

## 금융시계열 분석을 위한 다변량-GARCH 모형에서 비대칭-CCC의 도입 및 응용

박란희<sup>1</sup> · 최문선<sup>2</sup> · 황선영<sup>3</sup>

<sup>1</sup>숙명여자대학교 통계학과, <sup>2</sup>숙명여자대학교 통계학과, <sup>3</sup>숙명여자대학교 통계학과

(2011년 9월 접수, 2011년 10월 채택)

---

### 요약

다변량-GARCH 분야에서 비대칭모형에 대한 연구는 상대적으로 미진하다 (McAleer 등, 2009). 본 논문에서는 다변량-GARCH 시계열에서 비대칭 모형과 상수 조건부 상관모형(CCC)을 도입하여 모델링하는 방법론에 대해 연구하고 있다. 다변량 비대칭 변동성 모형 적합 방법을 실용적으로 소개하고 있으며 이를 이용하여 국내 다변량 시계열 분석을 상세히 예시하였다.

주요용어: 다변량-GARCH, 비대칭 변동성, 상수 조건부 상관(CCC).

---

### 1. 서론

시계열 자료 중에서 특별히 금융 시계열은 잘 알려진 바와 같이 몇 가지 특징적인 성질들을 나타낸다. 주식 수익률의 경우, 급첨(leptokurtic/heavy-tailed) 분포를 따르고 변동성 집중(volatility clustering)과 변동성의 비대칭 현상이 나타난다고 알려져 있다. 변동성의 비대칭성이란 좋은 뉴스(good news)와 나쁜 뉴스(bad news)가 주가 변동에 미치는 영향의 크기가 서로 다를 수 있다. 특히 나쁜 뉴스에 의한 변동성이 좋은 뉴스에 의한 변동성보다 더 큰 경우 이를 레버리지 효과(leverage effect)라 한다 (Black, 1976). Nelson (1991)이 제안한 EGARCH(exponential GARCH) 모형, Glosten 등 (1993)의 GJR 모형, Zakoian (1994)의 TGARCH(threshold GARCH) 모형 등은 변동성의 비대칭성을 분석하기 위한 모형들이다. 이 외에도 Sentana (1995)이 소개한 GQARCH(generalized quadratic ARCH) 모형, Storti와 Vitale (2003)의 BL-GARCH(bilinear GARCH) 모형 등이 있다. Storti와 Vitale (2003)은 NASDAQ 자료를 이용하여 여러 비대칭 단변량-GARCH 모형들을 비교하였으며, 국내 주가 자료를 이용한 비대칭 단변량-GARCH 모형의 비교는 박진아 등 (2011)이 수행한 바 있다.

다변량-GARCH에서 비대칭성을 고려한 모형의 개발은 아직 많이 이루어지지 않은 상태이다. 다변량-GARCH 모형에 대한 연구 초반에는 Bollerslev 등 (1988)의 DVEC(diagonal VEC) 모형, Engle와 Kroner (1995)의 BEKK 모형이 제시되어 분석에 널리 사용되었다. 하지만 이 모형들은 분석하고자 하는 수익률의 개수가 늘어남에 따라 추정해야 하는 모수의 수가 매우 많아지고 추정된 계수들에 대한 의미 해석이 쉽지 않다는 단점을 가지고 있다. 이를 해결하기 위해 모형을 단순화시키거나 시계열의 차원을 축소시키는 방법을 고려할 수 있다. Bollerslev (1990)의 CCC(constant conditional correlation) 모

<sup>3</sup>교신저자: (140-742) 서울특별시 용산구 청파로47길 100, 숙명여자대학교 통계학과, 교수.

E-mail: shwang@sm.ac.kr

형을 비롯하여 Tse와 Tsui (2002)의 DCC(dynamic conditional correlation) 모형과 Engle (2002)의 DCC 모형 등은 기존 모형의 단순화를 통해 모수의 수를 줄일 수 있었으며, Tsay (2010)는 인자분석을 통해 시계열의 차원을 줄인 후 다변량-GARCH를 적용하는 과정을 소개하였다. 국내 자료를 이용한 시계열 차원 축소 연구로는 송유진 등 (2008), 황선영 등 (2009), 이대수와 송성주 (2011)가 있다. 앞서 언급된 다변량-GARCH 모형들은 모두 오차항의 부호에 관계없이 동일한 조건부 분산을 갖도록 한다. 다변량-GARCH에서 비대칭 모형에 관한 연구로는 McAleer 등 (2009)이 있다. McAleer 등 (2009)은 다변량-GJR 모형을 다변량 형태로 확장하여 표현하였으며, 이에 대한 이론적 결과들을 유도하였다.

본 논문에서는 비대칭 다변량-GARCH 모형에 대한 연구를 수행하였다. CCC 모형과 DCC 모형에서는 조건부 분산과 조건부 상관계수를 서로 독립적으로 추정하며, 본래의 CCC/DCC 모형에서는 조건부 분산을 일반 GARCH 모형으로 설정한다. 그러나 각 수익률의 변동성이 비대칭성을 가지고 있다면 조건부 분산 모형으로 비대칭 GARCH 모형을 적합시키는 것이 알맞을 것이다. 또한 수익률간의 상관 관계는 시간에 따라 계속 변하겠지만 그 변화의 정도가 크지 않다면 모수의 수가 더 적은 CCC 모형을 선택하는 것이 더 바람직할 것이다. 2장에서는 비대칭 단변량 모형들을 간단하게 소개하고 3장에서는 다변량-GARCH 모형에 대해서 살펴본다. 4장에서는 비대칭성을 보이는 국내 주가자료에 비대칭 GARCH-CCC 모형을 적합시킨 후, GARCH-CCC 모형을 적합시킨 결과와 비교하고자 한다.

