한국학교수학회논문집 제 14 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 14, Number 3, 261-275, September 2011

일반화된 지수귀문도의 해를 구하는 방법에 관한 연구

박교식[1)]

최석정의 지수귀문도는 비교적 최근에 재조명되기 시작했고, 그동안 지수귀문도의 해를 구하려는 노력이 있었다. 88~92 그리고 94~98의 마법수에 한정해서 H-교호법을 사용하여 지수귀문도의 해를 구하는 것이 수학적으로 가능하다. 본 연구에서는 $n \times n$ 지수귀문도를 정의하고, H-교호법을 사용하여 $n \times n$ 지수귀문도에서 분할 $(v+1)+v+(v+1)$과 그것의 여분할 $v+(v+1)+v$에 대해, 분할 $(v+1)+(v-1)+(v+1)$과 그것의 여분할 $(v-1)+(v+1)+(v-1)$에 대해, 분할 $(v+1)+(v+2)+(v+1)$과 그것의 여분할 $(v+2)+(v+1)+(v+2)$에 대해, 분할 $(v+1)+(v+3)+(v+1)$과 그것의 여분할 $(v+3)+(v+1)+(v+3)$에 대해 일반화된 지수귀문도의 해를 항상 구할 수 있다는 것을 보였다. 그리고 일반화된 지수귀문도의 해를 구하는 것을 중등수학교육과 중등영재수학교육에서 문제해결의 과제로 활용할 것을 제안했다.

주요 용어 : 교호법, 문제해결, 문제해결 과제, 수학사, 지수귀문도(地數龜文圖)

I. 서 론

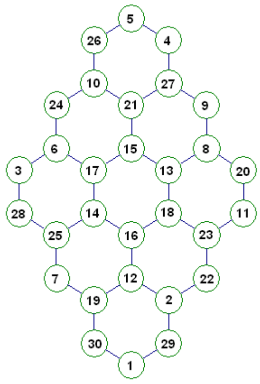
지금으로부터 약 300년 전인 조선시대에 최석정(崔錫鼎, 1646-1715)은 자신의 저서 ≪구수략(九數略)≫에서 [그림 I-1]과 같은 지수귀문도(地數龜文圖)를 제시하였다. 이것은 1부터 30까지의 수를 한 번씩만 사용하여 9개 육각형의 각 꼭짓점에 놓인 6개의 수의 합 즉, 마법수가 93이 되도록 만든 것이다. 지수귀문도가 세간의 관심을 받게 된 것은 비교적 최근의 일이다(김용운, 1974; 김용운, 김용국, 1977, 1982, 2003, 2009; 윤태주, 1988; 김동진, 오영환, 1989; 최희웅, 1989; 김태성, 김원규, 1992; 오윤용, 한상근, 1993; 최영한, 1998; 한상근, 1998; 전용훈, 1999a, 1999b; Choe, Choi, Moon, 2003; 장혜원, 2006, 2010; 최석정, 2006; Povolotskiy, 2009; 이경언, 2010; Povolotskiy, Shin, & McKay, 2011; 박교식, 2011).[2)] 본 연구에서는 [그림 I-2]와 같이 빈칸만 남겨둔 것을 '지수귀문도', 그리고 수를 배열해서 [그림 I-1]처럼 완성한 것을 '지수귀문도의 해'(김동진, 오영환, 1989) 또는 간단히 '해'라고 부르기로 한다.

김동진과 오영환(1989)에 의하면, 지수귀문도의 마법수는 최소 76에서 최대 110까지이다. 그들은 컴퓨터의 도움을 받아 마법수가 76, 109, 110인 경우를 제외한 모든 마법수에 대해 지수

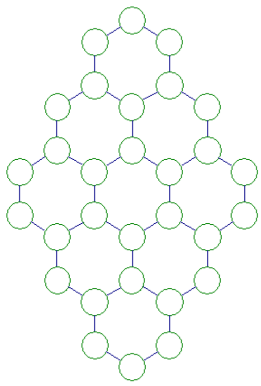
1) 경인교육대학교(pkspark@gin.ac.kr)

2) 최석정(2006)은 정해남과 허민이 2006년에 번역한 최석정의 ≪구수략≫을 의미한다. 정해남과 허민은 최석정의 ≪구수략≫을 번역하면서 지수귀문도에 대한 논의도 덧붙이고 있다.

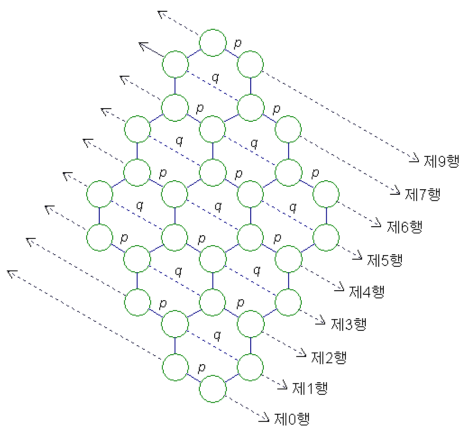
귀문도의 해를 구했다고 했다. 최희웅(1989)은 마법수가 93인 경우의 해를 하나 제시했다. 김용수는 마법수가 90인 경우의 해를 하나 제시했고, 이지원은 마법수가 91과 95인 경우의 해를 각각 하나씩 제시했다(전용훈, 1999a; 장혜원, 2006, 최석정, 2006; 이경언, 2010). 한편, 박교식(2011)은 'H-교호법'을 사용하여 컴퓨터의 도움을 받지 않아도 마법수가 88~92, 94~98인 경우의 해를 구할 수 있음을 보이고 있다. 그는 [그림 I-4]와 같은 V-교호법도 제시했다. V-교호법을 사용할 때는 $q(2n)q$인 열이 단 하나 존재한다.[3] 또, $p(2)p$, $p(4)p$, $p(6)p$, $\cdots$, $p(2n-2)p$, $p(2n)p$인 열이 각각 2개씩 존재한다. 이것은 V-교호법을 사용할 때 $q(2n)q$인 성분이 단 하나 존재하고, 길이가 2, 4, 6, $\cdots$, $(2n-2)$, $2n$이거나 또는 이들의 합으로 표현되는 $p \to p$ 성분이 존재하면, $n \times n$ 지수귀문도를 만들 수 있다는 것을 의미한다.



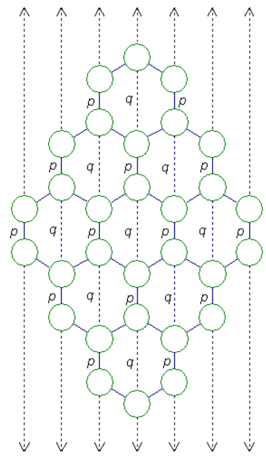
[그림 I-1] 최석정의 해



[그림 I-2] 지수귀문도



[그림 I-3] H-교호법



[그림 I-4] V-교호법

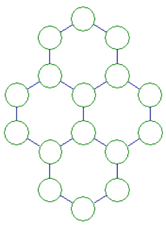
본 연구에서는 먼저 최석정이 제시한 것과 닮은 지수귀문도를 '$n \times n$ 지수귀문도'로 정의한

3) 본 연구에서 교호법과 관련된 용어와 기호의 사용은 박교식(2011)에 따른다. 다만 길이가 n인 $p \to q$경로를 $p(n)q$와 같이 약간 수정하여 사용하기로 한다.

