

측지 역 문제 해석기법의 정확도 분석

The Accuracy Analysis of Methods to solve the Geodetic Inverse Problem

이용창¹⁾
Lee, Yong chang

Abstract

The object of this paper is to compare the accuracy and the characteristic of various methods of solving the geodetic inverse problem for the geodesic lines which be in the standard case and special cases(antipodal, near antipodal, equatorial, and near equatorial situation) on the WGS84 reference ellipsoid. For this, the various algorithms (classical and recent solutions) to deal with the geodetic inverse problem are examined, and are programmed in order to evaluate the calculation ability of each method for the precise geodesic determination. The main factors of geodetic inverse problem, the distance and the forward azimuths between two points on the sphere(or ellipsoid) are determined by the 18 kinds of methods for the geodetic inverse solutions. After then, the results from the 17 kinds of methods in the both standard and special cases are compared with those from the Karney method as a reference. When judging these comparison, in case of the standard geodesics whose length do not exceed 100km, all of the methods show the almost same ability to Karney method. Whereas to the geodesics is longer than 4,000km, only two methods (Vincenty and Pittman) show the similar ability to the Karney method. In the cases of special geodesics, all methods except the Modified Vincenty method was not proper to solve the geodetic inverse problem through the comparison with Karney method. Therefore, it is needed to modify and compensate the algorithm of each methods by examining the various behaviors of geodesics on the special regions.

Keywords : Geodetic inverse problem, geodesic, special cases, Karney method

초 록

본 연구의 목적은 WGS84 세계타원체를 기준으로 다양한 거리의 '표준측지선'은 물론, 극 및 적도와 그 주변을 지나면서 '특이영역에 위치하는 측지선'을 대상으로 측지 역 문제의 해석기법 별 정확도 및 특징을 비교·분석하는 것이다. 이를 위해 측지 역 문제를 해석할 수 있는 전통적인 방법은 물론 최근 제시된 방법 등 다양한 측지 역 문제 해석기법의 알고리즘, 총 18종을 분석하여 프로그래밍 하였다. 두 측정점의 배치 상태에 따른 '표준측지선' 및 '특이영역'에 위치한 측지선을 대상으로 거리 및 전방 방위각을 각 기법별로 산출하고 Karney 해석법을 기준으로 비교하였다. 연구결과, 표준측지선에서 약 100km 이하의 단 측지선의 경우, 18가지 역 문제 해석기법 모두, 매우 근접한 측지선의 길이를 나타낸 반면, 4,000km 이상의 중·장 측지선의 경우는 길이 및 전방 방위각에서 Karney, Vincenty 및 Pittman 기법이 매우 근접한 결과를 보였다. 또한, '특이영역'에 대한 다양한 역 문제의 해석결과, Karney 기법이 일관성 있는 종합적인 해석결과를 제시한 반면, 수정 Vincenty 기법을 제외한 다른 해석법들은 특이영역의 상황에 따라 좀 더 면밀한 측지선의 거동분석과 함께 알고리즘의 수정·보완이 요망되었다.

핵심어 : 측지 역 문제, 측지선, 특이영역, Karney 기법

1) 정희원 · 인천대학교 도시과학대학 도시환경공학부 교수 (E-mail : yclee@incheon.ac.kr)

1. 서론

지구상 제점간의 위치, 최단 거리 및 방향 등은 모든 항법 및 측지관련 응용분야의 핵심 요소이다. 이들 요소를 정확히 구하기 위해서는 항상 두 점간의 경·위도 ($\phi_1, \lambda_1, \phi_2, \lambda_2$), 거리(S) 및 전방방위각 (α_{12})과 후방방위각 (α_{21})의 7가지 양을 다루게 되는데 이를 측지학적 주·역 문제(forward and inverse geodetic problems)라 한다. 주어진 조건이 (ϕ_1, λ_1), S_{12} 및 α_{12} 이고 (ϕ_2, λ_2) 및 α_{21} 를 결정하는 문제를 측지학적 '주문제(direct problem; 측지학적 1차 문제)', (ϕ_1, λ_1) 및 (ϕ_2, λ_2)가 주어지고 S_{12} , α_{12} 및 α_{21} 를 해석하는 것을 '역 문제(inverse problem; 측지학적 2차 문제)' 라고 하며 오래 전부터 육·해·공의 항법 및 측지측량 분야에서 매우 중요하게 다루어져 왔다. 측지학적 주문제는 최근, 각종 GNSS 수신기의 보편화, 실시간 및 사후 처리 기술의 향상, 측위 해석 알고리즘의 발달로 대부분의 수요가 충족되고 있다. 반면, 측지역 문제 해석의 경우, 오랜 과거부터 항해, 항공 및 육상의 도달 시간 산정은 물론 웹상에서 두 장소간의 거리, 각종 측지·측량, GIS 관련 프로그램 및 무선전파 분야 등에 필수 해석 모듈로서 현재도 꾸준히 연구·발전되어 오고 있다. 특히, GPS 위성의 현대화 및 GPS 응용의 일반화로 세계측지계를 기준으로한 지구상 제점에 대한 측지학적 주·역 문제의 정밀해석에 더욱 관심이 높아질 전망이다.

2. 연구 동향 및 목적

측지학적 주·역 문제의 핵심 요소인 측지선(geodesics)은 회전 구체 또는 타원체면 상에서 두 측점간의 최단 표면거리로 정의된다. 그 동안 측지선 또는 근사적인 수직절선과 관련된 측지 주·역 문제의 해석을 위해 많은 연구가 발표되어 왔다. 이들 해석 방법들은 측지선의 지구형상 기준(구체 또는 타원체), 직접해석과 순환해석, 주·역 문제의 양방향 또는 단방향 해석, 해석 거리의 제한, 해석시간, coding의 편이성 및 특이영역(적도를 포함하여 두 측점의 경도차 $\lambda_2 - \lambda_1 \cong 180^\circ$ 및 $\phi_2 = -\phi_1$ 인 경우)에 대한 해석 가능 유·무 등에 따른 다양한 특성이 있다. 단독 연구로는 F.W. Bessel(1825), Rainsford (1949, 1955), Robbins(1962), Sodano(1965), Kivioja(1971), Bowring(1981, 1996), Vincenty(1975a), Saito(1979), Jank and Kivioja(1980), Pittman(1986) 등의 해석이론이 대표적이다. 해석적인 관점에서 고찰해보면, 타원적분의 급수전개방식과 수치적

분방식 두 부류로 분류할 수 있다. 수치적분방식은 타원체(ellipsoid)의 단순 미분관계식에 근거한 적분해법(Kivioja 1971, Thomas & Featherstone 2005)과 타원 및 보조구체 간 상관함수에 근거한 수치적분해법(Saito 1970, 1979 and Sjöberg 2006)으로 세분된다. 급수전개방식의 원조는 보조구체(auxiliary sphere)를 사용한 Bessel(1826)외에 Bessel법을 수정한 여러 해법(Rainsford 1955, Vincenty 1975a, 1975b, Bowring 1983, 1984)들이 발표되었다. 특히, 20세기 중엽부터 발전한 컴퓨터 기술로 인해 수치적분 방법은 보다 실효성 있는 해석결과를 제공하고 있다. 또한, 이들 해석법들 간의 부분적 혹은 종합적인 비교연구가 Gupta(1972), Krakiwsk and Thomson(1974), Bomford(1980), 및 Rapp(1991, 1993) 등에 의해 수행된바 있다. 측지선의 '특이영역(극 부근 특이상황; antipodal or near antipodal points, 적도부근 특이상황; equatorial or near equatorial points)'에 관한 연구로는 Fichot and Gerson (1937), Lambert(1942), Lewis(1963), Helmert(1964), Thien(1967), Saito(1970), Vincenty(1975b), Rapp(1993) 및 Bowring(1983, 1996) 등이 수행된 바 있다. Bowring(1983, 1996)은 타원체상 측지선의 역 문제 관련 경도방정식을 해석하기 위한 여러 방법(단순 순환법, Newton-Raphson, Extended Newton-Raphson, Lagrange's 기법)을 비교·검토하였고 적도부근 특이영역의 역 문제 해석을 위한 별도의 방정식을 전개하고 Vincenty 및 Extended Newton-Raphson 해석방법과 비교하였다. 2000년대에서는 Kai Borre(2001), C.M. Thomas and W.E. Featherstone (2005), Jekeli(2006) 및 Karney(2011) 등의 연구로 향상·발전되고 있다. 그러나 최근까지 발표된 해석기법들을 포함한 종합적인 비교·검토 연구는 매우 소수에 불과하며 아직도 연구 및 논의가 진행 중에 있다. 해석법 중에서 특히, Vincenty의 이론은 전산매체에 손쉽게 적용할 수 있고 최소한의 순환해석을 통해 단시간 내에 결과를 산출할 수 있는 장점이 있어 현재 널리 활용되고 있다. 그러나 지구상 제점들의 위치, 방위 등의 조건에 따라서는 이와 대등한 해석기법들도 여러 가지가 있다. 본 연구의 목적은 WGS84 세계타원체를 기준으로 단, 중 및 장거리의 일반적인 '표준' 측지선은 물론, 북극 주변 또는 적도를 지나면서 지구 정반대(antipodal line)에 위치하는 '특이' 측지선을 대상으로 '측지역 문제'의 해석기법별 정확도 및 특징을 비교·분석하는 것이다. 이를 위해 측지역 문제를 해석할 수 있는 전통적인 방법은 물론 최근 제시된 방법 등 다양한 역 문제 해석기법의 알고리즘을 분석하여 프로그래밍 하였다. 두 측점의 배치 상태에 따

큰 단, 중 및 장 측지선의 측지 역 문제를 기법별로 해석하고 정확도를 비교·분석하였다.