## 2. 비대칭 단변량-GARCH 모형

GARCH( $p, q$ ) 모형의 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_t &= \sqrt{h_t} \epsilon_t, \\ a_t | F_{t-1} &\sim N(0, h_t), \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}, \end{aligned}$$

여기서  $\{\epsilon_t\}$ 는 평균이 0이고 분산이 1인 *i.i.d.*한 분포를 따르는 확률변수이다. 또한,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ),  $\beta_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ )이며,  $F_{t-1}$ 는  $(t-1)$ 시점까지의 정보를 의미한다. GARCH(1, 1)모형은 다음과 같다.

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}.$$

GARCH(1, 1) 모형에서는 오차항  $a_{t-1}$ 의 부호에 관계없이 동일한  $h_t$  값을 갖게됨을 알 수 있다. 변동성의 비대칭성을 고려한 모형으로는 EGARCH 모형과 GJR 모형, TGARCH 모형 등이 있다. 이에 대한 내용은 Tsay (2010)을 참고하여 정리하였다.

### 2.1. EGARCH(exponential GARCH)

GARCH 모형의 경우 조건부 분산을 양수로 만들기 위해 모수에 조건을 두는데 EGARCH 모형은 이러한 제약을 완화시킨 모형이다. 본 논문에서 사례분석 시 사용한 통계 프로그램인 S-Plus에서 사용하는 EGARCH( $p, q$ ) 모형은 다음과 같다.

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \frac{|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i}}{h_{t-i}} + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(h_{t-j}). \quad (2.1)$$

식 (2.1)에서 우변의 두 번째 항은  $a_{t-i}$ 가 양수인 경우  $\alpha_i(1 + \gamma_i)|\epsilon_t|$ 가 되고,  $a_{t-i}$ 가 음수이면  $\alpha_i(1 - \gamma_i)|\epsilon_t|$ 가 된다. 즉, 과거 수익률의 부호가 반영되어 현재의 로그 변동성의 값이 결정된다. 추정된  $\gamma_i$  값은 음수인 경우 레버리지 효과가 존재한다고 볼 수 있다. EGARCH(1, 1)의 모형은 다음과 같다.

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{|a_{t-1}| + \gamma_1 a_{t-1}}{h_{t-1}} + \beta_1 \ln(h_{t-1}). \quad (2.2)$$

### 2.2. TGARCH(threshold GARCH)

TGARCH( $p, q$ ) 모형의 조건부 분산은 다음과 같다.

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left[ \alpha_{i1} (a_{t-i}^+)^2 + \alpha_{i2} (a_{t-i}^-)^2 \right] + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}, \quad (2.3)$$

여기서 모수는  $\beta_j > 0, \alpha_0 > 0, \alpha_{i1} \geq 0, \alpha_{i2} \geq 0$  조건을 만족하며, 오차항  $a_t$ 는 다음을 만족한다.

$$a_t^+ = \begin{cases} a_t, & \text{if } a_t > 0, \\ 0, & \text{if } a_t \leq 0. \end{cases} \quad a_t^- = \begin{cases} a_t, & \text{if } a_t \leq 0, \\ 0, & \text{if } a_t > 0. \end{cases}$$

TGARCH 모형에서는 오차항의 부호에 따라 좋은 뉴스( $a_{t-1} > 0$ ) 부분과 나쁜 뉴스( $a_{t-1} < 0$ ) 부분으로 나눈 후 각각의 모수 크기를 따로 고려하고 있다. 식 (2.3)에서  $\alpha_{i1} < \alpha_{i2}$ 인 경우 레버리지 효과를 나타낸다고 볼 수 있다. TGARCH(1, 1) 모형은 다음과 같다.

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_{11} (a_{t-1}^+)^2 + \alpha_{12} (a_{t-1}^-)^2 + \beta_1 h_{t-1}. \quad (2.4)$$

GJR 모형은 TGARCH 모형과 정의된 형식은 다소 차이가 있으나 결국 동일한 형태를 갖는 비대칭 GARCH 모형이다. GJR( $p, q$ ) 모형의 조건부 분산은 다음과 같이 표현한다.

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \gamma_i I_{t-i}) a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}, \quad (2.5)$$

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{if } a_t < 0, \\ 0, & \text{if } a_t \geq 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

EGARCH 모형과 마찬가지로  $\gamma_i < 0$ 인 경우, 레버리지 효과가 존재함을 나타낸다.

### 3. 다변량-GARCH 모형

여러 수익률 변동성 간의 연관성을 설명하기 위한 모형으로 다변량-GARCH 모형이 있다. 다변량-GARCH 모형의 기본 개념 및 용어 대해 살펴본 후 개발된 모형들 중 모수의 수가 가장 작은 CCC 모형에 대해서 설명하고자 한다. 본 장에서의 개념 및 수식은 황선영 등 (2009)와 최성미 등 (2009)을 참고하여 정리하였으며, 다변량-GARCH 모형에 대한 더 자세한 내용은 Bauwens 등 (2006)와 Tsay (2010)을 참고할 수 있다.

