한국학교수학회논문집 제 14 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 14, Number 3, 355-375, September 2011

삼각형의 외심, 내심의 정의에 관한 고찰

전영배[1)] · 강정기[2)] · 노은환[3)]

본 연구는 삼각형의 외심, 내심의 기능적 이해를 돕기 위한 목적으로 수행되었으며, 그들의 정의에 대한 교수 학습 상황에 대한 도움을 제공하고자 하였다. 삼각형의 외심, 내심의 정의는 현 교과서에서 3가지로 분류될 수 있으며, 이들을 각각 구성에 초점을 맞춘 정의, 의미에 초점을 맞춘 정의, 구성과 의미 모두에 초점을 맞춘 정의로 구분하였다. 그리고 이들 각 정의가 갖는 맥락, 의도, 목적에 대한 이해를 도모하고자 삼각형의 외심, 내심의 각 정의에 대한 특징을 분석하였다. 구성에 초점을 맞춘 정의는 개념의 실체와 무모순성을 강조한 정의로 학습자가 이 개념이 무모순임을 이해하기 위한 목적으로 선택된 것이라는 것을 분석해 내었다. 한편, 이 정의는 다각형의 외심, 내심의 의미를 고려하여 정의를 하였으며, 이러한 사실로 미루어 볼 때 삼각형의 외심, 내심은 다각형의 외심, 내심과 연계된 지도가 필요함을 확인하였다. 또한 이 정의는 용어와 정의의 괴리로부터 발생하는 개념 혼란으로 인해 정의에 대한 숙지가 어렵다는 것을 알 수 있었다. 의미에 초점을 맞춘 정의는 개념 정의와 개념 이미지는 일치하여 정의를 숙지하는 것이 용이하지만, 개념의 실체를 발견하고자 할 때 구성이 어려운 상황을 연출한다는 점을 알 수 있었다. 한편, 결과적 지식이지만 발생적 맥락을 간직한 정의이기 때문에 이러한 점을 고려하면 정의에 대한 지도는 개념 발생 맥락 및 과정이 분리되어 지도되어서는 안 된다는 점을 확인하였다. 구성과 의미 모두에 초점을 맞춘 정의는 시작점이 모호할 뿐 만 아니라 기존에 제시된 정의와는 다른 형태이기 때문에 개념 정의에 대한 인식이 어려울 수 있음을 확인하였다. 본 연구의 결과가 수학 교육 현장에서 삼각형의 외심, 내심의 정의에 대한 이해를 향상시키는데 도움이 되길 바란다.

주요 용어: 삼각형의 외심, 삼각형의 내심, 정의, 기능적 이해

Ⅰ. 서 론

김홍기(2008)는 수학 학습에서 용어의 정의를 올바르게 잘 이해하는 것은 그것과 연관된 학습 내용의 이해와 활용에 매우 중요하다고 하며, 교과서에서 사용하고 있는 용어는 수학 학습에서 가장 기본적인 것 중의 하나라고 하였다. 김진환·박교식(2010)은 수학 용어의 이해는 수학자들이 수학적 상황을 처리하는 과정에서뿐만 아니라 수학 교수·학습의 과정에서

1) 경상대학교(skywine@gmail.com)
2) 창원 남산중학교(jeonggikang@gmail.com)
3) 진주교육대학교(idealmath@gmail.com; ehroh@cue.ac.kr)

도 매우 중요하다고 하였다. 그리고 박경미 · 임재훈(1998)은 수학에서 용어는 수학적 사고의 출발점이라고 할 수 있을 만큼 핵심적인 역할을 수행한다고 하여 수학에서 용어 이해의 중요성을 강조하였다.

Schell(1982)은 수학 교과의 경우 다른 교과와 비교해 볼 때, 용어가 매우 함축적이고 추상적이어서 학생들의 이해가 더 쉽지 않다고 하며, 수학 교수 · 학습에서 용어의 이해에 더 초점을 맞출 필요가 있다고 하였다. 따라서 어떤 용어들을 초기에 선정하여 그들 용어의 정의를 어떻게 적절하게 잘 표현하여 학습자 모두가 올바르게 받아들여 사용하게 할 수 있는가는 중요하다. 같은 맥락에서 Euclid & Heath(2006)는 많은 세월에 걸쳐 용어들의 정의에 대한 분석 및 비판이 이루어져 온 것을 보면 용어의 정의 서술이 얼마나 어렵고 중요한 것인지를 알 수 있다고 지적하였다. 이와 같이 수학에서 용어의 정의 서술이 중요하게 취급되는 것은 용어의 정의 자체가 용어에 대한 이해와 직결되는 부분으로서 용어와 관련된 내용의 이해에 직접적 영향을 미치기 때문이다.

한편, 조영미(2001)는 정의를 이해하는 데에는 정의에 사용하고 있는 용어의 뜻뿐만 아니라 그 맥락, 의도, 목적 등을 더불어 이해할 필요가 있다고 하였다. 이와 같은 맥락에서 Villiers(1994)도 이해를 도구적 이해, 관계적 이해, 논리적 이해, 기능적 이해로 구분하면서, 특별히 기능적 이해에 대해 언급한 바 있다. 예를 들어, 흔히 평행사변형은 두 쌍의 대변이 평행인 사각형으로 정의된다. 그런데 평행사변형의 경우, 여러 가지 필요 충분 조건이 있다. 그러한 필요 충분한 조건도 정의로 사용될 수 있다. 그럼에도 불구하고, 우리는 평행사변형을 '두 쌍의 대변이 평행인 사각형'이라는 특정한 정의 방법을 택한다. 이와 같이 정의를 함에 있어 특정한 정의 방법을 택하게 된 이유를 아는 것을 그 정의의 역할이나 기능을 이해하고자 한다는 의미에서 기능적 이해라고 하는데, Villiers는 수학 교수 · 학습에서 이와 같은 기능적 이해의 중요성을 강조하였다.

현재 중학교 수학에서 기하 단원의 대부분은 유클리드 원론에 기반을 둔 내용으로서 이 단원에서 사용되는 용어들도 물론 그러하다. 이들 용어 중 중학교 2학년에 나오는 삼각형의 외심, 내심의 정의는 삼각형과 원을 다루는 기하 단원을 이해하는데 있어 매우 중요한 요소이다. 삼각형과 원을 다루는 단원의 학습에 중요한 영향을 미치는 삼각형의 외심, 내심은 여러 가지 필요 충분한 조건을 갖추고 있으며, 수학 교과서 별로 서로 다른 용어의 정의를 선정하고 이를 사용하고 있어, 많은 학생들이 이들 용어의 정의와 성질을 혼돈하여 사용할 우려를 낳고 있다. 이를 테면, 삼각형의 외심, 내심과 관련된 증명 문제를 해결할 경우 이들의 정의와 성질을 혼돈하여 증명에 사용함으로써 수학의 연역적 체계에 대한 이해를 어렵게 하는 것이 그 한 예가 될 것이다. 더욱이 삼각형의 외심, 내심의 정의는 그것이 갖는 맥락, 의도, 목적에 대한 이해, 즉 기능적 이해를 도울 수 있도록 다루어지지 못하고 결과적 지식으로 소개되고 있어 단순한 이해에 그치기 쉽다.

학생들은 용어의 정의가 갖는 특징이 충분하게 지도되지 못한 단순한 접근으로 인해, 학습한 용어의 정의를 오랫동안 기억하기 어려우며, 용어의 정의에 대한 혼돈을 겪기 쉽다. 용어 정의에 대한 단순한 접근 및 이해만으로는 지식의 동화가 일어나기 쉽지 않고, 지식의 동화가 이루어지기 위해서는 정의의 여러 측면을 다양하게 고찰해 보는 활동을 통해 정의를 깊이 있게 이해하는 것을 돕는 것이 필요하다고 사료된다. 따라서 주어진 용어에 대한 다양한 특징의 고찰이 이루어져야 하며, 이러한 고찰을 통해 교사는 용어의 정의가 갖는 특징을 충분히 숙지하여 학생들에게 전달하는 것이 필요할 것으로 보인다.

이러한 측면에서 본 연구에서는 중학교 2학년에 제시되는 서로 다른 삼각형의 외심, 내심

의 정의에 대한 기능적 이해를 돕고, 이를 통해 이들 용어의 교수·학습 지도 과정에 도움을 제공하는 것을 연구의 목적으로 한다. 이러한 목적을 달성하기 위해 교과서에 제시된 삼각형의 외심, 내심의 정의를 분류하고, 분류된 각각의 정의가 갖는 특징을 분석하여 살펴보는 활동을 통해 삼각형의 외심, 내심 용어의 지도에 대한 교육적 시사점을 얻는 것을 연구 문제로 설정하였다. 본 연구가 삼각형의 외심, 내심의 서로 다른 정의에 대한 보다 깊은 이해를 돕는 자료가 될 수 있길 바란다.

Ⅱ. 정의의 기능적 이해에 관한 연구[4)]

이해는 수학교육 분야의 연구 대상 중 하나이며, 이러한 이해는 학자별로 조금씩 다른 견해를 보이기도 한다. Skemp(2008)는 공식이 왜 그렇게 되는지 알지 못하고 문제 해결을 위해 기억된 공식을 적용하는 수준의 이해를 도구적 이해(instrumental understanding), 일반적인 수학적 관계에서 특수한 공식이나 과정을 연역하는 수준의 이해를 관계적 이해(relational understanding), 수학적 기호 체계와 표기를 적절한 수학적 아이디어와 관련시키고 이 아이디어를 논리적 추론의 연결 고리에 결합시키는 수준의 이해를 논리적 이해(logical understanding)라 하였다. 이러한 이해에 대한 이론적 토대는 이 후의 수학 교육에서 이해를 분석하는 중요한 도구로 사용되어 왔다.

Skemp(2008)의 견해와 조금 차이가 나는 것으로 Byers & Herscovics(1977)의 견해가 있으며, 그들은 수학적 이해를 도구적 이해, 관계적 이해, 직관적 이해, 그리고 형식적 이해의 네 가지로 구분하여 제시하기도 하였다. 그 외 Villers(1994)는 기하학에서 사각형의 정의를 연구하면서 수학의 정의에 관한 용어의 이해를 도구적 이해, 관계적 이해, 논리적 이해, 그리고 용어의 정의가 갖는 맥락, 의도, 목적 등에 대한 이해, 즉 기능적 이해로 구분하기도 하였다.