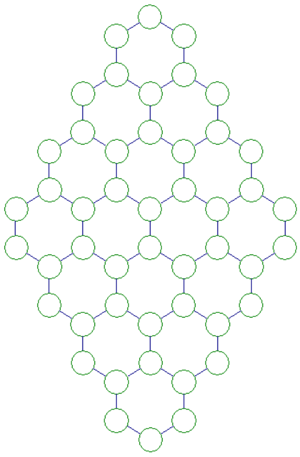
다음, H-교호법을 이용하여 $n×n$ 지수귀문도의 해를 구하는 방법에 관해 논의하고, 4×4 지수귀문도, 5×5 지수귀문도, 6×6 지수귀문도, 7×7 지수귀문도의 몇 가지 해를 제시한다.

II. $n×n$ 지수귀문도

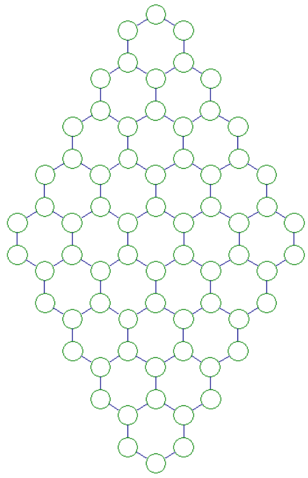
최석정이 제시한 지수귀문도의 모양을 유지하면서 육각형의 수가 늘어나도록 확장할 수 있다. 예를 들어 [그림 II-1]을 2×2 지수귀문도라고 하면 최석정의 지수귀문도는 3×3 지수귀문도이고, [그림 II-2]와 [그림 II-3]은 각각 4×4 지수귀문도, 5×5 지수귀문도이다.4) 이와 같은 확장을 가장 먼저 시도한 것은 최희응(1989)으로 보인다. 그는 2×2 지수귀문도, 3×3 지수귀문도, 4×4 지수귀문도, 5×5 지수귀문도의 해를 각각 하나씩 제시했다. Choe, Choi, Moon(2003)은 컴퓨터를 사용하여 구한 9×9 지수귀문도의 해를 하나 제시했다.



[그림 II-1] 2×2 지수귀문도



[그림 II-2] 4×4 지수귀문도



[그림 II-3] 5×5 지수귀문도

이와 같이 최석정이 제시한 지수귀문도를 닮도록 일반화한 것을 $n×n$ 지수귀문도로 정의한다. $n×n$ 지수귀문도에서는 1부터 $v(=2n^2+4n)$까지의 수를 한 번씩만 사용하여 n^2개의 육각형 각각의 꼭짓점에 놓인 6개의 수의 합이 모두 같도록 만들어야 한다. 이때 $v=2n^2+4n$임은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$v=\{1+2×2+3×3+\cdots+n×2+(n-1)\}×2=2n^2+4n$$

예를 들어 4×4 지수귀문도, 5×5 지수귀문도, 6×6 지수귀문도, 7×7 지수귀문도에서 v는 각각 48, 70, 96, 126이다.

$n×n$ 지수귀문도에서 1부터 v까지의 수를 한 번씩만 사용하여 n^2개의 육각형 각각의 꼭짓점에 놓인 6개의 수의 합이 모두 같을 때, 그 합이 바로 마법수로 정의된다. 마법수를 M이라고 하면, 그것의 기댓값 E는 다음과 같이 구할 수 있다.

4) 이렇게 부르는 것은 Choe, Choi, Moon(2003)에 따른 것이다. 그들은 최석정의 지수귀문도와 닮도록 확장한 지수귀문도를 '$n×n$ diamond hexagonal tortoise'라고 표현했다.

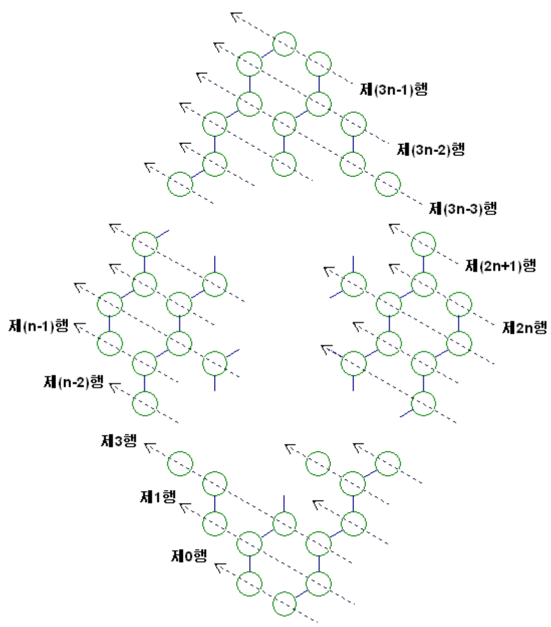
$$E=\frac{1}{v}\left\{\frac{v(v+1)}{2}\right\}\times 6=3(v+1)$$

예를 들어 4×4 지수귀문도, 5×5 지수귀문도, 6×6 지수귀문도, 7×7 지수귀문도에서 기댓값은 각각 147, 213, 291, 381이다. 3×3 지수귀문도에서 기댓값은 93이다.

H-교호법을 사용하기 위해서는 1부터 v까지의 수를 한 번씩만 사용하여 $M=p+q+p$가 되도록 만들 때, $p\neq q$이어야 함은 분명하다. p와 q가 동시에 $v+1$보다 크면 1은 그 1과의 합이 p 또는 q가 되는 다른 어떤 수와 연결되지 않는다. 그런 수를 '고립된 수'라고 하자. p와 q가 동시에 v보다 작으면 v가 고립된 수가 된다. 즉, p와 q는 동시에 v보다 작지 않아야 하고, 동시에 $v+1$보다 크지 않아야 한다. $v+1$을 기준으로 할 때, p와 q의 값의 범위는 다음과 같다.

① $p>v+1$이면 $q\leq v+1$ ② $p=v+1$이면 $q<v+1$ 이거나 $q>v+1$ ③ $p<v+1$이면 $q\geq v+1$

이런 의미에서 $v+1$을 '임계수'라고 하자. 이 임계수와 $n\times n$ 지수귀문도에서의 두 수의 합이 각각 p와 q가 되는 쌍의 수를 이용하여 p와 q의 값의 범위를 조금 더 좁힐 수 있다. 이를 위해서 먼저 $n\times n$ 지수귀문도의 외형적 특징을 찾아보자. 먼저 $n\times n$ 지수귀문도에서 [그림 I-3]과 같이 정의한 행은 제0행부터 제$(3n-1)$행까지이다([그림 II-4] 참조).



[그림 II-4] $n\times n$ 지수귀문도

제0행부터 제$(n-2)$행까지 $(n-1)$개의 행에서 각 행의 길이는 차례로 2, 3, 4, ⋯, $n-1$, n이다. 또, 제$(n-1)$행부터 제$2n$행까지 $(n+2)$개의 행에서 각 행의 길이는 모두 $n+1$이다. 다시 제$(2n+1)$행부터 제$(3n-1)$행까지 $(n-1)$개의 행에서 각 행의 길이는 n, $n-1$, $n-2$, ⋯, 3, 2이다. 길이가 n 이하인 행에서 짝수인 길이를 갖는 행은 모두 $p\to p$ 경로를 가진다. n이 홀수이면, 길이가 $n+1$인 행은 제$(n-1)$행부터 제$2n$행까지 교대로 $p(n+1)p$, $q(n+1)q$ 경로를 가진다. 반면에 n이 짝수이면, 길이가 $n+1$인 행은 제$(n-1)$행부터 제$2n$행까지 모두 $p(n+1)q$ 경로를 가진다.

n이 홀수이면 길이가 $p(3)q$, $p(5)q$, $\cdots$, $p(n)q$인 경로를 갖는 행이 각각 2개씩이다. 또, $p(2)p$, $p(4)p$, $p(6)p$, $\cdots$, $p(n-1)p$인 경로를 갖는 행도 각각 2개씩이다. $p(n+1)p$인 경로를 갖는 행과 $q(n+1)q$인 경로를 갖는 행의 수는 각각 $\frac{n+3}{2}$, $\frac{n+1}{2}$이다. 따라서 예를 들어 다음과 같이 $p(v)p$ 또는 $q(v)q$인 경로를 구성할 수 있다. 이 이외에도 여러 가지 방법으로 $p(v)p$ 또는 $q(v)q$인 경로를 구성할 수 있다.

