재하지만 '높이'는 다를 수 있으므로 '거리'를 이용하여 정의해야 하므로 정의라고 결정했다. 수학용어에 대한 연역적 체계 구성요소별 구분을 완료한 학생들의 반응은 어려웠지만, 재미있었다는 반응과 생각이 정리가 되어 좋았다는 반응을 보였다.

6. 다음 보기들 중에서 무정의 용어, 정의, 공준, 정리에 해당되는 것을 찾아 봅시다.

	무정의 용어	정의	공준	정리		무정의 용어	정의	공준	정리
예각		V			직사각형		V		
점	V				평행선		V		
선	V				직각		V		
외각		V			대각선		V		
부피	V				원		V		
동위각		V			선분		V		
엇각		V			넓이	V			
면	V				합동		V		
거리	V				방향	V			
높이		V			이등변삼각형		V		
밑변		V			각	V			
마름모		V			~위에 있다.	V			
두 같은 수량에서 같은 수량을 빼면 결과는 같다								V	
선분에는 점들이 있다.								V	
모든 직각은 같다.								V	
평행하면 동위각은 같다.								V	
평행사변형은 두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형이다.							V		
삼각형의 내각은 180° 다.									V
정삼각형은 세 변의 길이가 같은 삼각형이다.							V		
평행사변형은 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.									V

[그림 Ⅳ-3] 수학 용어 연역적 체제 분석(S6A).

라) 수학증명 구조가 연역적 체계를 가져야 하는 이유(S7)

학생들은 게임이 연역적 구조를 가지고 있기 때문에 공정하게 진행된다는 것을 인지했고, [장

면 4]와 같이 실생활 영역으로 확장하여 수학 증명을 이해하는 데 도움을 주는 계기가 되었다.

[장면 4]

S5C : 나는 가수다에서 김건모가 7위로 떨어지고, 다시 부를 때는 인터넷에서 욕을 많이 했지만, BMK가 7위하고 다시 부르는 것은 사람들이 욕하지 않았어요. 똑같이 7위했지만 규칙이 다르니까 사람들의 반응이 달라졌어요(S4).

S6A : 게임에서 일단 규칙을 함께 정하면 사람들은 그것으로 판단해서 그렇죠.

교사 : 그럼. 우리가 하나의 완성된 게임을 규칙과 용어를 통해 인정하듯이 수학증명을 받아들이기 위해서는 수학 증명이 어떤 구조를 보여야 할까?

S6B : 게임처럼 모두가 인정하는 규칙과 용어를 사용해요.

교사 : 오케이. 그것이 바로 수학에서 무엇이죠?

학생들 : 공리요.

하나의 완성된 게임을 수학 증명과 연결시킨 활동은 수학 증명을 실생활 사례를 통해 친숙하게 했으며, 세상에서 볼 수 있는 다양한 현상과 게임을 연역적으로 분석할 수 있다는 생각을 가지게 했다(S7). 이 내용을 발전시켜 S5D는 “세상은 곧 수학”이라고 이야기했다. 주변 현상을 수학적으로 바라보고 수학과 관련시키려는 태도가 형성될 수 있음을 알 수 있다.

마. 6차시: <MIU 게임> 활동을 통한 공리-연역적 증명학습

1) 활동 선정 이유

David(1995)는 수학 게임이 증명이라고 소개 했으며 그 이유는 게임이 연역적 증명방법과 유사한 구조를 가지고 있기 때문이다. 비록 증명은 많은 시간을 할애해도 학생들이 어렵게 느끼는 개념이지만(우정호, 1994), Gernes(1999)는 게임을 통해 학생들이 연역적인 방법에 익숙하다고 깨닫는다면, 학생들은 증명의 개념을 형성할 준비가 된다고 했다. 그래서 그가 고안한 게임이 <MIU

<M I U 게 임>	
재료 (무정의 용어)	문자 M, I, U
의미 (정의)	☆는 I나 U로 만들어진 어떤 문자열을 의미한다..
주문 규칙 (공준)	1. 만약 어떤 문자열이 I로 끝나면 마지막에 U를 붙일 수 있다. 2. 만약 M☆이 나오면 ☆를 한 번 더 쓸 수 있다. 예) M☆☆ 3. 만약 I I I 가 나오면 U 로 바꿀 수 있다. 4. UU 가 나오면 생략할 수 있다.

■ 다음은 주어진 가정에서 생성된 문자열의 참, 거짓을 밝혀내는 방법입니다.

만약 MI가 주어지면 MIIU를 만든다.

- 1단계 : 주어진 문장에서 가정과 결론을 찾는다.
  가정 : MI 결론 : MIIU
- 2단계 : 가정에서 결론이 나온 이유가 무엇인지 규칙을 찾아 옳음을 밝힌다.

(방법1)

MI--------->MII-------> MIIU
(공준 2에 의해) (공준 1에 의해)

(방법2)

진술	이유
MI	가정
MII	공준2
MIIU	공준1

따라서 MIIU는 진짜이다.

