

중학교 수학 교과서 분석을 통한 정당화 방안 탐색

이환철¹⁾ · 하영화²⁾

중학교 기하 영역에서 엄밀하고 형식적인 정당화로서 증명에 대한 여러 연구가 있어왔고 교육과정의 변화와 함께 증명은 지속적으로 수준을 약화하여 왔다. 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정에서는 증명이라는 용어를 삭제하고 정당화의 의미로서 ‘이해하고 설명할 수 있다’는 문장을 사용함으로써 실질적인 증명 약화를 꾀하고 있다. 이에 본 연구에서는 현재 중학교 수학 교과서의 기하 영역을 분석함으로써 구체적이고 현실적인 정당화의 사례를 제시하는 것에 목적을 두었다. 분석 결과 증명이 중학교 2학년에서 등장함에 비해 학생들의 인지 상태를 고려하여 사용할 수 있는 정당화의 유형들이 사용되지 않았음을 확인하였고, 중학교 1, 2, 3학년 수학교과서에 제시된 다양한 예로부터 새로운 교육과정에 따른 교과서에서 사용할 수 있는 정당화의 사례를 확인하였다.

주요 용어 : 수학 교과서, 정당화

I. 서론

1. 연구의 필요성과 목적

현재 수학과 교육과정은 2007 개정 교육과정에 의해 운영되고 있으나 2009 개정 교육과정에 따라 변화를 준비하는 시기에 놓여있다. 2009 개정 교육과정을 창의 인성 중심의 교육과정이라고 불리는 것과 같이 이에 따른 수학과 교육과정은 창의 인성 중심의 교육과정이 될 수 있도록 준비를 하고 있다. 학생들의 창의성을 신장시키기 위해서는 학습 부담을 경감시켜 수학 내용과 함께 수학의 방법 지식으로 수학적 과정을 강조해야 한다고 주장한다. 이러한 측면의 하나로 논의되고 있는 것 중 하나가 기하학적 성질에 관한 증명이다. 기하학적 성질이 참임을 밝히기 위해서 이전의 교육과정에서는 ‘증명’이라는 용어로 대표되는 연역적이고 형식적인 논증을 언급했던 것과는 달리 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2011)에서는 정당화의 의미로써 ‘이해하고 설명할 수 있다’라는 표현을 사용하여 다양한 형태의 증명 방법을 제시하는 방향을 언급하고 있다.

정당화가 무엇이며 기존의 증명과는 어떤 차이점이 있는지, 학생들은 어떤 유형의 정당화를

1) 한국과학창의재단(singgri@kofac.re.kr)

2) 아주대학교(yhha@ajou.ac.kr)

하는지 등에 관한 많은 연구들이 있다. 그러나 구체적으로 수학 교과서에 어떤 유형의 정당화가 제시되어 있으며 정당화가 어떤 방식으로 반영되어야 하는지에 관한 논의는 없었다. 특히 증명이 강조되고 있는 중학교 2학년에서의 증명 교육의 문제점을 지적하면서도 그 대안적인 연구는 부족하였다.

따라서 본 연구에서는 선행연구로부터 정당화의 의미와 유형을 구분하고 이를 중심으로 2007 개정 수학과 교육과정에 따른 중학교 수학 교과서의 기하 영역을 분석하고자 한다. 교과서 분석을 통해 새로운 수학과 교육과정에 따른 중학교 수학 교과서의 기하 영역에서 정당화가 제시된다면 어떤 형태로 제시되어야 하는지에 대해 구체적인 사례를 탐색하고자 한다.

2. 이론적 배경

가. 기하 교육의 목표

우리나라 기하 교육의 목표를 살펴보기 위해 현재 수학과 교육과정에 대해 살펴보면, 2007 개정 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2007)에는 중학교 기하 영역에 관한 ‘지도의 의의’ 부분에 다음과 같이 언급되어 있다.

중학교 기하 영역에서는 자연 현상이나 실생활의 상황을 통해 평면과 공간 및 평면도형과 입체도형의 개념을 직관적으로 이해하고, 여러 가지 도형의 성질을 학생의 수준에 따라 직관적으로 혹은 연역적 추론을 통해 이해하고 탐구하며, 이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결하는 학습 활동을 한다.

위의 내용으로부터 우리나라 중학교 기하 교육의 목표를 분석하면, 내용적으로는 도형의 개념, 성질을 이해하고 활용할 수 있게 한다는 것이고 방법적으로는 도형의 개념은 직관적으로 이해하고 도형의 성질은 직관 또는 연역적 추론에 의해 이해하게 한다는 것이다. 기본적으로는 기하 영역의 목표는 도형의 성질을 습득하는 것과 함께 논리적 사고력의 계발을 중요시하였다(한인기, 2005).

