한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제4호 (2011년 11월), 33–43

힐버트와 형식주의

Hilbert and Formalism

최원배 Wonbae Choi

이 글은 힐버트 프로그램 시기의 힐버트의 사상을 과연 도구주의로 볼 수 있는가 하는 문제를 다룬다. 이를 위해 먼저 힐버트를 도구주의자로 보는 논거들을 살펴보고, 이 견해에 대한 최근의 비판을 세 가지로 나누어 차례대로 검토한다. 이런 논의를 통해 힐버트를 도구주의자로 보는 견해는 여전히 유지될 수 있음을 보인다.

In this paper I discuss if we can regard Hilbert at the time of Hilbert's program as an instrumentalist. For this I first provide some textual evidences for the instrumentalist interpretation, then examine the three recent criticisms in turn. I argue that the reading Hilbert as an instrumentalist is still tenable in spite of these criticisms.

Keywords: 힐버트(Hilbert), 형식주의(formalism), 도구주의(instrumentalism), 이념적 명제(ideal proposition)

1 머리말

우리는 통상적으로 20세기 초에 활발했던 수학 기초론 논의가 프레게의 논리주의, 브라우어의 직관주의 그리고 힐버트의 형식주의라고 하는 세 입장을 중심으로 전개되었다고 말한다 [4]. 여기서 주목할 것은 힐버트의 철학을 '형식주의'라고 일컫는다는 점이다. 그런데 형식주의란 정확히 어떤 입장을 말하는가? 레스닉(M. Resnik)은 형식주의를 게임 형식주의(game formalism), 이론 형식주의(theory formalism), 유한주의(finitism)로 세분하고, 힐버트를 유한주의자로 규정짓는가 하면 [17, p. 54], 샤피로(S. Shapiro)는 형식주의를 이름 형식주의(term formalism), 게임 형식주의(game formalism), 연역주의(deductivism)로 나누고 있고, 힐버트가 이런 모든 측면을 지니고 있다고 본다 [18, 6장]. 한편 데틀렙슨을 위시한 많은 수학철학자들은 힐버트를 도구주의자(instrumentalist)로 간주한다 [1, 2, 5, 6, 8, 15, 17, 19]. 반면 이왈드(W. Ewald)는 힐버트의 수학철학을 형식주의라고 부르는 것은 오해의 소지가 많으므로 그렇게 불러서는 안

MSC: 01A30, 01A50
제출일: 10월 20일 수정일: 11월 11일 게재확정일: 11월 14일

되며, 힐버트 스스로도 형식주의자라고 불리기를 거부했다고 주장하기까지 한다 [7, pp. 1106–1107]. 그러면 힐버트는 도대체 누구인가?

물론 힐버트에 대한 이런 다양한 견해 가운데 꼭 어느 하나만 옳아야 하는 것은 아니다. 그것들이 모두 옳을지도 모른다. 가령 힐버트가 남긴 모든 저술을 자세히 검토한 결과 그의 사상이 실제로 이런 다양한 측면을 동시에 지니고 있음이 밝혀지거나 아니면 시기에 따라 힐버트의 견해가 크게 변화해 왔음이 드러날지도 모른다. 여기서 그런 작업을 해 힐버트의 사상을 형식주의라고 특징짓는 것이 과연 옳은지를 밝히고자 하는 것은 아니다. 이 글의 목적은 훨씬 제한적이다. 나는 여기서 1920년대 힐버트 프로그램 시기에 국한해, 이 시기의 힐버트를 과연 도구주의자로 여길 수 있는지를 살펴보고자 한다. 이렇게 하는 데는 두 가지 이유가 있다. 첫째, 이 견해가 힐버트 프로그램 시기의 힐버트를 보는 주도적 시각이라고 할 수 있기 때문이다 [16, 18, 21]. 둘째, 이런 주도적 견해에 대해 최근 국내외에서 비판이 제기되었기 때문이다 [3, 9].

앞으로의 논의 순서는 다음과 같다. 우선 2절에서 힐버트를 도구주의자로 보는 견해의 논거들을 살펴본 다음, 3절에서 이에 대한 비판들을 세 가지로 나누어 차례대로 검토할 것이다. 이런 논의를 통해 나는 힐버트의 사상을 도구주의로 볼 여지가 여전히 있다는 점을 보일 것이다.