3. 측지 역 문제 해석기법의 선정 및 시험 측지선 구성

그동안 발표된 측지 역 문제 해석이론의 차별성은 공통적으로 '3.1 측지 역 문제 해석의 기본이론'에 근거한 지구형상의 선정(타원체, 보조구체), 측지선의 적분방식, 경도차방정식의 구성, 순환 또는 비 순환 해석 방식 등에 있다. 본 연구에서는 측지 역 문제 해석방법의 상세 알고리즘의 비교·분석보다는 해석기법 간 정확도의 비교·분석에 주안점을 두고 역 문제의 공통 기본이론, 주요기법의 적분방식 및 특이사항만을 요약하였다.

3.1 측지 역 문제 해석의 기본이론

타원체 상, 측지 역 문제를 해석하기 위해서는 타원체 면 상의 측지선에 대한 Clairaut의 특성방정식(식 (1))을 기본으로, 그림 1과 같이 타원체와 보조구체 면 상의 미소 사각형에서 구현된 측지선의 미분방정식으로 부터 경도차 ($d\lambda, d\omega$)와 측지선 거리(s, σ)의 미분 관계식을 구성할 수 있다. 식 (2)에 타원체 및 구체의 제 요소를 대입하고 정리하면 미분방정식 식 (3)를 구성할 수 있고 이로부터 측지선 거리 s 및 경도차 ($\omega - \lambda$)를 구할 수 있다. 그림에서 ϕ 및 ψ 는 각각 측지위도 및 화성위도, α 는 측지선의 방위각이다.

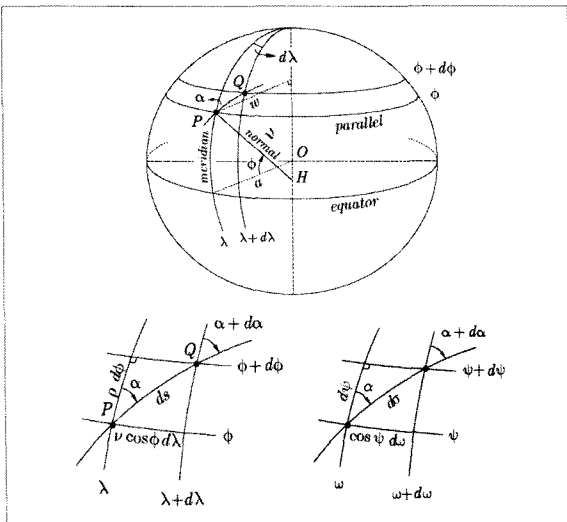


그림 1. 타원체 및 보조구체 상의 측지선

$$v \cos \phi \sin \alpha = C \tag{1}$$

$$\frac{ds}{d\sigma} = \rho \frac{d\phi}{d\psi}, \quad \frac{d\lambda}{d\omega} = \frac{1}{a} \frac{ds}{d\sigma} \tag{2}$$

$$\frac{ds}{d\sigma} = a(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{d\lambda}{d\omega} = (1 - e^2 \cos^2 \psi)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

3.1.1 측지선 거리의 계산

그림 2에서 단위 반경을 갖는 보조 구체면 상에서 P_1, P_2 (이 구체상의 위도는 타원체 상의 화성위도와 동일)를 통과하는 구체면 상의 측지선 및 대원은 적도 E에서 방위각 α_E, P_1 에서 α_1, P_2 에서 α_2 , 최 정점 H에서 $\alpha = 90^\circ$ 를 갖게 된다. 보조구체 상 대원의 방위각은 타원체 상 측지선의 방위각과 같다는 특성과 구면삼각형의 정의로부터 식 (3)을 전개하면 식 (4)와 같이 된다.

$$ds = b(1 + e'^2 \sin^2 x \sin^2 \psi_0)^{\frac{1}{2}} dx \tag{4}$$

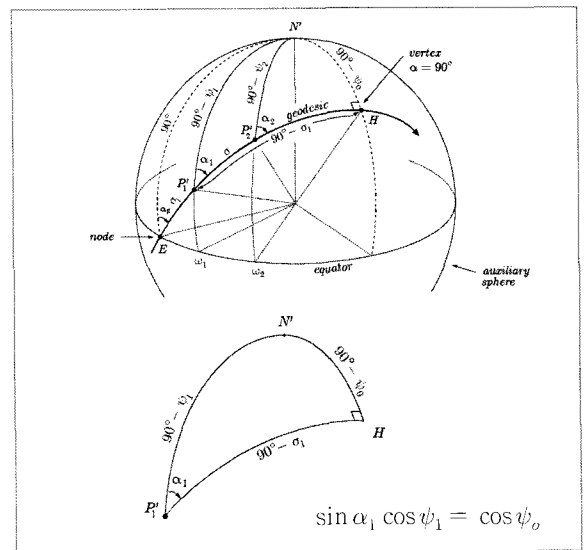


그림 2. 타원체상 P_1 및 P_2 를 지나는 측지선과 구면삼각형

여기서, $x = \sigma_1 + \sigma$, e'^2 은 타원체에 관한 상수, ψ_0 는 특정 측지선에 대한 상수이다.

$u^2 = e'^2 \sin^2 \psi_0 = e'^2 \cos^2 \alpha_E$ 로 하여 식 (4)에 대입한 후, 정리하면 식 (5)와 같이 타원의 적분식을 유도할 수 있고 구면삼각법으로부터 σ 가 결정되면 순수적분(Kivioja, 1971), 급수전개(Bessel, 1825), 또는 순환적분법(Pitman) 등을 사용하여 측지선의 길이를 구할 수 있다.

$$s = b \int_{x=\sigma_1}^{x=\sigma_1+\sigma} (1+u^2 \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} dx \quad (5)$$

3.1.2 측지선 상, 두 점간의 경도차 계산

식 (3)의 우측 식을 전개하면 타원체상의 미소경도 ($d\lambda$)와 보조구체상의 미소경도 ($d\omega$)간의 경도차방정식을 식 (6)과 같이 구성할 수 있고 허용범위에 수렴할 때까지(또는 각 미소경도값의 전·후 변화량이 무시할 수준까지) 순환계산한 후, 최종 요소를 활용하여 측지선의 거리(S) 및 전방방위각 (α_{12})을 산정한다.

$$d\lambda - d\omega = \cos \psi_o \left[\frac{(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{\frac{1}{2}}}{\cos^2 \psi} - \frac{1}{\cos^2 \psi} \right] d\sigma \quad (6)$$

측지 역 문제 해석의 근간이 되는 식 (5)의 해석에서 Bessel(1826)이 급수전개 방식을 최초로 적용한 이후로 이를 수정한 Rainsford(1955) 관계식이 발표되었고 이를 다시 Vincenty(1975)가 수정한 해법이 현재 널리 활용되고 있다 (R.E. Deakin과 M.N. Hunter, 2009).