또한 2007 개정 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2007)에서 중학교 기하 영역에 관한 ‘내용개요’ 부분에는 다음과 같이 언급되어 있다.

초등학교에서 학습한 것을 기초로 중학교 1학년에서는 기본적인 도형인 점, 선, 면, 각에 대한 간단한 성질을 파악하고 삼각형의 합동조건을 이해하며 평면도형과 입체도형의 성질 등을 탐구한다. 그리고 다각형의 내각과 외각의 크기, 부채꼴의 넓이와 호의 길이, 입체도형의 부피와 겉넓이 등을 탐구한다. 2학년에서는 삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형의 성질을 증명하고 삼각형의 닮음을 이용하여 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비, 삼각형의 중점연결정리 등을 탐구하며, 이를 활용하여 실생활 문제를 해결하는 탐구활동을 한다. 3학년에서는 피타고라스의 정리와 삼각비, 원의 접선, 원주각, 원에 내접하는 사각형의 성질, 원과 비례에 관한 성질 등을 탐구한다. 이때 논증은 간단히 다루고 이들 성질을 이해하고 활용하는 데 중점을 둔다.

연역적 증명이 시작되는 중학교 2학년의 내용을 분석해보면, 내용적으로는 삼각형과 사각형

의 성질, 도형의 닮음에 관한 성질을 학습하는 것이고 방법적으로는 증명을 학습하는 것이다. 그러나 논증은 간단히 다루고 성질을 이해 활용하는 데 중점을 둔다고 하였으므로 2007 개정 수학과 교육과정에서도 증명이라는 방법적인 측면을 크게 강조하지 않았다는 것을 알 수 있다. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2011)에서는 증명이 아닌 정당화의 의미로서 ‘이해하고 설명할 수 있다’라는 표현을 사용함으로써 방법적인 측면을 보다 적극적으로 낮춰야 한다고 주장하고 있으나 위에 제시된 바와 같이 이번 교육과정에 들어서 처음 주장되는 것이 아님을 알 수 있다.

나. 정당화

수학적 명제가 참임을 자신 또는 다른 사람을 확신시키는 방식으로 사용되는 용어에는 증명(proof), 정당화(justification), 타당화(verification), 설명(explanation), 논증(argumentation) 등이 있다(김정하, 2010). 이 중 수학적 명제가 참임을 밝히는 가장 엄밀하고 형식적인 과정을 증명이라고 한다. 또한 증명 이외에 다양한 방법으로 명제가 참임을 설득시키는 과정을 증명의 한 분야로 포함시키면서, 증명의 포괄적인 의미로서 사용되고 있는 것이 ‘정당화’이다(Sowder & Harel, 1998; Tall, 1995; 김정하, 2010; 한인기, 2005; 황선욱 외, 2011; Back et al., 2009; 조완영, 2000). 비형식적인 증명의 유용성에 주의를 기울일 필요가 있으며, 아동들에게 너무 빨리 형식화를 요구하기 보다는 좀 더 다양하고 충분한 비형식적 경험을 통해 형식적 증명으로 교수학적 변환이 일어나도록 해야 한다는 측면에서 정당화를 강조할 필요가 있다(최남광, 2008).

우리나라 수학과 교육과정에서 ‘정당화’라는 용어를 처음으로 언급한 것은 2007 개정 수학과 교육과정이다. 2007 개정 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2007)의 교수·학습 방법 항목에는 다음과 같이 정당화와 관련하여 언급되어 있다.

사. 수학적 사고와 추론 능력을 발전시키기 위하여 교수·학습에서 다음 사항에 유의한다.

- (1) 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보게 할 수 있다.
- (2) 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며, 학생 자신의 사고 과정을 반성하게 한다.

위의 내용에서 ‘정당화하거나 증명해 보게 할 수 있다’라는 문장만을 보았을 때, 정당화는 기존의 증명과는 다른 것처럼 언급한 것으로 판단된다. 그러나 앞에서 살펴보았듯이 증명을 포함하는 포괄적인 의미로서 정당화를 언급함으로써 증명만을 강조하지 않음을 주장한 것으로 판단된다. 이상으로부터 본 연구에서는 어떤 명제가 참임을 밝히는 보다 포괄적인 과정을 정당화라고 정의한다. 또한 본 연구에서 사용하는 정당화³⁾라는 용어는 수학적 정당화라는 의미를 가지고 있음을 밝히는 바이다.

3) 일반적인 의미의 정당화는 정당성이 없거나 정당성에 의문이 있는 것을 무엇으로 둘러대어 정당한 것으로 만듦을 의미한다(국립국어원, <http://www.korean.go.kr/>). 2011 개정 수학과 교육과정 시안(황선욱 외, 2011)에서 정의한 수학적 의미에서의 정당화는 자신의 주장 또는 믿음을 타인에게 이해시키려는 시도를 의미한다.

