

## 자력 변화율 텐서를 이용한 자기 쌍극자 위치 결정

임 형 래\*

한국지질자원연구원, 305-350, 대전 유성구 과학로 142

### Detection of a Magnetic Dipole by Means of Magnetic Gradient Tensor

Hyoungrea Rim\*

Korea Institute of Geoscience and Mineral Resources, Daejeon 305-350, Korea

**Abstract:** In this paper, I propose the algorithm that the location of a magnetic dipole can be detected from the magnetic gradient tensor. I induce the location vector of a vertically magnetized dipole from the magnetic gradient tensor. Deficit of magnetic moment of magnetic dipole makes the induced location information incomplete. However, if the observation of magnetic gradient tensor would be collected on more points, the algorithm is able to catch the location of the magnetic dipole by clustering the solution of the proposed algorithm. For example, I show that the synthetic case of borehole observation of magnetic gradient tensor can find the source location successively by picking common solution area.

**Keywords:** magnetic gradient tensor, magnetic dipole

**요 약:** 이 논문에서는 자력 변화율 텐서를 이용하여 자기 쌍극자의 위치 정보를 파악하는 알고리즘에 대하여 기술하였다. 수직으로 자화된 자기 쌍극자에 의한 자력 변화율 텐서에서 출발하여 자기 쌍극자의 위치 벡터를 유도하였다. 그러나 이 경우 자기 쌍극자의 모멘트에 대한 정보가 주어지지 않았으므로 자기 쌍극자의 위치 벡터가 불완전하게 유도된다. 이를 극복하기 위하여 여러 측정점에서 측정된 자력 변화율 텐서값이 있다고 가정하고 이를 이용하여 자동으로 자기 쌍극자의 위치를 찾아내는 알고리즘을 제안하였다. 시추공에서 자력 변화율 텐서가 측정되었다고 가정한 합성 모델 실험에서 자력 변화율 텐서와 자기 쌍극자 자동 탐지 알고리즘을 이용하여 자기 쌍극자의 위치를 정확하게 찾을 수 있음을 확인하였다.

**주요어:** 자력 변화율 텐서, 자기 쌍극자

## 서 론

최근 자력 탐사 장비의 발달로 손쉽게 자력 변화율 탐사를 수행하여 UXO 탐지나 고고학 분야에 적용되고 있다(Brawon II et al., 2004; Sanchez et al., 2005; 이희순 외, 2010). 자력 변화율 탐사 방법은 총자력이나 특정 성분의 자력만을 측정하는 탐사 방법에 비해 비약적으로 높은 분해능을 가지고 있으므로 얇은 심도의 이상체나 이상체들간의 거리가 짧은 경우에도 통상적인 자력 탐사 방법에 비해 더 정밀한 해석을 가능하게 해준다(Schmidt and Clark, 2006).

포텐셜 자료의 텐서 해석을 위한 이론 연구로는 Pedersen and Rasmussen(1990)이 포텐셜 텐서의 불변량들(invariants)을 유도하였고 이 불변량들의 지구 물리학적 해석을 이용하여 이상체의 차원과 위치에 대한 정보를 추출하였다. Beike and Pedersen(2010)은 포텐셜 텐서의 불변량들을 실제 항공 중력 변화율 탐사 자료 해석에 성공적으로 적용하였다. 그러나 포텐셜 텐서의 불변량 계산에 있어서는 변화율 텐서의 모든 성분을 알고 있을 때만 적용 가능하므로 장비의 제약상 모든 성분을 측정하지 못할 때는 적용이 불가능하다. 중력 변화율 텐서 해석에 비해 자력 변화율 텐서 해석은 자화 방향에 따른 영향으로 인해 측정 자료의 해석이 어렵다. Nelsen(1988)은 복잡한 자력 변화율 텐서를 비교적 간단히 해석하기 위하여 푸리에 변환을 통해서 이상체의 규모를 파악하

\*Corresponding author: rhr@kigam.re.kr  
Tel: +82-42-858-3133  
Fax: +82-42-868-3418

는 시도를 하였다.