특히 Villers(1994)는 수학·교수 학습에서 용어의 정의가 갖는 기능적 이해의 중요성을 강조하였다. 본 연구는 중학교에 나오는 삼각형의 외심, 내심의 정의를 깊이 있는 이해를 도모하기 위해 다양한 이해의 관점 중 Villers의 기능적 이해의 측면에서 이들 용어의 정의를 분석하고자 한다. 이를 위해 본 장에서는 연구의 목적으로 제시된 용어 정의에 대한 기능적 이해와 관련된 선행 연구를 간략히 살펴보고자 한다.

Villers(1994)는 여러 사각형에 대한 계층적(hierarchical) 관점에서의 정의를 분할적(partitional) 관점 대한 정의와 비교하여 계층적 관점에서의 정의에 대한 기능적 이해를 모색하는 연구를 하였다. Villers(1994)는 계층적 관점에서의 정의는 분할적 관점에서의 정의에 비해 대상의 성질을 알기 위해 그 대상 자체를 보기 보다는 그 대상이 속한 범주를 살피는데, 만약 그 범주가 이미 잘 알려져 있다면, 별도의 수고 없이 그 대상에 대해 많은 것을 알 수 있는 장점을 지니고 있음을 지적하였다. 하지만 대부분의 교재나 교사는 이러한 사실에 대한 언급 없이 계층적 관점을 취한 정의를 학생들에게 지도하고 있으며, 이러한 사실로부터 학생들은 정의에 대한 기능적 이해를 할 수 있는 기회를 갖지 못하고 있음을 지적하였다.

조영미(2001) 역시 이러한 점에 주목하여 학교수학의 정의에 대한 특징을 분석하는 연구를 실시하였다. 이 연구에서 조영미(2001)는 동일한 용어가 학문으로서의 수학과 학교수학에

4) 이 내용의 일부분은 조영미(2001)의 논문에서 관련된 내용을 발췌하여 요약 정리한 것이다.

서 상이하게 정의되고, 또한 학교수학에서도 상이하게 정의되는 것을 보면 정의는 결코 고정된 것이 아님을 지적하고, 사용되고 있는 용어의 뜻을 정의 자체만을 통해 충분히 이해하기 어려우므로 여러 가지로 정의할 수 있는 용어에 대해 특정한 것을 정의항으로 선택하였다면, 그러한 선택을 하게 된 이유, 상황, 맥락, 의도 등에 대한 이해가 그 정의의 이해에 필수 불가결한 요소임을 강조하였다. 특히, 조영미(2001)는 정의 기능을 언급하며, 이것에 대해 정의를 이해하는 데 중요한 요소로서 소홀하게 다룰 수만은 없는 것이며, 어떤 대상의 정의로 특정한 방법을 택한 이유를 알 수 있도록 정의 기능에 대한 지도가 학교수학에 필요함을 주장하였다.

Mariotti & Fischbein(1997)는 도형을 소재로, 분류 활동을 통한 정의하기를 지도한 사례연구에서, 도형의 지각적 특성에 의존하는 자발적 정의와 구조적 기준(structural criteria)에 근거하는 이론적 정의를 구분하고, 지각적 특성에 의존하여 분류할 수 있음에도, 굳이 왜 구조적 기준에 근거하여 분류하는 이론적 정의의 기능을 이해하는 것이 필요하다고 하였다. 특히, 이론적 정의는 자발적 정의에 비해, 자연을 이해하는데 좀 더 의미있는 단서를 제공하며, 좀 더 체계화된 지식을 얻도록 한다는 측면에서 논리적 가치를 가지며, 이론적 정의의 이러한 장점을 아는 것이 이론적 정의의 기능을 이해하는 것이라고 하여, 이론적 정의의 기능에 대한 이해를 강조하였다.

Borasi(1992)는 수학적 정의가 갖추어야 할 조건[5]으로 간주되는 항목을 학생들이 인식할 수 있도록 수업 내용을 구성하였다. 원을 수학적으로 부적절하게 정의한 사례들을 제공하여, 학생들로 하여금 그 정의가 지닌 부적절함을 지적하고 수정하도록 하여 학생들 스스로 수학적 정의가 갖추어야 할 조건을 인식할 수 있도록 지도하였다. 특히, Borasi(1992)는 수학적 정의는 고정되어 변화하지 않는 것으로 간주되는 것에 우려를 표하며, 수학적 정의 역시 맥락, 가치 등에 따라 변화하는, 역동성을 지닌 것임을 인식시키려고 하였다. 즉, Borasi(1992)는 이러한 지도로부터 수학적 정의는 완성되어 고정된 내용이 아니라 변화하고 발전해가는 역동적인 것이라는 사실과 이러한 수학적 정의가 발전 및 보완되는 과정 속에서 갖추어야 할 조건에 대한 이해를 돕고자 하였다. 즉, 수학적 정의에 대한 기능적 이해를 모색하고자 한 것이다.

이상에서 살펴본 연구의 내용을 볼 때, 수학적 정의에 대한 이해는 정의 자체에 대한 것이 전부가 아니고, 정의에 대한 기능적 이해의 수준까지 도달하는 것이 중요함을 알 수 있으며, 본 연구에서는 이러한 점을 고려하여 중학교 2학년 기하단원에서 취급하는 삼각형의 외심, 내심을 대상으로 이들 정의가 갖는 이유, 상황, 맥락, 의도 등을 연구해 보고자 한다.

---

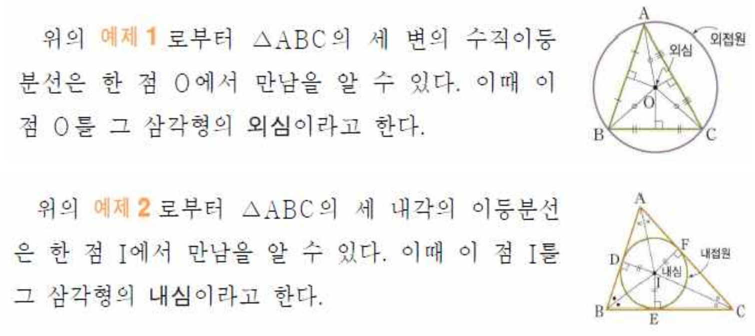
5) Borasi는 수학적 정의가 갖추어야 할 특징으로 다음과 같은 항목을 들고 있다.
① 용어의 정밀성 : 정의에서 사용하고 있는 용어들은 이전에 정의된 것이거나 공리적 체계에서 출발점으로 삼게 되는 무정의 용어이어야 한다.
② 개념의 분리 : 어떤 개념의 예라면, 그 개념의 정의에서 제시하고 있는 모든 조건들을 만족해야 한다. 어떤 개념의 예가 아니라면, 그 조건들 중에 적어도 하나는 만족하지 않아야 한다.
③ 본질성 : 목하 관심을 두고 있는 개념과 그렇지 않은 개념들을 구별하는데 순전히 필요한 용어들과 특성만이 정의에 분명하게 언급되어야 한다.
④ 무모순성 : 정의에서 제시하고 있는 모든 특성들은 공존할 수 있어야 한다.
⑤ 비순환성 : 정의하려고 하는 용어를 정의에 사용해서는 안 된다.

Ⅲ. 삼각형의 외심, 내심의 정의에 대한 분류

본 장에서는 2007 개정 교육과정이 적용된 14개 중학교 수학 2 교과서에 제시된 삼각형의 외심 및 내심의 정의에 대해 살펴보고, 이를 제시된 정의에 따라 분류해 보고자 한다. 현재 중학교 2학년 수학 교과서의 삼각형의 외심과 내심의 정의하는 것은 세 종류로 분류되는데, 첫 번째는 삼각형의 외심을 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점, 내심을 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이라 정의한 구성에 초점을 맞춘 정의이다. 두 번째는 삼각형의 외심을 삼각형의 외접원의 중심, 삼각형의 내심을 삼각형의 내접원의 중심이라 정의한 의미에 초점을 맞춘 정의이다. 세 번째는 구성과 의미 모두에 초점을 맞추어 정의이다. 다음은 이와 같이 분류된 정의 별로, 삼각형의 외심과 내심에 대한 교과서의 내용을 간략히 살펴보고자 한다.

1. 구성에 초점을 맞춘 정의

전재석(1995)에 의하면 구성된다는 것은 유한회의 단계로 그 실체를 나타낼 수 있는 방법을 제시하거나, 또는 임의로 원하는 정도의 정확성으로 그들을 계산하는 방법을 제시함을 의미한다. 중학교 2학년 교과서에 삼각형의 외심과 내심을 정의한 방법 중에 외심과 내심을 유한회의 단계로 그 실체를 나타낼 수 있는 방법에 초점을 맞추어 정의한 방식이 구성에 초점을 맞춘 정의이다. 현재 정창현 외(2009), 박종률 외(2009), 박규홍 외(2009), 이준열 외(2009)가 이러한 정의를 채택하고 있다. 다음 [그림 1]은 구성에 초점을 맞춘 정의 방식으로 외심과 내심을 정의한 것이다.



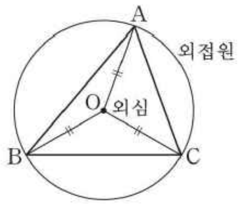
[그림 1] 구성에 초점을 맞춘 외심과 내심의 정의(박종률 외, 2009)

구성에 초점을 맞춘 정의 방식으로 된 대부분의 교과서는 삼각형의 외심(내심)을 각각 종이를 이용한 활동을 통해 삼각형의 세 변의 수직이등분선(세 내각의 이등분선)이 한 점에서 만나는지를 확인하고, 이 점에서 삼각형의 세 꼭짓점(세 변)에 이르는 거리를 비교해보는 활동으로부터 시작한다. 이러한 활동 이 후 삼각형의 세 변의 수직이등분선(세 내각의 이등분선)은 한 점에서 만나는 것과 이 점에서 삼각형의 세 꼭짓점(세 변)에 이르는 거리가 같음을 증명하는 과정을 거치면서 삼각형의 외심(내심)을 삼각형의 세 변의 수직이등분선(세 내각의 이등분선)의 교점으로 정의한다. 그리고 외심(내심)을 중심으로 하고 이 점에서 삼각형의 꼭짓점(변)에 이르는 거리를 반지름으로 하는 원을 그릴 수 있음을 설명하고, 이 원을 삼각형의 외접원(내접원)이라고 정의한다.