다. 정당화의 유형

정당화의 유형을 어떻게 분류하는가는 학자들마다 차이가 있다. 학자들의 의견을 종합한 견해들을 살펴보면 최남광(2008)은 정당화 유형에 관한 선행연구에서 정당화 유형을 경험적 정당화와 연역적 정당화의 두 가지로 분류하는 경우가 있다고 하면서, 경험적 정당화는 몇 개의 예를 이용하거나 구체적인 경험에 주목하는 비형식적 방법이고, 연역적 정당화는 경험적이고 귀납적인 방법에 국한하지 않고 보다 일반적이고 형식적인 방법이라고 하였다. 김정하(2010)는 수학적 정당화에 관한 여러 학자들의 의견을 종합하여 정당화의 유형을 0단계에서 5단계까지로 구분하여 제시하였다. 0단계는 정당화를 시도하지 않은 단계로 본 연구의 목적에 부합하지 않아 제외하고, 1단계는 외적 확신에 의한 정당화 단계로 본 연구가 교과서 분석이라는 측면에서 외적 확신이 명백하다는 점에서 모든 유형이 1단계에 속한다고도 볼 수 있으므로 제외한다. 따라서 본 연구에서는 김정하(2010)의 연구에서 제시한 수학적 정당화의 단계 중에서, 2단계, 3단계, 4단계, 5단계만을 선택하여 순서의 의미를 갖는 단계라는 용어 대신 유형이라는 용어를 사용하여 각각 유형1, 유형2, 유형3, 유형4로 정의한다. 각 유형과 그 특징을 정리하면 다음의 [표 I-1]과 같다.

[표 I-1] 정당화의 유형

유형 구분	포함되는 정당화 유형	특징
유형1	지각적·활동적 정당화, 평범한 예에 의한 정당화, 결정적 예에 의한 정당화	예를 이용하여 그들 사이의 일반적인 속성을 찾아내거나 감각적 활동적으로 직접 해 봄으로써 정당화를 시도하는 경험적·귀납적 정당화이다.
유형2	포괄적 예에 의한 정당화, 시각적 예에 의한 정당화	귀납적 사고 방법에 의해 정당화하지 않고 대표적인 예를 사용하여 연역적인 사고 방법으로 설명해 가는 정당화이다.
유형3	식의 조작에 의한 정당화, 단순 연역적 정당화	논리적인 설명이 추가되어 있지 않지만 기호를 조작함으로써 정당화하거나, 하나 또는 그 이상의 정립되어진 전제로부터 결론을 연역하는 정당화이다.
유형4	가설 연역적 정당화, 형식적 정당화	어떤 인정된 형식에 따라 논증하는 것, 즉 엄밀한 수학적 증명을 시도하는 형식적·이론적 정당화이다.

II. 연구의 실제

1. 연구 방법

본 연구는 선행 연구를 바탕으로 하여 정당화의 유형을 4가지 유형으로 분류하였다. 이러한 분류를 기반으로 하여 정당화의 유형별로 중학교 수학 교과서에 구현된 사례를 찾아 정당화의 방안으로 제시하고자 하였다.

본 연구를 위해 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정의 변화에 있어 정당화 논의가 있음을 인지하고 이해하고 있는 교육 경력이 각각 8년, 4년인 수학 교사 2명과 함께

교과서 분석을 실시하였다. 각자 중학교 2학년 수학 교과서에 제시된 정당화의 예를 찾고 유형별로 분류하고 구분이 명료하지 않아 논의가 필요한 경우는 토론을 통해 유형별로 분류하였다.

1차 분석은 중학교 2학년 수학 교과서를 대상으로 이루어졌고, 2차 분석은 중학교 1, 2, 3학년 수학 교과서의 비교 분석으로, 1차 분석 과정에서 교과서 검정체제의 특성상 모든 교과서가 동일한 형태로 진술되었다고 판단되어 학교 현장에서 많이 선정되어 사용되고 있는 1개 출판사의 교과서에 대하여 실시하였다. 3차 분석은 중학교 수학 교과서에 나타난 정당화의 유형별 예를 찾기 위해 교과서와 익힘책을 분석하여 그 사례를 찾아내었다. 이러한 방법에 의해 연구된 결과는 수학교육학을 전공한 박사 1명과 수학교육학 교수 1명에 검토를 의뢰하여 수정 보완하였다.