3.1.3 측지 역 문제 해석기법 선정

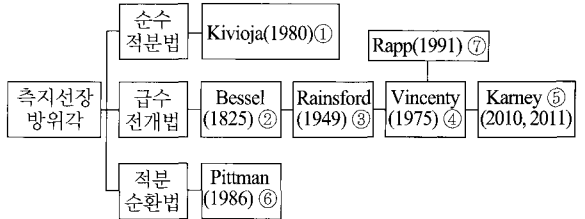
역 문제 해석에서 지구의 형상을 단순 구체로 선정하거나 적분식을 간략식(또는 근사식) 형태로 전개하고 비 순환 해석을 수행한 것보다는 경도차방정식을 활용한 순환 해석법의 정도가 높다. 표 1은 본 연구에서 선정한 18가지 측지 역 문제 해석기법을 지구형상 및 순환·비 순환 해

표 1. 타원체 상, 장 측지선의 측지 역 문제 해석기법

지구의 형상	측지 역 문제 해석 기법의 종류	
	순환법(iteration)	비순환법(non-iteration)
구체 (spherical)	Puissant	대원(WGS84 타원체의 평균반경) 항정선(Rhumb Line) Haversine 공식 Gauss mid-latitude
타원체와 보조구체간 함수관계식	Bessel, Vincenty, 수정 Vincenty Moritz, Karney Clarke's best Helmert Modified Rainsford	Bowring
타원체 (Spheroid)	Kivioja, Pittman, Thomas	Sodano, Andoyer, Robbin

석방식을 기준으로 정리한 것이다. 표 2는 급수전개해석에 비중을 두고 주요 해석기법을 적분방식에 따라 분류하고 경도차방정식 등의 주요 특이사항을 요약한 것이다.

표 2. 적분방식에 따른 측지 역 문제 해석기법의 분류 및 특이사항



해법	측지 역 문제 해석기법의 특이 사항
①	타원체 상 측지선의 단순 미분관계에 근거한 적분해석, 기선장이 길어질수록 측지선 적분결과와 정확도가 저하됨
②	컴퓨터가 없었던 시대로 적분의 부담과 계산속도 향상을 위해 적분적분 계수표 활용, (L-λ)식의 계수(B)식에서 f대신 e² 사용, 최대차수 f⁸에 상당
③	②를 간략화, (L-λ)의 계수(A)식에 f를 사용, f의 최대차수 → f³, A₀, A₂, A₄, A₆ 탁상계산기 작업에 편리
④	(③+⑦)의 조합방식, ③의 측지선장 및 (L-λ)식을 수정, 계수 식을 C로 단일화 f의 최대차수 → f³, 특이영역 역문제의 불완전해석, 컴퓨터 프로그래밍에 유리
⑤	④의 정확도 및 계산 속도를 향상시킬 수 있는 방식 적용, f의 최대차수 → f⁷, 역 문제의 급수전개, 적분, 및 간략화 계산 작업을 위해 Maxima(2009)을 이용한 GeographicLib 개발, 특이영역 역문제의 완전해석 가능, 웹 해석서비스 제공
⑥	적분계산을 단순 순환식(simple recurrence equation)으로 해석, 측약된 급수전개와 보조구면을 사용하지 않는 방식, 특이영역의 해석에는 제한이 있음

(L-λ) : 경도차방정식(타원체경도-구체경도),
f: 편평률, A, C : 계수, () : 발표년도

지구형상을 구체로 선정한 해석법은 대부분 근사식(또는 간략식)형태의 비 순환(Puissant 법 제외)방식으로 비교적 단거리 해석에 적합한 것으로 알려져 있다. 측지 역 문제 해석을 위한 Vincenty의 표준이론(1975a)은 타원체의 편평률(f)값의 차수(f³, 3차) 제한에 따른 정확도 저하, 측지선의 중점이 '특이영역' 내부 또는 근접한 경우에 발생되는 특성이 있다. '특이 측지선'의 해석을 위해 후속으로 발표된 Vincenty 수정알고리즘(1975b)에서도 측지선 중점이 포

락선(envelop ; 타원 곡률중심의 궤적) 내부 · 인접부에 있는 경우 수렴속도가 저하되는 문제점(Karney 2011, Rapp 1993)이 있다. Karney(2011) 해석기법은 Bessel 해석법(r^8 차수 적용)에 기본을 둔 순환 해석법으로 최신의 전산기술을 바탕으로 산술계산용 Software package(Maxima, 2009)를 적극 활용하여 편평률의 차수를 확대(r^{30} , 30차수) 적용함은 물론 Newton 해석법을 적용하여 정확도 및 수렴속도를 크게 향상시킨 최근에 발표된 방법이다. 또한, 측지선 종점이 '특이영역' 내부 또는 근접한 경우, 측지 포락선(astroid)방정식을 구성하고 Vermeille(2002) 방법을 활용하여 최단 측지선의 방향, 측지선 종점의 좌표를 해석함으로써 특이영역에 대한 측지 역 문제의 종합적인 해석 발전을 제시한 기법으로 검토되었다. 특히, 표준 측지선 10만종, 특이영역에 대한 5만 종의 측지선 외에 자오선, 극, 적도 및 천정 인근에서 도출된 35만 종, 총 50만종의 다양한 속성의 측지선에 대한 시험 결과, 정확도면에서 Vincenty 해법에 비해 향상된 결과를 제공하는 것으로 검증 · 발표(Karney, 2011)된 바 있다. 따라서, 본 연구에서는 최근에 발표된 Karney의 해석법에 비중을 두고 기존 측지 역 문제 해석법들 간의 정확도를 비교 · 검토하였다.

3.2 측지 역 문제의 특이영역(antipodal or equatorial)

역 문제 해석의 특별한 경우가 몇 가지 있다. 첫째, 임의 두 측점이 경도차($\lambda_2 - \lambda_1 = 180^\circ$) 및 위도($\phi_2 = -\phi_1$)조건에 있는 측지선을 '정반대(antipodal situation)에 위치해 있는 측지선' (이하, '정반대 측지선' ; antipodal lines)이라하

며 표준 역문제의 해법으로는 발산된다. 따라서, 이를 해석하기 위해서는 표준 역문제의 해석알고리즘을 수정하고 정반대 측지선의 거동을 분석해야 한다. '준정반대(near antipodal)' 에 위치하는 측지선은 정반대 측지선의 조건에 근접한 측지선을 말한다. 둘째, 두 측점이 적도상에 위치하면서 경도차가 $\lambda_2 - \lambda_1 \cong 180^\circ$ 인 특별한 경우(equatorial lines)도 있다.(Fichot and Gerson, 1937) 특히, 적도선 상, 두 측점 간의 거리는 최단선(즉, 측지선)이 아니므로 이 경우에 대해서도 면밀한 분석이 요망된다. 셋째, 실무적으로 큰 의미는 없으나 두 측점 간, 최단 측지선의 반대쪽 측지선(backside lines)에 대한 경우가 있다. 본 연구에서는 이들 3가지의 경우에 위치하는 측지선을 모두 '특이 측지선', 그 외는 '표준 측지선' 으로 구분하였고 최단 측지선의 '반대쪽 측지선' (backside lines)에 대한 연구는 연구범위에서 제외하였다.

3.3 시험용 측지선의 구성

표 3 및 표 4는 두 측점의 배치 상태에 따른 단, 중 및 장 측지선의 역 문제를 기법별로 해석하고 정확도 및 특성을 검토하기 위하여 구성한 시험용 측지선의 조합이다. 표 3은 수원 GNSS 상시관측소를 기점으로 36~3,000km 범위의 기선길이를 갖는 GNSS 상시관측소들로 구성된 표준측지선 8종(G1~G8) 및 Rapp(1993)의 연구에서 사용된 '표준 측지선' (이하 'Rapp 표준 측지선' 라 함.) 7종(R1~R7)의 구성 현황이다. 표 3에서 'R1~R7' 측지선은 '정반대' 또는 '준정반대' 의 특성이 없는 표준측지선으로 'R2, R3, R5, R6' 의 측지선 경우, Rainsford(1955)가 활용한 바 있다.

표 3. 국내 · 외 GNSS 관측소 및 Rapp 표준측지선의 조합

(단위 : ° ' ")

측점 명칭	수원 ~ 국내 · 외 GNSS 관측소		측지선 명칭	Rapp의 측지선 ($\lambda_1=0$)		
	수원 $\phi_1=37-16-31.853$ $\lambda_1=127-03-15.264$			ϕ_1	ϕ_2	λ_2
	ϕ_2	λ_2				
G1(인천)	37-25-11.488	126-41-11.179	R1	41-41-45.88000	41-41-46.20000	000-00-00.56000
G2(천안)	36-52-40.832	127-09-18.908	R2	37-00-00.00000	28-15-36.69535	-02-37-39.52918
G3(대전)	36-23-57.950	127-22-28.120	R3	37-19-54.95367	26-07-42.83946	41-28-35.50729
G4(울릉도)	37-31-06.286	130-47-51.736	R4	35-16-11.24862	67-22-14.77638	137-47-28.31435
G5(제주)	33-23-05.047	126-37-08.611	R5	30-00-00.00000	37-53-32.46584	116-19-16.68843
G6(USUD)	36-07-59.197	138-21-43.357	R6	01-00-00.00000	01-01-15.18952	179-46-17.84244
G7(ULAB)	47-40-12.000	107-02-60.000	R7	01-00-00.00000	-0-59-53.83076	179-17-48.02997
G8(PETS)	53-01-23.880	158-39-00.490				