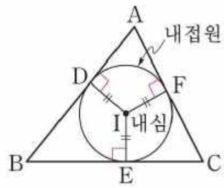
2. 의미에 초점을 맞춘 정의

용어 자체가 함의하는 바와 그 정의가 일치하거나 긴밀하게 연계된 경우가 의미에 초점을 맞춘 정의이다. 즉, 용어와 정의 사이에 관점의 괴리가 있지 않는 경우를 말한다. 삼각형의 외심과 내심이란 용어는 삼각형의 외접원의 중심과 내접원의 중심을 줄여 만든 용어이다. 이러한 관점에서 삼각형의 내심과 외심을 정의한 방식이 용어의 의미에 초점을 맞춘 정의이다. 현재 강신덕 외(2009), 우정호 외(2009), 박윤범 외(2009), 김원경 외(2009), 김홍종 외(2009), 박영훈 외(2009), 송근화 외(2009), 유희찬 외(2009) 등 대부분의 교과서가 이러한 정의를 채택하고 있다. 다음 [그림 2]는 의미에 초점을 맞춘 정의 방식으로 외심과 내심을 정의한 것이다.

이와 같이 △ABC의 모든 꼭짓점이 원 O 위에 있을 때, 이 원 O는 △ABC에 **외접**한다고 한다. 이때, 원 O를 △ABC의 **외접원**이라 하고, 외접원의 중심 O를 △ABC의 **외심**이라고 한다.



이와 같이 원 I가 삼각형의 세 변에 모두 접할 때, 이 원 I는 △ABC에 **내접**한다고 한다. 이때, 원 I를 △ABC의 **내접원**이라 하고, 내접원의 중심 I를 △ABC의 **내심**이라고 한다.

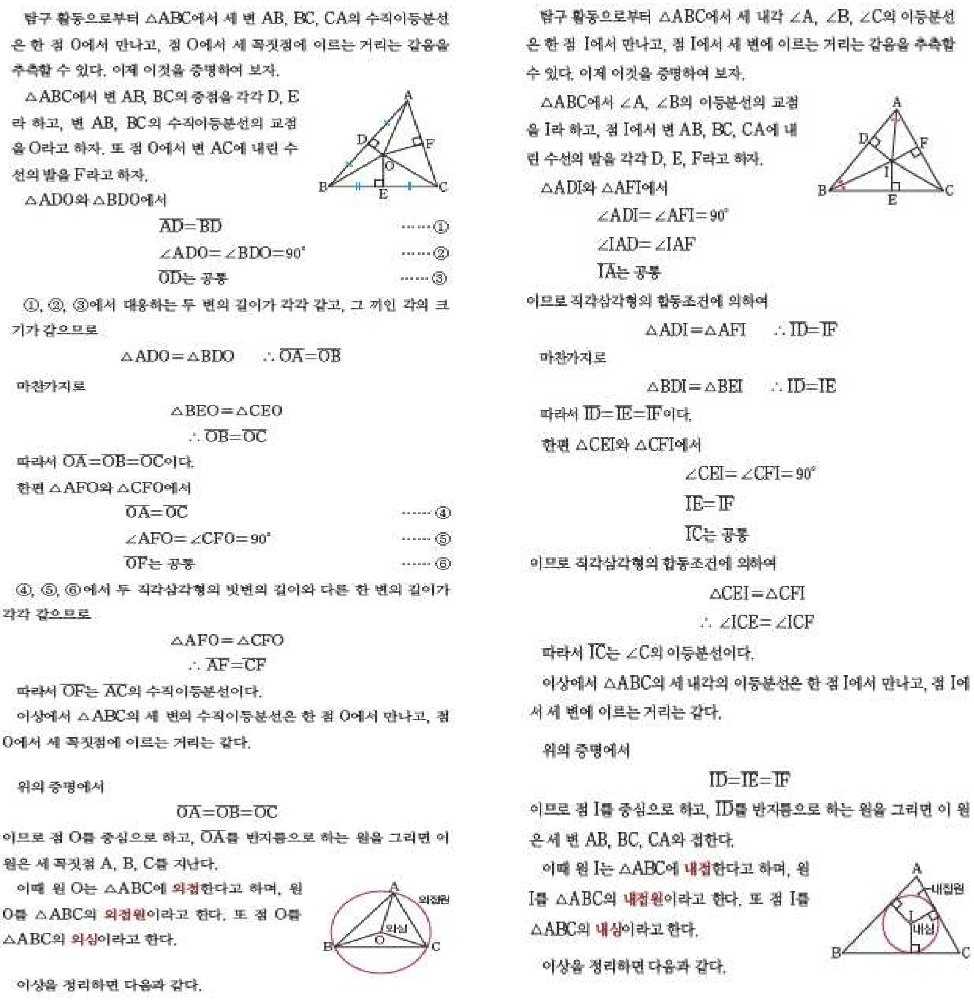


[그림 2] 의미에 초점을 맞춘 외심과 내심의 정의(우정호 외, 2009)

의미에 초점을 맞춘 정의 방식을 채택한 교과서는 제시된 내용의 순서상의 차이점으로부터 두 가지로 분류할 수 있다. 한 가지는 종이 접기 활동을 통해 삼각형의 세 변의 수직이등분선(세 내각의 이등분선)이 한 점에서 만나는지를 확인하고, 이 점에서 삼각형의 세 꼭짓점(세 변)에 이르는 거리를 비교하는 활동으로부터 시작한다. 이 후 이 점을 중심으로 하고 이 점에서 삼각형의 꼭짓점(변)에 이르는 거리를 반지름으로 하는 원을 그릴 수 있음을 설명한 후 이 원을 외접원(내접원)이라 정의하고, 외접원(내접원)의 중심을 외심(내심)이라 정의한다(강신덕 외, 2009; 김원경 외, 2009; 김홍종, 2009; 박영훈 외, 2009; 송근화 외, 2009). 이러한 교과서들은 이 후 삼각형의 세 변의 수직이등분선(세 내각의 이등분선)이 한 점에서 만나는 것과 이 점에서 삼각형의 세 꼭짓점(세 변)에 이르는 거리가 같음을 증명하는 과정을 거치면서 외심(내심)에 관한 내용을 끝맺는다. 또 한 가지는 종이접기 활동으로부터 삼각형의 두 변의 수직이등분선(두 내각의 이등분선)이 한 점에서 만나는지를 확인하고, 이 점에서 삼각형의 세 꼭짓점(세 변)에 이르는 거리가 같음을 비교하는 활동으로부터 이 점을 중심으로 하고 이 점에서 삼각형의 꼭짓점(변)에 이르는 거리를 반지름으로 하는 원을 그릴 수 있음을 설명하고 이 원을 외접원(내접원)이라 정의한 후, 외접원(내접원)의 중심을 삼각형의 외심(내심)이라 정의는 내용으로 이루어진 것들이다(우정호, 2009; 유희찬, 2009; 박윤범, 2009). 이 교과서들 역시 외심(내심)을 정의한 이 후의 내용은 전자의 교재들과 동일하다.

3. 구성과 의미 모두에 초점을 맞춘 정의

구성과 의미 모두에 초점을 맞춘 정의 방식은 외심과 내심을 어떤 것이라고 명확하게 규정하지 않고, 삼각형의 세 변의 수직이등분선(세 내각의 이등분선)이 한 점에서 만남과 이 점으로부터 세 꼭짓점(세 변)에 이르는 거리가 같음으로부터 이 원을 중심으로 하고 이 점에서 꼭짓점(변)에 이르는 거리를 반지름으로 하는 원을 그릴 수 있는데 이 원을 외접원(내접원)이라 정의하고 이 점을 외심(내심)이라 정의하는 방식을 취한다. 즉, 이러한 정의 방식은 외심(내심)을 삼각형의 세 변의 수직이등분선(세 내각의 이등분선) 또는 외접원의 중심(내접원의 중심)이라고 명확하게 규정지은 것이 아니라, 삼각형의 세 변의 수직이등분선(세 내각의 이등분선)이 한 점에서 만남과 이 점에서 세 꼭짓점(세 변)에 이르는 거리가 같은 사실로부터 외접원(내접원)을 그릴 수 있는 총체적 상황으로부터 이 점을 외심(내심)을 정의한 방식이다. 따라서 이 정의에 의하면 외심(내심)을 뚜렷하게 규정지을 수 없고, 총체적 상황의 인식이 이루어진 이 후 정의를 하는 방식이다. 현재 정상권 외(2009), 신항균(2009) 등이 이러한 정의를 채택하고 있다. 다음 [그림 3]은 이러한 방식으로 외심과 내심을 정의한 것이다.


탐구 활동으로부터 △ABC에서 세 변 AB, BC, CA의 수직이등분선은 한 점 O에서 만나고, 점 O에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같음을 추측할 수 있다. 이제 이것을 증명하여 보자.

△ABC에서 변 AB, BC의 중점을 각각 D, E라 하고, 변 AB, BC의 수직이등분선의 교점을 O라고 하자. 또 점 O에서 변 AC에 내린 수선의 발을 F라고 하자.

△ADO와 △BDO에서

$\overline{AD}=\overline{BD}$ ……①

$\angle ADO=\angle BDO=90^\circ$ ……②

$\overline{OD}$는 공통 ……③

①, ②, ③에서 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인 각의 크기가 같으므로

$\triangle ADO\equiv\triangle BDO \quad \therefore \overline{OA}=\overline{OB}$

마찬가지로

$\triangle BEO\equiv\triangle CEO$

$\therefore \overline{OB}=\overline{OC}$

따라서 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$이다.

한편 △AFO와 △CFO에서

$\overline{OA}=\overline{OC}$ ……④

$\angle AFO=\angle CFO=90^\circ$ ……⑤

$\overline{OF}$는 공통 ……⑥

④, ⑤, ⑥에서 두 직각삼각형의 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같으므로

$\triangle AFO\equiv\triangle CFO$

$\therefore \overline{AF}=\overline{CF}$

따라서 $\overline{OF}$는 $\overline{AC}$의 수직이등분선이다.

이상에서 △ABC의 세 변의 수직이등분선은 한 점 O에서 만나고, 점 O에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

위의 증명에서

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$

이므로 점 O를 중심으로 하고, $\overline{OA}$를 반지름으로 하는 원을 그리면 이 원은 세 꼭짓점 A, B, C를 지난다.

이때 원 O는 △ABC에 외접한다고 하며, 원 O를 △ABC의 외접원이라고 한다. 또 점 O를 △ABC의 외심이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

탐구 활동으로부터 △ABC에서 세 내각 ∠A, ∠B, ∠C의 이등분선은 한 점 I에서 만나고, 점 I에서 세 변에 이르는 거리는 같음을 추측할 수 있다. 이제 이것을 증명하여 보자.