[그림 Ⅳ-4] MIU 게임.

게임>이다. MIU 게임은 [그림 Ⅳ-4]와 같이 연역적 체계를 모델화 시킨 게임이다. 따라서 본 프로그램은 MIU 게임을 통해 연역적 추론 능력을 신장시키면서 증명하는 방법을 인지하고 증명의 본질에 접근할 수 있는 경험적 기회를 제공하고자 한다.

2) 분석틀 관련 요소 및 적용 결과 학생 반응 분석

<표 Ⅳ-7> 학생 반응 분석틀과 학생별 반응 결과 (6차시)

관련 요소	S6A	S6B	S5C	S5D
S4. 공준의 역할과 필요성	○	○	○	○
S7. 연역적 체계로의 확장	○	○	○	○
E2. 받아들여야 하는 결론에 대해 그것을 지지하는 증거를 요구한다.	○	○	○	○

3) 학생들의 주요 반응

가) MIU 게임을 통해 증명의 개념 이해(S4)

MIU게임 후에 게임에서의 결론이 참이 되는 것을 설명하는 과정에서 공준의 역할이 크다는 것을 확인해서인지 4명 모두 증명의 정의에 '공준'을 언급했다(S4). 이 경우의 대화는 증명의 개념을 확인시키는데 [장면 5]와 같이 좋은 교육적 기회가 되었다.

[장면 5]

교사 : MIU 게임을 해본 결과 증명이란 무엇이라고 생각합니까?

S6D : 증명은 결론이 맞다는 것을 공준으로 밝히는 과정입니다.

교사 : 공준이 뭐죠?

S6A : 너무 당연해서 모두 참이라고 증명 없이 받아들이는 규칙이요.

교사 : 그렇다면 공준을 이용해서 증명한다는 것은 무슨 뜻일까요?

S6B : 참인 내용을 근거로 하여 결론이 맞다는 것을 설명하는 것이요.

S6D : 도미노같이 맞는 내용끼리 서로 연결되서 결론을 설명해요..................

교사 : 공준을 이용해서 결과가 참임을 설명합니다. 그런데 무엇으로부터 증명이 시작되나요?

S6D : 가정이요. 가정에서 시작합니다.

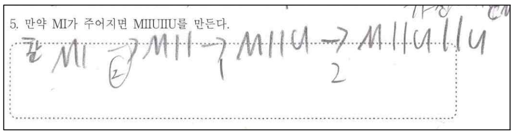
교사 : 증명에 대해 구체적으로 정의해 볼까요?

S6A : 가정으로부터 출발하여 공준을 근거로 하여 결론이 참임을 이끌어 내는 것이요.

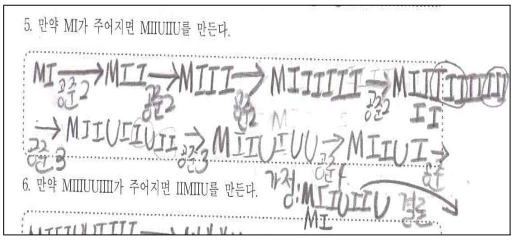
MIU 게임을 통해 학생들은 증명의 개념을 이해했다. MIU게임 전 학생들의 증명 개념이 설명적 기능으로 결과만 주목했다면 MIU 게임을 실시한 후에는 증명 방법과 과정에 대한 이해가 증명의 정의 속에 반영되었다.

나) 좋은 해결 방법에 대한 생각

같은 명제를 가지고 S5D와 S6B는 [그림 Ⅳ-5] [그림 Ⅳ-6]과 같이 서로 다르게 증명하였다.



[그림 Ⅳ-5] MIU 문제 해결 (S5D).



[그림 Ⅳ-6] MIU 문제 해결 (S6B).

위의 반응을 통해 증명방법의 다양함과 효과적인 증명 방법의 이해의 기회를 얻을 수 있었다. 4명 학생 모두 S6B 방법보다는 S5D의 방법이 더 간결하고 좋다는 의견을 보였다.

다) 공리의 역할 이해(S4)

MIU 게임 문제 6문제 중 2문제는 결론이 거짓이었다. 학생들은 이 거짓을 참으로 바꿀 수 있는 방법으로 새로운 공리의 추가를 생각해냈고, 그에 맞는 공리를 추가하면서 거짓도 참으로 바뀔 수 있음을 알았다. 공리의 역할 이해와 증명에서 중요한 것은 논리의 일관성임을 느낄 수 있었다.