$k$ 개의 수익률 벡터  $r_t = (r_{1t}, \dots, r_{kt})^T$ 에 대해서 다음과 같이 표현한다.

$$r_t = \mu_t + a_t, \\ a_t = H_t^{\frac{1}{2}} \epsilon_t.$$

위의 식에서  $\mu_t$ 는  $(t-1)$ 시점까지의 정보  $F_{t-1}$ 가 주어졌을 때의  $r_t$ 의 조건부 기댓값이고,  $a_t = (a_{1t}, \dots, a_{kt})^T$ 는  $t$ 시점에서의 충격(shock) 벡터이다.  $H_t$ 는  $F_{t-1}$ 가 주어졌을 때의  $r_t$ 의 조건부 분산-공분산 행렬로써  $k \times k$  양정치 행렬이다. 랜덤벡터  $\epsilon_t = (\epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{kt})^T$ 는 평균이 0이고  $k$ -차원 단위 행렬을 분산-공분산 행렬로 갖는다. 다변량-GARCH 모형이란 조건부 분산-공분산 행렬  $H_t$ 에 대한 모형이다.

대표적인 다변량-GARCH 모형으로는 DVEC 모형, BEKK 모형, CCC 모형, DCC 모형 등이 있다. 그러나 이 모형들은 모두 비대칭적 변동성 모형이기 때문에 각 수익률 계열이 비대칭 변동성을 가지고 있다면 이러한 모형들을 사용하는 것은 바람직하지 않다. 비대칭 다변량-GARCH 모형으로는 McAleer 등 (2009)이 제안한 ARMA-AGARCH 모형이 있다. 단변량-GJR 모형을 다변량 형태로 확장시킨 모형이다. DVEC 모형, BEKK 모형과 마찬가지로 이 모형 역시 벡터 시계열의 차원이 커짐에 따라 모수의 수가 매우 많아지는 문제점이 있다. 예를 들어,  $k = (2, 3, 4)$ 일 때, 추정해야 할 모수의 수는 DVEC(1, 1)은 (9, 18, 30)개, BEKK(1, 1)은 (11, 24, 42)개, ARMA-AGARCH(1, 1)은 AGARCH부분만을 고려했을 때 (12, 24, 40)개가 된다. CCC(1, 1)과 DCC(1, 1)은 각각 (7, 12, 18)개와 (9, 14, 20)개이다. 따라서, 상대적으로 모수의 수를 적게 하면서 비대칭 효과를 고려하기 위해 CCC 모형이나 DCC 모형을 생각할 수 있다. 조건부 분산-공분산 행렬  $H_t$ 를 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} H_t &\equiv \{h_{ij,t}\} = D_t R_t D_t, \\ D_t &= \text{diag} \left\{ \sqrt{h_{11,t}}, \dots, \sqrt{h_{kk,t}} \right\}, \\ R_t &= \{\rho_{ij,t}\}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (3.1)$$

여기서  $D_t$ 는 각 수익률 계열의 조건부 표준편차를 대각 원소로 갖는  $k \times k$  대각행렬이고,  $R_t$ 는 수익률 벡터의 조건부 상관관계수 행렬이다. 세 행렬  $H_t, D_t, R_t$ 는 모두 양정치 행렬이다. CCC/DCC 모형은 각 수익률의 조건부 분산( $h_{ij,t}$ )과 조건부 상관관계수( $\rho_{ij,t}$ ) 부분을 독립적으로 추정한다. 따라서 각 수익률의 조건부 분산에 대한 모형으로 EGARCH 모형이나 TGARCH 모형을 적합시킨다면 비대칭적으로 움직이는 변동성을 모형화 할 수 있다. 조건부 상관관계수를 시간에 따라 변화한다고 생각하여 이에 대해 따로 모형화한다면 이를 DCC 모형이라 하며, 조건부 상관관계수를 시간에 따라 변화하지 않는 상수로 본다면( $\rho_{ij,t} = \rho_{ij}$ ) CCC 모형이라 한다.

조건부 상관관계수는 시간에 따라 변화한다고 보는 것이 맞다. 그러나 그 변화의 속도가 빠르지 않고 변화의 크기가 크지 않다면 조건부 상관관계수를 상수를 생각하여도 무리가 없으며 또한 DCC 모형보다 추정 모수의 수가 더 적은 CCC 모형을 이용하는 것이 바람직할 것이라 생각한다.

본 연구에서는 전체적으로는 CCC 모형을 따르면서 개별 수익률의 조건부 분산( $h_{ij,t}$ )에 대한 모형으로 EGARCH 모형 (CCC-EGARCH) 또는 TGARCH 모형 (CCC-TGARCH)을 적합시키고자 한다.

#### 4. 국내 주식자료 사례분석

다변량 시계열자료에 CCC-EGARCH 모형이나 CCC-TGARCH 모형과 같은 비대칭 CCC 모형을 적용하기 위해서는 각 계열이 비대칭 변동성을 가지며 계열들 간의 조건부 상관관계수가 시간에 따라 변화하는 속도와 변화폭이 작아야 한다. 이러한 특징을 갖는다고 보여지는 국내 주가자료들을 이용하여 CCC-GARCH 모형, CCC-EGARCH 모형, CCC-TGARCH 모형을 적합시켜 분석하였다. 자료의 특성에 기초한 비대칭 CCC 모형이 적합력과 예측력 면에서도 우수함을 확인하기 위해 적합도 통계량(로그우도, AIC, BIC)을 계산하고 VaR와 사후검정을 수행하여 세 모형을 비교하고자 한다. 분석에는 S-Plus의 FinMetrics를 사용하였다.