표 4. Rapp 및 Bowring의 시험용 측지선 조합

(단위 : ° ' ")

특이영역 측지선 ($\lambda_1=0^\circ$)							
측지선 명칭	Rapp의 시험용			측지선 명칭	Bowring의 시험용		
	ϕ_1	ϕ_2	λ_2		ϕ_1	ϕ_2	λ_2
A	41-41-45.880	-41-41-46.200	179-59-59.440	a	00-00-00.000	0-00-00.000	000-53-53.899
B	00-00-00.000	00-00-00.000	179-41-49.780	b	67-30-00.000	16-39-13.985	82-47-22.014
C	30-00-00.000	-30-00-00.000	179-40-00.000	c	30-00-00.000	-29-33-00.000	179-54-00.000
D	60-00-00.000	-59-59-00.000	179-50-00.000	d	45-00-00.000	-44-59-59.554	179-44-10.097
E(*)	30-00-00.000	-29-50-00.000	179-48-00.000	e	67-30-00.000	-67-29-59.991	179-47-40.600
F(*)	30-00-00.000	-29-55-00.000	179-48-00.000	f	30-00-00.000	-29-34-40.660	179-48-00.000
A~B; 정반대 측지선, E 및 F: 포락선에 외접 및 내접				a: equatorial 측지선, c~f; 정반대 측지선			
Karney 측지선		$\phi_1=30^\circ N \quad \lambda_1=0^\circ E \quad \phi_2=30^\circ S \quad \lambda_2=180^\circ E$					

이중, R1 측지선이 가장 짧고 R2는 $\alpha_{12} > 180^\circ$ 조건으로 구성하였다. 표 4는 '특이영역'에 위치한 측지선의 조합으로 Rapp(1993)의 연구에서 사용된 측지선(이하 'Rapp 특이 측지선'라 함.) 6종(A~E) 및 Bowring(1983)의 측지선(이하 'Bowring 특이 측지선'라 함.) 6종(a~f)으로 구성하였다. 과거 연구자의 시험용 측지선을 선정한 이유는 특이영역의 선정 및 신·구 산정결과 간의 상대적인 비교·검토를 위함이다. 표 4의 A~F 측지선 중, A~D는 Vincenty(1975)의 연구에서도 적용된 '정반대' 측지선이며 E 및 F는 '준정반대' 측지선으로 특이영역의 경계선

(측지포락선)에 외접 및 내접하는 측지선이다. 기준타원체는 실시간 GPS 사용자에 중심을 맞추어 WGS84 세계타원체를 선정하여 제 요소를 역문제 해석 시 적용하였다.

4. 연구내용 및 비교분석

시험용 측지선 27종에 대해 18가지의 역문제 해석법을 적용하고 측지선의 거리 및 방위각을 각각 산정하였고 측지선의 적분계산 과정 중 발산되는 해석기법은 비교·분석에서 제외하였다.

표 5. 해석방법에 따른 GNSS 상시관측소간 표준 측지선의 거리

(단위: m)

경우	측지선 조합: 기준 관측소(수원) ← (G1~G8)							
	G1(인천)	G2(천안)	G3(대전)	G4(울릉도)	G5(제주)	G6(USUD)	G7(ULAB)	G8(PETS)
Karney	36313.502	45019.972	101332.482	332543.869	433477.240	1017705.676	2000153.708	3000041.717
Vincenty	36313.502	45019.972	101332.482	332543.869	433477.240	1017705.676	2000153.708	3000041.717
Pittman	36313.502	45019.972	101332.482	332543.869	433477.240	1017705.676	2000153.708	3000041.717
HMR	36313.502	45019.972	101332.482	332543.869	433477.240	1017705.676	2000153.708	3000041.717
Clark Best	36313.502	45019.972	101332.482	332543.869	433477.240	1017705.676	2000153.708	3000041.717
Moritz	36313.502	45019.972	101332.482	332543.869	433477.240	1017705.676	2000153.708	3000041.717
Bessel	36313.502	45019.972	101332.482	332543.869	433477.240	1017705.676	2000153.708	3000041.717
Kivioja	36313.502	45019.972	101332.482	332543.869	433477.240	1017705.676	2000153.708	3000041.720
Robbin	36313.502	45019.971	101332.481	332543.869	433477.348	1017705.893	2000153.705	3000041.652
Sodano	36313.502	45019.972	101332.481	332543.866	433477.234	1017705.657	2000153.488	3000040.987
Bowring	36313.502	45019.972	101332.481	332543.869	433477.119	1017705.679	2000149.345	3000013.302
Thomas	36313.502	45019.972	101332.484	332543.963	433477.426	1017708.272	2000179.078	3000137.435
Gauss-mid	36313.502	45019.971	101332.478	332543.875	433476.859	1017707.142	2000229.261	3000754.530
Puissant	36313.507	45019.977	101332.488	332544.450	433475.809	1017720.424	1996256.998	2974780.838
Andoyer	36313.504	45020.314	101333.176	332543.796	433480.437	1017705.518	2000155.736	3000044.462
구(대원)	36258.280	45099.928	101499.164	331771.067	434431.160	1015420.233	1997315.303	2995102.376
Haversine	36260.000	45100.000	101500.000	331800.000	434400.000	1015000.000	1997000.000	2995000.000
구(항정선)	36258.303	45099.930	101499.212	331792.840	434431.510	1016010.682	2001998.545	3014719.423

표 6. 해석방법에 따른 Rapp 표준 측지선의 거리

(단위 : m)

해법	경우	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
Karney		16.283	999975.508	4085797.710	8084459.013	10002067.683	19779362.839	19959214.626
Vincenty		16.283	999975.508	4085797.710	8084459.013	10002067.684	19779362.838	19959214.626
Pittman		16.283	999975.508	4085797.711	8084459.013	10002067.684	19779362.849	19959214.626
HMR		16.283	999975.508	4085797.711	8084459.013	10002067.684	19779362.958	19959214.626
Clark Best		16.283	999975.508	4085797.711	8084459.012	10002067.684	19779362.838	19959214.626
Moritz		16.283	977715.727	4085797.710	3879881.010	1306597.138	2324.359	201.035
Bessel		16.283	999975.508	4085797.711	3878856.348	1304609.261	2324.259	15452434.446
Kivioja		16.283	999975.508	4085797.705	NaN	NaN	NaN	NaN
Robbin		16.284	999978.476	4085872.912	8084462.715	10001786.497	19999314.001	19959104.948
Sodano		16.283	999975.444	4085797.243	8084454.719	10002067.779	19779336.853	19959214.895
Bowring		16.283	986278.678	4085803.747	8079755.677	10001446.928	19743047.711	19894409.030
Thomas		16.283	999977.513	4085937.204	8087360.413	10005825.610	19811861.873	19959216.009
Gauss-mid		16.283	999970.449	4087096.542	8433928.037	10198603.606	20006442.156	19953724.301
Puissant		16.283	NaN	4093840.847	NaN	NaN	NaN	NaN
Andoyer		16.283	999980.564	4085796.452	8084448.256	10002073.296	19779443.807	19959215.743
구(대원)		16.263	1002359.128	4079296.066	8064418.784	9981748.691	19788966.630	19936914.744
Haversine		16.260	1002000.000	4079000.000	8064000.000	9982000.000	19790000.000	19940000.000
구(항정선)		16.263	1002384.774	4105177.184	9711824.536	10749545.817	19986606.523	19937130.855

4.1 측지선의 거리편차

표 5 및 표 6은 각각 18가지 해석방법별로 산출한 8종의 국내 · 외 GNSS 상시관측소간 표준 측지선 및 7종의 Rapp 표준 측지선, 총 15종의 측지선 거리를 정리한 것이다.