바. 7~8차시: 광고・신문기사・패러독스 분석하기

1) 활동 선정 이유

Fawcett(1938)은 광고를 증명의 아이디어가 포함된 상황을 탐구할 수 있는 풍부한 영역이라고 말했다. Paulos(1996)도 신문의 수학적 개념을 통한 비판적 읽기를 통해 주제를 더욱 분명하게 이해할 수 있다고 했다. 패러독스 이야기는 아무 비판 없이 논리 전개에 동의하다 보면 모순된 결론에 이를 수 있다는 것을 경험함으로써 논리 전개를 자세히 바라보고 명시적 가정뿐만 아니라 암시적 가정을 바라보는 시각을 가질 수 있도록 도와준다. 따라서 본 차시에서는 <표 Ⅳ-8>에 제시한 광고・신문기사・패러독스를 활용하여 학생들이 증명의 본질을 이해할 수 있도록 돕고자 한다.

<표 Ⅳ-8> 광고·신문기사·패러독스와 선정이유

구분	내용	선정이유
광고	화장품 광고(SK2 피테라 에센스)	논리적이고 접하기 쉬운 광고
신문기사	휴대폰은 뇌암을 일으킨다.	학생들이 관심을 가지고 있는 소재이면서 2개의 관점이 공존하는 소재
	휴대폰은 뇌암을 억제한다.	
패러독스	사형수의 패러독스	가정들 사이의 관계가 결론에 미치는 영향
	아킬레우스의 거북이	한 가정의 오류가 결론에 미치는 영향

2) 분석틀 관련 요소 및 적용 결과 학생 반응 분석

<표 Ⅳ-9> 학생 반응 분석틀과 학생별 반응 결과 (7-8차시)

관련 요소	S6A	S6B	S5C	S5D
S7. 연역적 체계로의 확장	○	○	○	○
E2. 받아들여야 하는 결론에 대해 그것을 지지하는 증거를 요구한다.	○	○	○	○
E3. 증거를 분석하고 가정과 사실을 구별한다.	○	○	○	○
E4. 결론에 필수적인 명시적 가정과 암묵적 가정을 인식한다.	○	○	·	·
E5. 가정 중 어떤 것을 수용하고 어떤 것을 기각해야 할지를 평가한다.	○	○	○	○
E6. 주장을 평가하여 결론을 받아들이거나 기각한다.	○	○	○	○

3) 학생들의 주요 반응

가) 비수학적 상황에서 가정 인식하기

활동 전 학생들이 생각하는 가정의 뜻은 '우선적으로 정하고 시작한다.'는 의미가 강했다. 또한 1차 적용 때 [장면 6]과 같이 가정을 나타내는 표현법으로 '~라면'이라는 형태가 등장하면 가정이라고 생각했다.

[장면 6]
교사 : 왜 '콜게이트 치약을 사용하면 데이트 신청이 올 것이다.'가 가정이라고 생각하죠?
S6D : ~라면이라고 생각했기 때문이예요.

이러한 가정에 대한 오개념으로 광고를 분석한다면 광고의 결론이라 할 수 있는 주장을 가정이라고 생각하기 쉽다. 따라서 증명에서 의미하는 가정을 생활 속의 행동을 통해 먼저 익히고 시작하였다. 학생들은 '학생들에게 분수의 나눗셈을 가르치고 있는 선생님'은 학생들이 분

수를 알고 있다고 가정하였고, '소중한 재산을 은행에 예금하는 엄마'는 은행은 재산을 안전하게 지켜줄 것이라는 가정, '감기가 걸려서 병원에 가는 동생'은 병원가면 감기를 치료할 수 있다는 가정이 있다고 설명하였다. 이어서 가정의 정의를 탐구하였고 가정이란 '어떤 논리를 펴 나가기 위하여 사실인 것처럼 받아들이는 것'이라고 가정의 뜻을 이해했다. 또한 학생들은 '배탈이 나서 죽을 먹는 사람'등 다양한 예를 만들고 그 속에서 가정을 파악해 보았다(E4).

나) 증거를 분석하고 가정과 사실을 구별(E3) 후 가정 평가하기(E5, E6)

광고의 주장을 생각해보자는 교사의 질문이 없었던 1차 적용 때, 학생들은 주장을 가정으로 인식하기도 했으며, 증거 중에서 사실과 가정을 구분해야 하는 필요성도 알지 못했다. 그러나 2차 적용 학습지 질문지에는 주장을 명확히 인식한 후에 증거를 탐색하는 활동으로 구성한 결과, 학생들은 주장을 지지하는 증거들을 파악했다. 또한 [장면 7]과 같이 증거를 사실과 가정으로 구분하는 활동을 통해 광고의 결론에 대한 판단은 발견한 가정의 수용 여부와 일치한다는 것을 확인했다.

[장면 7]

S6A : 양조장 주조사의 손의 고왔다는 것과 화장품에 피테라 원액이 90% 포함되었다는 것은 사실입니다(E3).

교사 : 사실은 아니지만 옳다고 믿고 증거로 제시한 것이 있나요?

S6B : 피테라가 양조장 주조사 손을 곱게 했을 것이다. 손에 좋아지는 것은 얼굴도 좋게 한다(E3).

교사 : 옳다고 믿는 그 가정에 동의하나요?