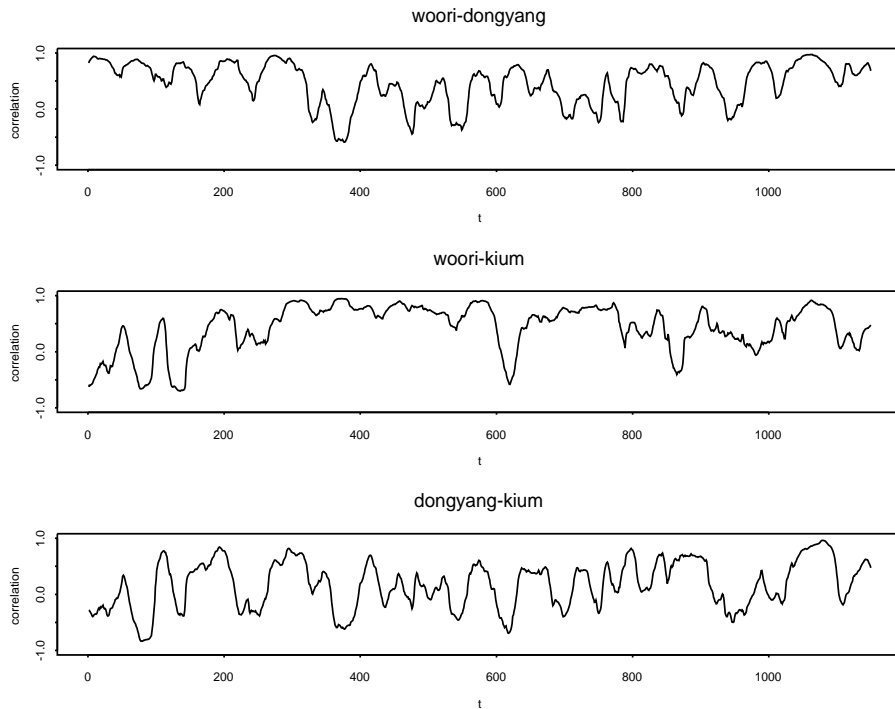


그림 4.1. 증권 자료의 상관계수: 우리투자-동양증권, 우리투자-기움, 동양증권-기움

#### 4.1. 자료

분석에 사용한 자료는 국내 9개의 대기업 주가로서 2006년 9월 6일부터 2011년 6월 30일까지의 일별 로그차분수익률(%)이다. 동종 업계에 속한 주가끼리는 변동성간에 연관성이 존재하므로 9개의 수익률 자료는 각 기업이 속해있는 산업군에 따라 3개씩 나누어  $k = 3$ 인 다변량-GARCH 모형을 적합시켰다. 9개 기업은 다음과 같다.

- 증권: 우리투자증권, 동양증권증권, 기움증권
- 식품: 롯데제과, 크라운제과, 삼양식품
- 은행: 우리금융, 하나금융지주, 신한지주

기업군 선택에는 우선적으로 최성미 등 (2009)의 사례분석 결과를 참고하였다. 최성미 등 (2009)은  $k = 2$ 인 CCC 모형과 DCC 모형을 적합시킨 결과 증권군과 식품군에 있는 자료들의 VaR의 사후검정 결과에서 CCC 모형과 DCC 모형의 실패율이 별 차이가 나지 않음을 보고하였다.

그림 4.1~그림 4.3은 세 산업군의 기업 간의 상관계수를 나타낸 그림이다. 그림에서 이용한 상관계수는 50개의 일별자료를 기준으로 moving window 기법으로 계산한 표본 상관계수로서 이것을 통해 CCC 모형/DCC 모형의 필요성을 확인할 수 있다. 시간에 따라 상관계수값은 계속 변화하고 있음을 알 수 있다. 주목해서 볼 점은 상관계수가 간혹 음수값으로 떨어지기는 하지만 장기간에 걸쳐 비슷한 값을 갖는 구간이 많다는 것이다. 이러한 모습은 moving window의 기준이 20개 또는 100개일 때도 볼 수 있다. 이를 통해 해당 자료를 설명하는데 있어서 DCC 모형보다는 CCC 모형이 더 알맞을 수 있다는 판단을