1975년 Vincenty(1975a, 1975b)의 측지 역 문제 해석 이론이 발표된 이후, 몇 가지 향상된 해석법이 발표되었다. 특히, 20,000km 이상의 표준 및 특이 측지선에서도 해석이 가능한 방법으로는 캐나다 NRCAN(1985)에서 채택한 Clarke's best 방법, 미국 NGS(2002)에서 채택한 Helmert Modified Rainsford(이하, 'HMR' 이라함.) 방법 등이 있지만, 보다 현격한 향상법은 최근, Karney(2011)에 의해 발표되었다. 본 연구에서는 Karney의 해석 결과를 기준으로 거리와 방위각을 비교 · 분석하였다. 표 5 및 표 6에서 선정한 시험 측지선의 거리 분포는 대략 16km~3,000km 이다. 그림 3은 Karney 해석거리를 기준으로 17종의 해석방법별, 수원 GNSS 관측소와 8개 관측소간 측지선의 거리편차를 도시한 것이다. 18가지의 역 문제 해석법에 따른 16km~3,000여 km 분포의 '표준측지선' 8종의 측지선 해석결과, 대원, 항정선, Haversine 및 비 순환 해석방법에서 두 측점간의 거리가 증대됨에 따라 공통적으로 거리 편차도 크게 나타났다. 특히, Puissant 방법의 거리정확도는 약 100km에서 10⁻⁸, 300km에서 10⁻⁶, 3,000km에서 10⁻³ 수준으로 급격한 감소양상을 나타내었는데 이는 순환해석 방식

을 채택하였지만 구체를 전제로 유도된 관계로 사료된다. 지구타원체를 전제로 유도되었으나 비 순환 해석방식인 Robbin, Sodano, 및 Andoyer 방법 등은 3,000km에서 각각 0.1m, 1m 및 3m 의 거리오차를 나타내어 10⁻⁸~10⁻⁷ 수준의 거리 정확도를 보였다. 따라서, 구체를 전제로 비 순환 방식을 적용하는 해석알고리즘일수록 거리편차는 두 측점간의 거리증가에 큰 영향을 받는 것으로 분석되었다.

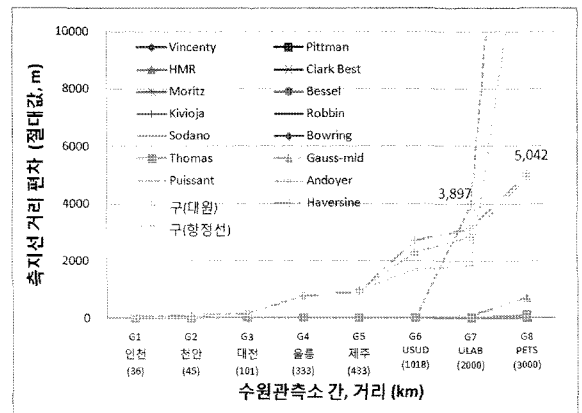


그림 3. GNSS 관측소간, 측지선 거리 편차

그림 4는 GNSS 관측소간, 측지 역 문제의 거리해석에서 nm(10⁻⁹)급의 정확도를 제공할 수 있는 해석방법만을

선별·도시한 것이다. 3,000km 거리에서 Kivioja 방법의 거리오차는 3mm로 나타났고 다른 6가지 방법은 모두 각 구간 거리별로 동일한 해석결과를 보였다.

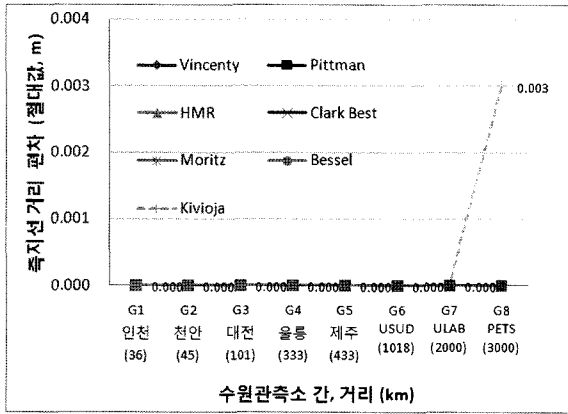


그림 4. GNSS 관측소간, nm급 역 문제 해석

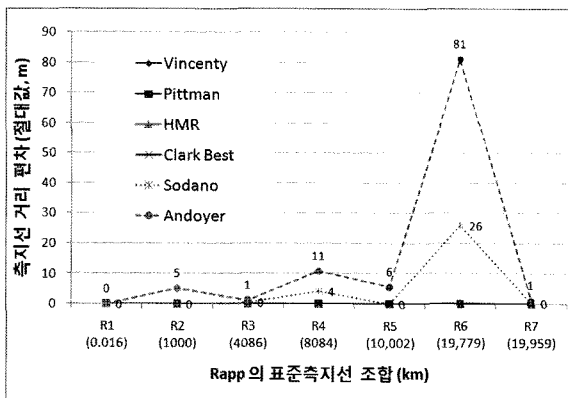


그림 5. 해석방법별 Rapp 표준측지선의 거리편차

그림 5는 측정간 거리 16m~20,000km 범위의 'Rapp 표준측지선'을 대상으로 18가지의 해석방법을 적용한 후, Karney의 해석결과 대비, 10^6 수준의 거리정확도를 제공할 수 있는 해법(Vincenty와 5가지 방법)만을 선정하여 거리편차를 도시한 것이다. Rapp 표준측지선 중, 16m 및 1,000km 측정선은 앞선 GNSS 관측소 간 해석결과와 중복성은 있지만 두 측정점의 위치와 조건이 다른 점을 감안하여 함께 검토하였다. 16m 및 1,000km 측정선의 거리편차는 앞선, GNSS 상시관측소의 결과와 유사한 분포를 나타내었다. 단순구체로 해석한 3가지 방법(대원, 항정선, Haversine)은 거리 및 방위각에서 Karney의 해석결과와는 큰 편차를 보였다. Bessel 및 Kivioja 해석방법은 4,000km

거리까지는 nm 수준의 거리정확도를 나타내었으나 8,000km 이상의 거리에 적용하는 것은 무의미한 것으로 분석(발산)되었다. 이들 두 방법에 대한 4,000km~8,000km 구간의 적용성 검토는 향후, 연구과제로 한다. 또한, 4,000km 이상의 측지선에 대해 대부분의 단거리 해석용 해법은 발산(Puissant 해석법은 발산)하거나 무의미한 해석결과로 나타났다.

4,000km~약 20,000km 범위의 측지선에 대한 해석에서 Sodano 및 Andoyer는 측지선의 분포상황에 따라 최대 26m 및 81m의 거리편차는 있으나 평균 10^8 및 10^7 수준의 거리정확도로 분석되었다. Karney 해석결과 대비 표준 Vincenty, Pittman, NGS의 HMR, NRCAN의 Clark best 해법 등은 nm급 (10^9)의 비교적 균일한 거리정확도를 나타내었다.

4.2 전방 방위각의 편차

표 7 및 표 8은 국내·외 GNSS 상시관측소간 표준측지선(약 36~3,000km) 및 Rapp의 표준측지선, 총 15종에 대하여 18가지 측지역 문제의 해석방법을 적용하고 산출한 각 측지선의 전방방위각을 (degree)로 정리한 것이다. 그림 6 및 그림 7은 수원 관측소와 GNSS 관측소간 측지선 및 Rapp의 표준측지선, 총 15종에 대해 18가지의 역 문제 해법을 적용한 후, Karney에 의한 전방방위각을 기준으로 산출한 해법별 방위각의 편차를 도시한 것이다.

표 7에서 구체 해석이론에 근거한 방법(대원, 항정선, Haversine, Puissant)과 Bowring 및 Thomas 방법은 1° 이상의 과대오차가 나타나 그림 6에는 표기하지 않았다. 그림 6에서 Andoyer 해법의 경우, 36km 측정선에서 약 $2''$, 45~1,018km에서 최대 $0.2''$, 2,000km 부터는 현격히 증가되면서 3,000km에서는 $14.4''$ 의 편차를 나타내었다. Robbin 해법도 1,018km 이상의 거리에서는 Andoyer 해법과 유사한 편차분포를 보였다. Gauss 평균위도 방법은 433km 및 2,000km에서 각각 $0.02''$ 및 $1.4''$ 초, 3,000km에서는 $5.8''$ 의 편차를 나타내었다. 또한, Kivioja 및 Clark best 방법은 각각 10^{-3} 및 10^{-4} , Vincenty의 나머지 5가지 다른 방법들은 약 10^{-5} 수준의 방위각 정확도로 나타났다. 약 16~20,000km 범위의 'Rapp 표준측지선'에 대한 방위각 편차는 표 8과 같이 측지선의 거리증가대비 편차도 크게 증가하는 결과를 보였다. 1° 이상의 과대오차를 보인 해석방법으로는 그림 6에서 제외된 방법 외에도 Moritz, Bessel, Kivioja, Robbin, Sodano, Gauss 평균위도 및 Andoyer 방법들로서 그림 7에는 Karney의 해석결과와 $1''$ 이내의 방위각 편차를 나타낸 4가지 방법만을 도시하였다.