$p(v)p$ 경로: $p(3)q\to\{q(n+1)q\to\ \cdots\ \to q(n+1)q\}\to q(3)p\to[\{p(5)q\to q(5)p\}\to\{p(7)q$
$\to q(7)p\}\to\ \cdots\ \to\{p(n)q\to q(n)p\}]\ \to\{p(2)p\to p(4)p\to\ \cdots\ \to p(n-1)p\}$
$\to\{p(2)p\to p(4)p\to\ \cdots\ \to p(n-1)p\}\to\{p(n+1)p\to\ \cdots\ \to p(n+1)p\}$
$q(v)q$ 경로: $q(3)p\to\{p(n+1)p\to\ \cdots\ \to p(n+1)p\}\to\{p(2)p\to p(4)p\to\ \cdots\ \to p(n-1)p\}$
$\to\{p(2)p\to p(4)p\to\ \cdots\ \to p(n-1)p\}\to p(3)q\to[\{q(5)p\to p(5)q\}\to\{q(7)p\to p(7)q\}$
$\to\ \cdots\ \to\{q(n)p\to p(n)q\}]\ \to\{q(n+1)q\to\ \cdots\ \to q(n+1)q\}$

n이 짝수이면 길이가 $p(3)q$, $p(5)q$, $\cdots$, $p(n-1)q$인 경로를 갖는 행이 각각 2개씩이다. 또, $p(2)p$, $p(4)p$, $p(6)p$, $\cdots$, $p(n)p$인 경로를 갖는 행도 각각 2개씩이다. $p(n+1)p$ 또는 $q(n+1)q$인 경로를 갖는 행은 없고, $p(n+1)q$인 경로를 갖는 행은 $(n+2)$개 있다. 이때도 예를 들어 다음과 같이 $p(v)p$ 또는 $q(v)q$인 경로를 구성할 수 있다. 여기서도 이 이외에 여러 가지 방법으로 $p(v)p$ 또는 $q(v)q$인 경로를 구성할 수 있다.

$p(v)p$ 경로: $[\{p(3)q\to q(3)p\}\to\{p(5)q\to q(5)p\}\to\ \cdots\ \to\{p(n-1)q\to q(n-1)p\}]$
$\to\{p(2)p\to p(4)p\to\ \cdots\ \to p(n)p\}\to\{p(2)p\to p(4)p\to\ \cdots\ \to p(n)p\}$
$\to[\{p(n+1)q\to q(n+1)p\}\to\ \cdots\ \to\ \{p(n+1)q\to q(n+1)p\}]$
$q(v)q$ 경로: $q(3)p\to\{p(2)p\to p(4)p\to\ \cdots\ \to p(n)p\}\to\{p(2)p\to p(4)p\to\ \cdots\ \to p(n)p\}$
$\to p(3)q\to[\{q(5)p\to p(5)q\}\to\{q(7)p\to p(7)q\}\to\ \cdots\ \to\{q(n-1)p\to p(n-1)q)]$
$\to[\{q(n+1)p\to p(n+1)q\}\to\ \cdots\ \to\{q(n+1)p\to p(n+1)q\}]$

이제 $M=p+q+p$일 때 p와 q의 값의 범위를 구해보자. H-교호법을 사용하는 경우, [그림 I-3]의 3×3 지수귀문도에서 두 수의 합이 p가 되는 서로 다른 두 수의 쌍은 3×4=12개이다. 이렇게 12개의 쌍을 이루는 24개의 수를 제외하고 남은 수는 30-24=6(개)이다. 일반적으로 $n\times n$ 지수귀문도에서 두 수의 합이 p가 되는 서로 다른 두 수의 쌍은 $n(n+1)$개이다. 그리고 그 $n(n+1)$개의 쌍을 이루는 수를 제외하고 남은 수는 $2n^2+4n-2n(n+1)=2n$(개)이다. 이 $2n$개의 서로 다른 수의 합 중에서 최솟값과 최댓값은 각각 다음과 같다.

최솟값: $1+2+3+\cdots+2n=n(2n+1)$

최댓값: $(2n^2+2n+1)+(2n^2+2n+2)+(2n^2+2n+3)+\cdots+(2n^2+4n)=n(4n^2+6n+1)$

따라서 다음이 성립한다.

$$\frac{v(v+1)}{2}-n(4n^2+6n+1)\ \le n(n+1)p\le\frac{v(v+1)}{2}-n(2n+1)$$

$\frac{v(v+1)}{2}=(n^2+2n)(2n^2+4n+1)$이므로, 이 식을 간단히 정리하면 다음과 같다.

$$2n^2+2n+1\le p\le 2n^2+6n+1$$

한편, [그림 I-3]의 3×3 지수귀문도에서 두 수의 합이 q가 되는 서로 다른 두 수의 쌍은 3×3=9개이다. 이렇게 9개의 쌍을 이루는 18개의 수를 제외하고 남은 수는 12개이다. 이 중 4개는 두 수의 합이 p가 되는 쌍 2개가 된다. 일반적으로 $n\times n$ 지수귀문도에서 두 수의 합이 q가 되는 서로 다른 두 수의 쌍은 $n\times n=n^2$개이고, 두 수의 합이 q가 되지 않는 서로 다른 수는 $2n^2+4n-2n^2=4n$(개)이다. 이 중 4개는 두 수의 합이 p가 되는 두 수의 쌍 2개가 된다. 따라서 두 수의 합이 q와 p가 되지 않는 수는 $4(n-1)$개이다. 이 $4(n-1)$개의 서로 다른 수의 합 중에서 최솟값과 최댓값은 각각 다음과 같다.

최솟값: $1+2+3+\cdots+4(n-1)=2(n-1)(4n-3)$

최댓값: $(2n^2+5)+(2n^2+6)+(2n^2+7)+\cdots+(2n^2+4n)=2(n-1)(4n^2+4n+5)$

따라서 다음이 성립한다.

$$\frac{v(v+1)}{2}-2(n-1)(4n^2+4n+5)\le n^2q+2p\le\frac{v(v+1)}{2}-2(n-1)(4n-3)$$

이 식을 간단히 정리하면 다음과 같다.

$$2n^4+9n^2+10\le n^2q+2p\le 2n^4+8n^3+n^2+16n-6$$

그런데 $2(2n^2+2n+1)\le 2p\le 2(2n^2+6n+1)$이므로 이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$2n^4+9n^2+10-2(2n^2+6n+1)\le n^2q\le 2n^4+8n^3+n^2+16n-6-2(2n^2+2n+1)$$

$$\text{즉, } 2n^4+5n^2-12n+8\le n^2q\le 2n^4+8n^3-3n^2+12n-8$$

여기서 q의 값으로 자연수를 택하면 된다. <표 II-1>은 4×4 지수귀문도, 5×5 지수귀문도, 6×6 지수귀문도, 7×7 지수귀문도에서 p와 q의 값의 범위를 나타낸 것이다.