△ABC에서 ∠A, ∠B의 이등분선의 교점을 I라 하고, 점 I에서 변 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자.

△ADI와 △AFI에서

$\angle ADI=\angle AFI=90^\circ$

$\angle IAD=\angle IAF$

$\overline{IA}$는 공통

이므로 직각삼각형의 합동조건에 의하여

$\triangle ADI\equiv\triangle AFI \quad \therefore \overline{ID}=\overline{IF}$

마찬가지로

$\triangle BDI\equiv\triangle BEI \quad \therefore \overline{ID}=\overline{IE}$

따라서 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$이다.

한편 △CEI와 △CFI에서

$\angle CEI=\angle CFI=90^\circ$

$\overline{IE}=\overline{IF}$

$\overline{IC}$는 공통

이므로 직각삼각형의 합동조건에 의하여

$\triangle CEI\equiv\triangle CFI$

$\therefore \angle ICE=\angle ICF$

따라서 $\overline{IC}$는 ∠C의 이등분선이다.

이상에서 △ABC의 세 내각의 이등분선은 한 점 I에서 만나고, 점 I에서 세 변에 이르는 거리는 같다.

위의 증명에서

$\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$

이므로 점 I를 중심으로 하고, $\overline{ID}$를 반지름으로 하는 원을 그리면 이 원은 세 변 AB, BC, CA와 접한다.

이때 원 I는 △ABC에 내접한다고 하며, 원 I를 △ABC의 내접원이라고 한다. 또 점 I를 △ABC의 내심이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

[그림 3] 구성과 의미 모두에 초점을 맞춘 외심과 내심의 정의(신항균 외, 2009)

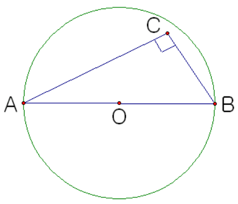
Ⅳ. 삼각형의 외심, 내심의 정의에 따른 특징

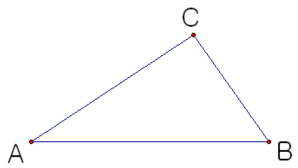
1. 구성에 초점을 맞춘 정의의 특징

1) 개념의 실체와 무모순성을 강조한 정의

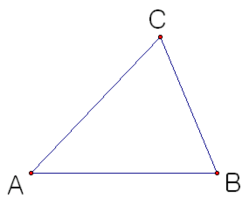
수학에서 구성은 수학적 개념의 실체를 밝히고 그러한 수학적 내용이 무모순임을 증명하는 중요한 도구이다. Borasi(1992)는 수학적 정의가 갖추어야 할 특징으로 용어의 정밀성, 개념의 분리, 본질성, 무모순성, 비순환성을 지적하는데, 이 중 정의의 무모순성은 정의의 구성적 측면과 밀접한 관련성을 지니고 있다. 이를 테면 비유클리드 기하학의 무모순성을 증명하기 위해 비유클리드 기하학의 공리계를 만족하는 모델을 구성하는 것을 통해 공리계의 무모순성을 설명하는데, 이것은 구성적 접근이 무모순성 획득에 중요한 역할을 수행할 수 있음을 의미한다.

수학적 내용을 충분히 이해하지 못할 경우 구성이 불가능한 상황을 만들 수 있다. 다음 [그림 4]는 구성이 불가능한 상황들이다.





($\overline{AB}=8cm$, $\overline{BC}=3cm$, $\overline{AC}=4cm$)



($\overline{AB}=7cm$, $\overline{BC}=5cm$, $\overline{AC}=6cm$, $\angle A=60^\circ$)

[그림 4] 구성이 불가능한 상황

이러한 구성이 불가능한 상황은 많은 모순점을 유발할 수 있으므로 이러한 상황을 문제상황으로 설정하여 문제를 해결하는 것은 무의미하다. 따라서 구성이 불가능한 상황을 이해하고, 구성이 가능한 상황을 인지할 수 있는 수학적 지식을 습득하는 것은 중요하다.

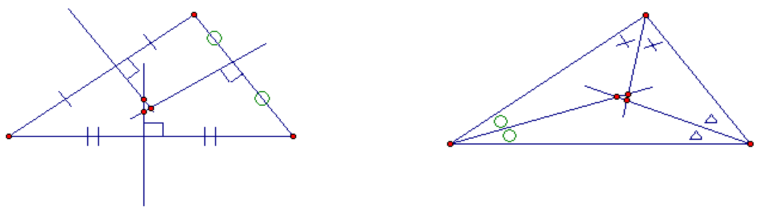
한편 기하 단원 학습에서 여러 도형들의 상황에 대한 구성 가능성을 비중 있게 다루지 않을 경우, 상상할 수 있는 모든 상황이 구성 가능할 것이라는 생각을 갖게 할 수도 있다. 삼각형의 외심, 내심의 정의에서 구성 가능성에 대해 논의 없이 수업 내용이 전개된다면 학생들은 사각형, 오각형 등으로 확장된 상황에서도 언제든지 외심, 내심이 구성 가능할 것이라는 낙관을 가질 수 있고, 심지어 모든 다각형의 외접원과 내접원이 존재할 것이라 착각할 수 있다. 실제로 수학 역사 속에 유명한 3대 작도 문제는 모든 도형이 작도 가능할 것이라는 잘못된 판단으로 비롯된 것으로 작도 가능성을 검토하지 않은 관계로 상당히 오랜 기간 동안 미해결 문제로 남아 있었다.

구성에 초점을 맞춘 삼각형의 외심과 내심의 정의는 Euclid 도구를 사용하여 작도할 수 있는 점이라는 사실에 초점을 둔 정의이다. 변의 수직이등분선, 각의 이등분선, 직선들의 교점은 Euclid 도구로 작도 가능한 것들이다. 이와 같이 삼각형의 외심과 내심은 작도가 가능한 개념이므로 구성 가능한 수학적 실체이고, 이러한 사실로부터 이들 개념의 무모순성은 제거된다. 한 때 고전 수학의 여러 가지 패러독스로부터 수학적 지식의 안전성을 보장하고자 수학은 '구성적 방법'에 의해 확립되어야 한다고 주장하였던 직관주의자들의 견해 역시 이와 같은 맥락으로 볼 수 있다.

우정호・조영미(2001)는 학교수학에서 특정한 정의 방법을 선택할 때 그 방법에 기대하는 정의 기능이 있고, 어떤 개념을 정의하기 위해 특정한 정의 방법을 선택할 때 학교수학에서는 무엇보다도 학습자의 이해를 목적으로 하기 마련이라고 하였다. 이러한 측면에서 작도 가능한 점으로서 삼각형의 외심과 내심을 정의를 살펴보면 이들 개념들은 구성 가능한 점으로서 무모순인 개념임을 학습자가 이해하기 위한 목적으로 선택된 정의라 볼 수 있다.

2) 다각형의 외심, 내심의 의미와 연계된 정의

구성에 초점을 둔 삼각형의 외심의 정의는 '삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점'이고, 삼각형의 내심의 정의는 '삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점'이다. 그런데 삼각형의 범주에서 이 정의는 '삼각형의 두 변의 수직이등분선의 교점'과 '삼각형의 두 내각의 이등분선의 교점'과 각각 동치이다. 그럼에도 불구하고 왜 삼각형의 외심과 내심은 전자와 같이 정의되었을까? 삼각형의 두 변의 수직이등분선의 교점, 삼각형의 두 내각의 이등분선의 교점으로 삼각형의 외심과 내심을 각각 정의할 경우 이들 개념의 존재성은 정의 자체만으로 보장될 수 있다. 삼각형의 두 변의 수직이등분선과 두 내각의 이등분선은 각각 평행한 두 직선이 아니므로 반드시 교점을 갖게 되기 때문이다. 존재성의 측면에서 두 직선의 교점으로 정의하는 것은 세 직선의 교점으로서 삼각형의 외심과 내심에 대한 정의와 구별된다. 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점을 외심, 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점을 내심이라 정의하면 이들 개념에 대한 존재성에 대한 의문이 발생하므로 개념의 존재성에 대한 증명이 반드시 필요하다. 하지만 위와 같이 두 직선의 교점으로 외심과 내심을 정의하게 되면 정의 자체에서 이들 개념의 존재성에 대한 의문은 해소된다. 다만, 이러한 개념이 유일하게 존재할 것인가 하는 의문이 제기될 수 있다. 따라서 두 직선의 교점으로서 외심과 내심을 정의하게 되면 이들 개념의 보장된 존재성으로부터 몇 개 존재할 것인가에 대한 조사가 필요하다. 즉 다음 [그림 5]와 같은 상황이 발생할 수 있다는 의문이 생길 수 있다. 물론 삼각형에서 이들 개념은 유일하게 존재한다는 것은 이미 알려진 사실이다.

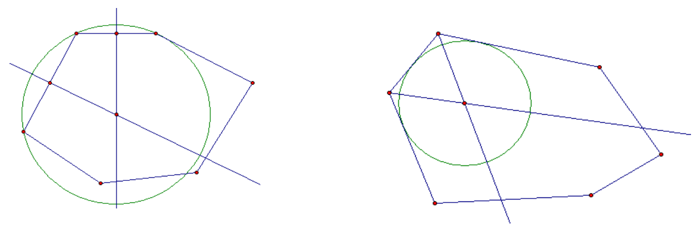


[그림 5] 두 직선의 교점으로 외심과 내심을 정의에서 발생할 수 있는 유일성에 대한 의문

이와 같이 삼각형에서 두 직선의 교점으로서 외심과 내심을 정의하였을 경우, 개념의 존재성은 보장되지만 유일성에 대한 의문이 발생함을 알 수 있다. 하지만 삼각형에서 이들 개념의 유일성은 쉽게 증명할 수 있는 사실이므로 삼각형의 범주만을 고려할 경우에는 삼각형의 외심과 내심의 정의가 왜 두 직선의 교점이 아닌 세 직선이 교점으로 선택된 맥락을 이해하고 받아들이기 어렵다.