표 7. 해석방법에 따른 GNSS 상시관측소간 전방 방위각

(단위: °)

경우	측지선 조합 : 기준 관측소(수원) ← (G1 ~ G8)							
	G1(인천)	G2(천안)	G3(대전)	G4(울릉도)	G5(제주)	G6(USUD)	G7(ULAB)	G8(PETS)
Karney	296.28889100	168.46085061	163.53031203	84.21508997	185.36398544	93.74178106	311.57274578	44.16855994
Vincenty	296.28889107	168.46085064	163.53031200	84.21508997	185.36398545	93.74178104	311.57274579	44.16855994
Pittman	296.28889100	168.46085062	163.53031202	84.21508998	185.36398545	93.74178105	311.57274579	44.16855994
HMR	296.28889100	168.46085061	163.53031203	84.21508997	185.36398544	93.74178106	311.57274578	44.16855994
Clark Best	296.28889111	168.46085056	163.53031194	84.21509000	185.36398556	93.74178111	311.57274583	44.16856000
Moritz	296.28889100	168.46085062	163.53031202	84.21508998	185.36398545	86.25821895	311.57274579	44.16855994
Bessel	296.28889100	168.46085062	163.53031202	84.21508998	185.36398545	93.74178105	311.57274579	44.16855994
Kivioja	296.28889100	168.46085061	163.53031203	84.21508997	185.36398544	93.74178142	311.57274844	44.16854192
Robbin	296.28889110	168.46085040	163.53030900	84.21509990	185.36400330	93.74168210	311.57092730	44.17254970
Sodano	296.28889104	168.46085064	163.53031204	84.21508998	185.36398544	93.74178108	311.57274583	44.16855990
Bowring	296.17200076	168.27390622	163.31491226	84.12543238	185.21503589	93.44304066	311.34236500	44.09598794
Thomas	296.26106211	168.44716174	163.51151977	84.21941181	185.36996481	93.72899331	311.53983414	44.19986759
Gauss-mid	296.28889098	168.46085054	163.53031142	84.21509009	185.36398990	93.74178708	311.57234455	44.17016132
Puissant	296.28889028	168.46085056	163.53031333	84.21444361	185.36398722	93.72245778	311.43992861	44.69781806
Andoyer	296.28826247	168.46098909	163.53041007	84.21517281	185.36399064	93.74172011	311.57098390	44.17248380
구(대원)	296.38542478	168.50870655	163.59694069	84.19540363	185.34075415	93.77243231	311.67014047	44.08156843
Haversine	296.38555556	168.50861111	163.59694444	84.19527778	185.34083333	93.77250000	311.67027778	44.08166667
구(항정선)	296.27395815	168.53922932	163.69345237	85.33076281	185.21183196	97.18236922	305.26302029	54.49021041

표 8. 해석방법에 따른 Rapp 표준 측지선의 전방 방위각

(단위: °)

경우	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
Karney	52.67716856	194.99972431	95.46690650	15.73986361	45.00008447	5.00474503	89.02550414
Vincenty	52.67703517	194.99972431	95.46690650	15.73986360	45.00008448	5.00474503	89.02550397
Pittman	52.67716855	194.99972431	95.46690650	15.73986360	45.00008448	5.00475168	89.02550410
HMR	52.67716836	194.99972431	95.46690650	15.73986361	45.00008447	5.00447625	89.02550411
Clark Best	52.67716833	194.99972444	95.46690639	15.73986361	45.00008444	5.00474500	89.02550417
Moritz	52.67697899	187.94717018	84.53309350	15.77203418	45.15123244	6.49094192	70.48781475
Bessel	52.67716855	194.99972431	95.46690650	15.74913654	45.08010646	6.46914827	90.36729491
Kivioja	52.67713428	194.99972428	95.46738256	NaN	NaN	NaN	NaN
Robbin	52.67761250	194.99998540	95.46316850	15.75507660	45.04679930	6.44831180	88.77695400
Sodano	52.67716849	194.99972429	95.46690662	15.73986363	45.00008411	5.00340698	89.64077001
Bowring	52.40378068	191.13447107	95.27588758	15.40345012	44.58124367	10.747206870	81.73651036
Thomas	52.71813363	195.01376365	95.43163151	15.78288345	45.09372650	4.56909089	89.02472801
Gauss-mid	52.67716855	194.99978752	95.47488571	14.35264935	46.83313722	2.893866740	87.15287707
Puissant	52.67719500	NaN	94.25469028	NaN	NaN	NaN	NaN
Andoyer	54.06247733	194.99997018	84.53681864	15.75504864	45.04679750	6.44831212	88.77687804
구(대원)	52.57350931	194.93490436	95.54772753	15.72418013	45.01990825	6.44786827	89.86650963
Haversine	52.57361111	194.93500000	95.54777778	15.72416667	45.02000000	6.44777778	89.86638889
구(항정선)	52.57356106	194.18460871	107.66556256	68.43610542	85.31717400	89.99334230	90.63857534

특히 그림 5 및 그림 7의 'R6' 측지선은 공통적으로 다른 측지선에 비해 과대편차를 보였는데 이는 'R6'의 측지선을 구성하는 두 측점의 위치가 '특이영역'에 가까이 위치하는 관계로($\phi_1=1^\circ, \lambda_1=0^\circ, \phi_2=1^\circ 1' 15.2''$, $\lambda_2=179^\circ 46' 17.8''$)

해법간의 특이영역 해석 알고리즘의 수준에 따른 편차로 사료된다.

최근 컴퓨터 기술의 발달과 컴퓨팅 언어의 다양화로 '측지 역 문제 해석방법' 간 신뢰 수준의 판별 기준은 '코

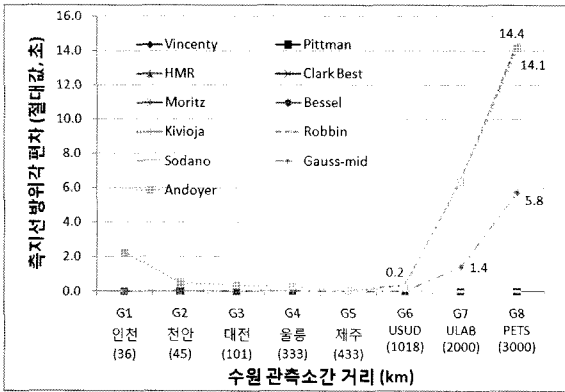


그림 6. GNSS 관측소간, 측지선 방위각 편차

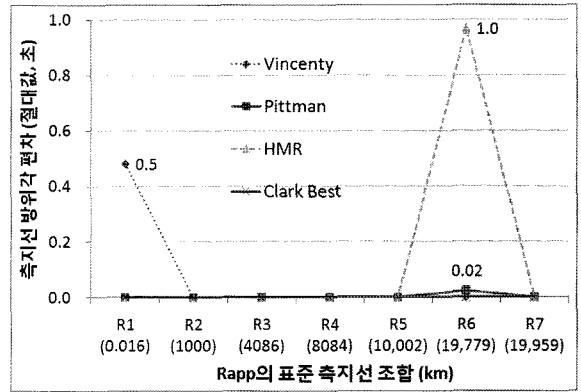


그림 7. Rapp 측지선의 방위각 편차

딩의 용이성', '순환계산 소요시간' 보다는 '거리와 방위각의 정확도 수준'으로 변화되었다. 따라서, 측지선의 '거리' 및 '방위각' 두 요소에 대한 허용정도를 각각 nm 및 10^3 수준으로 가정할 경우, 36~3,000km 범위의 측지선은 그림 4 및 그림 6의 편차분포, 측지선 거리 4,000~20,000km 경우는 그림 5 및 그림 7의 편차분포로부터 각각의 '허용수준'을 동시에 만족하는 해법을 적합한 해석법으로 선정할 수 있다.

4.3 특이 측지선의 거리 및 전방방위각

표 9, 표 10 및 표 11은 각각 Rapp 및 Bowring의 '특이 측지선' 12종(표 4 참고)에 대하여 Karney, 수정 Vincenty,

Bowring 특이해, HMR, Clarke's best, Haversine, Vincenty-2 및 Pittman 방법을 적용하고 산정한 거리 및 전방 방위각을 각각 정리한 것이다. 특히, 단순 구체로 해석할 경우와의 비교·검토를 위해 비교적 단순한 알고리즘을 갖는 Haversine 해석법을 선정하였다.

수정 Vincenty(Int'l 1924) 및 Bowring 특이해(Clarke 1866)는 참고문헌에서 발췌한 해석결과로 각각 Int'l 1924 및 Clarke 1866 타원체를 기준으로 한다. 'Vincenty-2' 해석결과는 저자가 '수정 Vincenty' 이론에 따라 특이 측지선 거동의 일부를 반영하여 산정한 것이다.