S6A : 아니요. 주조사가 피테라가 아닌 다른 이유로 고울 수도 있고, 그 한 주조사에게만 해당되는 이야기 일 수도 있어요(E5, E6).

S6B : 옛날에 핸드크림 얼굴에 발라서 여드름 생겼다는 이야기 들은 적이 있어요. 손에 효과 있다고 얼굴에 효과 있다는 것은 무리예요(E5, E6).

학생들은 증거 중에서 사실은 받아들여야 하지만 그에 따른 가정은 판단할 수 있다는 것을 인지했다(E5). 이를 통해 결론을 수용할 때 반드시 숨겨진 가정을 파악해야하는 필요성을 인식했다. 학생들이 이 광고를 처음 접하고 등급을 결정했을 때'보통','좋음'으로 결정했지만 이렇게 가정을 분석하는 과정을 통해'형편없음'으로 수정하였다.

다) 명시적 가정과 암묵적 가정 인식(E4)

학생들은 가정 중에서도 사실을 기반으로 드러난 명시적 가정과 사실로 나타나 있지 않지만 암묵적으로 가정하고 있는 사실도 발견해냈다. [장면 7]에서 S6A는 주조사 사실을 기반으로 직접적으로 드러난 가정이고, S6B는 사실로 언급 되지 않았지만 암묵적으로 옳다고 여기는 가정이라는 것을 확인했다. 그러나 이 활동 결과는 1차 활동에서는 보이지 않았다. 그러므로 이 현상은 자연스럽게 이루어진 것이 아니며, 2차 적용 때 학습지 질문을 변경하고 교사의 발문이 추가되면서 가능해졌다.

라) 다른 광고로 확장

[장면 8]과 같이 생활 속에서 접할 수 있는 다른 광고에도 확인해 보려는 태도를 볼 수 있었다.

[장면 8]

S5B : 모든 광고에 가정이 숨어있을까?

S6B : 없는 것도 있지. '앞 뒤가 똑같은 전화번호 1577-1577 (웃음)

교사 : (웃음) 그 광고에는 과연 가정이 없을까요? 우선 광고의 목적은 무엇일까요?

S6A : 앞 뒤가 똑같은 번호를 이용하면 사람들

이 많이 전화할 것이다.

교사 : 그 주장을 뒷받침하는 증거는?

S6B : 아~ 외우기 쉬운 번호에 사람들이 전화한다는 가정이 있네요(E4).

사. 9차시 : 분석법

1) 활동 선정 이유

분석법은 결론이 이미 이루어진 것처럼 가정해서 시작하는 방법이다(나귀수, 2009). 분석법을 이해하기 쉽게 하는 비형식적 활동으로 미로게임을 선정했다. 어려운 미로문제를 해결하기 위해서 도착점부터 시작해보는 행동이 증명을 위해 결론부터 분석하는 활동과 서로 유사하기 때문이다.

2) 분석틀 관련 요소 및 적용 결과 학생 반응 분석

<표 Ⅳ-10> 학생 반응 분석틀과 학생별 반응 결과 (9차시)

관련 요소	S6A	S6B	S5C	S5D
S7. 연역적 체계로의 확장	○	○	○	○

3) 학생들의 주요 반응

가) 분석법의 이해

미로게임은 흥미도가 높았다. 미로 게임을 쉽게 할 수 있는 방법으로 4명 중 3명의 학생이 도착점부터 푸는 방법을 선택했다. 거꾸로 풀지 않았던 1명의 학생은 가장 늦게 해결했다. 학생들은 미로게임을 해결하면서 출발점은 가정, 도착점은 결론과 유사하다고 했으며, 도착점부터 풀어보며 실마리를 찾는 미로 게임처럼 증명 방법을 탐색하는 방법으로 결론을 분석하여 필요한 공리나 정리, 수학적 지식을 찾아내는 분석법을 알게 되었다.

나) 미로 게임 연역적 구조 파악

게임의 구성요소를 연역적인 구조로 파악하는 사례를 [장면 9]와 같이 발견했다.

[장면 9]

교사 : 증명에서 가정과 결론이 쉽게 이어지지 않을 때 보조선을 긋는 방법은 미로가 잘 해결되지 않을 때 미로 벽을 지우는 것 같이 보다 쉽게 진행하는 것과 비슷하겠지?

S6A : 어? 미로 풀 때 그렇게 해도 되요?

S6B : 미로 벽은 규칙 아닌가요?

S6A : 그럼 공리인데 공리를 무시하고, 바꾼다는 건데요.

교사 : 아! 그렇구나. 벽을 지우면 안되겠구나. 미안하다. 만약 벽을 지우면 그 미로게임은 어떤 게임이 되죠?

S6A : 새로운 미로게임이요.

미로게임의 구성요소 중 미로의 벽을 공리로 해석했으며, 공리의 변화는 새로운 수학 탄생을 시사했다.