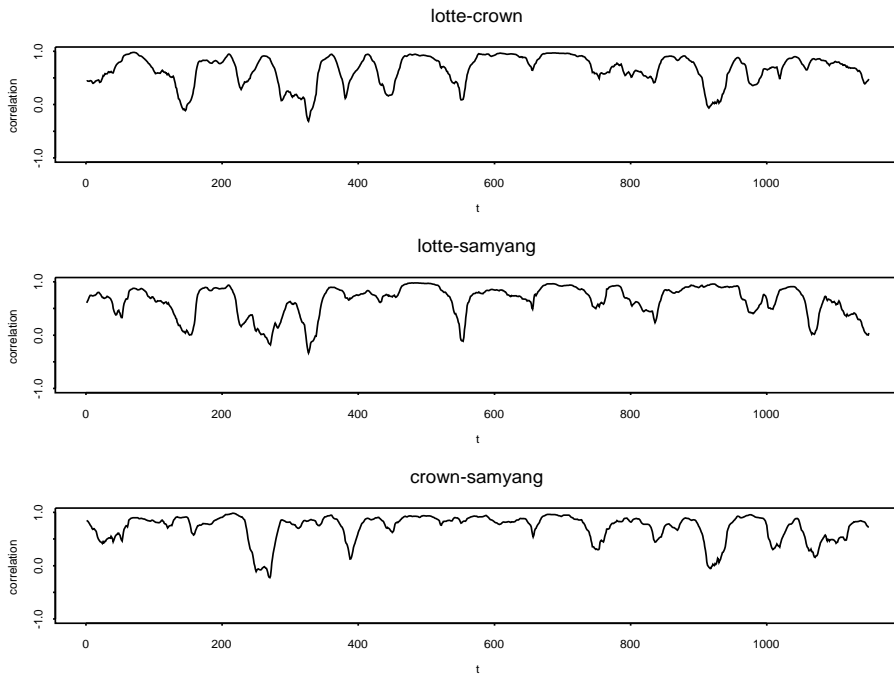


그림 4.2. 식품 자료의 상관계수: 롯데-크라운, 롯데-삼양, 크라운-삼양

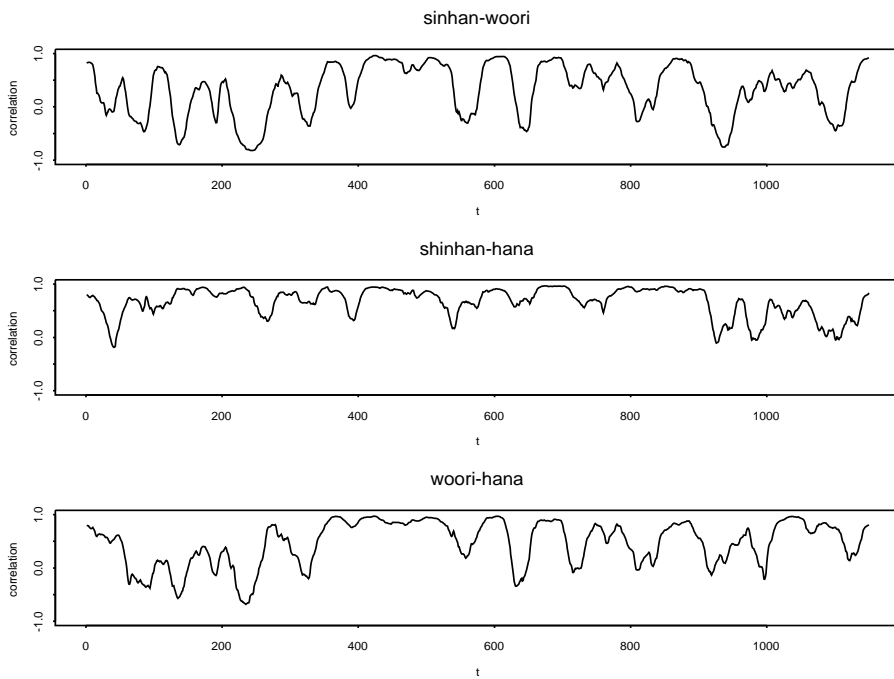


그림 4.3. 은행 자료의 상관계수: 신한-우리, 신한-하나, 우리-하나

표 4.1. 증권 자료의 추정 결과: 우리투자증권-동양증권-키움증권

	CCC-GARCH			CCC-EGARCH			CCC-TGARCH		
$\alpha_0$	0.1175 (0.0343)	0.1387 (0.0312)	0.1404 (0.0153)	-0.0682 (0.0113)	-0.0496 (0.0107)	-0.0408 (0.0060)	0.1267 (0.0352)	0.1390 (0.0309)	0.1181 (0.0138)
$\alpha_1$	0.0685 (0.0088)	0.0446 (0.0064)	0.0459 (0.0040)	0.1337 (0.0147)	0.1104 (0.0142)	0.0142 (0.0089)			
$\alpha_{11}$							0.0419 (0.0113)	0.0310 (0.0072)	0.0407 (0.0040)
$\alpha_{12}$							0.0909 (0.0148)	0.0635 (0.0098)	0.0498 (0.0070)
$\beta_1$	0.9185 (0.0103)	0.9441 (0.0069)	0.9427 (0.0037)	0.9837 (0.0043)	0.9863 (0.0030)	0.9830 (0.0022)	0.9203 (0.0105)	0.9426 (0.0074)	0.9459 (0.0037)
$\gamma_1$				-0.2902 (0.0872)	-0.2427 (0.0686)	-0.0184 (0.0513)			
$\rho_{ij}$	0.7222 (0.0118)	0.6674 (0.0128)	0.6146 (0.0142)	0.7249 (0.0120)	0.6680 (0.0126)	0.6145 (0.0143)	0.7217 (0.0121)	0.6671 (0.0129)	0.6156 (0.0143)
$Q(12)$	16.71 (0.1607)	8.26 (0.7647)	14.41 (0.2752)	17.46 (0.1331)	9.36 (0.6720)	14.28 (0.2833)	17.23 (0.1413)	9.00 (0.7031)	14.85 (0.2497)
$Q^*(12)$	15.49 (0.2157)	14.06 (0.2966)	10.34 (0.5860)	20.65 (0.0558)	17.33 (0.1376)	9.75 (0.6375)	13.52 (0.3326)	14.81 (0.2519)	10.41 (0.5800)