과거, 특이영역 측지선의 역 문제 해석은 지구타원체 상, 두 측점의 위치에 따른 특이상황(antipodal, equatorial,

표 9. 해석방법에 따른 Rapp 특이 측지선의 길이

(단위: m)

해법 \ 경우	A	B	C	D	E	F
Karney	20,003,921.584	19,995,466.963	19,993,676.685	19,999,780.478	19,982,767.366	19,991,586.027
수정 Vincenty (Int'l 1924)	20,004,566.723	19,996,147.417	19,994,364.607	20,000,433.963	19,991,583.833	20,000,237.243
HMR	19,947,750.173	19,995,466.963	19,960,648.831	19,988,248.639	19,951,723.333	19,948,948.622
Clarke's Best	19,947,724.275	19,869,881.539	19,896,324.832	19,969,810.427	19,916,376.664	19,911,121.455
Haversine	20,020,000.000	19,980,000.000	19,980,000.000	20,010,000.000	19,990,000.000	19,990,000.000
Vincenty-2	20,003,931.459	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
Pittman1	9,985,150.222	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN

표 10. 해석방법에 따른 Rapp 특이 측지선의 방위각

(단위: °)

해법 \ 경우	A	B	C	D	E	F
Karney	179.98023966	30.13998017	39.61394939	29.31402700	16.09049992	18.70407633
수정 Vincenty (Int'l 1924)	179.98032290	29.99999997	39.41439050	29.19751944	16.09049985	18.70407624
HMR	269.83544736	30.13998000	269.95324592	283.84100247	302.54056417	286.78106156
Clarke's Best	90.16464556	90.00000000	90.21342444	86.05980556	73.47730944	82.36878222
Haversine	131.75972222	90.00000000	90.08333333	78.76500000	46.17611111	64.36583333
Vincenty-2	2.891632650	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
Pittman	90.00000000	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN

표 11. 해석방법에 따른 Bowring 특이 측지선의 길이

(단위 : m)

해법 \ 경우	A	B	C	D	E	F
Karney	99,998.911	7,999,699.557	19,953,585.022	19,997,494.598	20,000,037.680	19,955,238.798
Bowring 특이해 (Clarke 1866)	100,000.000	7,999,748.876	19,953,434.020	19,997,409.660	19,999,925.020	19,955,095.850
HMR	99,998.911	7,999,699.554	19,954,047.818	19,974,311.357	19,997,883.611	19,957,147.071
Clark Best	99,998.911	7,999,699.554	19,953,585.022	19,932,702.121	19,980,334.254	19,950,503.003
Haversine	99,890.000	7,994,000.000	19,960,000.000	19,990,000.000	20,010,000.000	19,960,000.000
Vincenty-2	99,998.911	7,999,699.555	19,953,585.022	NaN	NaN	NaN
Pittman	2,586.557	7,999,716.336	19,954,031.264	NaN	NaN	NaN

near antipodal, near equatorial, poles, 동일 longitude, same meridian no pole, point near vertex 등)별로 보완 알고리즘을 적용하는 방식이었다. 최근 발표된 Charles Karney(2011)의 해석이론은 다양한 거리의 표준측지선 해석은 물론 특히, 대부분의 특이영역 상황에 위치한 측지선의 종합적 해석이 가능하여 Vincenty 해석이론의 대체 방법으로 관심이 모아지고 있다.

표 9 및 표 10의 수정 Vincenty(Int'l 1924) 중, A~D는 Vincenty(1975), E~F는 Rapp (1993)에 의한 해석결과이다.

그림 8은 표 9의 Karney 해석결과를 기준으로 한 거리편차, 그림 9는 표 10의 전방 방위각을 도시한 것으로 Karney의 해석과 수정 Vincenty의 해석결과간의 근접성을 확인할 수 있었다. 약간의 편차는 기준타원체의 상이함과 해석알고리즘의 정확성 수준에 기인된 것으로 사료된다. 표 10에서 Vincenty-2 및 Pittman 방법은 측지선 A 경우에 한하여 해석은 되었으나 방위각에서 큰 편차를 나타내었다. 특히, B~F 경우의 발산결과는 종점 위치에 따른 특이영역 내 · 인접 측지선의 면밀한 거동파악과 이를 반영한 알고리즘 보강의 필요성을 제시한 것으로 이 부분은 향후, 특이영역에 관한 심도 있는 보완 연구를 통해 반영할 계획이다. Clarke's best 및 HMR 해법 역시 전체 경우에 대해 수렴은 되었으나 거리 및 방위각에서 Karney의 해석결과와 큰 편차를 보여 특이영역에 대한 해석 알고리즘의 보완이 요망되는 것으로 판단되었다. 이와 같은 불규칙한 편차분포의 원인은 '특이영역' 내 측지선의 거동 분석의 중요성을 암시해 주는 결과로 사료된다. 특히, '특이영역'에 대한 Karney(2011)의 해석에 의하면 측지선을 구성하는 두 번째 측점이 측지포락선으로 구성된 astroid 내부에 있을 경우는 4개의 실근, astroid 외부에 있을 경우는 2개의 실근이 존재하게 된다. 따라서, '특이 측지선'의 해석을 위해 각 역 문제 해석방법이 채택하고 있는 보완 알고리즘에 따라 다양한 해석 결과가 산출될 수 있다고 사료되므로 향후, 좀 더 면밀한 연구가 요망된다.

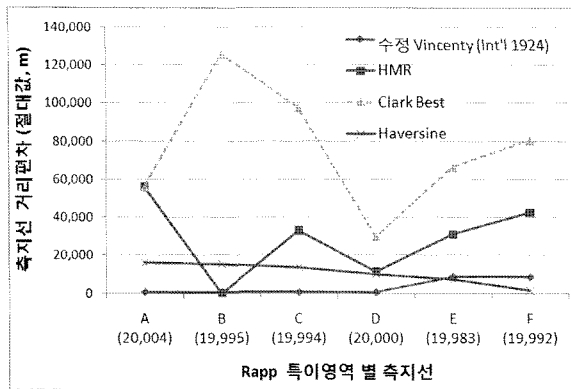


그림 8. Rapp 특이 측지선의 거리 편차

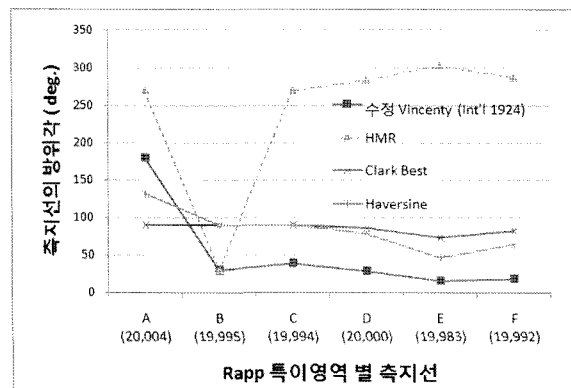


그림 9. Rapp 특이 측지선의 방위각 분포

그림 10은 각각 Bowring의 특이 측지선 분포 및 표 11에서 Karney의 해석결과를 기준으로 한 거리편차를 도시한 것이다. 표 11 및 그림 10에서 확인할 수 있듯이 Bowring의 특이 측지선 중 a, b 및 c의 경우는 Bowring 특이해, HMR, Clark best 및 Vincenty-2 방법의 해석결과가 매우 근접한 결과를 보였다. 그러나 d, e 및 f 특이 측지선의 경우, Vincenty-2와 Pittman 방법은 발산하였고 HMR 및 Clark best 방법들도 d, e의 경우에서 매우 큰 편차를 나타내어 이들 측지선 역시, 향후 면밀한 거동분석을 통한 알고리즘

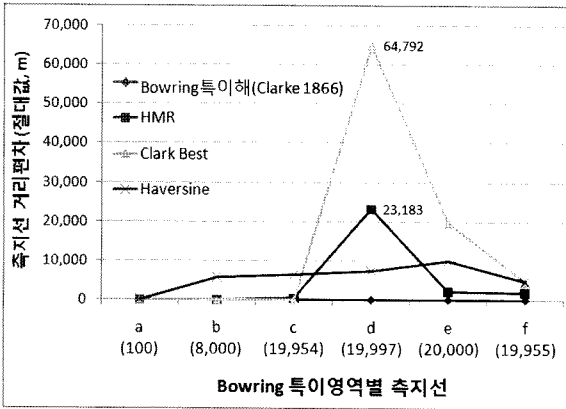


그림 10. Bowring 특이 측지선의 거리 편차

의 보완이 요망된다. Bowring 특이 측지선의 경우도 Karney의 해석결과와 가장 근접한 결과는 Bowring의 특이 해로 분석되었다. 전방방위각의 경우, Bowring(1983)의 연구보고서에 방위각이 제시되지 않은 관계로 비교는 할 수 없었다. 또한, 단순구체를 전제로 한 Haversine의 결과는 평균 약 5,740m 정도의 과대편차를 보였으나 HMR 및 Clark best 방법에 비해 일정한 편차분포를 나타내었다.