이 논문에서는 자력 변화율 텐서 해석 방법의 하나로써 가장 간단한 형태인 자기 쌍극자 형태의 이상체를 가정하고 자력 변화율 텐서를 이용하여 자기 쌍극자의 위치를 찾는 방법을 고안하였다. 자력 변화율 탐사를 수행하면 5개의 독립적인 성분을 얻을 수 있는데 이들 성분을 조합하여 자기 쌍극자의 위치를 찾는 방법이다. 이 논문에서는 Rim and Li(2010)이 제안한 중력 변화율 텐서의 모든 성분을 다 사용하지 않고 최소한 3개의 성분만을 이용하여 중력 이상체의 위치를 찾는 방법을 바탕으로 자력 변화율 해석으로 확장하였다.

자력 이상체의 위치를 자동 결정하는 방법으로는 오일러 디컨볼루션(Euler deconvolution)이 널리 사용되고 있는데(Reid et al., 1990; Rim et al., 2007), 오일러 디컨볼루션은 자력 이상값이 이상체와 관측점과의 거리에 따라 감소되는 정도를 이상체의 모양에 따라 상수로 지정하는 오일러 방정식에 기초한다. 따라서 오일러 디컨볼루션에서는 자력 이상값을 있는 그대로 사용하는 것이 아니고 특정한 함수의 일부분으로 가정하고 이상체의 위치를 계산한다. 따라서 관측점들의 범위를 한정하는 창(window)의 크기, 어느 정도까지가 이상체의 위치라고 정하는 임계값(threshold), 이상체의 모양을 결정하는 상수(structure index) 등에 의하여 수 많은 가짜 해(spurious solution)을 만들어서 해석을 어렵게 하는 경향이 있다. 반면 이 논문에서 제안하는 방법은 현재까지는 단일 자기 쌍극자의 경우에 해당하지만 자력 변화율 텐서들을 조합하여 실제 자기 쌍극자의 위치를 찾을 수 있다.

### 자력 변화율 텐서와 위치 벡터 사이의 관계식 유도

자화 방향이 수직 방향인 자기 쌍극자(magnetic dipole)의 경우 자력 포텐셜은 식 (1)과 같이 주어진다(Blakely, 1996).

$$V(\vec{r}_p) = -M\hat{z} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r}_q - \vec{r}_p|} \quad (1)$$

여기서  $V$ 는 자력 포텐셜,  $M$ 은 자기 쌍극자의 모멘트,  $\hat{z}$ 는 수직방향 단위 벡터,  $\vec{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$ 는 측정점의 위치 벡터  $\vec{r}_q = (x_q, y_q, z_q)$ 는 자기 쌍극자의 위치 벡터이다.

임의의 방향으로 자화된 경우 자극화 변환(reduction to the pole, RTP)을 적용하여 수직 방향의 효과로 변환하면 같은 방법으로 유도할 수 있다.

자력 변화율 텐서  $\Gamma$ 는 자력 포텐셜(식 1)을 두 번 미분하여 얻어지고 이는 식 (2)와 같다.

$$\Gamma \equiv \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} = -\nabla\nabla V(\vec{r}_p) \quad (2)$$

여기서 예를 들어 x 방향의 y 방향 변화율은  $B_{xy}$ 이고 이것은 y 방향의 x 방향 변화율인  $B_{yx}$ 와 같다. 또한 포텐셜 이론에 의하면 대각 성분의 합은 항상 0이다(Blakely, 1996). 즉 자력 변화율 텐서의 특성은 대칭이고 대각 성분의 합이 0이므로 독립적인 성분의 개수는 5개이다.