<표 II-1> 4×4 지수귀문도에서 7×7 지수귀문도까지 p와 q의 값의 범위

$n\times n$ 지수귀문도	p의 값의 범위	q의 값의 범위	임계수
4×4 지수귀문도	$41\le p\le 57$	$35\le q\le 63$	49
5×5 지수귀문도	$61\le p\le 81$	$53\le q\le 89$	71
6×6 지수귀문도	$85\le p\le 109$	$76\le q\le 118$	97
7×7 지수귀문도	$113\le p\le 141$	$102\le q152$	127

III. $n\times n$ 지수귀문도의 해 구하기

$n\times n$ 지수귀문도에서 n이 홀수이든 짝수이든 $p(v)p$ 또는 $q(v)q$인 경로를 구성할 수 있고, $M=p+q+p$에서 $p(v)p$ 또는 $q(v)q$인 성분이 존재하면, 그 경로를 따라 1부터 v까지의 수를 배열할 수 있으므로, $n\times n$ 지수귀문도의 해가 존재한다. 이제 $M=p+q+p$일 때 p와 q의 특정한 값에 대해 $p(v)p$ 또는 $q(v)q$인 성분이 항상 존재한다는 것을 보일 수 있다. 먼저 A형 분할 $M=(v+1)+q+(v+1)$ (즉, $v+1>q$인 분할)에 대해, 다음 성분을 생각할 수 있다.

$$(v\to 1)\to(a_1\to b_1)\to\cdots\to(a_i\to b_i)\to\cdots\ (\text{이때, } a_i=v-i\alpha>1,\ b_i=1+i\alpha<v)$$

여기서 $a_{i+1}=b_i$ 즉, $v-(i+1)\alpha=1+i\alpha$가 되는 i의 값을 구하면 다음과 같다.

$$i=\frac{v-1-\alpha}{2\alpha}\ \cdots\cdots\ \text{식 (III.1)}$$

이때 i의 값은 자연수이어야 하므로 $v-1-\alpha$는 2α의 배수이어야 한다.

첫째로 α=1이면 $i=\frac{v-2}{2}=\frac{v}{2}-1$이고, 이때 $a_{\frac{v}{2}-1}=\frac{v}{2}+1$, $b_{\frac{v}{2}-1}=\frac{v}{2}$이다. 이것은 위의 성분이 다음과 같음을 의미한다.

$$(v\to 1)\to(v-1\to 2)\to\ \cdots\ \to(\frac{v}{2}+1\to\frac{v}{2})$$

이 성분은 길이가 v인 $p\to p$ 성분이다. 즉, A형 분할 $M=(v+1)+v+(v+1)$의 경우에는 $p(v)p$ 성분이 존재한다는 것을 알 수 있다. 위의 성분을 다음과 같이 배열할 수 있다.

$$v\to(1\to v-1)\to(2\to v-2)\to\ \cdots\ \to(\frac{v}{2}-1\to\frac{v}{2}+1)\to\frac{v}{2}$$

이것은 분할 $(v+1)+v+(v+1)$의 여분할 $v+(v+1)+v$의 $q(v)q$ 성분이 존재한다는 것을 의미한다.

둘째로 α=2이면 $i=\frac{v-3}{4}$이다. v-3은 홀수이므로 4의 배수가 아니다. 즉, 식 (III.1)을 만족하는 i의 값은 존재하지 않고, $a_i=v-2i>1$, $b_i=1+2i<v$를 만족하는 i의 최댓값은 다음과 같다.

$$\left[\frac{v-1}{2}\right]=\frac{v}{2}-1 \text{ (단, } \left[\frac{v-1}{2}\right]\text{는 } \frac{v-1}{2}\text{를 넘지 않는 최대 정수를 의미한다.)}$$

이때 $a_{\frac{v}{2}-1}=2$, $b_{\frac{v}{2}-1}=v-1$이다. 이것은 위의 성분이 다음과 같음을 의미한다.

$$(v\to 1)\to(v-2\to 3)\to\ \cdots\ \to(2\to v-1)$$

이 성분은 길이가 v인 $p\to p$ 성분이다. 즉, A형 분할 $M=(v+1)+(v-1)+(v+1)$의 경우에는 $p(v)p$ 성분이 존재한다는 것을 알 수 있다. 한편, 이 성분을 다음과 같이 배열할 수 있다.

$$v\to(1\to v-2)\to(3\to v-3)\to\ \cdots\ \to(v-3\to 2)\to v-1$$

이것은 분할 $(v+1)+(v-1)+(v+1)$의 여분할 $(v-1)+(v+1)+(v-1)$의 경우에 $q(v)q$ 성분이 존재한다는 것을 의미한다.

B형 분할 $M=(v+1)+q+(v+1)$ (즉, $v+1<q$인 분할)에 대해, 다음 성분을 생각할 수 있다.

$$(1\to v)\to(a_1\to b_1)\to\ \cdots\ \to(a_i\to b_i)\to\cdots \text{ (이때, } a_i=1+i\alpha<v,\ b_i=v-i\alpha>1)$$

여기서 $a_{i+1}=b_i$ 즉, $1+(i+1)\alpha=v-i\alpha$가 되는 i의 값을 구하면 $i=\frac{v-1-\alpha}{2\alpha}$이다. 이것은 식 (III.1)과 같다. 이때 i의 값은 자연수이어야 하므로 $v-1-\alpha$는 2α의 배수이어야 한다.

첫째로 α=1이면 $i=\frac{v-2}{2}=\frac{v}{2}-1$이고, 이때 $a_{\frac{v}{2}-1}=\frac{v}{2}$, $b_{\frac{v}{2}-1}=\frac{v}{2}+1$이다. 이것은 위의 성분이 다음과 같음을 의미한다.

$$(1\to v)\to(2\to v-1)\to\ \cdots\ \to(\frac{v}{2}\to\frac{v}{2}+1)$$

이 성분은 길이가 v인 $p\to p$이다. 즉, B형 분할 $M=(v+1)+(v+2)+(v+1)$의 경우에는 $p(v)p$ 성분이 존재한다는 것을 알 수 있다. 한편, 이 성분을 다음과 같이 배열할 수 있다.

$$1\to(v\to 2)\to(v-1\to 3)\to\ \cdots\ \to(\frac{v}{2}+2\to\frac{v}{2})\to\frac{v}{2}+1$$

이것은 분할 $(v+1)+(v+2)+(v+1)$의 여분할 $(v+2)+(v+1)+(v+2)$의 경우에 $q(v)q$ 성분이 존재한다는 것을 의미한다.

둘째로 α=2이면 $i=\frac{v-3}{4}$이다. v-3은 홀수이므로 4의 배수가 아니다. 즉, 식 (III.1)을 만족하는 i의 값은 존재하지 않고, $a_i=1+2i<v$, $b_i=v-2i>1$을 만족하는 i의 최댓값은 다음과 같다.

$\left[\frac{v-1}{2}\right]=\frac{v}{2}-1$ (단, $\left[\frac{v-1}{2}\right]$는 $\frac{v-1}{2}$를 넘지 않는 최대 정수를 의미한다.)