표 4.2. 식품 자료의 추정 결과: 롯데제과-크라운제과-삼양식품

	CCC-GARCH			CCC-EGARCH			CCC-TGARCH		
$\alpha_0$	0.6114 (0.0690)	1.1266 (0.1175)	0.1569 (0.0148)	-0.0895 (0.0235)	-0.0022 (0.0199)	-0.0811 (0.0193)	0.5942 (0.0669)	1.1082 (0.1182)	0.1040 (0.0120)
$\alpha_1$	0.1976 (0.0182)	0.2012 (0.0237)	0.1031 (0.0090)	0.3480 (0.0260)	0.3224 (0.0265)	0.1819 (0.0162)			
$\alpha_{11}$							0.2547 (0.0250)	0.2035 (0.0297)	0.1285 (0.0102)
$\alpha_{12}$							0.1410 (0.0288)	0.1902 (0.0389)	0.0228 (0.0114)
$\beta_1$	0.7029 (0.0241)	0.6536 (0.0304)	0.8890 (0.0060)	0.8903 (0.0137)	0.8819 (0.0144)	0.9782 (0.0028)	0.7036 (0.0239)	0.6576 (0.0309)	0.9149 (0.0051)
$\gamma_1$				0.1545 (0.0467)	0.0788 (0.0571)	0.5741 (0.0790)			
$\rho_{ij}$	0.1252 (0.0300)	0.2083 (0.0271)	0.1514 (0.0268)	0.1269 (0.0297)	0.2211 (0.0278)	0.1670 (0.0267)	0.1244 (0.0300)	0.2168 (0.0281)	0.1586 (0.0279)
$Q(12)$	8.10 (0.7777)	5.56 (0.9368)	4.28 (0.9779)	9.35 (0.6724)	5.23 (0.9500)	6.25 (0.9027)	8.47 (0.7473)	5.51 (0.9387)	5.53 (0.9380)
$Q^*(12)$	5.13 (0.9534)	5.07 (0.9557)	8.55 (0.7410)	5.79 (0.9265)	4.37 (0.9459)	7.42 (0.8285)	4.52 (0.9722)	5.08 (0.9551)	8.17 (0.7715)

내릴 수 있다. 또한, 기업들의 자료를 바탕으로 단변량-TGARCH 모형을 적합시킨 결과, 대부분의 기업 주가 수익률이 비대칭 변동성을 보이고 있음을 확인하였다 (단변량-TGARCH 모형 적합 결과는 생략하였다). 따라서, 자료 분석을 위해 비대칭 CCC 모형을 고려한다.

#### 4.2. 다변량-GARCH 모형의 적합

표 4.1~표 4.3은 세 산업군의 자료에 대해 CCC-GARCH 모형, CCC-EGARCH 모형, CCC-TGARCH 모형을 적합시킨 결과이다. 각각의 자료 모두 자기상관성을 가지고 있어  $\mu_t$  부분에 AR(1) 모형을 적용하였다 (AR(1) 적합 결과는 생략하였다).  $\alpha_0$  행에서  $\rho_{ij}$  행까지에는 해당 모수에 대한 추정값을 나타냈으며 괄호 안에 있는 값은 표준오차이다. 단, CCC-TGARCH 모형 부분에서  $\alpha_{12}$ 에 해당하는 표준오차

표 4.3. 은행 자료의 추정 결과: 우리금융-하나금융지주-신한지주

	CCC-GARCH			CCC-EGARCH			CCC-TGARCH		
$\alpha_0$	0.2601 (0.0430)	0.2697 (0.0481)	0.1430 (0.0343)	-0.0511 (0.0096)	-0.0401 (0.0107)	-0.0354 (0.0103)	0.1972 (0.0382)	0.2579 (0.0467)	0.1426 (0.0300)
$\alpha_1$	0.0765 (0.0092)	0.0571 (0.0064)	0.0482 (0.0084)	0.1326 (0.0168)	0.1336 (0.0160)	0.1048 (0.0164)			
$\alpha_{11}$							0.0346 (0.0105)	0.0617 (0.0125)	0.0134 (0.0087)
$\alpha_{12}$							0.0913 (0.0131)	0.0542 (0.0154)	0.0713 (0.0125)
$\beta_1$	0.8879 (0.0126)	0.9084 (0.0096)	0.9252 (0.0129)	0.9763 (0.0043)	0.9711 (0.0057)	0.9746 (0.0041)	0.9106 (0.0122)	0.9090 (0.0101)	0.9320 (0.0124)
$\gamma_1$				-0.3439 (0.0947)	-0.0329 (0.0857)	-0.4959 (0.1178)			
$\rho_{ij}$	0.6305 (0.0157)	0.6611 (0.0164)	0.6462 (0.0164)	0.6317 (0.0156)	0.6617 (0.0165)	0.6449 (0.0166)	0.6318 (0.0158)	0.6622 (0.0165)	0.6440 (0.0167)
$Q(12)$	20.81 (0.0533)	25.61 (0.0122)	23.28 (0.0254)	20.09 (0.0654)	29.25 (0.0036)	21.49 (0.0436)	21.65 (0.0417)	26.43 (0.0093)	22.13 (0.0361)
$Q^*(12)$	10.99 (0.5301)	6.53 (0.8869)	11.43 (0.4926)	18.58 (0.0947)	8.48 (0.7469)	10.26 (0.5936)	12.44 (0.4113)	6.68 (0.8782)	8.29 (0.7624)