다) 증명의 개념 명확화

미로게임은 학생들이 증명의 개념을 시각화하는데 도움을 주었다. 가정에서 출발하여 공리와 이미 증명된 정리를 이용하여 결론이 참임을 설명하는 과정이 출발점에서 시작해서 미로 벽의 규칙을 지키며 도착점까지 이르는 과정으로 쉽게 이해하고 적용했다.

2. 사전·사후 검사 결과 분석

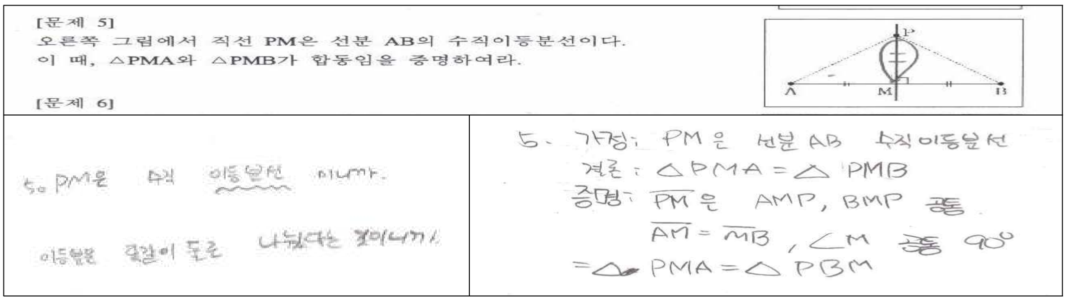
가. 증명능력검사

나귀수(2009), 김정하(2010)에서 사용한 검사 문제 중에서 초등학교 수학 지식을 이용하는 증명 문제를 선정하여 프로그램 적용 전・후에 증명능력 검사를 실시한 결과 <표 Ⅳ-11>과 같이 4명의 학생 모두 사후검사에서 사전검사보다 성취도가 14~36% 가량 향상했다. 증명 구조 학습이 증명 해결 방법 발견에 도움을 준다는 것을

<표 Ⅳ-11> 증명능력 검사 결과 (사전·사후)

학생 \ 문항		나귀수 (2009)								김정하(2010)						합계(%)
		분석법								기하		대수				
		1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	
S6A	사전	△	△	×	×	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	11 (79)
	사후	○	○	○	○	○	○	○	○							14 (100)
S6B	사전	○	×	×	△	○	×	×	×	○	×	○	○	○	○	7.5 (54)
	사후	○	×	○	○	○	×	○	○		○					12 (86)
S5C	사전	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	1 (7)
	사후	○	×	○	×	○	×	○	×	○	○	×	×	×	×	6 (43)
S5D	사전	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	0 (0)
	사후	×	×	×	×	×	×	○	×	○	×	×	×	×	×	2 (14)

※ ○ : 해결, △ : 해결 방법 파악했으나 명확하게 표현하지 못함, × : 미해결



사전검사　　　　　　　　　사후검사

[그림 Ⅳ-7] S5C 학생의 증명 능력 검사 5번 문제 사전·사후 비교.

확인할 수 있었다. 그러나 증명 구조 학습을 통해 모르고 있던 수학 지식이 발견되거나 오개념이 수정되지는 않았다. 또한 S5D학생을 보면, 기하 증명 수준은 형식적 일반적 증명을 시도했으나 대수 증명 수준은 특수한 경우를 점검한 수준을 보였다. 이를 통해 영역에 따라 증명 수준도 다르다는 것을 확인했다. 끝으로 사후 검사에서는 불명확한 경우(△)가 없었으며, 이는 증명 구조 학습이 명확한 표현에 도움을 주었다고 할 수 있다.

학생들이 증명 문제를 해결한 한 가지 사례를 살펴보면, S5C는 5번 문제를 해결할 때 [그림 Ⅳ-7]과 같이 사전 검사에서는 수직 이등분선이 둘로 똑같이 나누니까 합동이라고 설명하였다. 사후 검사에서는 가정과 주어진 조건을 활용하여 결론이 참임을 증명하였다.

나. 증명태도검사

김응태 외 2인의 태도 조사 설문지를 참고로 재구성한 박미덕(2003)의 태도 검사지를 사용하여 기하 증명의 중요도, 선호도, 학습동기, 난이도, 이해도와 각각의 이유를 조사하였다. 앞으로 도형의 증명 공부를 하고 싶은지에 대한 질문에는 4명 모두 '매우 하고 싶다.'고 응답하였다. 증명구조학습을 통해서 증명의 중요성·흥미도·연역적 구조 이해도·증명 학습에 대한 동기가 <표 Ⅳ-12>와 같이 상승·유지했다는 것을 연구

<표 Ⅳ-12> 학생들의 증명 태도 검사 분석

구 분	증명의 중요성	증명의 홍미도	연역적 구조 이해도	증명의 난이도
사전검사 (평균)	4.75	4.25	4	3.25
사후검사 (평균)	5	4.75	4.5	2.75

※ 본 검사는 5점 척도 검사로써 5점은 해당 항목에서 매우 긍정, 1점은 매우 부정을 나타냄

에 참여한 학생들에게서 관찰할 수 있었다.