표 12는 표 4의 Karney에 의해 제안된 특이 측지선 ($\phi_1=30^\circ N, \lambda_1=0^\circ E, \phi_2=30^\circ S, \lambda_2=180^\circ E$)에 대한 해석결과를 정리한 것이다. 이 측지선은 정반대 측점(antipodal points)상황으로 측지선의 궤적이 자오선 상에 위치하고 전방 방위각은 타원체의 단축방향, 즉 극을 지나는 측지선 방향이므로 위 3가지(Karney, Clarke's best 및 HMR) 해석결과 중, Karney의 결과가 최적의 측지선이 된다.(Karney, 2011) 따라서, 특이상황에 있는 13종의 특이 측지선에 대한 측지 역문제의 해석결과를 비교·검토한 결과, Karney 해석법이 전반적으로 일관성 있고 신뢰성 높은 해법임을 알 수 있었다.

표 12. 해석방법에 따른 Karney 특이측지선의 거리 및 전방방위각

해법	역 문제 요소	측지선 거리(m)	전방방위각(° ' ")
Karney		20,003,931.459	00 00 00.000
Clarke's best		19,928,486.673	90 07 48.319
HMR		19,928,486.673	269 52 11.681

5. 결론

본 연구에서는 다양한 거리의 '표준 측지선' 및 '특이 측지선'에 대한 측지 역문제의 해석기법 별 정확도와 특

징을 비교·분석하였다. 연구결과,

첫째, 거리 100km 이하의 표준측지선의 경우, 17종의 역 문제 해석기법 모두 Karney 기법에 매우 근접한 결과를 보였다.

둘째, 표준측지선 500km까지의 역 문제 해석에서는 타원체를 전제로 한 순환해석기법, 8종에서 근사한 결과를 확인할 수 있었다. 약 4,000km~20,000km 이상의 중·장거리 표준측지선의 경우는 Vincenty, Pittaman, Helmert Modified Rainsford 및 Clark's best 기법 등이 Karney 기법과 근접한 결과를 나타내었다.

셋째, '특이측지선'의 역 문제 해석결과, Karney 기법은 수정 Vincenty 및 Bowring 특이해와 매우 근접한 결과를 나타내었다. 반면, Karney 이외의 방법들은 equatorial 및 antipodal 특성에 따라 다양한 편차를 보여 일관성 있는 특성은 확인할 수는 없었지만, 향후 특이측지선의 거동분석 및 알고리즘의 보강을 통해 그 적용성이 확대될 것으로 기대된다.

표준 측지선 및 특이영역에 위치한 측지선을 대상으로 지구구체 및 지구타원체 상, 두 측점간의 측지 역문제를 해석하고 해석기법 간 정확도를 비교·분석한 결과, 측지 역문제의 대표적 해법인 Vincenty 기법을 대체할 수 있는 차세대 측지 역문제의 해석법으로 Karney 해석법의 활용성이 기대된다.

감사의 글

본 논문은 인천대학교 2010년도 자체연구비 지원에 의하여 연구되었으며 인천대학교의 연구지원에 감사드립니다.

This work was supported by the University of Incheon Research Grant in 2010.

참고문헌

Bessel F.W. (1825), 'The calculation of longitude and latitude from geodesic measurements (1825)', *Astron. Nachr.* 331(8), pp. 852-861(2010); translated by C. F. F. Karney and R. E. Deakin. Preprint :arXiv : 0908.1824.

Bessel F.W. (1826), 'On the computation of geographical longitude and latitude from geodetic measurements', *Astronomical Notes*, Volume 4, Number 86, columns pp. 241-254.

Bomford G. (1980), 'Geodesy', 4th Ed., Oxford University Press, Oxford, U.K.

- Borre Kai(2001), 'Ellipsoidal Geometry and Conformal Mapping', March 2001.
- Bowring B.R. (1981), 'The Direct and Inverse Problems for Short Geodesic Lines on the Ellipsoid', *Surveying and Mapping*, 41, 2, pp. 135-141.
- Bowring B.R. (1983), 'The Geodesic Inverse Problem', *Bull. Geod.* 57, pp. 109-120.
- Bowring B.R. (1996), 'Total inverse solutions of the geodesic and great elliptic', *Survey Review*, 33 (261), pp. 461-476.
- Deakin R.E. and Hunter M.N. (2007), 'Geodesics on an ellipsoid - Pittman's Method'. Presented at the Spatial Sciences Institute Biennial International Conference.
- Fichot M. and Gerson M. (1937), 'La Zone Geodesique Antipode, in Annales Hydrographiques, 3^e sene', Tome Quinzieme, Service Hydrographique De Le Marine, Paris.
- Gupta R.M. (1972), 'A Comparative Study of Various direct and Inverse Foemulae for Lines up to 800km in Ellipsoidal Geodesy', M.S. thesis, The Ohio State University.
- Helmert F.R. (1964), 'Mathematical and Physical Theories of Higher Geodesy', Part 1, Aeronautical Chart and Information Center (St. Louis), Chaps. pp. 5-7.
- Hooijberg Maarten (1997), 'Practical Geodesy using computers', Springer verlag Berlin Heidelberg.
- Jank W. and Kivioja L.A. (1980), 'Solution of the direct and inverse problems on reference ellipsoids by point-by-point integration using programmable pocket calculators', *Surveying and Mapping*, XL(3), pp. 325-337.
- Jekeli Christopher (2006), 'Geometric Reference Systems in Geodesy', OSU.
- Karney Charles F. F. (2010), 'GeographicLib, version 1.7', <http://geographiclib.sf.net>.
- Karney Charles F. F. (2011), 'Geodesics on an ellipsoid of revolution', arXiv:1102.1215v1, [physics.geo-ph].
- Kivioja L.A. (1971), 'Computation of geodetic direct and indirect problems by computers accumulating increments from geodetic line elements.', *Bull.Geod.*, 99, pp. 55-63.
- Krakiwsky E.J. and Thomson D.B. (1974), 'Geodetic position computations', Lecture notes, No. 39, Dept. of Surveying and Engineering, Univ. of New Brunswick, Fredericton.
- Lambert W.D. (1942), 'The distance between two widely separated points on the surface of the earth', *Journal of the Washington Academy of Sciences*, Vol. 32, No. 5, pp. 125-130.
- Lewis E.A. (1963), 'Parametric Formulas for Geodesic Curves and Distances on a Slightly Oblate Earth', Air Force Cambridge Research Laboratories, Note No. 63-485, AD412501.
- Maxima (2009), 'A computer algebra system', version 5.20.1.
- Pittman, M.E.(1986), 'Precision direct and inverse solutions of the geodesic', *Surveying and Mapping*, Vol. 46, No. 1, pp. 47-54.
- Rainsford H.F. (1955), 'Long geodesics on Ellipsoid', *Bull. Geod.*, No.37, pp. 12-22.
- Rapp R.H. (1991), 'Geometric geodesy Part I', The Ohio State Univ. Rapp R.H. (1993), 'Geometric Geodesy Part II', OSU.
- Robbins A.R. (1962), 'Long lines on the spheroid.', *Surv. Rev.*, XVI(125), pp. 301-309.
- Saito T. (1970), 'The computation of long geodesics on the ellipsoid by non-series expanding procedure', *Bulletin Geodesique*, No. 98, pp. 341-374.
- Saito T. (1979), 'The computation of long geodesics on the ellipsoid through Gaussian quadrature', *Bulletin Geodesique*, Vol. 53, No. 2, pp. 165-177.
- Sjöberg Lars E. (2006), 'New solutions to the direct and indirect geodetic problems on the ellipsoid', *zfv*, 2006(1):36 pp. 1-5.
- Sodano E.M. (1965), 'General non-iterative solution of the inverse and direct geodetic problem', *Bull. Geod.*, No. 75.
- Thien G. (1967), 'A Solution to the Inverse Problem for Nearly-Antipodal Points on the Equator of the Ellipsoid of Revolution', M.S. thesis, The Ohio State University.
- Thomas C.M. and Featherstone W.E. (2005), 'Validation of Vincenty's Formulas for the Geodesic Using a New Fourth-Order Extension of Kivioja's Formula', *Journal of Surveying Engineering*, ASCE, pp. 20-26.
- Vermeille H. (2002), 'Direct transformation from geocentric coordinates to geodetic coordinates', *J. Geod.*, 76(9), pp. 451-454.
- Vincenty T. (1975a), 'Direct and Inverse Solutions of Geodesics on the Ellipsoid with Application of Nested Equations', *Survey Review* XXII, 176, pp. 88-93.
- Vincenty T. (1975b), 'Geodetic inverse solution between antipodal points', unpublished report, pp. 1-12.