2. 분석 대상

2007 개정 수학과 교육과정에 따라 개발된 중학교 수학 교과서가 분석 대상이었다. 1차 분석은 증명이라는 용어가 처음 등장하는 중학교 2학년의 도형의 성질 단원에 대해서 이루어졌다. 중학교 2학년 17종 교과서($A_1, A_2, A_3, \dots, A_{17}$)의 도형의 성질 단원을 대상으로 탐구활동, 본문 내용, 예제를 통해 설명된 명제를 분석하여 정당화 유형별로 분류하였다. 2차 분석은 중학교 1, 2, 3학년의 기하 영역 전체에 대한 비교 분석으로, 중학교 2학년 17종 교과서에 대한 분석 과정에서 교과서 간의 차별성이 없다는 판단 하에 1개 출판사의 교과서를 분석 대상으로 하였다. 1차 분석과 2차 분석의 분석 대상은 다음의 [표 II-1]과 같다.

[표 II-1] 분석 대상 단원

	대상 학년	분석 대상 단원
1차 분석	2학년	도형의 성질
2차 분석	1학년	도형의 성질, 도형의 측정
	2학년	도형의 성질, 도형의 닮음
	3학년	피타고라스의 정리, 삼각비, 원의 성질

분석 대상 단원에서 분석하고자 하는 정당화 유형은 탐구활동, 본문 내용과 예제에 국한하였으며 이 중에서도 단순한 문제 풀이 형태의 설명보다는 수학적 성질을 정당화하는 것을 대상으로 하였다. 이에 따라 중학교 1학년은 총 21개, 2학년은 총 29개, 3학년은 18개의 수학적 성질이 대상으로 선정되었고 각각을 유형별로 분류하였다.

3차 분석은 정당화 유형별로 구체적인 사례를 제시하는 것으로 2차 분석 결과와 함께 익힘책에 제시된 예를 분석하였다.

3. 분석 결과

1) 중학교 2학년 기하영역에서 다양한 유형의 정당화 형태가 나타나는가?

중학교 2학년 수학 교과서에서 도형의 성질 단원에 제시된 명제에 대하여 다양한 유형의

정당화가 나타나는지에 대하여 분석을 하였다. 분석 결과, 다음의 [표 II-2]와 같이 17종의 모든 교과서에서 유형1, 유형2, 유형3의 예를 찾을 수 없었고 유형4만을 이용하여 정당화를 하였다.

[표 II-2] 중학교 2학년의 도형의 성질 단원에 나타난 정당화 유형별 개수

교과서 유형	교과서																
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉	A ₁₀	A ₁₁	A ₁₂	A ₁₃	A ₁₄	A ₁₅	A ₁₆	A ₁₇
유형1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
유형2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
유형3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
유형4	20	20	20	20	20	20	20	19	20	20	20	20	20	19	19	18	19
합계	20	20	20	20	20	20	20	19	20	20	20	20	20	19	19	18	19

유형4만을 이용하여 정당화한 것은 증명이라는 용어가 중학교 2학년의 도형의 성질 단원에서 처음 도입되는 특성을 반영한 것으로 판단된다. 그러나 증명을 할 때는 그 필요성을 이해하게 한 후 증명을 해야 증명을 처음 접하는 학생들의 이해도를 높일 수 있다(강옥기 외, 2010). 즉 어떤 명제에 대하여 유형4만 단독으로 제시하여 정당화하는 것이 아니라 유형1, 유형2, 유형3과 같은 형태의 정당화를 먼저 제시하고 이어서 유형4의 정당화로 마무리하는 형태는 학생들의 이해도를 높일 수 있다. 따라서 결과적으로는 유형4의 정당화 방법을 사용하였으나 후자의 형태로 정당화가 이루어진 것이 있는지를 분석하였더니 1차 분석 대상 전체의 45.81%가 해당되었다. 다시 말해 54.19%는 유형4만을 이용하여 정당화하였다는 것으로, 학생들이 증명을 이해하는데 어려움을 주는 요소 중 하나였을 것으로 판단된다.

2) 중학교 1, 2, 3학년의 기하 영역에서 정당화 유형별로 비중의 차이가 있는가?

중학교 1, 2, 3학년 기하 영역 전체에 대한 분석 결과는 다음의 [표 II-3]과 같다.