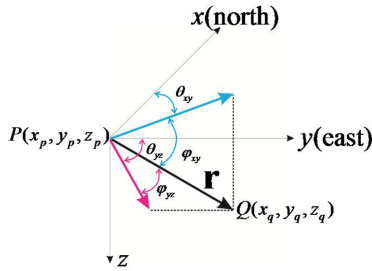
식 (2)에서 자력 포텐셜에 대한 이차 미분을 직접 적용하여 자력 변화율 텐서를 구하면 식 (3)과 같다.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} = M \frac{3}{R^7} \begin{bmatrix} z(-R^2 + 5x^2) & 5xyz & x(-R^2 + 5z^2) \\ 5xyz & z(-R^2 + 5y^2) & y(-R^2 + 5z^2) \\ x(-R^2 + 5z^2) & y(-R^2 + 5z^2) & z(-3R^2 + 5z^2) \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 식을 간단히 보이기 위하여 각각  $x=(x_q-x_p)$ ,  $y=(y_q-y_p)$ ,  $z=(z_q-z_p)$ 로 설정하였고,  $R = \sqrt{(x_q-x_p)^2 + (y_q-y_p)^2 + (z_q-z_p)^2}$ 은 측정점과 자기 쌍극자 사이의 거리이다.

측정점과 자기 쌍극자 사이의 벡터에 해당하는  $\mathbf{r}=(x, y, z)$ 를 구하기 위해서는 미지수가 3개이므로 자력 변화율 텐서 성분들 중 최소한 서로 독립적인 3개의 성분으로부터 유도할 수 있다. 이 논문에서는 예를 들어  $B_{xz}$ ,  $B_{yz}$  그리고  $B_{zz}$ 를 이용하는 경우에 대하여 유도하였는데 다른 독립적인 3성분으로도 동일한 방법으로 유도가 가능하다. 먼저 유도 과정을 위하여  $x^2+y^2=\varepsilon z^2$ 를 가정한다. 여기서  $\varepsilon$ 은 선택된 텐서의 성분으로부터 얻어질 수 있는 값이고 자세한 유도 과정은 부록 A에 수록하였다.

먼저 Fig. 1에서 보듯이 측정점과 자기 쌍극자 사이의 벡터  $\mathbf{r}$ 을 각각의 평면에 투사한 벡터와 각 축과의 각을 구하면 식 (4)와 같다.



**Fig. 1.** Schematic relation between  $\mathbf{r}$ ,  $\theta$  and  $\varphi$ .  $\mathbf{r}$  is the positioning vector between observation point  $P(x_p, y_p, z_p)$  and location of magnetic dipole  $Q(x_q, y_q, z_q)$ .  $\theta_{xy}$  is the angle between  $x$  axis and projected positioning vector on  $x$ - $y$  plane and is the angle between  $y$  axis and projected positioning vector on  $y$ - $z$  plane.  $\varphi_{xy}$  and  $\varphi_{yz}$  are the projection angles of positioning vector on the  $x$ - $y$  plane and  $y$ - $z$  plane, respectively.

$$\theta_{xy} = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{B_{xz}}{B_{yz}}\right)$$

$$\theta_{yz} = \tan^{-1}\left(\frac{y}{z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2-3\varepsilon}{4-\varepsilon} \frac{B_{yz}}{B_{zz}}\right)$$

$$\theta_{xz} = \tan^{-1}\left(\frac{z}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4-\varepsilon}{2-3\varepsilon} \frac{B_{zz}}{B_{xz}}\right)$$

예를 들어  $\theta_{xy}$ 는 벡터  $\mathbf{r}$ 을  $x$ - $y$  평면에 투사한 벡터와  $x$  축과의 사잇각에 해당한다.

그리고 측정점과 자기 쌍극자 사이의 거리는 측정점과 자기 쌍극자 사이의 벡터  $\mathbf{r}$ 의 크기와 같고 이는 식 (5)와 같다. 식 (5)의 자세한 유도 과정은 부록 B에 첨부하였다.

$$|\mathbf{r}| = \left\{ (3M)^2 \frac{(2-3\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^3} \frac{1}{B_{zz}} \right\}^{1/8} \quad (5)$$

식 (4)와 (5)를 이용하여 측정점과 자기 쌍극자 사이의 벡터  $\mathbf{r}$ 을 구하면 식 (6)과 같고 이에 대한 자세한 유도과정은 부록 C에 기술하였다.

$$\mathbf{r} = \zeta |\mathbf{r}| \zeta (\cos\theta_{yz} \cos\theta_{xy}, \cos\theta_{yz} \sin\theta_{xy}, \sin\theta_{yz} \sin\theta_{xy}) \quad (6)$$

여기서  $\zeta = (\cos^2\theta_{xy} \cos^2\theta_{yz} + \sin^2\theta_{xy})^{-1/2}$ 이다.