이제 삼각형의 외심과 내심을 다각형에서의 외심과 내심으로 개념을 확장하는 상황을 고려해 보자. 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점, 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점으로 삼각형의 외심과 내심을 각각 정의할 경우에는 n각형의 외심과 내심을 각각 n각형의 n개의 변의 수직이등분선의 교점, n각형의 n개의 내각의 이등분선의 교점으로 정의하는 것

이 자연스럽다. 물론 이렇게 정의된 n각형의 외심과 내심은 존재성과 개념 본래의 의미가 유지되는가에 대한 것이 의문으로 남을 것이다. 하지만 삼각형의 두 변의 수직이등분선의 교점, 삼각형의 두 내각의 이등분선의 교점으로 삼각형의 외심과 내심을 각각 정의할 경우에는 n각형의 외심과 내심을 각각 n각형의 두 변의 수직이등분선의 교점, n각형의 두 내각의 이등분선의 교점으로 정의하는 것이 자연스럽다. 이렇게 정의된 n각형의 외심과 내심은 존재성에 관한 의문은 해소되며, 그 개념적 실체가 몇 가지 존재할 것인가에 대한 의문이 발생할 뿐이다. 그런데 여기에서 문제가 발생한다. 도형에 관한 외심과 내심이 구성에 초점을 맞추어 정의가 되었다고는 하나 그 본래의 의미는 각각 도형의 외접원의 중심과 내접원의 중심이다. 하지만 위와 같이 n각형의 외심과 내심이 두 직선의 교점으로 정의되게 되면 그 점들은 반드시 존재하지만 외심과 내심의 원래 의미는 퇴색되고 만다. n각형의 외심과 내심이 두 직선의 교점으로 정의되게 되면 n각형의 외심과 내심은 다음 [그림 6]과 같은 의미를 가지는 개념이 되는 것이다.



[그림 6] 다각형의 외심과 내심이 두 직선의 교점으로 정의되었을 경우 외심과 내심의 의미

따라서 삼각형의 외심과 내심의 개념을 다각형으로 확장하는 경우를 고려하면 삼각형의 외심과 내심은 세 직선의 교점으로 정의하는 것이 적합하다고 할 수 있다. n각형의 외심과 내심을 각각 n각형의 n개의 변의 수직이등분선의 교점, n각형의 n개의 내각의 이등분선의 교점으로 정의하는 것이 외심과 내심의 본래의 의미를 잃지 않는 정의가 되는 것이다. 물론 이 경우 외심과 내심의 존재성에 대한 의문이 발생하며, n이 4이상인 경우에는 n각형의 외심과 내심은 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있음을 주의하여야 할 것이다.

이러한 맥락을 고려할 때, 삼각형의 외심과 내심은 다각형으로 확장된 상황에서도 충분히 다루어 보아야 할 개념이라 사료된다. 하지만 2007 개정 교육 과정이 적용된 중학교 교과서는 다각형에서 외심과 내심을 다루지 않고 있다. 중학교 수학 3 교과서에 '사각형이 원에 내접할 조건'과 같은 내용에서 내접이라는 용어가 등장하고 있을 뿐이다. 중학교 수학 3 교과서의 원 단원에 관련된 많은 내용을 차지하는 '사각형이 원에 내접할 조건'은 중학교 수학 2 교과서에 나오는 삼각형의 외심과 내심의 개념과 충분히 연계되어 제시되고 있지 못하여 중학교 2학년에서 학습한 내용과 별개의 개념으로 지도될 우려를 낳게 한다. 이와 같은 점을 고려할 때, '사각형이 원에 내접할 조건'을 지도함에 있어 다음과 같은 내용의 지도[6]를 통해 기존의 학습 내용과 연결하는 작업이 필요할 것이라 판단된다.

- '삼각형이 원에 내접할 조건'을 고려하지 않는 이유
- 사각형, 오각형 등의 범주에서 외심의 정의 도입

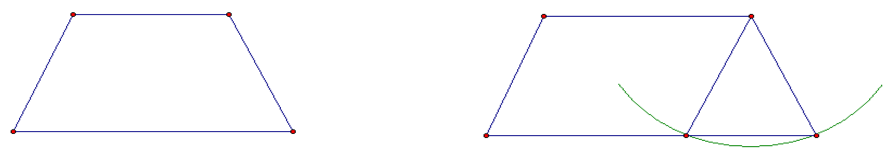
6) 지도해야 할 사항으로 제시된 내용은 '사각형이 원에 내접할 조건'과 직접적인 연관성을 가지는 외심과 관련된 내용이지만 내심의 관점에서 동일한 내용을 다루는 것도 의미있는 지도가 될 수 있을 것임.

・존재성의 측면에서 삼각형의 외심과 사각형의 외심의 차이점, 좀 더 나아가 존재성의 측면에서 삼각형의 외심과 다각형의 외심의 차이점

・구성에 초점을 맞춘 삼각형의 외심의 정의를 사각형의 외심의 정의로의 확장 가능성 그리고 사각형의 외심의 개념과 '사각형이 원에 내접할 조건'의 연계성

3) 용어와 정의의 괴리로부터 발생하는 개념 혼란

박경미・임재훈(1998)은 가장 바람직한 기하 용어는 용어 자체가 함의하는 바와 그 정의가 일치하거나 긴밀하게 연계된 경우이지만 우리가 흔히 사용하는 기하 용어 중에는 용어가 의미하는 바와 그 정의 사이에 관점의 괴리가 있는 경우가 있다고 지적하였다. 그 대표적인 예가 등변사다리꼴이다. 우리나라 교과서에서 등변사다리꼴은 밑변의 양 끝각의 크기가 같은 사다리꼴로 정의된다. 즉, 용어는 변의 관점에서 정의는 각의 관점에서 기술되어 있으므로 용어의 관점과 정의의 관점 사이에 불일치가 발생한다. '밑변의 양 끝각의 크기가 같은 사다리꼴'이라는 정의에 일치하게 용어를 붙인다면 등변(isosceles)사다리꼴보다 등각(isogonal)사다리꼴이라고 붙이는 것이 나을 것이다. 만약 등변사다리꼴을 변의 관점에서 '평행하지 않은 두 변의 길이가 같은 사다리꼴'과 같이 정의하면 등변사다리꼴은 전자의 정의와 일치하지 않게 된다. 왜냐하면 등변사다리꼴을 '평행하지 않은 두 변의 길이가 같은 사다리꼴'이라 정의하면 평행사변형 모양의 사다리꼴 역시 등변사다리꼴이 되기 때문이다. 이것은 개념을 구성해보려고 시도한다면 곧 바로 알 수 있는 사실이다.

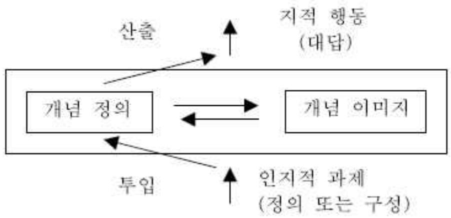


각의 관점에서 정의된 등변사다리꼴　　　변의 관점에서 정의된 등변사다리꼴

[그림 7] 관점에 따라 달라지는 등변사다리꼴의 개념

'삼각형의 외접원의 중심'이라는 정의항에서 '외'와 '심'을 취하여 용어 '삼각형의 외심', '삼각형의 내접원의 중심'이라는 정의항에서 '내'와 '심'을 취하여 '삼각형의 내심'이라는 정의항의 줄임말이 용어로 채택된 배경을 고려해보면 삼각형의 외심과 내심 용어 자체는 용어가 갖는 의미의 관점에서 기술된 반면, 삼각형의 외심과 내심을 각각 '삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점', '삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점'이란 정의는 구성의 관점, 즉 작도의 관점에서 기술된 정의이다. 이렇게 용어 자체가 함의하는 바와 정의 사이의 관점이 일치하지 않기 때문에 학습자가 이 개념을 숙지하는 것에 어려움을 겪을 수 있다.

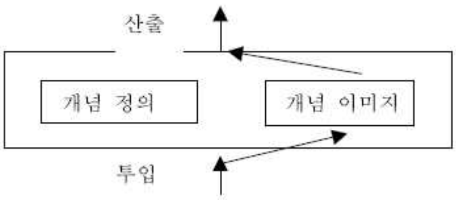
개념과 관련하여 개인의 머리 속에 형성된 그 개념에 관련된 모든 속성과 심상들로 이루어진 인지 구조를 개념 이미지(concept image), 비순환적인 방법으로 개념을 정확히 설명하는 언어적 정의(verbal definition)를 개념 정의(concerpt definition)라고 한다(Vinner, 1983). Vinner(1991)는 개념 정의와 개념 이미지 사이의 상호작용이 [그림 8]과 같은 모델링 과정을 따라야 올바른 개념 형성을 이룰 수가 있다고 주장하였다.



[그림 8] 개념 정의와 개념 이미지 사이의 상호작용

그런데 구성에 초점을 맞춘 삼각형의 외심과 내심의 정의는 그것의 개념 정의와 용어 자체가 갖는 의미로부터 발생한 개념 이미지[7] 사이의 괴리로 인하여 다음 [그림 9]에서와 같이 개념 정의와 개념 이미지 사이의 상호작용이 충분히 이루어지지 못할 경우 용어로부터 발생하는 개념 이미지를 개념 정의로 착각할 수 있다. 즉, 개념 이미지와 개념 정의 간에 상호작용이 발생하지 않는 직관적 반응을 나타내는 모델링 과정이 발생할 우려가 있다.

따라서 구성에 초점을 둔 삼각형의 외심과 내심을 지도하는 교사는 교수-학습에 있어서 삼각형의 외심과 내심에 대한 학생들의 개념 이미지와 이들의 개념 정의 사이에 발생 가능한 격차에 주의하여 개념 정의를 지도하는 것이 필요하다.



[그림 9] 직관적 반응

이상에서 살펴 본 바에 따르면 삼각형의 외심, 내심의 구성적 정의는 용어와 개념 정의 사이의 괴리로부터 개념 정의 습득에 상당한 혼란을 초래할 수 있음에도 개념 실체의 구성 가능성으로부터 개념에 대한 무모순성의 획득과 다각형의 외심, 내심이 함께 고려된 정의임을 확인할 수 있었다. 이러한 구성적 정의의 맥락에 대한 학습자의 이해를 돕기 위해 다음과 같은 발문을 생각해 볼 수 있다.

· 왜 삼각형의 외심(내심)의 정의를 삼각형의 외접원의 중심(내접원의 중심)이 아닌 ‘삼각형의 세 변의 수직이등분선(세 내각의 이등분선)의 교점’으로 정의하였을까? 그 이유에 대해 이야기 해 보자.