[표 II-3] 중학교 1, 2, 3학년 수학 교과서의 기하 영역에 나타난 정당화 유형별 개수

	1학년		2학년		3학년	
	개수	백분율	개수	백분율	개수	백분율
유형1	3	14.28	2	5.71	1	5.56
유형2	9	42.86	0	0	0	0
유형3	9	42.86	2	5.71	0	0
유형4	0	0	31	88.57	17	94.44
합계	21	100	35	100	18	100

[표 II-3]을 보면 알 수 있듯이 중학교 1학년에서는 정당화의 유형이 다양하였으나 중학교 2학년에서는 유형4가 급격히 증가하였고 중학교 3학년에서는 1개를 제외한 모든 명제가 유형4임을 확인하였다. 중학교 2학년의 유형1, 유형3에 해당하는 것은 모두 도형의 닮음 단원의


내용이며, 3학년의 유형1에 해당하는 것은 피타고라스의 정리의 역에 대한 정당화로 교육과정의 교수·학습 상의 유의점에서 ‘피타고라스의 정리의 역은 증명 없이 문제 상황을 통해 간단히 다룬다’라고 쓰여 있기 때문으로 판단된다. 이와 같이 유형4의 비중이 중학교 2학년에서 급격히 증가한 것은 학생들의 인지 상태를 고려했을 때 중학교 1학년보다는 유형4의 비중이 커지지만 유형1, 유형2, 유형3도 어느 정도 다루어졌어야 함을 의미하는 것이기도 하다.

3) 유형4가 아닌 다른 정당화 유형의 구체적인 예로 적절한 것이 있는가?


2차 분석 결과, 유형 4를 제외한 다른 정당화 유형의 구체적인 예가 많지 않음을 확인하였다. 2차 분석 결과에 해당하는 유형1, 유형2, 유형3의 예와 익힘책에 제시된 예에 대한 분석을 통해 유형별로 가장 적절한 예를 2가지씩 선정하였다. 이러한 정당화 유형은 기존의 중학교 2학년 기하 영역에서 증명으로 대표되는 유형4를 대체할 수 있을 것으로 판단된다.

첫째, 유형1의 예이다.

다음 <그림 II-1>은 중학교 1학년에서 구의 겹넓이 구하는 공식에 대한 정당화로, 하나의 사례를 통해 정당화를 시도하고 있는 유형1에 해당된다.

실험해 봅시다  익힘책 | 탐구하기 259쪽

① 구 모양의 오렌지를 반으로 자른다.
 ② 오렌지를 반으로 자른 단면과 크기가 같은 원을 여러 개 그린 후, 오렌지 껍질을 모두 잘게 잘라서 그 원 안에 놓는다.



(1) 오렌지의 껍질로 몇 개의 원을 채울 수 있는가?
 (2) 오렌지의 겹넓이는 오렌지를 반으로 자른 단면의 넓이의 몇 배라고 할 수 있는가?

위의 실험해 봅시다 에서 반지름의 길이가 r 인 구의 겹넓이는 반지름의 길이가 r 인 원의 넓이의 4배임을 알 수 있다. 따라서 반지름의 길이가 r 인 구의 겹넓이 S 는 다음과 같다.

$$S = 4 \times (\pi r^2) = 4\pi r^2$$

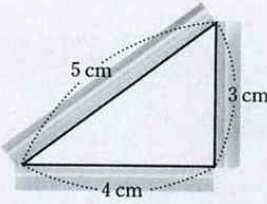
<그림 II-1> 유형1. 구의 겹넓이(우정호 외, 2008)

또한 중학교 3학년 피타고라스의 정리의 역은 다음 <그림 II-2>와 같이 증명 없이 문제 상황을 이해한다는 교육과정의 교수·학습 상의 유의점에 따라 유형1을 이용하여 정당화를 하였다.

생각 열기 **준비물** 각도기, 빨대

오른쪽과 같이 길이가 각각 3 cm, 4 cm, 5 cm 인 빨대를 연결하여 삼각형을 만들었다.

- 가장 긴 변의 길이의 제곱과 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합을 비교해 보자.
- 오른쪽 삼각형이 직각삼각형을 각도기를 이용하여 확인해 보자.



일반적으로 삼각형에서 가장 긴 변의 길이의 제곱이 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합과 같으면 이 삼각형은 직각삼각형임이 알려져 있다. 즉, 다음과 같은 피타고라스의 정리의 역이 성립한다.

<그림 II-1> 유형1. 피타고라스의 정리의 역(최용준 외, 2010)

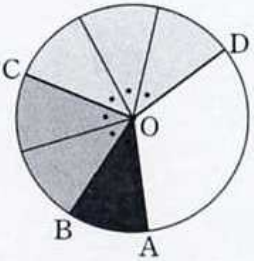
둘째, 유형2의 예이다.

다음 <그림 II-3>은 부채꼴의 호의 길이와 넓이가 각각 중심각의 크기에 정비례함을 설명하는 정당화로, 유형2에 해당된다.

오른쪽 그림의 두 부채꼴 AOB와 BOC에서 중심각의 크기가 2배가 되면 호의 길이도 2배가 됨을 알 수 있다.

이와 같이 한 원에서 부채꼴은 중심각의 크기가 2배, 3배, ...가 되면 호의 길이와 넓이도 각각 2배, 3배, ...가 된다.