식 (5)에서 자기 모멘트  $M$ 의 정보를 알지 못함으로 자기 쌍극자의 거리가 불완전하게 유도되었으므로 식 (6)을 알 수 있는 정보로만 정리하면 근사식 (7)과 같다.

$$\mathbf{r} \propto \zeta (\cos\theta_{yz} \cos\theta_{xy}, \cos\theta_{yz} \sin\theta_{xy}, \sin\theta_{yz} \sin\theta_{xy}) \quad (7)$$

## 자력 변화를 텐서를 이용한 이상체 위치 자동 결정 방법

측정점과 자기 쌍극자 사이의 거리(식 5)에서 자력 모멘트  $M$ 에 대한 정보가 주어지지 않았기 때문에 정확한 거리를 알 수 없다. 따라서 측정점과 자기 쌍극자 사이의 벡터를 각 평면에 투사한 벡터와 각 축과의 사잇각들(식 4)만을 이용하여 이상체의 위치를 자동 결정하는 알고리즘을 고안하였다.

1. 먼저 주어진 자기 쌍극자의 위치를 탐색할 공간을 격자화하여 검색할 격자점들( $x_k, y_k, z_k$ )을 만든다. 그리고 자기 쌍극자 위치 자동 결정에 사용할 자력 변화율 텐서 측정점들( $x_p, y_p, z_p$ )이 포함되도록 적당한 창(창의 크기를 설정한다. 이때 창(창의 크기는 최소한 측정점이 2점 이상이 포함되도록 설정한다).
2. 주어진 창 내에 있는 측정점( $x_p, y_p, z_p$ )들에서 식 (7)을 이용하여 식 (8)과 같이 방향 코사인( $c_1, c_2, c_3$ )을 구한다.

$$(c_1, c_2, c_3) = \zeta (\cos\theta_{yz} \cos\theta_{xy}, \cos\theta_{yz} \sin\theta_{xy}, \sin\theta_{yz} \sin\theta_{xy}) \quad (8)$$

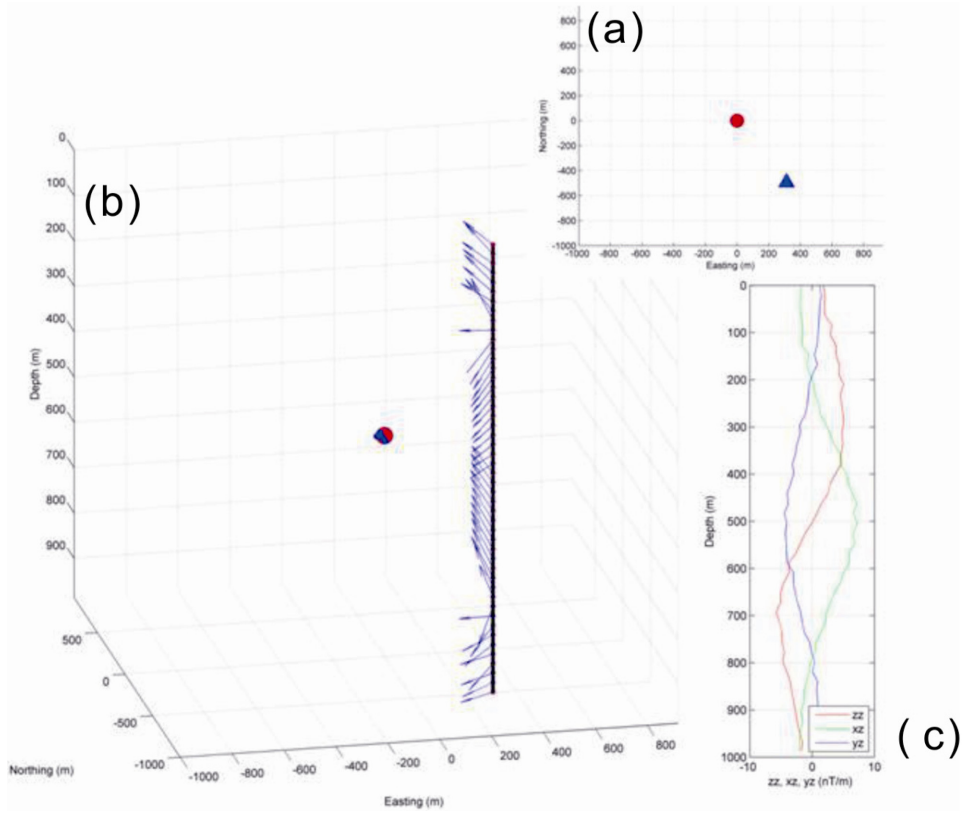
3. 검색하고자 하는 격자화된( $x_k, y_k, z_k$ )점이 식 (9)를 만족하면 그 격자점을 자기 쌍극자가 존재하는 위치로 선택한다. 여기서  $\tau$ 는 주어진 격자점과  $\tau$  이내에서 식 (9)를 만족하도록 설정하는 변수이다. 자기 쌍극자가 정확히 격자점에 위치하는 것이 아니므로 주어진 격자점과 일정 허용한 거리 내에서 식 (9)를 만족하면 해를 선택할 수 있게 만드는 거리가 된다.