2 도구주의자로서의 힐버트

힐버트가 "수학의 기초와 관련된 의문을 한꺼번에 완전히 없애기 위해" [13, p. 464][1)]제시한 힐버트 프로그램은 힐버트가 수학 기초론 논의에 다시 관심을 기울이게 되는 1920년대 본격적으로 등장한다.[2)] 힐버트는 그것을 '증명 이론' (proof theory)이라 부르고, 그 증명 이론의 '기본 생각' (the fundamental idea)을 여러 차례 서술하고 있다. 그 가운데 가장 초기의 것으로서, 그의 입장을 가장 간결하게 표현하고 있는 것은 다음이다.

> 첫째, 지금까지 진정한 수학(mathematics proper)을 이루고 있던 것은 모두 엄밀하게 형식화됨으로써, 진정한 수학 또는 엄밀한 의미의 수학은 이제 증명 가능한 식들의 모임이 된다. …
>
> 둘째, 이런 진정한 수학에 덧붙여 어느 정도 새로운 수학, 곧 … 메타수학(meta-

1) [11]에는 "수학적 추론의 신뢰성과 관련된 일반적 의문을 한꺼번에 완전히 없애기 위해"(p. 1136)라고 서술되어 있다.

2) 힐버트는 [13]에서 이와 관련된 문헌으로 [10, 11, 12]를 들고 있는데, 우리는 이에 [14]를 추가할 수 있을 것이다. 이 저작들 가운데 힐버트의 사상을 가장 포괄적으로 잘 보여주는 것은 보통 [12]로 간주된다. [13]은 이 논문의 후속 논문으로, 앞의 글에 나온 논점을 다시 서술해주고 있다. 하지만 [12]는 힐버트 자신의 서술 방식 때문에 이해하기가 쉽지 않은데, 이 점은 [13]을 두고서도 크게 다르지 않다. 이에 따라 나는 힐버트의 저작 가운데 이 두 논문 이외에 [10, 11, 14]를 많이 참조해 그의 견해를 서술할 것이다.

> mathematics)이 등장한다. 이 메타수학에서 우리는 특히 공리들의 일관성을 증명할 때 내용 있는(contentual) 추론 — 이는 진정한 수학에서 쓰는 순수한 형식적(formal) 추론 방식과 대조된다 — 을 적용한다 [10, pp. 1131–1132].[3)]

첫째 부분은 대략 말해 형식 체계를 구성하는 작업이라 할 수 있다. 이를 위해 공리들이 제시되고, 추리 규칙과 함께 요즘의 우리에게 익숙한 증명 개념이 규정된다. 그가 드는 공리들 가운데는 통상적인 논리학의 공리들 외에 그가 '초한 공리' (the transfinite axiom)라고 부르는 것과 수에 관한 공리들도 들어 있다. 둘째 부분은 앞서 구성한 형식 체계에 대해 그 체계의 일관성을 구문론적으로 증명하는 작업이라 할 수 있는데, 여기서 중요한 점은 순수한 형식적 추론이 아니라 '내용 있는' 추론을 통해 일관성을 증명하고자 한다는 점이다.

그런데 이런 기본적인 생각을 구체적으로 실행하는 작업은 철저하게 단계적으로 이루어진다. 다시 말해 힐버트는 기존의 수학을 단번에 모두 형식화하고 그에 걸맞은 공리들을 설정하여, 그 체계가 일관적임을 바로 증명하는 식으로 진행하고자 하는 것이 아니다. 도리어 그는 논란의 여지가 전혀 없고 아주 확실하다고 여겨지는 기본적인 것을 출발점으로 삼은 다음, 이를 점차 확장해 나가는 수순을 밟는다.