· 삼각형에서 외심(내심)의 정의는 ‘두 변의 수직이등분선(두 내각의 이등분선)의 교점’으로 정의해도 달라지지 않는데, 왜 ‘세 변의 수직이등분선(세 내각의 이등분선)의 교점’으로 정의되었을까? 그 이유에 대해 탐구해 보자.

7) 삼각형의 외심, 내심을 삼각형의 외접원, 내접원과 관련되어 학생들의 인지 구조 속에 형성된 심상

2. 의미에 초점을 맞춘 정의의 특징

1) 개념 정의와 개념 이미지는 일치하지만 구성이 어려운 정의

삼각형의 외심과 내심은 각각 삼각형의 외접원의 중심, 삼각형의 내접원의 중심의 준말에서 비롯된 용어이다. 조영미(2001)는 학교수학에 제시된 정의의 제 특징 중 한 가지로 정의항의 줄임말이 용어가 될 수 있도록 정의항을 선택함을 지적하였고, 이것은 용어와 의미가 상통할 수 있도록 이런 문구를 선택한 것으로 볼 수 있다고 하였는데, 의미에 초점을 맞춘 삼각형의 외심, 내심의 정의는 이런 맥락에서 비롯된 것이다. 따라서 의미에 초점을 맞춘 삼각형의 외심, 내심의 정의는 정의 자체와 용어의 관점이 일치하게 되므로 용어의 대상 및 범주의 속성이 분명히 드러날 뿐 만 아니라, 학습자가 용어의 정의를 기억하는 것이 상당히 용이할 것이라 생각된다.

하지만 이러한 장점에 비해 이러한 정의는 그 실체를 찾아낼 수 있는 방법을 제시한 것은 아니다. 삼각형의 외접원(내접원)의 중심이 곧 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점(세 각의 이등분선의 교점)이라는 것을 모른다고 할 때, 삼각형의 외접원(내접원)의 중심을 찾아 내접원(내접원)을 그리려는 시도는 매우 성공률이 낮은 작업이 될 것이다.

이렇게 의미에 초점을 둔 삼각형의 외심, 내심의 정의만으로는 개념의 실체를 찾아내기 쉬운 일이 아니기 때문에 이 정의는 반드시 그 실체를 발견할 수 있는 성질[8]과 함께 지도되어야만 한다. 이러한 사실은 의미에 초점을 맞춘 용어의 정의를 채택한 대부분의 교과서들이 용어의 정의와 성질을 별개로 지도하는 것이 아니라 종이접기 활동에서 확인된 사실로부터 이를 증명하는 과정에서 같이 지도되고 있다는 것으로부터 확인할 수 있는 사실이다.

2) 결과적 지식이지만 발생적 맥락이 고려되어야 하는 정의

앞에서 살펴본 바와 같이 삼각형의 외심, 내심에 대한 의미에 초점을 둔 수학적 정의는 발견한 수학적 사실들이 기억하기에 용이하고, 대상 및 범주의 속성이나 특징이 분명히 드러나도록 용어의 정의가 선택되었다고 볼 수 있다. 하지만 이러한 삼각형의 외심, 내심의 정의는 이미 밝혀진 수학적 사실들에서 학습의 용이성을 고려한 의도적 선택 과정을 거쳐 학습하기에 적합할 것이라고 판단한 수학적 사실들이 채택된 결과적 지식으로서의 특징을 지니고 있다.

Freudenthal은 결과적 지식으로서의 수학적 사실에 대해 교사의 적절한 안내를 따라, 학습자가 스스로의 활동을 통하여 수학적 개념을 수학화 과정을 통해 재발명해 가도록 주장하고 있으며, 이 과정에서 수학적 개념의 역사 발생이 중요한 역할을 한다고 하였다. 즉, 수학화가 가능하도록 안내하기 위해서는 수학적 개념의 역사적 발생 과정에 대한 분석이 필요하다는 것을 전제로 하고 있다(우정호・민세영, 2002, 재인용). 이러한 수학화의 측면을 고려할 때, 의미에 초점을 둔 결과적 지식으로서의 삼각형의 외심, 내심의 개념은 그 개념 발생의 역사적 맥락과 과정을 고스란히 간직한 것으로, 이러한 개념의 지도는 개념의 발생 맥락 및 과정과 분리되어 결과적 지식 자체로 이해될 것이 아니라 역사 발생적 맥락으로부터 이해되는 것이 바람직 할 것이다.

삼각형의 외심(내심)은 어떤 실생활과 관련된 문제 혹은 지적 탐구를 위한 문제로부터 제기된 개념이라 추측된다. 다음 [그림 10]과 같이 삼각형의 외심은 세 지점으로부터 같은 거리에 있는 지점을 찾는 문제로부터 비롯된 개념이고, 삼각형의 내심 역시 세 직선으로 이루어진 삼각형에서 세 변으로부터 같은 거리에 있는 지점을 찾는 문제로부터 비롯된 개념이라

8) 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이 삼각형의 외심이 되고, 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이 삼각형의 내심이 되는 성질을 의미함.

추측된다. 삼각형의 외심과 내심이 이렇게 발생되었다면 삼각형의 외심과 내심은 각각 '삼각형의 외접원의 중심', '삼각형의 내접원의 중심'으로 정의되는 것이 타당할 것이다. 특히 삼각형의 외심과 내심의 발생적 정의로부터 역사 발생적 원리에 따라 삼각형의 외접원의 중심이 되는 지점과 삼각형의 내접원의 중심이 되는 지점을 찾으려는 노력이 필요하게 되며, 이러한 노력을 통해 삼각형의 외접원의 중심이 되는 지점은 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점임과 삼각형의 내접원의 중심이 되는 지점은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점임을 발견하는 과정이 필요할 것이다.

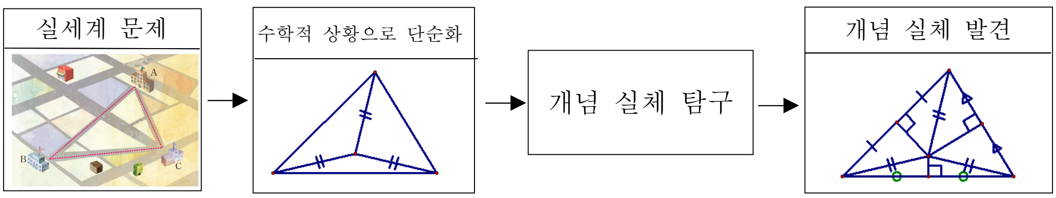

도서관의 위치

오른쪽 그림과 같이 세 학교 A, B, C가 있고, 세 학교에서 같은 거리에 있는 지점에 도서관을 지으려고 한다. 도서관을 지을 위치를 그림에 나타내어 보자.

문제 4 어느 공원에 오른쪽 그림과 같이 삼각형 모양의 꽃밭이 있다. 이 꽃밭에 물을 뿌리는 살수 장치인 스프링클러를 설치하려고 한다. 길가로 물이 튀지 않게 하면서 가능한 한 넓은 구역에 물을 주려고 할 때, 스프링클러를 설치해야 할 지점을 찾아라.

[그림 10] 삼각형의 외심, 내심의 개념 발생을 야기하였을 것이라 추측된 문제들
(우정호 외, 2009; 박종률 외, 2009)

하지만 의미에 초점을 맞춘 정의로 이루어진 교과서들은 이와 같은 역사 발생적 과정을 거치지 않고 결과적 지식으로서 삼각형의 외심과 내심에 관한 내용을 제시하고 있음을 알 수 있다. 특히 대부분의 교과서는 종이접기나 작도 활동을 통해 세 변의 수직이등분선(세 내각의 이등분선)이 한 점에서 만나는 것과 이 한 점으로부터 각 꼭짓점(각 변)에 이르는 거리가 같음을 확인하는 활동으로부터 시작한다. 대다수의 교과서는 이렇게 수학적 활동을 중요시하지만 활동은 삼각형의 세 변의 수직이등분선(세 내각의 이등분선)이 한 점에서 만나는 것과 이들의 교점이 삼각형의 외접원의 중심(내접원의 중심)이 된다는 결과적 지식을 확인하는 내용으로 이루어져 있다. 이처럼 삼각형의 외심과 내심의 존재성, 이들의 개념적 실체를 발견하는 방법들이 결과적 지식으로서 가르쳐지고 있기 때문에 삼각형의 외심(내심)이 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점(세 내각의 이등분선의 교점)이 됨을 발견할 기회를 전혀 제공하고 있지 못하다. 이것에 대해 강윤수・서은정(2009)는 삼각형의 외심과 내심의 결과적 접근 방식의 문제점을 지적하고, 분석적 내심・외심의 지도방법을 제시하였다. 삼각형의 외심과 내심을 결과적 지식으로 전수되는 것을 개선하여 발생적 지식으로서 개념을 가르치기 위해서는 삼각형의 외심과 내심이 발견 및 탐구의 대상으로 변모되기 이 전의 실세계의 문제로부터 출발하여 실세계 문제가 단순화되어 수학 문제로 변모되고, 이 문제를 통해 수학적 개념이 탄생하고 개념의 실체가 탐구되어 학습해야 할 결과적 지식에 도달해가는 재발견의 과정이 필요하다. 특히, 개념의 실체가 탐구되는 과정에서는 개념 실체의 구성 가능성이 비중있게 다루어져야 할 것이다. 다음 [그림 11]은 삼각형의 외심, 내심이 재발견되어가는 과정이 이루어질 수 있도록 재구성된 내용을 간략히 나열한 것이다.



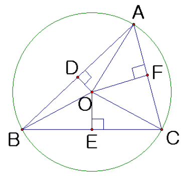
[그림 11] 발생적 지식으로의 개념 형성을 위한 발견의 과정

특히 위 과정에서 개념 실체 탐구의 과정은 다양한 활동을 통해 다방면으로 이루어져야 할 것으로 생각되며, 이러한 과정을 통해 학생들은 교사의 안내에 따라 재발명의 과정을 거쳐 수학적 개념의 실체를 발견할 수 있어야 할 것이다. 다음 <표 1>은 삼각형의 외심, 내심의 개념 실체 탐구를 통해 개념 실체 발견이 이루어지는 과정을 논리적 전개만을 위주로 간략히 재구성한 내용이다.

<표 1> 삼각형의 외심・내심의 개념 실체 탐구로부터 발견에 이르는 논리적 과정

삼각형의 외심

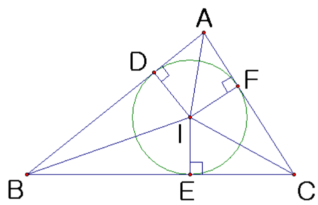
① 정의 : 삼각형의 외접원의 중심
② $\triangle ABC$의 외심 O가 존재한다고 가정하자.