$$(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - \tau^2) \geq 0 \quad (9)$$

여기서  $(c_1, c_2, c_3) = (x_p - x_k, y_p - y_k, z_p - z_k)$ 이다.

4. 모든 측정점에서 대하여 창을 이동해 가면서 1에서 3까지의 과정을 반복한 후 선택된 격자점들이 모이는 구간을 자기 쌍극자가 존재하는 영역으로 선택한다.

자기 쌍극자의 모멘트를 알 수 없기 때문에 자력 변화율 텐서를 이용하여 자기 쌍극자의 위치를 결정하기 위해서는 각 측정점들에서 상기 알고리즘을 이용하여 선택된 점들이 수렴하는 구간을 선택한다. 여기서 측정점들을 포함하는 창(창의 크기를 설정하는 문제는 측정점들의 분포 양상을 보고 결정한다. 또한



**Fig. 2.** Locating a magnetic dipole using magnetic gradient tensor. (a) In upper panel, the red circle and blue triangle represented the location of dipole source and observation borehole, respectively. (b) In main panel, the algorithm proposed in the text showed the perfect match between the solutions (blue dots) and real magnetic dipole location (red solid circle) even though the magnetic tensor had a white noise. The blue arrows which were calculated by directional cosines on the observation borehole pointed the location of magnetic dipole. (c) In right panel,  $B_{xz}$ ,  $B_{yz}$  and  $B_{zz}$  are shown as three independent components of magnetic gradient in case calculated on the borehole observation points. Each component has 5% Gaussian noise.

식 (9)를 만족시키기 위해서 주어진 격자점과 실제 자기 쌍극자와 거리 허용치에 해당하는 는 격자점들의 간격에 따라서 설정할 수 있다.

### 모델 실험

Fig. 2는 자력 변화율 텐서를 이용한 자기 쌍극자 위치 자동 탐지 방법의 결과를 보여준다. 이 알고리즘의 검증은 위하여 시추공에서 자력 변화율 텐서 측정이 이루어졌다고 가정하고 서로 독립인 세 성분  $B_{xz}$ ,  $B_{yz}$ , 그리고  $B_{zz}$ 를 이용하였다. Fig. 2c는 시추공에서 계산한 자력 변화율 텐서의 세 성분 값을 보여준다. 각 성분에 가우시안(Gaussian) 잡음을 5% 섞어서 모델링하였다. Fig. 2a에서 보듯이 중앙에 자기 쌍극자(붉은색 원)가 위치하고 측정 시추공(푸른색 삼각형)