그러나 증명의 난이도 면에서는 사전 검사보다 증명이 쉽다고 느낀 학생은 없었다. 비형식적 활동을 통한 증명교육 이후 학생들은 증명은 어렵지만 재미있고 중요하다고 인식했다.

다. 실험 참여 학생 소감

4명의 학생 모두 생활 속에서 수학을 발견할 수 있었던 기쁨과 즐거웠다는 반응, 다른 곳에서는 배울 수 없는 지식을 배웠다는 보람에 대해 공통적으로 언급했다. 학교의 정의를 배우면서 정의를 명확하게 세우는 것이 매우 중요하다는 것을 느꼈으며, 게임의 규칙이 바뀌면 게임이 달라지는 것처럼 수학도 달라진다는 것, 우리가 고민 없이 받아들였던 광고도 분석해보면 허술하다는 것, 전보다 훨씬 나아진 수학 실력을 느낄 수 있다는 의견도 있었다. 더 알고 싶은 내용으로 더 어려운 증명 풀어보기, 난제에 도전하기, 규칙 바뀌면서 탄생한 수학 등에 대해 알아보고 싶다고 했다.

3. 최종 자료의 분석기준에 의한 평가

수학 영재 교수·학습 자료로서 타당성을 확보하기 위해 4개의 분석기준을 설정하여 평가하였다.

첫째, 교사의 설명보다는 자기 주도적인 탐구활동에 좀 더 비중을 두어 개발하였는가?

명확한 정의 내리기와 증거에서 가정 구분하기와 같은 활동은 학생의 입장에서 자연스러운 사고의 흐름이 아니었기 때문에 교사의 설명과 질문이 필요했으며 생소한 증명의 구조를 다루기 때문에 교사가 설명해주어야 할 부분이 많았다. 그러나 모든 활동은 학생의 의견을 활용하여 진행하였고 생활 주변 비형식적 활동 소재를 이용했기 때문에 배운 내용을 생활 속에서 탐구하기 용이했고 이에 따라 다양한 창의 산출물 소재도 발견되었다.

둘째, 동일한 주제에 대한 활동을 쉬우면서도 흥미로운 비형식적 활동에서 점차 깊이 있는 탐구가 필요한 활동으로 단계적으로 구성하면서 각 활동 간에 연계성이 있도록 구성하였는가?

2차에 걸쳐 적용하면서 학생 반응의 문제점을 파악하여 개선해 나갔고 증명의 본질·구조 요소가 누락되지 않도록 분석틀을 통해 확인했으며 각 활동간 연계성 있는 구성을 위해 연계성이 부족한 활동의 경우 활동 제시 순서를 조정해 보면서 최종 자료를 개발하였다.

셋째, 수학적으로 의미 있는 의사소통 과정에 참여하도록 하면서 스스로의 사고를 체계화하고 명확화 할 수 있도록 하였는가?

증명 구조 학습을 통해 학생들은 사고를 연역적 구조로 체계적으로 분석할 수 있었으며 정의 세우기 활동을 통해 명확한 사고의 필요성을 인식할 수 있었다. 이러한 인식은 수업 중 발생하는 의사소통에 반영되었다. 또한 1차 적용보다 2차 적용 학습지에는 메타인지 질문을 수록하여 자신의 사고를 비교하게 함으로써 명확해 질 수 있도록 구성하였다.

넷째, 일상생활 속에서 연역적인 구조를 통하여 다양한 대상을 탐구할 수 있는가?

광고·신문기사·이야기·게임, 사람들의 사소한 행동까지도 탐구의 대상이 되었다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 초등 영재들의 증명 능력 향상을 목적으로 증명의 본질과 구조를 경험할 수 있는 비형식적 활동 교수·학습 자료를 개발하고 이를 실제 초등영재학급 학생들에게 적용한 사례들을 분석하여 다음을 확인할 수 있었다.

첫째, 증명 능력 검사 성취도가 14~44% 가량 향상되었다. 학생들에게 제시한 비형식적 활동에는 증명 능력 검사 문제를 해결하는데 필요한 수학적 지식이 포함되어 있지 않았지만 비형식적 활동을 통해 증명의 본질과 구조를 이해한 학생들은 이미 알고 있었음에도 사전 검사 때는 생각해내지 못했던 수학적 지식을 발견하여 문제해결에 활용하는 모습을 보여주었고, 이러한 반응은 성취도 향상과 연결되었다.

둘째, 학생들이 비형식적 활동을 통해 증명의 본질과 구조를 이해한 후에는 이전과 달리 증명을 표현하는 방법이 연역적 체계를 보였으며 자신의 생각을 구체적으로 기술하였다.