힐버트가 기본적인 출발점으로 삼는 것은 물론 아주 단순한 초등 수 이론(elementary number theory)이다. 이 과정에서 힐버트는 다른 한편으로 앞서 나온 전통적인 의미의 '진정한 수학' 을 재구성한다고 볼 수 있다. 이 작업은 그가 말하는 "기본적인 철학적 입장" (the basic philosophical position) [12, p. 376][4)]에 입각해서 진행된다. 그 입장에 따르면, 논리적 추론을 적용하고 논리적 연산을 하려면 먼저 '논리 외적인 구체적인 대상들' 이 주어져야 한다. 이런 대상들은 한꺼번에 완전히 조망할 수 있어야 하고, 이런 대상들의 제시나 차이, 연속 등이 직관적으로 우리에게 명확해야 한다. 이런 관점에 서 있기 때문에

> 나에게 있어 수 이론의 대상은 — 데데킨트나 프레게와 대조적으로 — 기호 자체이다. … <u>태초에 기호가 있었다</u> [10, pp. 1121–1122].

가령 숫자 1, 11, 111 등이 바로 수 이론의 대상이며, 힐버트는 이들을 '유한적 대상' (finitary object)이라 부르고, "$2 + 3 = 3 + 2$" 과 같은 식을 '유한적 명제' 라고 부른다.

그런데 이런 가장 기본적이고 간단한 초등 수 이론에서 출발해 이제 대수로 나아가려면 새로운 공리들이 필요하며, 힐버트가 말하는 증명이론에 따르면 이렇게 새로운 공리를 추가한 새 체계의 일관성을 메타수학에서 증명해야 한다. 그리고 더 나아가 해석학을 구성하려고 한다면 또 새로운 공리들을 추가해야 할 테고, 그렇게 구성된 체계가 일관적임을 다시 증명해야 할 것이다. 그래서 힐버트는 다음과 같이 말한다.

3) 이것은 다음에도 거의 같은 표현으로 반복되고 있다. [11, pp. 1137–1138] 및 [14, pp. 1152–1153]. 또한 [12, pp. 381–383]과 [13, p. 465]도 참조.

4) 또한 [10, pp. 1121–1122] [13, pp. 464–465] [14, p. 1150]도 참조.

> 수학의 발전은 서로 번갈아 가면서 다음과 같은 두 가지 방식으로 진행된다. 하나는 공리들로부터 형식적 추론에 의해 새로운 '증명 가능한' 식을 도출하는 것이고, 다른 하나는 새로운 공리들을 추가해서 이 공리들이 일관적임을, 내용 있는 추론에 의해 증명하는 것이다 [10, p. 1132].

이처럼 체계를 점차 확장해 가는 과정에서, 힐버트를 도구주의자로 볼 수 있게 하는 주장이 등장하게 된다. 힐버트에 따르면,

> … 수학은 다음과 같은 식들의 모임이 된다. 첫째, 유한적 명제[따라서 주로 수 등식과 부등식]의 내용 있는 전달에 대응하는 식들이 하나이고, 둘째, 그 자체로 아무 것도 의미하지 않으며 <u>우리 이론의 이념적 대상</u>인 식들이 다른 하나이다 [12, p. 380].

힐버트를 도구주의자로 간주하는 사람들이 자주 거론하는 이 대목에서 힐버트는 유한적 명제와 대비되는, 아무런 의미도 갖지 않는 식이 있다는 점을 분명히 하고 있다. 그는 또한 같은 글에서 "이념적 명제(ideal proposition), 즉 유한적 주장을 표현하지 않는 한, 그 식들은 그 자체로 아무 것도 의미하지 않기 때문에, 그것들에는 유한적 명제에 적용되듯이 논리적 연산이 내용 있는 방식으로 적용될 수 없다" [12, p. 381]고 말하기도 한다.

이런 유한적 명제와 이념적 명제의 대비는 1927년 글에서 실재적 명제(real proposition)와 이념적 명제의 대비로 서술되고 있다.

> … 초등 수학에도 이미 첫째, 유한 명제의 내용 있는 전달(주로 수 등식이나 부등식 또는 이것들로 구성된 좀 더 복잡한 전달)에 대응하는 식들이 있으며 — 이를 우리는 그 이론의 <u>실재적 명제</u>라 부를 수 있다 — 둘째, 내용 있는 수 이론의 숫자처럼 — 그 자체로 아무것도 의미하지 않고, 단지 규칙에 의해 지배되며 그 이론의 <u>이념적 대상</u>이라고 간주되어야 하는 식들이 있다 [13, p. 470].