은 동남쪽에 위치한다. 각 측정점에서  $\theta_{xz}$ 와  $\theta_{yz}$ 를 구하고 식 (7)을 계산한 방향 코사인은 Fig. 2b안에서 시추공 측정점 위에 푸른 색 화살표로 표현하였다. 방향 코사인으로 그려진 푸른 색 화살표의 일부는 실제 자기 쌍극자가 존재하는 방향과 다른 곳을 지시하고 있는데 이는 자기 쌍극자와의 거리가 멀어지므로 작은 변화율 값으로 측정되어 잡음에 더 많은 영향을 받은 결과이다. 모든 자력 변화율 텐서 자료의 측정점에 대하여 각 창마다 해를 구하고 그 해들의 공통적으로 수렴한 해를 푸른 색 점으로 표현하였다(Fig 2b). 모델 실험에서 구한 자기 쌍극자의 위치(푸른색 점)는 주어진 실제 자기 쌍극자의 위치(붉은 색 원)와 매우 잘 일치함을 볼 수 있다. 이때 창의 크기와 해를 선택하는 기준이 되는 거리인  $\tau$ 를 적절히 설정해야 하는데 이 부분은 더 깊은 연구가 필요하다.

## 결론 및 토의

이 논문은 자력 변화율 텐서를 이용하여 자기 쌍극자의 위치를 찾는 방법에 관한 내용이다. 이를 위하여 수직 방향으로 자화된 자기 쌍극자에 대하여 자력 변화율 텐서 성분들과 자기 쌍극자의 위치 벡터에 대한 관계식을 유도하였다. 그러나 원론적으로 자기 쌍극자의 모멘트에 대한 정보가 없으므로 완벽한 형태의 자기 쌍극자를 지시하는 위치 벡터를 유도할 수 없다. 이것을 극복하기 위하여 여러 점에서 자기 변화율 텐서 성분들이 얻어졌다고 가정하고 구해진 해들이 수렴하는 영역을 자동 선택하는 알고리즘을 제안하였다. 시추공에서 자력 변화율 탐사가 수행되었다고 가정한 모델 시험에서 자력 변화율 텐서를 이용한 방법으로 자기 쌍극자의 위치를 찾을 수 있음을 확인하였다.

이 연구는 자기 쌍극자는 수직 방향으로 자화되었다는 가정에서 출발하였다. 일반적으로 지하 이상체는 지자기 방향으로 자화되었다고 가정하고 유도 자기만을 이용하는 경우가 많으므로 자극화 변환을 수행한 후에 이 연구에서 제안한 방법을 사용하면 자력 변화율 탐사 방법으로 자기 쌍극자의 위치를 파악할 수 있을 것이다. 또한 이 방법의 한계는 이상체의 반응이 자기 쌍극자로 가정할 수 있을 때만 적용 가능하다는 점이다. 이를 위해서는 측정점의 위치가 이상체로부터 충분히 떨어져 있어서 이상체가 자기 쌍극자로 근사할 수 있을 정도가 되어야 한다.

앞으로 실제 자력 변화율 텐서 측정 자료에 적용하여 이 방법의 효용성을 검증할 필요가 남았다.

## 사 사

이 논문은 한국지질자원연구원의 지식경제부 출연 사업인 “지구물리이상도 작성연구”의 일환으로 수행된 것입니다.