는 식 (2.5)의  $\gamma_1$ 에 대한 표준오차를 나타낸다 (S-Plus에서는 TGARCH 모형이 아닌 GJR-모형을 적합시킨다).  $\rho_{ij}$ 에 해당하는 부분은 식 (3.1)의 (상수) 조건부 상관계수의 추정값이며  $\hat{\rho}_{12}$ ,  $\hat{\rho}_{23}$ ,  $\hat{\rho}_{31}$ 의 순서로 표기되었다.  $Q(12)$ 와  $Q^*(12)$ 는 각각 표준화 잔차  $\hat{\epsilon}_{tk} = \hat{a}_{tk}/\sqrt{\hat{h}_{tk}}$ 와 표준화 잔차의 제곱에 대한 시차 12에서의 포트맨토 검정통계량이다. 괄호 안의 값들은 포트맨토 통계량에 대한 유의확률이다. 표 4.1은 우리투자증권, 동양증권, 키움증권의 순서로 각 수익률의 추정값이 표기되었으며 표 4.2는 롯데제과, 크라운제과, 삼양식품, 표 4.3은 우리금융, 하나금융지주, 신한지주 순서로 표기되었다. 증권과 식품 자료의 경우, 포트맨토 검정 결과 모형들이 잘 적합되었음을 알 수 있다. 은행 자료에서는 표준화 잔차에 아직 자기상관성이 남아있음을 보여 준다. 각 모수에 대한 추정에서는 대부분의 추정된 계수들이 유의수준 1%에서 유의하다는 결과를 얻었다. 증권과 은행 자료에서 EGARCH의  $\gamma_1$ 은 모두 음수로 추정되었으며 (키움증권과 하나금융지주인 경우 유의하지는 않음), TGARCH에서 모두  $\hat{\alpha}_{12}$ 가  $\hat{\alpha}_{11}$ 보다 큰 것으로 보아 해당 자료들에 레버리지 효과가 있음을 알 수 있다. 반면, 식품 자료에서는 EGARCH의  $\gamma_1$ 이 양수값을 가지며 (크라운제과는 유의하지 않음), TGARCH에서  $\hat{\alpha}_{11}$ 이  $\hat{\alpha}_{12}$ 보다 크게 추정되었다. 식품 회사의 주가 수익률은 다른 자료들과는 다르게 나쁜 정보(주가 하락)일 때 보다 좋은 정보(주가 상승)일 때 수익률의 변동성이 더 크다고 볼 수 있다.

#### 4.3. 모형비교

적용한 세 모형의 적합력과 예측력을 비교하기 위해 로그우도, AIC, BIC을 계산하였으며, VaR(Value at Risk)값을 계산한 후 사후검증 결과를 얻었다. VaR란 주어진 조건에서의 최대 손실 예측치로써 금융 실무 분야에서는 시장의 위험에 대한 예측을 위해 사용하며, 계량경제/경제통계 분야에서는 적용한 모형의 예측력을 측정하기 위해 자주 이용한다. 수익률에 대해 정규분포를 가정하고, 보유기간은 1일, 신뢰수준 95%, 99%을 설정하여 계산하였다. 세 계열의 가중치로는  $w = (1/3, 1/3, 1/3)^T$ 을 사용하였다. VaR의 정확성을 검증하는 과정을 사후검증이라 하며 본 논문에서는 실패율 계산 방법을 사용하였다. 예측한 리스크보다 실제 손실이 더 큰 경우를 실패로 인식하며, 검증 기간 동안의 실패가 발생한 비율을 실패율이라 말한다. 표본 내 기간은 2006년 9월 6일부터 2009년 5월 29일까지이며 표본 외 기간은 2009년 6월 1일부터 2011년 6월 30일이다. 계산된 실패율이 5%(신뢰수준 95%인 경우), 1%(신뢰수



표 4.4. 적합력, 예측력 비교

	모형	로그우도	AIC	BIC	VaR 실패율 (%)	
					신뢰수준 95%	신뢰수준 99%
증권	CCC-G	-8355	16741	16817	3.25	0.57
	CCC-E	-8354	16744	16836	3.44	0.96
	CCC-T	-8348	16732	16823	5.35	1.15
식품	CCC-G	-8254	16538	16615	3.44	1.72
	CCC-E	-8243	16521	16613	3.44	1.53
	CCC-T	-8236	16509	16600	3.44	1.72
은행	CCC-G	-7729	15487	15564	3.63	0.57
	CCC-E	-7720	15477	15568	3.82	0.57
	CCC-T	-7716	15468	15560	3.44	0.57

준 99%인 경우)을 가능한 비슷하게 맞춘다면 해당 모형의 예측력이 높음을 의미한다. VaR와 사후검증에 대한 자세한 내용은 황선영 등 (2009), 최성미 등 (2009), 이대수와 송성주 (2011)를 참고하기 바란다. 표 4.4는 모형 비교에 대한 결과를 나타낸 표이다. 식품과 은행 자료에서는 CCC-TGARCH 모형이 다른 모형에 비해 적합력이 좋음을 보여주고 있다. 증권 자료는 로그우도와 AIC는 CCC-TGARCH 모형이 좋으나 BIC에서는 CCC-GARCH 모형의 적합력이 더 높다는 결과가 나왔다. 사후검증 결과를 보면 증권 자료인 경우 CCC-TGARCH 모형과 CCC-EGARCH 모형이 예측면에서 CCC-GARCH 모형보다 더 뛰어난 것을 확인할 수 있다. 은행과 식품 자료에서는 비대칭 CCC 모형이 CCC-GARCH 모형보다 예측력이 다소 우수함을 알 수 있다.