셋째, 증명의 구조와 본질을 학습했다고 해서 생소한 수학 지식이 급격히 발견되거나 오개념이 수정되지는 않았다.

넷째, 증명의 수준이 향상되었다. 사전 검사에서는 직관적인 방법으로 특수한 예의 증명을 시도했던 학생들이 비형식적 활동을 적용한 이후에는 친숙한 맥락의 증명을 시도하려는 태도를 보여주었다.

다섯째, 증명 태도 검사 결과 학생들은 증명의 구조와 본질을 이해한 후에 증명을 더 중요하게 생각했고, 더 흥미 있어 했으며, 연역적 구조에 대한 이해도 역시 상승했다. 그러나 증명에 대한 난이도 면에서는 사전 검사 때보다 증명이 쉽다고 느끼는 학생은 없었다.

여섯째, 비형식적 활동은 연역적 구조를 비수학적 상황으로 확장·적용하는데 도움을 주었다.

일곱째, 초등 영재들도 비형식적 활동을 통해 증명의 본질의 이해가 가능했다. 비록 학생들은 필수적인 명시적 가정과 암묵적 가정을 인식하는 것을 어려워했지만 2차 적용에 참여한 4명의 모든 학생들은 총 14개의 증명의 본질 요소 중 13개 이상을 이해하는 반응을 보였다.

연구에 참여한 초등 영재들은 비형식적 활동을 통해 증명은 어렵지만 재미있고 중요하다고 인식했고 앞으로 도형의 증명 공부를 하고 싶은지에 대한 질문에는 8명 모두 '매우 하고 싶다.'고 응답하였다. 교육은 지식의 습득을 넘어 새롭고 발전적인 것을 추구하려는 태도와 의지의 변화까지도 유발하는 일이어야 한다. 그런 측면에서 본 수업은 지식적인 면에서의 증명지도 가능성과 함께 영재들의 지속적인 학습을 위한 정의적인 측면의 태도와 의지의 변화도 초래하였다고 할 때, 초등학교 영재학급 수준에서도 비형식적인 증명 활동을 통해 증명의 본질과 구조를 이해하고 그 결과 증명 능력 향상을 기대할 수 있음이 확인된 셈이다. 이를 통해 초등 영재들을 대상으로 한 증명 교육의 시사점을 제안하면 다음과 같다.

첫째, 증명은 높은 수준의 사고활동이지만 비형식적 활동과 같이 학습자 수준에 맞는 교수·학습 자료를 제시한다면 증명 개념을 자연스럽게 이해할 수 있을 것이다.

둘째, 증명을 지도할 때 증명 구조에 대한 교육을 병행한다면 학생들이 이미 알고 있는 수학적 지식을 스스로 발견하여 활용할 수 있는 증명 교육이 이루어질 수 있을 것이다.

셋째, 비형식적 활동을 통한 증명 교육은 정서적 요인과 태도를 강조하는 개정 교육과정 수학교육에도 도움이 될 수 있을 것이다.

넷째, 수학 영역에 따라 학생의 증명 수준도 다양할 수 있기 때문에 증명 교육은 각 영역을 서로 연계·통합할 수 있는 교육이 되어야 한다.

증명 능력 검사 결과 한 개인의 기하 증명 수준과 대수 증명 수준이 서로 일치하지 않았다. 기하 증명에서 연역적 증명 구조를 보였지만 대수 증명에서는 특수한 경우를 점검하는 경우를 발견했다. 따라서 한 영역에 치우친 증명 교육을 지양하고 다양한 영역을 다루는 교육이 필요하겠다.

다섯째, 학생들이 증명에 대해 관심을 갖도록 하는 교육적 조치로써 문제를 쉽게 제시하는 것은 본질적인 해결방법이 아니다.

여섯째, 증명 구조 교육은 자신의 생각을 논리적으로 표현하는데 도움을 주기 때문에 수학적 의사소통을 강조하는 수학교육에서 훌륭한 대안이 될 수 있다.

일곱째, 새로운 학문의 도입활동으로 비형식적 활동을 활용한다면 학생들이 학문 탄생 배경을 자연스럽게 이해할 수 있는 기회가 될 수 있다.

참고문헌

강문봉(1992). 분석법에 대한 고찰. **대한수학교육학회 논문집**, 2(2), 81-93.

고준석(2011). **비형식적 활동을 통한 증명교육이 초등 영재들의 증명 능력에 미치는 영향**. 석사학위 논문. 경인교육대학교.

권성룡(2003). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>**, 7(2), 85-99.

김양권(2009). **초등수학 영재를 위한 도형수 과제의 수준별 교수·학습 자료 개발에 관한 연구**. 석사학위 논문. 경인교육대학교.

김응태·박한식·우정호(1984). **수학교육학 개론**. 서울: 서울대학교 출판부.

김정하(2010). **초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구**. 박사학위 논문. 이화여자대학교.