## 참고문헌

- 이희순, 임형래, 정호준, 정현기, 양준모, 2010, 강관말뚝 탐지를 위한 시추공 3성분 자기탐사. 한국지구과학회지, 31, 673-680.
- Beike, M. and Pedersen, L.B., 2010, Eigenvector analysis of gravity gradient tensor to locate geologic bodies. *Geophysics*, 75, 137-149.
- Blakely, R.J., 1996, *Potential theory in gravity and magnetic applications*. Cambridge university press, Cambridge, UK, 441 p.
- Brawon II, P.J., Bracken, R.E., and Smith, D.V., 2004, A case study of magnetic gradient tensor invariants applied to the UXO problem. *Society of Exploration Geophysics Expanded Abstracts*, 23, 794-797.
- Nelsen, J.B., 1988, Calculation of the magnetic gradient tensor from total field gradient measurements and its application to geophysical interpretation. *Geophysics*, 53, 957-966.
- Pedersen, L.B. and Rasmussen, T.M., 1990, The gradient tensor of potential field anomalies: Some implications on data collection and data processing of maps. *Geophysics*, 55, 1588-1566.
- Reid, A.B., Allsop, J.M., Granser, H., Millett, A.J., and Somerton, I.W., 1990, Magnetic interpretation in three dimensions using Euler deconvolution. *Geophysics*, 55, 80-91.
- Rim, H., Park, Y-S., Lim, M., Koo, S., and Kwon, B.D., 2007, 3D gravity inversion with Euler deconvolution as a priori information. *Jigu-Muli-wa-Mulli-Tamsa*, 10, 44-49.
- Rim, H. and Li, Y., 2010, Single-borehole imaging using gravity gradiometer data. *Society of Exploration Geophysics Expanded Abstracts*, 29, 1137-1141.
- Sanchez, V., Sinex, D., Li, Y., Nabighian, M., Wright, D., and von Smith, D., 2005, Processing and inversion of magnetic gradient tensor data for UXO applications. *Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems*, 18, 1192-1201.
- Schmidt, P.W. and Clark, D.A., 2006, The magnetic gradient tensor: Its properties and uses in source characterization. *The Leading Edge*, 25, 75-78.

2011년 7월 2일 접수

2011년 8월 4일 수정원고 접수

2011년 8월 18일 채택

부록 A:  $x^2+y^2 = \varepsilon z^2$ 에서  $\varepsilon$  유도

$x^2+y^2 = \varepsilon z^2$ 의 관계식에서 자력 변화율 텐서의 독립된 3개의 성분인  $B_{xz}$ ,  $B_{yz}$ , 그리고  $B_{zz}$ 을 이용하여  $\varepsilon$ 을 유도하는 과정이다. 먼저 식 (A-1)과 같이  $B_{xz}$ ,  $B_{yz}$ , 그리고  $B_{zz}$ 를 이용하여 새로운 변수인  $\Omega_z$ 를 정의한다.

$$\Omega_z = \frac{B_{xz}^2 + B_{yz}^2}{B_{zz}^2} \quad (\text{A-1})$$

식 (A-1)에 자력 변화율 텐서 성분인  $B_{xz}$ ,  $B_{yz}$ , 그리고  $B_{zz}$ 값을 넣고,  $x^2+y^2 = \varepsilon z^2$ 인 관계식을 이용하여 정리하면 식 (A-2)와 같다.

$$\Omega_z = \frac{\varepsilon(4-\varepsilon)^2}{(2-3\varepsilon)^2} \quad (\text{A-2})$$

식 (A-2)를  $\varepsilon$ 의 다항식으로 전개하면 식 (A-3)과 같다.

$$\varepsilon^3 + a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c = 0 \quad (\text{A-3})$$

여기서

$$\begin{aligned} a &= -9\Omega_z - 8 \\ b &= 12\Omega_z + 16 \quad \text{이다.} \\ c &= -4\Omega_z \end{aligned}$$

$\varepsilon$ 에 대한 3차 다항식 (A-3)의 일반 해를 구하면 식 (A-4)와 같이  $\varepsilon$ 을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{a}{3} + \eta^{1/3} - \beta\eta^{-1/3} \\ \varepsilon_2 &= -\frac{a}{3} - \frac{1}{2}(\eta^{1/3} - \beta\eta^{-1/3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}i(\eta^{1/3} + \beta\eta^{-1/3}) \quad (\text{A-4}) \\ \varepsilon_3 &= -\frac{a}{3} - \frac{1}{2}(\eta^{1/3} - \beta\eta^{-1/3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(\eta^{1/3} + \beta\eta^{-1/3}) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{b}{3} - \frac{a^2}{9} \\ \eta &= \frac{ab}{6} - \frac{c}{2} + \left( \beta^3 + \left( \frac{a^3}{27} - \frac{ab}{6} + \frac{c}{2} \right)^2 \right)^{1/2} - \frac{a^3}{27} \quad \text{이다.} \end{aligned}$$

세 개의 해가 얻어지나  $\varepsilon$ 이 양의 실수라는 조건을 고려하면 적절한 해를 선택할 수 있다.