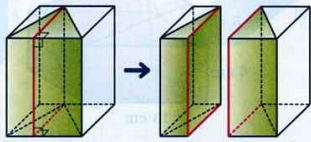
즉, 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 각각 중심각의 크기에 정비례한다.



<그림 II-3> 유형2. 부채꼴의 호의 길이와 넓이의 성질(김원경 외, 2008)

다음 <그림 II-4>는 기둥의 부피를 구하는 공식에 대한 정당화로, 유형2에 해당된다.

다음 그림에서 삼각기둥의 부피는 직육면체의 부피의 $\frac{1}{2}$ 이다.



또, 삼각기둥의 한 밑면의 넓이는 직육면체의 한 밑면의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이다.
따라서 삼각기둥의 부피는

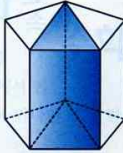
$$\begin{aligned} (\text{삼각기둥의 부피}) &= \frac{1}{2} \times (\text{직육면체의 부피}) \\ &= \frac{1}{2} \times (\text{직육면체의 한 밑면의 넓이}) \times (\text{높이}) \\ &= (\text{삼각기둥의 한 밑면의 넓이}) \times (\text{높이}) \end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

그리고 오각기둥, 육각기둥, ...과 같은 각기둥의 부피도 오른쪽 그림과 같이 몇 개의 삼각기둥으로 잘라서 이를 삼각기둥의 부피의 합으로 구할 수 있다.
따라서 각기둥의 부피는

$$(\text{각기둥의 부피}) = (\text{한 밑면의 넓이}) \times (\text{높이})$$

이다.



<그림 II-4> 유형2. 기둥의 부피(이준열 외, 2008)

셋째, 유형3의 예는 다음과 같다.

다음 <그림 II-5>는 삼각형의 닮음조건에 대한 정당화로, 유형4보다는 다소 약화시켜 전체적으로 증명의 틀은 유지하면서도 1:2의 특수한 경우를 통해 설명한 유형3에 해당된다.

일반적으로 두 삼각형이 있을 때 대응하는 변의 길이의 비가 모두 같고, 대응하는 각의 크기가 각각 같으면 두 삼각형은 닮음이다. 그런데 이들 중에서 몇 가지만 같아도 두 삼각형은 닮음이 되는 경우가 있다.

위에서 $\triangle ABC$ 와 $\triangle DEF$ 는 대응하는 변의 길이가 1 : 2로 모두 같은 삼각형이므로

$$\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{BC} : \overline{EF} = \overline{CA} : \overline{FD} = 1 : 2$$

이다. 이제 $\triangle ABC$ 와 $\triangle DEF$ 가 닮음을 증명해 보자.

$\triangle ABC$ 를 2배 확대한 $\triangle A'B'C'$ 에서

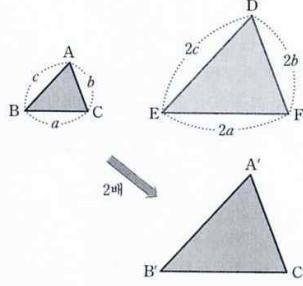
$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = \overline{CA} : \overline{C'A'} = 1 : 2$$

이다. 이때,

$$\overline{DE} = \overline{A'B'}, \overline{EF} = \overline{B'C'}, \overline{FD} = \overline{C'A'}$$

이 성립한다.

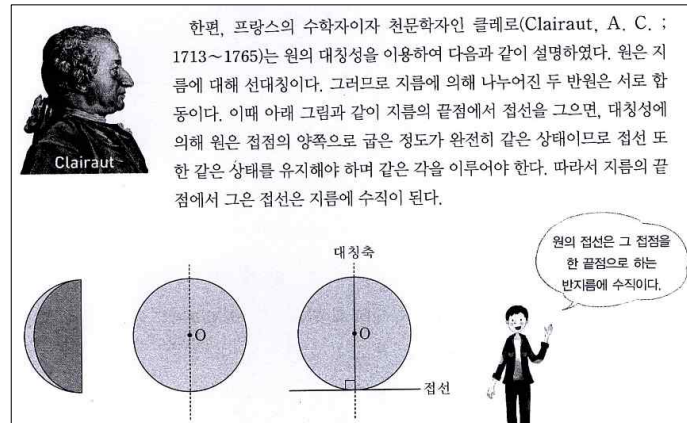
따라서 $\triangle DEF \cong \triangle A'B'C'$ (SSS 합동)이므로 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 임을 알 수 있다.



<그림 II-5> 유형3. 삼각형의 닮음조건(최용준 외, 2009)

이 환 절

다음 <그림 II-6>는 원의 접선과 반지름의 성질에 관한 정당화로, 간단한 설명의 형태로 진술한 유형3에 해당된다.