바로 이런 힐버트의 언급에 근거해 많은 사람들은 힐버트가 수학을 이념적 명제와 실재적 명제 또는 유한적 명제로 나누었고, 이념적 명제에 대해서는 그것이 아무런 의미도 갖지 않는다는 형식주의 입장을 피력한 것으로 이해한다.

그러면 힐버트는 왜 아무런 의미도 없는 이념적 명제가 필요하다고 보는가? 이에 대한 답을 제시하는 과정에서 도구주의자로서의 그의 면모가 드러나게 된다. 그 물음에 대해 힐버트는 다음과 같이 답한다.

> 왜냐하면 우리가 실재적 명제에 이념적 명제를 덧붙이게 되면, 아리스토텔레스 논리학의 모든 간단한 규칙들이 성립하고 수학적 추론의 통상적인 방법들이

> 모두 타당한 그런 명제들의 체계를 얻게 되기 때문이다 [13, p. 471].[5)]

힐버트에 따르면, 실재적 명제에 이념적 명제를 덧붙이는 이런 방식은 수학에서 이미 널리 사용되던 방법이다. 그것은 이념적 요소의 방법 (the method of ideal elements) 이라 불리는데, 그는 '무한한 점' 이나 '무한한 선' 또는 '$i = \sqrt{-1}$' 등을 이런 방법이 적용된 사례로 들고 있다. 힐버트는 수학에서 이념적 요소를 도입하는 방안과 자신의 증명이론에서 이념적 명제를 도입하는 방안이 정확히 같은 성격을 지닌다고 본다.

> 나의 증명이론에서는, 초한 공리 (the transfinite axiom) 와 식들이 유한 공리 (the finite axiom) 에 덧붙여지게 되는데, 이는 복소수 이론에서 허수가 실수에 덧붙여지는 것과 같으며, 기하학에서 이념적인 작도가 실제 작도에 덧붙여지는 것과 정확히 같다. 나의 증명이론에서 이런 절차가 지닌 동기와 의의는 그들 이론에서의 동기나 의의와 정확히 같다. 다시 말해, 초한 공리를 덧붙이게 됨으로써 그 이론이 단순하게 되고 완전하게 되는 결과를 낳는다 [11, p. 1144].[6)]

결국 이념적 명제는 이론의 단순화에 기여하는 도구적 성격을 지닌다는 것이다. 이런 점이 바로 힐버트를 도구주의자로 여기게 되는 핵심 근거가 된다. 물론 덧붙일 필요가 없겠지만, 이념적 명제의 도입이 정당화 되려면 그런 명제를 도입하더라도 모순이 야기되지 않는다는 일관성 증명이 있어야 한다.

3 도구주의적 해석에 대한 몇 가지 비판

그런데 힐버트에 대한 이런 도구주의적 해석에 대해, 최근 국내외에서 비판이 제기되었다. 가령 할렛은 다음과 같이 말한다.

> 힐버트를 환원주의자나 도구주의자로 보는 시각은 다음과 같다. 실재적 내용 (real content) 을 갖는 유일한 수학의 부분은 유한 수학이며, 이는 산수 가운데 아주 적은 부분을 차지하는 일부일 뿐이다. 나머지는 ... 이념적 확장으로 간주된다. 그 경우 우리의 바람은 유한적인 일관성 증명을 통해 그 확장이 유한적인, 내용 있는 부분에 대한 보존적 확장임을 보임으로써 그 확장을 정당화하는 것이다. 하지만 이는 ... 힐버트의 입장이 아니다 [9, p. 239].

최근 논문에서 박준용은 다음과 같이 말한다.

> 이것 [자신의 논의] 으로 힐버트가 수학에서 이념적인 것을 단순히 순수 형식적인 것으로 간주했다는 주장, 수학 이론의 이념적 요소에 도구적 의의만 부

5) 또한 [12, pp. 379–381] 도 참조.
6) 또한 [12, pp. 372–373] 도 참조.