그러면 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$(반지름)이다.
$\triangle ABC$의 외심 O에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자.
그러면 $\triangle OAD \equiv \triangle OBD$($RHS$합동), $\triangle OBE \equiv \triangle OCE$($RHS$합동),
$\triangle OCF \equiv \triangle OAF$($RHS$합동)이므로 $\overline{AD}=\overline{BD}$, $\overline{BE}=\overline{CE}$, $\overline{CF}=\overline{AF}$이다.
따라서 $\triangle ABC$의 외심 O에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$에 내린 수선 $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$은 각각 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 수직이등분선이다.
즉, 삼각형의 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 수직이등분선의 교점은 삼각형의 외심임을 알 수 있다.

삼각형의 내심

① 정의 : 삼각형의 내접원의 중심
② $\triangle ABC$의 내심 I가 존재한다고 가정하자. 그리고 내접원 I와 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 교점을 각각 D, E, F라 하자.



그러면 $\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}$(반지름)이다.
위 사실로부터 $\triangle AID \equiv \triangle AIF$($RHS$합동), $\triangle BID \equiv \triangle BIE$($RHS$합동),
$\triangle CIE \equiv \triangle CIF$($RHS$합동)이므로 $\angle DAI = \angle FAI$, $\angle DBI = \angle EBI$, $\angle ECI = \angle FCI$ 이다.
따라서 $\triangle ABC$에서 $\overline{AI}$, $\overline{BI}$, $\overline{CI}$는 각각 $\angle BAC, \angle ABC, \angle BCA$의 이등분선이다.
즉, 삼각형의 세 내각 $\angle BAC, \angle ABC, \angle BCA$의 이등분선의 교점은 삼각형의 내심임을 알 수 있다.

위와 같은 발견적 과정으로 이루어진 내용 지도를 통해 결과적 지식 그 자체로 정의된 삼

각형의 외심과 내심의 개념은 각각 '삼각형의 세 변의 수직이등분선', '삼각형의 세 내각의 이등분선'이 됨을 발견할 수 있고, 이러한 발견을 통해 삼각형의 외심과 내심의 의미로부터 이 개념들을 구성할 수 있는 방법을 연결 지을 수 있게 되는 것이다.

3. 구성과 의미 모두에 초점을 맞춘 정의의 특징

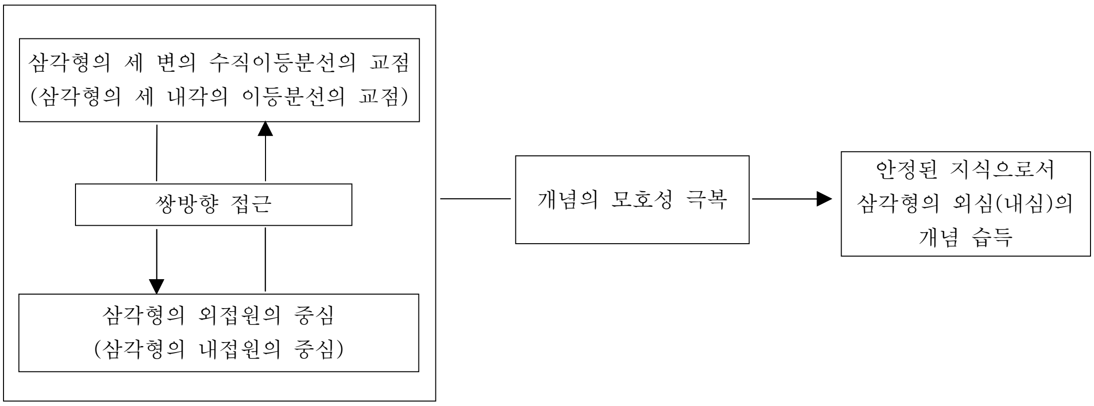
구성과 의미 모두에 초점을 둔 삼각형의 외심, 내심의 정의는 개념의 구성에서부터 구성된 개념이 가지는 의미에 이르는 총체적인 과정 속에서 형성된 개념을 정의로 채택한 것이다. 이러한 정의는 정의 자체로부터 개념의 실체가 구성되는 과정과 그 의미가 긴밀하게 연결되어 있기는 하지만 한편으로는 개념 자체가 단순한 형태로 제시되지 않아 정의를 명료하게 밝히기 힘들 뿐만 아니라 개념이 구성되는 총체적 과정을 기억하는 것도 쉽지 않다. 또한 이러한 개념의 정의는 삼각형의 외심, 내심과 관련된 문제를 해결하는 과정에서 논리적 전개 과정의 시작점을 분명히 하지 못하는 문제점을 지니고 있다. 따라서 이러한 정의는 삼각형의 외심, 내심과 관련된 논리적 증명 문제가 제시된 경우 시작점이 모호하다는 사실로부터 자칫 문제 해결에 혼란을 겪을 수 있는 소지가 엿보인다. 한편, 개념의 구성에서부터 구성된 개념이 가지는 의미까지 아우르는 총체적 과정으로 된 정의는 중학교에서 제시되는 다양한 용어의 정의 방식과 큰 차이를 보이고 있기 때문에 이러한 정의가 생소한 많은 학생들은 정의가 구성되는 전반적 과정으로서 삼각형의 외심과 내심의 정의를 인식하지 못하고 어떤 것이 개념 정의인지에 대하여 혼돈을 겪을 우려가 있다.

Ⅴ. 정의로부터 발생하는 개념의 모호성과 해결

Byers에 의하면, 하나의 대상이 두 가지 이상의 맥락을 가질 때 모호성이 생긴다고 하였다. 예를 들어, e^x는 밑이 초월수 e이고 정의역이 실수 전체 집합인 지수함수 맥락을 가진다. 동시에 e^x는 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ (-\infty < x < \infty)$과 같이 무한급수의 합으로도 표현된다. e^x가 가진 두 가지 맥락, 곧 지수함수와 무한급수의 합 맥락은 각각 유용하지만, 두 맥락이 어떻게 연결되는지 파악하지 못하면 e^x는 모호한 채로 남아 있게 된다(이경화, 2009, 재인용).

삼각형의 외심(내심)은 서로 동치인 두 가지 정의 '삼각형의 외접원의 중심'(삼각형의 내접원의 중심), '삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점'(삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점)을 가지고 있기 때문에 모호성이 발생할 수 있다. 이 두 정의가 동치라는 사실, 즉, 한 정의에서 다른 것이 유도 가능하다는 사실을 충분히 인식하지 못하는 경우 밀접하게 관련된 두 정의는 오히려 학습자의 개념 혼란을 초래할 수 있다. 만약 삼각형의 외접원의 중심으로 삼각형의 외심의 정의를 익힌 학습자가 이 외심이 곧 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이 된다는 사실을 알았지만, 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이 유일하게 존재하는 삼각형의 외접원의 중심이라는 사실을 숙지하지 못할 경우 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이 아닌 삼각형의 외접원의 중심을 찾으려는 시도를 할 수도 있는 것이다. 특히 삼각형의 외심과 내심의 어떠한 정의에서도 개념의 구성에서 개념의 정의로 이어지는 내용 전개가 이루어지므로 그 역 과정이 성립할 것인지에 대한 의문은 상존한다. 따라서 이러한 혼란을 미연에 방지하기 위해서는 삼각형의 외심과 내심에 관한 두 정의가 서로 다른 맥락을 지닌 것이 아닌 한 가지 맥락임을 인식시켜 주는 것이 필요하다.

삼각형의 외심과 내심의 두 가지 맥락으로부터 발생할 수 있는 모호성을 제거하고 안정된 지식으로서 삼각형의 외심과 내심의 개념이 지도되기 위해서는 다음 [그림 12]와 같이 두 정의가 한 가지 정의로부터 다른 정의가 유도 가능하다는 사실 인식이 필요하다. 2007 개정 교육 과정이 적용된 교과서는 정의의 방식 별로 차이 없이 일관된 내용 전개가 이루어지는데, 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점(삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점)이 삼각형의 외접원의 중심(삼각형의 내접원의 중심)이 되는 과정은 제시하고 있지만, 그 역 방향으로 이루어지는 접근 과정은 다루고 있지 않고 있으며, 역 방향으로의 접근 과정이 교과서에 소개될 필요가 있다고 사료된다. 이러한 쌍방향의 지도에서 구성적 접근의 지도 과정은 구성 가능성 확인을 위한 활동, 구성 가능성 검토, 성질 탐색, 각 정의의 실질적 의미 이해 순으로 구성 가능성을 비중 있게 다룰 필요가 있다. 한편, 의미에 초점을 둔 접근에서는 분석 활동을 통하여 개념 실체의 존재성 및 구성 가능성에 대한 의문 제기, 개념 실체를 찾기 위한 노력 및 활동, 개념 실체 발견 순으로 의미를 가지 개념이 발견 및 생성되어 가는 과정을 비중 있게 다룰 필요가 있을 것이라 생각된다. 물론 이러한 과정에서 두 조건이 결국 동치라는 것은 알 수 있게 되겠지만 삼각형의 외심과 내심의 정의로 채택한 개념은 여전히 하나라는 사실을 유념해야 할 것이다.



[그림 12] 삼각형의 외심, 내심 개념의 모호성을 해결하는 개념 지도

Ⅵ. 결론 및 제언

수학의 교수-학습에서 학생들이 어려움을 겪는 데에는 여러 가지 요인들이 복잡하게 얽혀 있지만, 용어에 대한 이해에서 파생되는 문제도 적지 않다(박경미・임재훈, 1998). 이러한 점을 볼 때, 수학 내용의 올바른 이해를 위해서는 수학 용어의 정의에 대한 올바른 이해가 선행되어야 한다. 수학 용어의 정의에 대한 올바른 이해는 정의 자체에 대한 단순한 사실 이해만으로는 이루어지기 어려우며, 정의가 갖는 다양한 맥락, 의도, 목적 등에 대한 이해가 함께 이루어지는 것이 필요하다.