<그림 II-5> 유형3. 삼각형의 닮음조건(우정호 외, 2010)

Ⅲ. 연구의 결론 및 제언

1. 결론

본 연구는 2011 개정 수학과 교육과정에서 시도하려고 하는 정당화의 의미와 유형에 대하여 살펴보고, 현재 적용되고 있는 2007 개정 수학과 교육과정에서 구체적인 예를 찾아봄으로써 교육과정의 변화에 따른 혼란을 줄이는데 목적을 두고 연구를 진행하였다. 이에 따른 연구 결과는 다음과 같다.

첫째, 중학교 2학년의 도형의 성질 단원에 제시된 모든 명제는 유형4에 의해서 정당화가 이루어졌다. 증명이라는 용어가 처음 사용되는 단원이기 때문으로 판단된다. 그러나 분석 결과, 전체의 45.81%는 유형1, 유형2, 유형3으로 정당화하여 그 필요성을 느끼게 하여 유형4로 마무리하는 두 유형 간의 결합적인 형태를 사용하였으나 나머지 54.19%는 명제로부터 바로 유형4에 의한 증명만을 다룬 것으로 나타났다. 이는 학생들이 기하학적 성질을 이해하기보다는 증명을 이해하는 것에만 초점을 두게 되어 중학교 2학년 기하 영역에 대한 어려움을 주장한 이유가 된 것으로 판단된다.

둘째, ‘증명’이라는 용어가 도입하는 중학교 2학년에서 유형4의 비중이 90% 내외로 급격히 증가하였다. 증명이라는 용어가 도입되기 전과 후라는 측면이 있기는 하지만 유형4의 비중이 급격히 증가함으로 인해 학생들이 보다 어려움을 가졌을 것으로 판단된다. 중학교 1학년의 인지 상태에 비해 중학교 2, 3학년의 인지 상태가 크게 발달한다고 말할 수 없으므로 유형4의 비중을 급격히 증가시키는 것은 피해야 한다.

셋째, 중학교 1, 2, 3학년의 기하 영역에서 유형4가 아닌 다른 정당화 유형이 존재하기 때문에 이 중에서 적절한 예를 찾아 제시하였다. 이러한 예를 통해 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정의 기하 영역에서 제안되고 있는 정당화의 예로서 보다 적극적으로 활용할 수 있을 것으로 판단된다.

2. 제언

이상의 연구 결과를 통해 본 연구는 다음을 제언하고자 한다.

첫째, 중학교 1학년에 비해 중학교 2, 3학년에서 유형4가 급격하게 증가함을 확인하였고, 우리나라 교육과정에 제시된 기하 교육의 목적이 도형의 성질을 습득하고 활용하는 것에 보다 초점을 두고 있다는 것을 확인하였다. 따라서 중학교 2학년에서 증명의 다양화라는 측면을 고려하여 정당화의 개념을 도입하고 다양한 정당화 유형을 통해 명제가 참임을 밝히는 것은 바람직하다고 판단된다. 다시 말해 도형의 성질을 습득하고 활용하는데 보다 초점을 두어야 하는 명제나 증명이 너무 어려워 이해하는데 어려움이 많은 명제의 경우는 유형4를 언급하지 않고 유형1, 유형2, 유형3으로만 정당화를 하는 것이 바람직하다.

둘째, 정당화의 개념이 도입되는 것이 바람직하다고 할 때, 많이 찾을 수 있는 것은 아니지만 현재의 교과서, 익힘책을 통해서 다양한 정당화의 유형을 확인할 수 있었다. 따라서 다양한 정당화 유형을 사용할 수 있다는 측면에서, 교과서 집필자는 특정 유형의 정당화만을 고집하지 않고 학생들에게 가장 알맞다고 판단되는 정당화의 유형을 제시하여 교과서를 집필하도록 하는 것이 바람직하다. 특히 증명이라는 용어가 도입되기 전 단계로서 중학교 1학년에서 진술한 형태를 참고하는 것이 필수적이다. 예를 들어 <그림 II-7>과 <그림 II-8>은 맞꼭지각의 성질에 대한 정당화로, 각각 중학교 1학년과 2학년에서 제시된 예이다. 같은 성질에 대한 정당화의 예임에도 불구하고 기호화가 상대적으로 덜 이루어진 <그림 II-7>과 같은 형태의 정당화에 대한 고려가 필요하다.

앞의 **생각하기 2**에서 맞꼭지각인 $\angle a$ 와 $\angle c$, $\angle b$ 와 $\angle d$ 의 크기는 서로 같음을 알 수 있는데 이는 다음과 같이 설명할 수 있다.