이때 $a_{\frac{v}{2}-1}=v-1$, $b_{\frac{v}{2}-1}=2$이다. 이것은 위의 성분이 다음과 같음을 의미한다.

$$(1\rightarrow v)\rightarrow(3\rightarrow v-2)\rightarrow \cdots \rightarrow(v-1\rightarrow 2)$$

이 성분은 길이가 v인 $p\rightarrow p$ 성분이다. 즉, B형 분할 $M=(v+1)+(v+3)+(v+1)$의 경우에는 $p(v)p$ 성분이 존재한다는 것을 알 수 있다. 한편, 이 성분을 다음과 같이 배열할 수 있다.

$$1\rightarrow(v\rightarrow 3)\rightarrow(v-2\rightarrow 5)\rightarrow \cdots \rightarrow(4\rightarrow v-1)\rightarrow 2$$

이것은 $(v+1)+(v+3)+(v+1)$의 여분할 $(v+3)+(v+1)+(v+3)$의 경우에 $q(v)q$ 성분이 존재한다는 것을 의미한다.

IV. $n\times n$ 지수귀문도의 몇 가지 해

앞의 논의에 따라 4×4 지수귀문도에서 7×7 지수귀문도까지 그 해가 존재하는 분할을 <표 IV-1>과 같이 나타낼 수 있다. 이 분할을 만족하는 $p(v)p$ 또는 $q(v)q$ 성분을 각각 지수귀문도의 $p(v)p$ 또는 $q(v)q$인 경로에 따라 배열하면 지수귀문도의 해가 구해진다. 또, 그렇게 구해진 각각의 해로부터 그것과 동형인 해를 여러 개 찾을 수 있다.

<표 IV-1> 4×4 지수귀문도에서 7×7 지수귀문도까지 해가 존재하는 분할

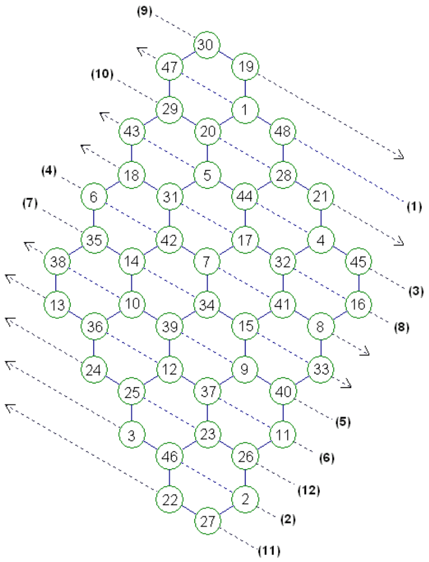
$n\times n$	분할	여분할	임계수
4×4 지수귀문도 v=48	$p(48)p$: 146=49+48+49[그림 8]	$q(48)q$: 145=48+49+48[그림 9]	49
	$p(48)p$: 145=49+47+49	$q(48)q$: 143=47+49+47	
	$p(48)p$: 148=49+50+49	$q(48)q$: 149=50+49+50	
	$p(48)p$: 148=49+51+49	$q(48)q$: 151=51+49+51	
5×5 지수귀문도 v=70	$p(70)p$: 212=71+70+71	$q(70)q$: 211=70+71+70	71
	$p(70)p$: 211=71+69+71[그림 10]	$q(70)q$: 209=69+71+69[그림 11]	
	$p(70)p$: 214=71+72+71	$q(70)q$: 215=72+71+72	
	$p(70)p$: 215=71+73+71	$q(70)q$: 217=73+71+73	
6×6 지수귀문도 v=96	$p(96)p$: 290=97+96+97	$q(96)q$: 289=96+97+96	97
	$p(96)p$: 289=97+95+97	$q(96)q$: 287=95+97+95	
	$p(96)p$: 292=97+98+97[그림 12]	$q(96)q$: 293=98+97+98[그림 13]	
	$p(96)p$: 293=97+99+97	$q(96)q$: 295=99+97+99	
7×7 지수귀문도 v=126	$p(126)p$: 380=127+126+127	$q(126)q$: 379=126+127+126	127
	$p(126)p$: 379=127+125+127	$q(126)q$: 377=125+127+125	
	$p(126)p$: 382=127+128+127	$q(126)q$: 383=128+127+128	
	$p(126)p$: 383=127+129+127[그림 14]	$q(126)q$: 385=129+127+129[그림 15]	

4×4 지수귀문도에서는 길이가 $p(3)q$ 경로를 갖는 행이 2개이다. 또, $p(2)p$, $p(4)p$인 경로를 갖는 행은 각각 2개씩이다. $p(5)q$인 경로를 갖는 행은 6개 있다. 예를 들어 다음과 같이 $p(48)p$ 또는 $q(48)q$인 경로를 구성할 수 있다.

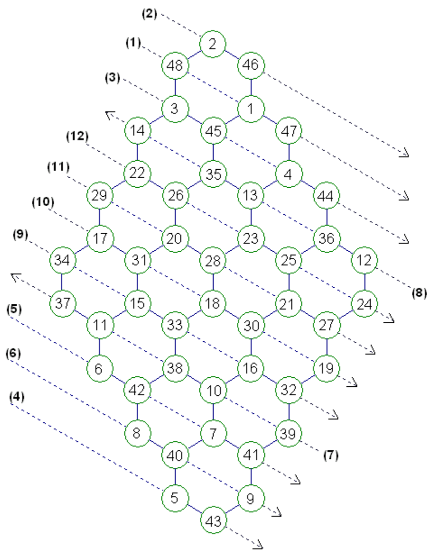
$p(48)p$ 경로: $\{p(3)q \to q(3)p\} \to \{p(5)q \to q(5)p\} \to \{p(5)q \to q(5)p\} \to \{p(5)q \to q(5)p\}$
$\to \{p(2)p \to p(4)p\} \to \{p(2)p \to p(4)p\}$
$q(48)q$ 경로: $q(3)p \to \{p(2)p \to p(4)p\} \to \{p(2)p \to p(4)p\} \to p(3)q$
$\to \{q(5)p \to p(5)q \to q(5)p \to p(5)q \to q(5)p \to p(5)q\}$

분할 146=49+48+49의 $p(48)p$ 성분과 그 여분할 145=48+49+48의 $q(48)q$ 성분은 다음과 같이 나타낼 수 있다. 그리고 분할 146=49+48+49에 대하여 $p(48)p$ 성분을 배열하여 만든 지수귀문도의 해는 예를 들어 [그림 IV-1]과 같다. 여분할 145=48+49+48에 대하여 $q(48)q$ 성분을 배열하여 만든 지수귀문도의 해는 예를 들어 [그림 IV-2]와 같다.

(48→1)→(47→2)→(46→3)→(45→4)→(44→5)→(43→6)→(42→7)→(41→8)→(40→9)
→(39→10)→(38→11)→(37→12)→(36→13)→(35→14)→(34→15)→(33→16)→(32→17)
→(31→18)→(30→19)→(29→20)→(28→21)→(27→22)→(26→23)→(25→24)



[그림 IV-1] 146=49+48+49



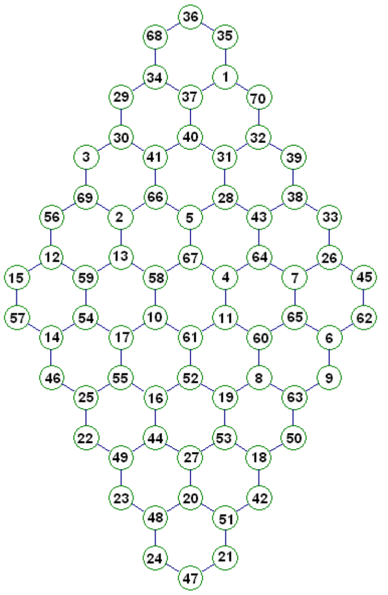
[그림 IV-2] 145=48+49+48

5×5 지수귀문도에서는 길이가 $p(3)q$, $p(5)q$인 경로를 갖는 행이 각각 2개씩이다. 또, $p(2)p$, $p(4)p$인 경로를 갖는 행도 각각 2개씩이다. $p(6)p$인 경로를 갖는 행은 4개이고, $q(6)q$인 경로를 갖는 행은 3개이다. 예를 들어 다음과 같이 $p(70)p$ 또는 $q(70)q$인 경로를 구성할 수 있다.