부록 B: 측정점과 자기 쌍극자 사이 거리  $|\mathbf{r}|$  유도

자력 변화율 텐서 성분 중 하나인  $B_{zz}$ 로부터 식 (B-1)을 얻을 수 있다.

$$B_{zz}^2 = (3M)^2 \frac{z^2}{R^{14}} (-3R^2 + 5z^2)^2 \quad (\text{B-1})$$

식 (B-1)에  $x^2+y^2 = \varepsilon z^2$ 을 대입하고  $R$ 을 소거하여 정리하면 식 (B-2)와 같다.

$$B_{zz}^2 = (3M)^2 \frac{(2-3\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^7} \frac{1}{z^8} \quad (\text{B-2})$$

식 (B-2)에서  $z^2$ 를 구하면 식 (B-3)과 같다.

$$z^2 = \left\{ (3M)^2 \frac{(2-3\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^7} \frac{1}{B_{zz}^2} \right\}^{1/4} \quad (\text{B-3})$$

따라서 측정점과 자기 쌍극자 사이 거리  $|\mathbf{r}|$ 은 식 (B-4)와 같이 유도된다.

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{(1+\varepsilon)z^2} = \left\{ (3M)^2 \frac{(2-3\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^3} \frac{1}{B_{zz}^2} \right\}^{1/8} \quad (\text{B-4})$$

그러나 식 (B-4)에서 자기 모멘트  $M$ 에 대한 정보가 없으므로 측정점과 자기 쌍극자의 거리는 자기 모멘트의 비례하는 정도만을 알 수 있다.

### 부록 C: $\theta_{xy}$ 와 $\theta_{yz}$ 를 이용하여 식 (7) 유도

벡터  $\mathbf{r}$ 을 x-y 평면에 투사한 후 x 축과의 사잇각인  $\theta_{xy}$ 와 벡터  $\mathbf{r}$ 과 x-y 평면과의 사잇각인  $\phi_{xy}$ 을 이용하여 기술하면 식 (C-1)과 같다(Fig. 1 참조).

$$\mathbf{r} = |\mathbf{r}| (\cos\phi_{xy} \cos\theta_{xy}, \cos\phi_{xy} \sin\theta_{xy}, \sin\phi_{xy}) \quad (C-1)$$

마찬가지로 벡터  $\mathbf{r}$ 을 y-z 평면에 투사한 후 y 축과의 사잇각인  $\theta_{yz}$ 와 벡터  $\mathbf{r}$ 과 y-z 평면과의 사잇각인  $\phi_{yz}$ 을 이용하여 기술하면 식 (C-2)과 같다.

$$\mathbf{r} = |\mathbf{r}| (\sin\phi_{yz}, \cos\theta_{yz} \cos\phi_{yz}, \sin\theta_{yz} \cos\phi_{yz}) \quad (C-2)$$

식 (C-1)과 (C-2)는 동일한 벡터  $\mathbf{r}$ 을 표현하고 있으므로 각 성분 별로 비교하여 미지 변수인  $\phi_{xy}$ 와  $\phi_{yz}$ 를 소거하고 자기 변화율 텐서 성분으로부터 구한

$\theta_{xy}$ 와  $\theta_{yz}$ 만으로 표현하면 식 (C-3)을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{r} = \zeta |\mathbf{r}| (\cos\theta_{yz} \cos\theta_{xy}, \cos\theta_{yz} \sin\theta_{xy}, \sin\theta_{yz} \sin\theta_{xy}) \quad (C-3)$$

여기서  $\zeta = (\cos^2\theta_{xy} \cos^2\theta_{yz} + \sin^2\theta_{xy})^{-1/2}$ 이다.

식 (5)에서 보듯이 자기 모멘트에 대한 정보의 부재로 인하여 정확한 거리에 대한 정보를 모르기 때문에 식 (C-3)은 근사식 (C-4)와 같이 표현되어야 한다.

$$\mathbf{r} \propto \zeta (\cos\theta_{yz} \cos\theta_{xy}, \cos\theta_{yz} \sin\theta_{xy}, \sin\theta_{yz} \sin\theta_{xy}) \quad (C-4)$$