나귀수(1998). 증명의 수리 철학적 분석과 지도 방향의 탐색. **대한수학교육학회 논문집**, 8(1), 351-364.

나귀수(2009). 분석법을 중심으로 한 기하 증명 지도에 대한 연구. **대한수학교육학회지 <수학교육학연구>**, 19(2), 185-206.

류성림(1998). 수학교육에서 '증명의 의의'에 관한 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 37(1), 73-85.

박미덕(2003). **중학교 2학년 기하영역 증명지도에 있어서 소집단 협동학습의 효과 -증명능력과 비판적 사고력을 중심으로-**. 석사학위 논문. 이화여자대학교.

박지영·송상헌(2010). 초등수학 영재를 위한 폴리큐브 교수·학습 자료 개발 연구. **대한수학교육학회지 <학교수학>**, 12(3), 353-370.

서동엽(1999). 초등학교에서 함의의 지도 가능성에 대한 고찰. **대한수학교육학회지 <학교수학>**, 1(1), 95-107.

서동엽(1999). 중학교 학생의 증명 능력 분석. **대한수학교육학회지 <수학교육학연구>**, 9(1), 183-203.

송상헌(1998). **수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구**. 박사학위 논문. 서울대학교.

송상헌·장혜원·정영옥(2006). 초등학교 6학년 수학영재들의 기하과제 증명능력에 관한 사례분석. **대한수학교육학회지 <수학교육학연구>**, 16(4), 327-344.

신송임(2004). **비형식적 정당화를 활용한 증명지도 사례 연구**. 석사학위 논문. 한국교원대학교.

우정호(1994). 증명지도의 재음미. **대한수학교육학회 논문집**, 4(1), 3-23.

장현선(2005). **영재 프로그램에 관한 연구**. 석사학위 논문. 서강대학교.

전병임(2007). **소집단내 비형식적 활동을 통한**

공리적 사고가 증명에 미치는 영향 -중학교 2학년을 중심으로-. 석사학위 논문. 한국교원대학교.

허지연(2006). **도형의 최대분할 과제에서 초등학교 수학영재들이 보여주는 정당화의 유형 분석.** 석사학위 논문. 경인교육대학교.

Albrecht Beutelspacher (2010). *Mathematikum*. **수학박물관 [김희상 역].** 서울: 행성: B아이들. (원본출판년도 : 2010).

Almeida, D. (1996). Justifying and proving in the mathematics classroom. *Philosophy of Mathematics Education Newsletter* 9.(인터넷검색일: 2011. 7. 2) http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes/Almeida/POME9Almeida.html

Davis, P. J. (1995). *The Mathematical Experience*. **수학적 경험(상),(하) [양영오, 허민, 역].** 서울: 경문사. (원본출판년도 : 1983).

Fawcett, H. P. (2006). **증명의 본질 [장경윤, 류현아, 한세호, 역].** 서울: 경문사. (원본출판년도: 1938).

Gernes, D. (1999). The rules of the game. *Mathematics Teacher,* 92(5), 424-429.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics* **[류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 역].** 서울: 경문사. (원본출판년도 : 2007).

Paulos, J. A. (1996). *A Mathematician Reads The Newspaper* **수학자의 신문읽기 [김동광 역].** 서울: 경문사. (원본출판년도 : 1996).

Yoshinaga. Y. (2000). **괴델의 불완전성 정리 [임승원 역].** 서울: 전파과학사. (원본출판년도: 1993).

Effect of Proof Education through Informal Activities on the Proof abilities of Students in the Elementary Gifted Class

Ko, Jun Seok (Incheon Chuk-hyun Elementary School)
Song, Sang Hun (Gyeongin National University of Education/Ajou University)

The purpose of this study was to develop teaching-learning materials for informal activities geared toward teaching the nature and structure of proof, to make a case analysis of the application of the developed instructional materials to students in an elementary gifted class, to discuss the feasibility of proof education for gifted elementary students and to give some suggestions on that proof education. It's ultimately meant to help improve the proof abilities of elementary gifted students.

After the characteristics of the eight selected gifted elementary students were analyzed, instructional materials of nine sessions were developed to let them learn about the nature and structure of proof by utilizing informal activities. And then they took a lesson two times by using the instructional materials, and how they responded to that education was checked. An analysis framework was produced to assess how they solved the given proof problems, and another analysis framework was made to evaluate their understanding of the structure and nature of proof. In order to see whether they showed any improvement in proof abilities, their proof abilities and proof attitude were tested after they took lessons. And then they were asked to write how they felt, and there appeared seven kinds of significant responses when their writings were analyzed. Their responses proved the possibility of proof education for gifted elementary students, and seven suggestions were given on that education.

* key words : proof(증명), informal activity(비형식적 활동), student in the gifted class(영재학급 학생), teaching · learning materials(교수 · 학습 자료).

논문접수 : 2011. 8. 07
논문수정 : 2011. 9. 02
심사완료 : 2011. 9. 09