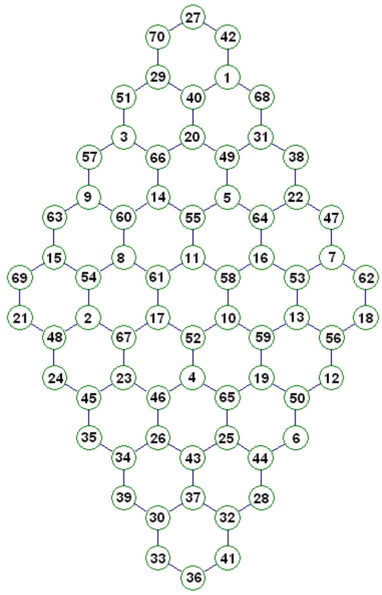
$p(70)p$ 경로: $p(3)q \to \{q(6)q \to q(6)q \to q(6)q\} \to q(3)p \to \{p(5)q \to q(5)p\}$
$\to \{p(2)p \to p(4)p\} \to \{p(2)p \to p(4)p\} \to \{p(6)p \to p(6)p \to p(6)p \to p(6)p\}$
$q(70)q$ 경로: $q(3)p \to \{p(6)p \to p(6)p \to p(6)p \to p(6)p\} \to \{p(2)p \to p(4)p\}$
$\to \{p(2)p \to p(4)p\} \to p(3)q \to \{q(5)p \to p(5)q\} \to \{q(6)q \to q(6)q \to q(6)q\}$

분할 211=71+69+71의 $p(70)p$ 성분과 그 여분할 209=69+71+69의 $q(70)q$ 성분은 다음과 같이 나타낼 수 있다. 그리고 분할 211=71+69+71에 대하여 $p(70)p$ 성분을 배열하여 만든 지수귀문도의 해는 예를 들어 [그림 IV-3]과 같다. 여분할 209=69+71+69에 대하여 $q(70)q$ 성분을 배열하여 만든 지수귀문도의 해는 예를 들어 [그림 IV-4]와 같다.

(70→1)→(68→3)→(66→5)→(64→7)→(62→9)→(60→11)→(58→13)→(56→15)→(54→17)
→(52→19)→(50→21)→(48→23)→(46→25)→(44→27)→(42→29)→(40→31)→(38→33)
→(36→35)→(34→37)→(32→39)→(30→41)→(28→43)→(26→45)→(24→47)→(22→49)
→(20→51)→(18→53)→(16→55)→(14→57)→(12→59)→(10→61)→(8→63)→(6→65)
→(4→67)→(2→69)



[그림 IV-3] 211=71+69+71



[그림 IV-4] 209=69+71+69

6×6 지수귀문도에서는 길이가 $p(3)q$, $p(5)q$인 경로를 갖는 행이 각각 2개씩이다. 또, $p(2)p$, $p(4)p$, $p(6)p$인 경로를 갖는 행도 각각 2개씩이다. $p(7)q$인 경로를 갖는 행은 8개 있다. 예를 들어 다음과 같이 $p(96)p$ 또는 $q(96)q$인 경로를 구성할 수 있다.

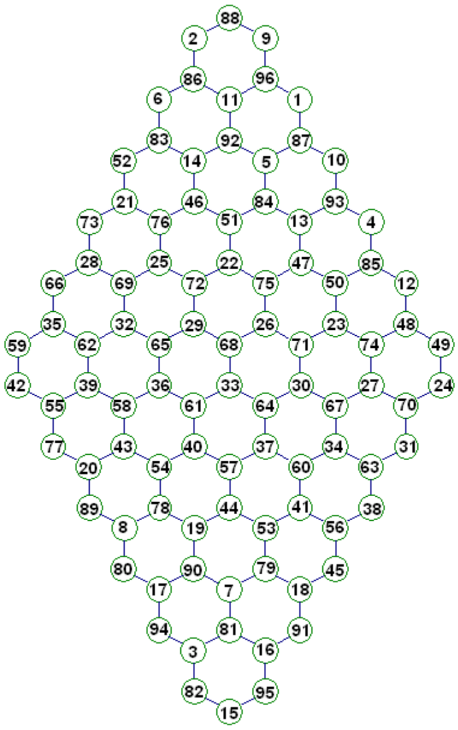
$p(96)p$ 경로: $\{p(3)q \to q(3)p\} \to \{p(5)q \to q(5)p\} \to \{p(2)p \to p(4)p \to p(6)p\}$
$\to \{p(2)p \to p(4)p \to p(6)p\} \to \{p(7)q \to q(7)p\} \to \{p(7)q \to q(7)p\}$
$\to \{p(7)q \to q(7)p\} \to \{p(7)q \to q(7)p\}$

$q(96)q$ 경로: $q(3)p \to \{p(2)p \to p(4)p \to p(6)p\} \to \{p(2)p \to p(4)p \to p(6)p\}$
$\to p(3)q \to \{q(5)p \to p(5)q\} \to \{q(7)p \to p(7)q\} \to \{q(7)p \to p(7)q\}$
$\to \{q(7)p \to p(7)q\} \to \{q(7)p \to p(7)q\}$

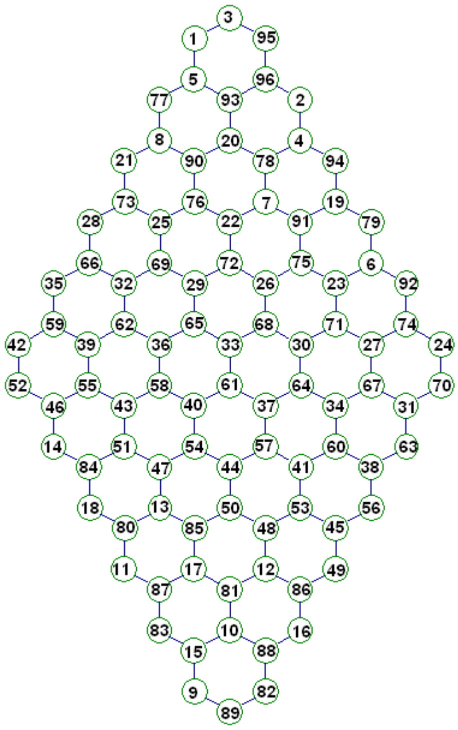
분할 292=97+98+97의 $p(96)p$ 성분과 그 여분할 293=98+97+98의 $q(96)q$ 성분은 다음과 같이

나타낼 수 있다. 그리고 분할 292=97+98+97에 대하여 $p(96)p$ 성분을 배열하여 만든 지수귀문도의 해는 예를 들어 [그림 IV-5]와 같다. 여분할 293=98+97+98에 대하여 $q(96)q$ 성분을 배열하여 만든 지수귀문도의 해는 예를 들어 [그림 IV-6]과 같다.