이웃하는 각인 $\angle a$ 와 $\angle b$, $\angle b$ 와 $\angle c$ 의 크기의 합은 각각 평각이므로

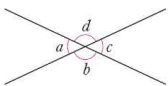
$$\angle a + \angle b = 180^\circ$$

$$\angle c + \angle b = 180^\circ$$

이다. 따라서

$$\angle a = \angle c$$

이다.



<그림 II-7> 중학교 1학년 맞꼭지각의 성질 정당화(정순영 외, 2008)

오른쪽 그림과 같이 두 직선 AC와 BD가 한 점 O에서 만날 때, 평각의 크기는 180° 이므로

$$\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ \quad \dots\dots ①$$

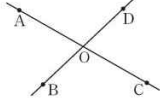
$$\angle BOC + \angle COD = 180^\circ \quad \dots\dots ②$$

①, ②에 의해

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle BOC + \angle COD$$

$$\therefore \angle AOB = \angle COD$$

따라서 맞꼭지각의 크기는 서로 같다.



<그림 II-8> 중학교 2학년 맞꼭지각의 성질 정당화(우정호 외, 2009)

참고문헌

- 강옥기, 허난, 조현공, 박경은, 이환철 (2010). 수학교육학 정론. 경문사.
- 교육과학기술부 (2011). 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책 8] 수학과 교육과정. 교육과학기술부.
- 교육인적자원부 (2007). 교육인적자원부 고시 제2006-75호 및 제2007-79호에 따른 중학교 교육과정 해설(Ⅲ) 수학, 과학, 기술·가정. 교육인적자원부.
- 김원경, 조민식, 김영주, 김윤희, 방환선, 윤기원, 이춘신 (2008). 중학교 수학1. 비상교육.
- 김정하 (2010). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. 이화여자대학교 박사학위논문.
- 우정호, 박교식, 박경미, 이경화, 김남희, 임재훈, 박인, 지은정, 신보미, 최인선 (2008). 중학교 수학1. 두산동아.
- 우정호, 박교식, 박경미, 이경화, 김남희, 임재훈, 박인, 이영란, 고현주, 김은경 (2009). 중학교 수학2. 두산동아.
- 우정호, 박교식, 박경미, 이경화, 김남희, 임재훈, 박인, 이영란, 고현주, 이정연 (2010). 중학교 수학 익힘책 3. 두산동아.
- 이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미 (2009). 중학교 수학2. 천재교육.
- 정순영, 권혁진, 강운중, 이환철, 신지영, 설정수 (2008). 중학교 수학1. 두산동아.
- 조완영 (2000). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구. 한국교원대학교 박사학위논문.
- 최남광 (2008). 중등수학영재아들이 공간기하과제 해결과정에서 보여주는 정당화 유형과 수학적 표현에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 최용준, 한대희, 박진교, 김강은, 신태양, 배명주 (2009). 중학교 수학2. 천재문화.
- _____ (2010). 중학교 수학3. 천재문화.
- 한인기 (2005). 한국과 러시아의 7~8학년 수학교과서 도형영역에 나타난 직관적 정당화와 엄밀한 증명. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 제44권, 제4호, pp.535-546.
- 황선욱, 황혜정, 이상구, 백석윤, 박경미, 박선화, 김동원, 강은주, 신항균, 장혜원, 이광호, 김태환, 최혜령, 류희찬, 조완영, 고호경, 고영미, 백장선, 반은섭, 박혜숙, 이재학, 계승혁, 김영록, 도종훈, 전철 (2011). 창의 중심의 미래형 수학과 교과내용 개선 및 교육과정 개정 시안 연구. 한국과학창의재단.
- Back R. J., Mannila L., & Wallin S. (2009). Student Justifications In High School Mathematics. *Proceedings of CERME 6*. Lyon France © INRP 2010
- Sowder, L. & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *Mathematics Teacher*, 91, 670-675.
- Tall, D. (1995). Cognitive developments, representations and proof. *The conference Justifying and Proving in School Mathematics Institute of Education, London*, 27-38.

An Exploration of Justification Types represented in the Geometry field of Middle School Mathematics Textbook

Lee, Hwan Chul⁴⁾ · Ha, Young Hwa⁵⁾

Abstract

There have been several studies regarding strict and formal proof in the field of geometry in middle school curriculum, and the level of proof has been gradually lowered along with the changes in the curriculum. In the 2011 Revised Middle School Math Curriculum, there have been efforts to eliminate the term 'proof' and instead to replace it with the new one, 'justification'. Therefore, this study intends to present specific and practical examples of justification by analyzing the current math textbook especially in the field of geometry. As a result, it identified that strict and practical proof has been sharply increased in the second year of middle school. It also witnessed the possibility of justification from the various examples presented in the first, second, and the third year of the middle school math textbook.

* key words : Mathematics textbook, Justification

4) Korea Foundation for the Advancement of Science and Creativity

5) Ajou University