> 여했다는 주장은 충분히 반박된 것으로 생각한다. 이에 따라 나는 내용적이고 실재적인 수학과 형식적이고 이념적인 수학 사이의 구분은 사실 힐버트에게 사이비 구분이라고 결론짓는다. 따라서 나는 이런 구분에 의존하는 힐버트에 관한 도구주의적 해석은 심각한 난점을 갖는다고 생각한다 [3, pp. 195–196].

그러면 어떤 근거에서 이들은 도구주의적 해석을 부정하는 것인가? 박준용의 비판에서 대략 드러나듯이, 이들은 도구주의적 해석의 근간이 되는 이념적인 것과 실재적인 것의 구분을 문제 삼는다. 이들에 따르면, 그 구분은 힐버트를 도구주의자로 해석하는 사람들이 보는 그런 방식으로 이해되어서는 안 된다.

그렇다면 구체적으로 무엇이 문제인가? 나는 이들이 제시했거나 아니면 가능한 논거를 세 가지로 나누어 차례대로 검토하고자 한다.

(1) 첫 번째로 살펴보고자 하는 비판은 이념적인 것과 그렇지 않은 것의 구분이 상대적이라고 하는 주장이다. 가령 할렛은 일찍이 "'이념적 요소' 라는 용어는 상대적 용어일 뿐이다" [9, p. 237] 라고 주장했다. 박준용도 마찬가지로 최근 이 점을 강조하고 나섰다. 이들이 이렇게 주장하는 근거는 힐버트가 1919년부터 1920년에 한 강의록인 『자연과 수학적 인식』이다. 이들에 따르면, 어떤 요소가 이념적인 것이라고 할 수 있는지 여부는 어떤 이론 체계의 관점에서 보느냐에 따라 달라진다. 가령 실수 이론에서 본다면 복소수는 실제로 존재하지 않는 이념적인 것인 반면, 복소수 이론에서 본다면, 복소수도 실수만큼이나 현실적인 것으로 여겨진다는 것이다.

나아가 이들은 힐버트의 이런 생각이 1920년대 힐버트 프로그램 시기에도 그대로 유지된 것으로 볼 수 있다고 주장한다. 나는 이런 점을 부정하지 않는다. 나아가 그런 상대적 구분을 연상시킨다고 할 수 있는 대목을 이 시기에 찾아볼 수 있고, 가령 다음을 그런 예로 들 수도 있을 것이다.

> 이념적 요소의 방법을 사용할 때 꼭 지켜야 할 단 하나의 필수적인 조건이 있는데, 그것은 일관성의 증명이다. 왜냐하면 이념적인 것을 추가해 확장하는 일이 합당하려면, 그렇게 하더라도 원래의 더 좁은 도메인에 아무런 모순도 야기되지 않아야, 다시 말해 이념적 대상을 제거하더라도 언제나 원래의 대상에 대해 성립했던 관계는 이전 도메인에서도 여전히 성립해야 하기 때문이다 [12, p. 383].[7)]

여기서 힐버트는 '더 좁은 도메인' 또는 '이전 도메인' 을 거론하고 있다.[8)] 그리고 이

7) 또한 [13, p. 471] 도 참조.

8) 사실 이 부분은 힐버트의 the conservative extension) 임을 보이는 증명이라고 보는 사람들이 논거로 드는 대목이기도 하다.

점은 앞에서도 말했듯이, 힐버트 프로그램이 단계적으로 진행된다는 점과도 관련이 있다.

하지만 나는 이념적인 것과 다른 것의 구분이 상대적이라는 사실을 인정한다고 해서 그 점이 힐버트를 도구주의자로 보는 데 방해가 된다고 보지는 않는다. 왜냐하면 우리가 여기서 문제 삼는 점은 특정 관점에서의 구분이기 때문이다. 그리고 그 특정 관점이란 증명이론에서는 유한적 관점을 말하게 된다.[9] 힐버트가 이념적 명제와 그렇지 않은 명제를 나누는 작업은 바로 이런 유한적 관점에서의 구분으로 이해되어야 하고, 이렇게 관점을 고정시키게 되면 아무런 상대성도 없게 된다.