(1→96)→(2→95)→(3→94)→(4→93)→(5→92)→(6→91)→(7→90)→(8→89)→(9→88)
→(10→87)→(11→86)→(12→85)→(13→84)→(14→83)→(15→82)→(16→81)→(17→80)
→(18→79)→(19→78)→(20→77)→(21→76)→(22→75)→(23→74)→(24→73)→(25→72)
→(26→71)→(27→70)→(28→69)→(29→68)→(30→67)→(31→66)→(32→65)→(33→64)
→(34→63)→(35→62)→(36→61)→(37→60)→(38→59)→(39→58)→(40→57)→(41→56)
→(42→55)→(43→54)→(44→53)→(45→52)→(46→51)→(47→50)→(48→49)



[그림 IV-5] 292=97+98+97



[그림 IV-6] 293=98+97+98

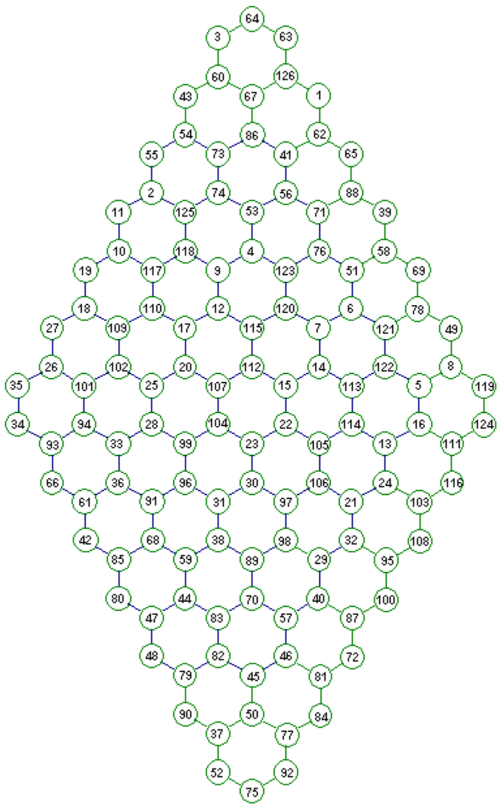
7×7 지수귀문도에서는 길이가 $p(3)q$, $p(5)q$, $p(7)q$인 경로를 갖는 행이 각각 2개씩이다. 또, $p(2)p$, $p(4)p$, $p(6)p$인 경로를 갖는 행도 각각 2개씩이다. $p(8)p$인 경로를 갖는 행은 5개이고, $q(8)q$인 경로를 갖는 행은 4개이다. 예를 들어 다음과 같이 $p(126)p$ 또는 $q(126)q$인 경로를 구성할 수 있다.

$p(126)p$ 경로: $p(3)q \to \{q(8)q \to q(8)q \to q(8)q \to q(8)q\} \to q(3)p$
$\to \{p(5)q \to q(5)p\} \to \{p(7)q \to q(7)p\} \to \{p(2)p \to p(4)p \to p(6)p\}$
$\to \{p(2)p \to p(4)p \to p(6)p\} \to \{p(8)p \to p(8)p \to p(8)p \to p(8)p \to p(8)p\}$

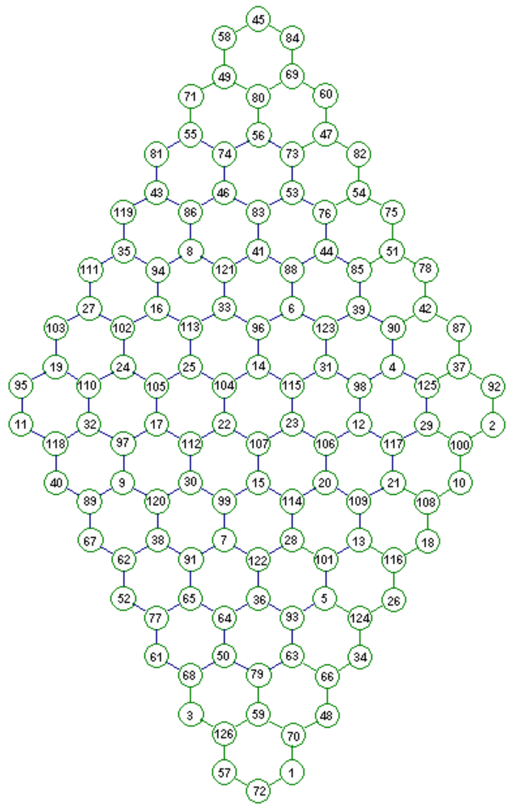
$q(126)q$ 경로: $q(3)p \rightarrow \{p(8)p \rightarrow p(8)p \rightarrow p(8)p \rightarrow p(8)p \rightarrow p(8)p\}$
$\rightarrow \{p(2)p \rightarrow p(4)p \rightarrow p(6)p\} \rightarrow \{p(2)p \rightarrow p(4)p \rightarrow p(6)p\} \rightarrow p(3)q$
$\rightarrow \{q(5)p \rightarrow p(5)q\} \rightarrow \{q(7)p \rightarrow p(7)q\} \rightarrow \{q(8)q \rightarrow q(8)q \rightarrow q(8)q \rightarrow q(8)q\}$

분할 383=127+129+127의 $p(126)p$ 성분과 그 여분할 385=129+127+129의 $q(126)q$ 성분은 다음과 같이 나타낼 수 있다. 그리고 분할 383=127+129+127에 대하여 $p(126)p$ 성분을 배열하여 만든 지수귀문도의 해는 예를 들어 [그림 IV-7]과 같다. 여분할 385=129+127+129에 대하여 $q(126)q$ 성분을 배열한 지수귀문도의 해는 예를 들어 [그림 IV-8]과 같다.

(1→126)→(3→124)→(5→122)→(7→120)→(9→118)→(11→116)→(13→114)→(15→112)
→(17→110)→(19→108)→(21→106)→(23→104)→(25→102)→(27→100)→(29→98)→(31→96)
→(33→94)→(35→92)→(37→90)→(39→88)→(41→86)→(43→84)→(45→82)→(47→80)
→(49→78)→(51→76)→(53→74)→(55→72)→(57→70)→(59→68)→(61→66)→(63→64)
→(65→62)→(67→60)→(69→58)→(71→56)→(73→54)→(75→52)→(77→50)→(79→48)
→(81→46)→(83→44)→(85→42)→(87→40)→(89→38)→(91→36)→(93→34)→(95→32)
→(97→30)→(99→28)→(101→26)→(103→24)→(105→22)→(107→20)→(109→18)→(111→16)
→(113→14)→(115→12)→(117→10)→(119→8)→(121→6)→(123→4)→(125→2)



[그림 IV-7] 383=127+129+127



[그림 IV-8] 385=129+127+129

V. 결 론

최석정의 지수귀문도는 300년이라는 오랜 세월 동안 가려져 있다가, 비교적 근래 들어 관심의 대상이 되었다. 그동안 지수귀문도의 몇 가지 해가 발견되기도 했고, 컴퓨터를 사용하여 마법수가 77부터 108까지인 경우의 해를 구할 수도 있었다. 이 방법은 알고리즘을 만들어 모든 수를 대입해 보는 것으로 수학적인 방법은 아니다. 이에 비해 H-교호법은, 비록 88~92 그리고 94~98의 특정한 마법수에 한정하기는 했지만, 나름대로 지수귀문도의 해를 구하는 것이 수학적으로 가능하다는 것을 보였다. 본 연구에서는 H-교호법을 사용하여 최석정의 지수귀문도를 일반화한 $n\times n$ 지수귀문도에 대해, 분할 $(v+1)+v+(v+1)$과 여분할 $v+(v+1)+v$에 대해, 분할 $(v+1)+(v-1)+(v+1)$과 그것의 여분할 $(v-1)+(v+1)+(v-1)$에 대해, 분할 $(v+1)+(v+2)+(v+1)$과 그것의 여분할 $(v+2)+(v+1)+(v+2)$에 대해, 분할 $(v+1)+(v+3)+(v+1)$과 그것의 여분할 $(v+3)+(v+1)+(v+3)$의 경우에 항상 해를 구할 수 있다는 것을 보였다.