본 연구에서는 중학교 2학년에 제시되는 삼각형의 외심, 내심의 정의를 정의 방식 별로 분류하고, 각 정의가 갖는 특징에 대해 고찰해 보았다. 중학교 수학 2 교과서에 제시된 삼각형의 외심, 내심은 구성, 의미, 그리고 구성과 의미 모두에 초점을 둔 세 가지 정의로 분류

할 수 있었다. 이러한 분류로부터 각 정의의 특징을 분석해 본 결과 삼각형의 외심, 내심을 구성에 초점을 맞추어 개념을 정의한 방식은 개념이 구성되는 실체와 구성된 실체로부터 비롯된 개념의 무모순성을 강조한 정의, 삼각형에서 다각형으로 개념을 확장할 경우를 대비하여 다각형에서 정의될 외심과 내심의 정의와 연계된 정의, 용어 자체가 함의하는 바와 그 정의가 긴밀하게 연계되지 않기 때문에 개념 혼란이 발생하는 정의라는 것을 분석해 내었다. 그리고 삼각형의 외심, 내심을 의미에 초점을 맞추어 개념을 정의한 방식은 개념 정의와 개념 이미지는 일치하여 개념 정의를 기억하고 습득하는 것이 용이하지만 개념의 실체를 구성하는 것이 소홀하게 다루어질 수 있는 정의이고, 결과적 지식으로 나타난 정의이지만 발생적 맥락을 간직한 개념이므로 역사 발생적 원리를 통한 수학화 과정을 통해 지도되어야 할 개념임을 알았다. 한편, 삼각형의 외심과 내심을 구성과 의미 모두에 초점을 맞춘 정의는 개념 실체의 구성 과정과 의미가 긴밀하게 연결된 정의이지만 논리적 전개 과정에서 시작점이 분명하지 못할 뿐 만 아니라, 중학교에 등장하는 다양한 정의와 차이점을 갖고 있어 개념이 생성되는 총체적 과정 자체가 개념 정의임을 인식하기 쉽지 않아 정의 인식에 혼란을 초래할 수 있음을 분석해 내었다.

한편, 삼각형의 외심과 내심은 두 가지 동치인 정의에 따른 개념의 모호성이 발생할 수 있으며, 이와 같은 모호성은 두 정의가 다른 한 가지로부터 충분히 연역 가능한 사실의 인식으로부터 극복 가능함을 알았고, 이러한 점을 고려할 때, 구성 위주의 정의와 의미 위주의 정의 사이의 쌍방향의 접근이 필요함을 확인하였다.

이러한 결론으로부터 삼각형의 외심과 내심의 정의는 다음과 같이 지도될 필요가 있을 것으로 사료된다. 먼저, 의미에 초점을 둔 정의로부터 이러한 조건을 만족하는 점을 찾기 위한 노력을 통해 구성에 초점을 둔 정의를 학생들이 발견할 수 있도록 지도하여야 한다. 이 후 구성에 초점을 둔 정의로 부터 의미에 초점을 둔 정의로 연역 가능함을 확인하여 결국 두 정의 중 어떤 것을 정의로 채택하여도 무방함을 인식시키는 것이 필요하다. 이러한 인식으로부터 이제 어떤 것을 정의로 선택해야 하는 문제를 제시하여 이를 논쟁토록 하여 각 정의가 갖는 맥락에 대한 이해를 도와야 하며, 이 과정에서 교사는 학생들이 각 정의가 갖는 맥락을 충분히 인식할 수 있도록 안내할 필요가 있다. 이러한 정의 선택과 각 정의의 맥락을 탐구하는 과정을 통해 학생들에게 수학적 정의는 완성되고 고정된 것이 아닌 변화하고 발전해가는 역동적인 것임을 인식시킬 수 있으며, 용어의 정의에 대한 보다 깊은 이해를 도울 수 있을 것으로 생각된다.

마지막으로 본 연구의 교육적 시사점을 다음과 같이 제시한다. 첫째, 학교 수학을 지도하는 과정에서 삼각형의 외심과 내심의 정의 별 특징을 적절히 인식하여 이를 고려한 개념 지도가 필요할 것으로 보인다. 둘째, 삼각형의 외심과 내심은 동치인 두 정의를 가질 수 있는 개념이기 때문에 학습자에게 발생할 수 있는 개념의 모호성을 인식하여 두 정의에 대한 쌍방향의 접근을 통해 두 정의의 개념이 필요 충분한 조건임을 충분히 인식시켜 줄 필요가 있다. 이와 같은 개념 지도로부터 두 개념 정의 중 어느 것을 선택하여도 무방하다는 사실을 인식하는 과정이 필요하며, 이러한 개념의 지도는 탐색 활동 위주로 이루어지는 것이 바람직할 것으로 사료된다. 셋째, 현 교육과정 상의 대다수의 교과서에서 정의에 관계없이 삼각형의 외심과 내심은 결과적 지식으로 도입되고 있는 실정인데, 이들 정의는 수학적 발생적 맥락을 간직한 개념으로서 완성된 지식으로서의 개념이 아니라 수학을 탐구하는 과정에서 생성된 지식이라는 사실을 인식시켜 주는 기회를 제공할 필요할 것으로 보인다.

본 연구에서 분석해 낸 이러한 연구 결과들이 수학 교육 현장에서 수학적 정의나 개념을 지도할 때, 유용한 자료로 활용되길 바란다.

참고문헌

강신덕・홍인숙・김영우・이재순・전민정・나미영(2009). 중학교 수학 2. 서울: 교학사.
강윤수・서은정(2009). 삼각형의 내・외심 지도방법 연구. 한국학교수학회논문집 12(3). 171-188.
김원경・조민식・김영주・김윤희・방환선・윤기원・이춘신(2009). 중학교 수학 2. 서울: 비유와 상징.
김진환・박교식(2010). 식, 방정식, 항등식이라는 용어의 의미에 관한 연구. 학교수학 12(1), 27-43.
김홍종・계승혁・오지은・원애경(2009). 중학교 수학 2. 서울: 성지출판.
김홍기(2008). 중학교 수학에서 도입된 용어 및 기호에 관한 고찰. 학교수학 10(2), 223-257.
박경미・임재훈(1998). 학교 수학 기하 용어의 의미론적 탐색 -기하 용어의 역사적 변천 및 국제 비교를 중심으로-. 대한수학교육학회 논문집 8(2), 565-586.
박규홍・최병철・안숙영・김준식・유미경(2009). 중학교 수학 2. 서울: 동화사.
박영훈・여태경・김선화・심성아・이태림・김수미(2009). 중학교 수학 2. 서울: 천재문화.
박윤범・남상이・최소희・홍유미(2009). 중학교 수학 2. 서울: 웅진싱크빅.
박종률・유종광・이창주・오혜정・이미라・박진호(2009). 중학교 수학 2. 서울: 도서출판 디딤돌.
송근화・정윤석・유기종・우종욱・이홍기・이용경(2009). 중학교 수학 2. 서울: 새롬교육.
신항균・이광연・윤혜영・이지현(2009). 중학교 수학 2. 서울: 지학사.
이경화(2009). 수학적 지식의 구성에서 유추적 사고의 역할. 수학교육학 연구 19(3). 335-369.
우정호・민세영(2002)./ 역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구. 수학교육학연구 7(3). 409-424.
우정호・박교식・박경미・이경화・김남희・임재훈・박인・이영란・고현주・김은경(2009). 중학교 수학 2. 서울: 두산동아.
우정호・조영미(2001). 학교수학 교과서에서 사용하는 정의에 관한 연구. 수학교육학연구 11(2). 363-384.
류희찬・류성림・한혜정・강순모・제수연・김명수・천태선・김민정(2009). 중학교 수학 2. 서울: 미래엔 컬처그룹.
이준열・최부림・김동재・송영준・윤상호・황선미(2009). 중학교 수학 2. 서울: 천재교육.
전재석(1995). 구성적 수학에 관하여. 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 34(2). 203-205.
정상권・이재학・박혜숙・홍진곤・서혜숙・박부성・강은주(2009). 중학교 수학 2. 서울: 금성출판사.
정창현・김창동・이치형・민정범・김지용(2009). 중학교 수학 2. 서울: 대교.
조영미(2001). 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
Borasi, R.(1992). Learning Mathematics through Inquire. Portsmouth: Heinemann.
Byers, V. & Herscovics, N.(1977). Understanding school mathematics, Mathematics Teaching 81, 24-27.

Euclid & T. L. Heath(2006). 기하학 원론(해설서)(이무현 역), 서울: 교우사(원본은 1908년 출판).

Mariotti, M. A. & Fischbein, E.(1997). Defining in classroom activities, Educational Studies in Mathematics **34**, 219-248.

Schell, V. J.(1982). Learning parters: Reading and Mathematics. Reading Teacher, **35**, 544-548.

Skemp R. R.(2008). 수학학습 심리학(황우형 역). 서울: 사이언스북스(원본은 1987년 출판).

Villiers, M. D.(1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. For the Learning og Mathematics. **14**(1), 11-18.

Vinner. S(1983). Concept definition, concept image and the notion of function, Int J. Math Edu sci. Technol., **14**(3), 293-305.

Vinner. S(1991). The role of definitions in the Teaching and Learning of mathematics. In D. Tall (ed.) Advanced Mathematical Thinking, Kluwer Academic Publishers.

삼각형의 외심, 내심의 정의에 관한 고찰

A Study on the Definition of a Circumcenter and an Incenter of Triangle

Jun, Young Bae[9) · Kang, Jeong Gi[10) · Roh, Eun Hwan[11)

Abstract

This paper was designed for the purpose of helping the functional comprehension on the concept of a circumcenter and an incenter of triangle and offering the help for teaching-learning process on their definitions. We analysed the characteristic of the definition on a circumcenter and an incenter of triangle and studied the context, mean and purpose on the definition.

The definition focusing on the construction is the definition stressed on the consistency of the concept through the fact that it is possible to draw figure of the concept. And this definition is the thing that consider the extend of the concept from triangle to polygon. Meanwhile this definition can be confused because the concept is not connected with the terminology. The definition focusing on the meaning is easy to memorize the concept because the concept is connected with the terminology but is difficult to search for the concept truth. And this definition is the thing that has the grounds on the occurrence but is taught in a made-knowledge. The definition focusing on both the construction and meaning is the definition that the starting point is vague in the logical proof process.

We hope that the results are used to improve the understanding the concept of a circumcenter and an incenter of triangle in the field of mathematical education.

Key Words : a circumcenter of triangle, an incenter of triangle, the definition, the functional comprehension.

9) Gyeonsang National University (skywine@gmail.com)
10) Namsan Middle School (jeonggikang@gmail.com)
11) Chinju National University of Education (idealmath@gmail.com; ehroh@cue.ac.kr)