### 5. 결론

많은 수익률 자료들이 조건부 분산 추정시 레버리지 효과와 같은 비대칭성을 보여주고 있으며 따라서 다변량-GARCH 모형에서도 이러한 특성을 설명할 수 있는 비대칭 모형의 연구와 개발이 필요하다. 본 논문에서는 기존의 CCC 모형에서 개별 수익률의 조건부 분산을 일반 GARCH 모형이 아닌 비대칭 GARCH 모형으로 적합시켰으며, 이를 통해 비대칭적 특성을 모형화하고자 하였다. 또한, 수익률 간의 조건부 상관계수가 시간에 따라 변화하는 속도가 느리거나 변화 크기가 작은 경우 다른 다변량-GARCH 모형보다 상대적으로 추정 모수의 수가 적은 CCC 모형을 사용하는 것이 바람직할 것이라 판단하였다. 국내 기업들의 주가자료에서 이러한 특징들을 확인하였으며 분석을 위해 CCC-GARCH 모형, CCC-EGARCH 모형, CCC-TGARCH 모형을 적합시켰다. 적합 결과, 비대칭 CCC 모형이 GARCH-CCC 모형보다 적합력이 더 높은 것으로 나타났으며 이는 비대칭 CCC 모형이 자료의 특성을 더 잘 설명하고 있음을 말해준다. 예측면에서는 세 모형 모두 비슷한 수치이지만 비대칭 CCC 모형이 다소 더 정확한 예측 결과를 나타낼 수 있었다. CCC 모형의 필요성을 확인하기 위해 본 연구에서는 상관계수 그림을 살펴보았으나 Tse (2000)이 제안한 상수 상관계수에 대한 검정을 이용해 보는 것도 추후 고려해 볼 수 있을 것이다.

### 참고문헌

박진아, 최문선, 황선영 (2011). 이차형식 변동성 Q-GARCH 모형의 비교연구, <응용통계연구>, 24, 61-69.  
 송유진, 최문선, 황선영 (2008). 차원축소를 통한 시계열의 변동성 분석 및 응용, <한국 통계학회 논문집>, 15, 825-835.

- 이대수, 송성주 (2011). Value at Risk의 사후검증을 통한 다변량 시계열자료의 차원축소 방법의 비교: 사례분석. <응용통계연구>, **24**, 597-607.
- 최성미, 황선영, 최문선, 박진아, 백지선, 황선영 (2009). DCC 모델링을 이용한 다변량-GARCH 모형의 분석 및 응용. <응용통계연구>, **22**, 995-1005.
- 황선영, 최문선, 도종두 (2009). 사후검증(Back-testing)을 통한 다변량-GARCH 모형의 평가: 사례분석, <응용통계연구>, **22**, 261-270.
- Bauwens, L., Laurent, S. and Rombouts, J. V. K. (2006). Multivariate GARCH models: A survey, *Journal of Applied Econometrics*, **21**, 79-109.
- Black, F. (1976). Studies in stock price volatility changes, Proceedings of the 1976 Meeting of the Business and Economic Statistics Section, *American Statistical Association*, 177-181.
- Bollerslev, T. (1990). Modeling the conditional in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model. *Review of Economics and Statistics*, **72**, 498-505.
- Bollerslev, T., Engle, R. F. and Wooldridge, J. M. (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances, *Journal of Political Economy*, **96**, 116-131.
- Engle, R. F. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate GARCH models, *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**, 339-350.
- Engle, R. F. and Kroner, K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH, *Econometric Theory*, **11**, 122-150.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. and Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *The Journal of Finance*, **48**, 1779-1801.
- McAleer, M., Hoti, S., and Chan F. (2009). Structure and asymptotic theory for multivariate asymmetric conditional volatility, *Econometric Reviews*, **28**, 422-440.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica*, **59**, 347-370.
- Sentana, E. (1995). Quadratic ARCH models, *The Review of Economic Studies*, **62**, 639-661.
- Storti, G. and Vitale, C. (2003). BL-GARCH models and asymmetries in volatility, *Statistical Methods and Applications*, **12**, 19-40.
- Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series (2nd ed.)*, John Wiley & Sons, New Jersey.
- Tse, Y. K. (2000). A test for constant correlations in a multivariate GARCH model, *Journal of Econometrics*, **98**, 107-127.
- Tse, Y. K. and Tsui, A. K. C. (2002). A multivariate GARCH model with time-varying correlations, *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**, 351-362.
- Zakoian, J. M. (1994). Threshold heteroscedastic models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **18**, 931-955.

# Asymmetric CCC Modelling in Multivariate-GARCH with Illustrations of Multivariate Financial Data

R.H. Park<sup>1</sup> · M.S. Choi<sup>2</sup> · S.Y. Hwang<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Department of Statistics, Sookmyung Women's University

<sup>2</sup>Department of Statistics, Sookmyung Women's University

<sup>3</sup>Department of Statistics, Sookmyung Women's University

(Received September 2011; accepted October 2011)

---

## Abstract

It has been relatively incomplete in the field of financial time series to adapt asymmetric features to multivariate GARCH processes (McAleer *et al.*, 2009). Retaining constant conditional correlation(CCC) structure, this article pursues to introduce asymmetric GARCH modelling in analysing multivariate volatilities in time series in a practical point of view. Multivariate Korean financial time series are analyzed in detail to compare our theory with conventional methodologies including GARCH and EGARCH.

Keywords: Asymmetric volatility, CCC, multivariate GARCH.

---

---

<sup>3</sup>Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea. E-mail: shwang@sm.ac.kr