그동안 지수귀문도의 해를 구하는 수학적인 방법이 알려지지 않았기에, 그 해를 구하는 것을 문제해결의 과제로 도입할 수 없었고, 단지 최석정이 제시한 해를 소개하는 것에 머무를 수밖에 없었다. 본 연구에서 그 해를 구하는 것이 어느 정도까지는 수학적으로 항상 가능하다는 것을 보였고, 따라서 중등수학교육과 중등영재수학교육에서 지수귀문도의 해를 구하는 것을 문제해결의 과제로 도입할 수 있는 토대가 만들어졌다고 할 수 있다. 이러한 논의는 $n\times n$ 지수귀문도의 해를 구하는 것을 중등수학교육과 중등영재수학교육에서 문제해결의 과제로 활용하기 위한 교재화 과정에서 가장 먼저 이루어져야 하는 것이다. 그러나 본 연구는 지수귀문도의 해를 구하는 수학적 배경을 제시하는 것에 한정하고 있기에, 후속적으로 그 해를 구하는 것을 과제로 하는 실제적인 문제해결 프로그램의 개발이 필요하다. 이와 관련하여 본 연구에서 얻은 결과를 바탕으로 다음과 같은 제안을 할 수 있다. 첫째, 단지 최석정이 제시한 지수귀문도의 해를 한국수학사의 특출한 유산으로 소개하는 것을 넘어, 다른 해의 존재가능성을 탐색하게 한다. 3×3 지수귀문도의 다른 해를 제시함으로써, 학생들로 하여금 지수귀문도의 해를 구하는 수학적인 방법을 탐구하도록 동기를 부여할 수 있다. 그리고 실제로 학생들로 하여금 3×3 지수귀문도의 해를 찾게 한다. 이때 한두 가지의 특수한 해를 구하는 것에 초점을 맞추는 것이 아니라, 해를 찾는 방법의 탐색에 초점을 맞추어야 한다. 둘째, $n\times n$ 지수귀문도로의 일반화를 모색하게 하고, 그것의 해를 구하는 방법을 탐색하게 한다. 처음에는 3×3 지수귀문도의 해를 찾는 방법을 탐색하지만, 그것을 바탕으로 자연스런 일반화를 하게 한다. 즉, 4×4 지수귀문도와 5×5 지수귀문도 등을 생각할 수 있다는 것을 알게 하고, 학생들의 수준에 맞추어 점차로 $n\times n$ 지수귀문도로의 일반화를 시도하게 한다. 그리고 어떤 조건에서 해가 항상 존재할 수 있는지를 탐색하게 한다. $n\times n$ 지수귀문도의 해의 존재 가능성은 3×3 지수귀문도의 해에서 얻은 결과의 귀납을 통해 추측할 수 있다. 학생들은 그러한 추측을 증명함으로써, 해가 항상 존재한다는 것을 확인할 수 있다.

참고문헌

김동진, 오영환 (1989). 지수귀문도의 특성 및 해를 구하는 알고리즘, 한국정보과학회 봄 학술발표 논문집, 제16권 1호, 405-408.

김용운 (1974). 최석정의 마법진, 한양대학교 논문집, 제8집, 437-451.

김용운, 김용국 (1977). 한국수학사. 서울 : 과학과 인간사.

김용운, 김용국(1982). 한국수학사. 서울 : 열화당.

김용운, 김용국(2003). 한국수학사. 파주 : 한국학술정보.

김용운, 김용국(2009). 한국수학사. 파주 : 살림출판사.

김태성, 김원규 (1992). 사상산서 <구수략> 연구, 충북대학교 과학교육연구논총 제9집, 1-12.

박교식 (2011). 초등학생을 위한 문제해결 과제로서의 지수귀문도의 해결 방안 연구. 한국초등수학교육학회지, 제15권 1호, 77-93.

오윤용, 한상근 (1993). 최석정과 그의 마방진, 수학교육, 제32권 3호, 205-219.

윤태주 (1988). 최석정의 구수략에 나타난 수리사상과 유럽수학의 수용에 대한 고찰. 경북대학교 대학원 석사학위 논문.

이경언 (2010). 정사각형 형태가 아닌 마방진에 대한 고찰. 수학교육논문집, 제24권 1호, 195-220.

장혜원 (2006). 청소년을 위한 동양수학사. 서울 : 두리미디어.

장혜원 (2010). 수학박물관. 파주 : 성안당.

전용훈 (1999a). 수학사의 미스터리 마방진. 과학동아, 제14권 7호, 68-77.

전용훈 (1999b). 300년 만에 풀린 최석정의 마법진. 과학동아, 제14권 12호, 106-113.

최석정 (2006). 구수략(곤). 정해남, 허민(공역). 서울: 교우사.

최영한 (1998). 우리의 것을 찾아 가르치자. 수학교육프로시딩, 제7집, 101-107.

최희웅 (1989). 귀문도와 그 이용도: 수리적 접근, 상서 제9집, 176-183.

한상근 (1998). 최석정과 그의 구수략, 한국수학교육학회 뉴스레터, 제14권 2호, 22-25.

Bača, M. (1992). On magic labelings of honeycomb, Discrete Mathematics, 105, 305-311.

Choe, H. M., Choi, S. S. & Moon, B. (2003). A hybrid genetic algorithm for the hexagonal tortoise problem, Lecture Notes in Computer Science 2723 (2003). 850-861.

Povolotskiy A. (2009). Using bit-distribution and heuristics for solving hexagonal tortoise problem. 서울대학교 석사학위논문.

Povolotskiy, A., Shin, H., & McKay, B. R. (2011). Hexagonal Tortoise Problem Solving using Constraint Programming, 소프트웨어 및 응용, 제38권 1호, 27-40.

일반화된 지수귀문도의 해를 구하는 방법에 관한 연구

A study on finding solutions to generalized Jisuguimundo(hexagonal tortoise problem)

Park, Kyo Sik[5]

Abstract

Seok-Jung Choi's Jisuguimundo mentioned as a brilliant legacy in the history of Korean mathematics had been cloaked in mystery for 300 years. In the meantime there has been some efforts to find solutions, and some particular answers were found, but no one achieved full success mathematically. By the way, H-alternating method showed that to find solutions of Jisuguimundo is possible, even though that method restricted magic number to 88~92 and 94~98. In this paper, $n\times n$ Jisuguimundo is defined, and it is showed that finding solutions of it is always possible in case of partition $(v+1)+v+(v+1)$ & co-partition $v+(v+1)+v$, partition $(v+1)+(v-1)+(v+1)$ & co-partition $(v-1)+(v+1)+(v-1)$, partition $(v+1)+(v+2)+(v+1)$ & co-partition $(v+2)+(v+1)+(v+2)$, and partition $(v+1)+(v+3)+(v+1)$ & co-partition $(v+3)+(v+1)+(v+3)$. And It is suggested to find solutions of $n\times n$ Jisuguimundo could be used as a task for problem solving.

Key words : alternating method, history of mathematics, Jisuguimundo (hexagonal tortoise problem, 地數龜文圖), problem solving, problem solving task

5) Gyeongin Nation University of Education (pkspark@gin.ac.kr)