(2) 도구주의적 해석의 기본 전제가 이념적인 것과 실재적인 것의 대비라고 할 때, 이를 비판하는 한 가지 좋은 전략은 이 둘 사이에 도구주의적 해석을 내세우는 사람들이 말하는 그런 차이가 존재하지 않는다고 주장하는 것이다. 아마 이념적인 것인지 여부가 이론이나 관점에 상대적이라는 주장을 통해서 사람들이 궁극적으로 의도하는 것도 바로 이런 점이라고 볼 수도 있을 것이다. 그렇다면 그 구분은 어떻게 이해되어야 한다는 말인가?

할렛은 다음과 같이 말한다.

> 이 이론[이념적 요소의 이론]에 따르면, 이념적 확장은 올바른 수용가능성 조건이 적용된다고 한다면, 확장되는 이론만큼이나 유의미하다 [9, pp. 239–240].

> 일단 새로운 개념이나 '이념적 요소' 또는 새로운 이론적 용어가 받아들여지고 나면, 그것들은 어떠한 이론적 실재도 존재한다는 그 의미에서 그것들도 존재한다 [9, p. 239].

우리는 앞서 도구주의적 해석을 주장하는 사람들은 이념적 명제와 실재적 명제가 전자는 무의미한 반면 후자는 유의미하다는 점에서 대조되는 것으로 간주했음을 보았다. 그런데 할렛은 지금 여기서 이념적 명제도 실재적 명제처럼 유의미하다고 볼 수 있으며, '이념적 대상' 도 유한적 대상처럼 존재한다고 볼 수 있음을 말하고자 하는 것 같다. 결국 이념적인 것과 대조되는 것의 구분은 그다지 선명하지 않다는 것이다.

할렛은 여기서 좀 더 나아가 힐버트의 입장을 더 적극적으로 이해하고자 한다. 그래서 그는 힐버트의 입장을 "존재와 진리 등에 관한 도구주의적 불가지론의 일종" 으로 볼

9) 물론 유한적 관점의 범위가 정확히 어디까지인지는 학자들 사이에서도 논란거리이다. 하지만 우리 논의에서 그 점을 확정지어야 하는 것은 아니다. 유한적 명제와 이념적 명제의 정확한 경계선이 어디든, 우리에게는 유한적 관점을 벗어난 명제들이 존재하기만 하면 된다. 이와 관련된 국내 논의로는 [1, 2]를 참조.

것이 아니라 도리어 “그런 문제에 대한 비회의주의적이고 적극적인 해결책을 제공하고자” [9, p. 239] 한 것으로 보자고 주장한다. 앞서 박준용이 “힐버트가 수학이론의 이념적 요소에 도구적 의의만 부여했다는 주장” [3, pp. 195–196] 이 잘못이라고 말할 때 그도 비슷한 점을 염두에 둔 것으로 보인다. 이렇게 보기 때문에 이들은 도구주의적 해석을 지지하는 사람들이 통상적으로 드는 다음 대목은 다르게 이해되어야 한다고 주장한다.

> 각각의 개별 식이 그 자체로 해석 가능해야 한다는 점을 보편적 요건으로 삼는다면 그것은 결코 합당하지 않다. 도리어 이론이란 본성상 어떤 논증 과정에서 직관이나 의미로 되돌아갈 필요가 없는 것이다. 물리학자가 이론에 대해 정확히 요구하는 것이라고는 오로지 추론에 의해서, 따라서 다른 외적인 고려를 할 필요 없이 순수한 식들의 게임에 근거해, 자연 법칙이나 가설로부터 특정 명제를 도출할 수 있어야 한다는 것뿐이다. 물리 법칙의 일부 조합이나 귀결만이 실험을 통해 검사될 수 있다. 이는 마치 나의 증명 이론에서 실재적 명제만이 직접적으로 검증될 수 있는 이치와 같다 [13, p. 475].

전형적인 도구주의적 해석에 따르면, 물리학에서의 양자나 전자와 같은 이론적 실재는 직접 경험적으로 검증될 수는 없지만 도구적 필요성 때문에 용인된다. 힐버트는 위의 글에서 수학적 진술을 두고서 이런 도구주의적 견해를 제시한 것으로 보통 이해된다. 하지만 도구주의적 해석을 반대하는 사람들은 이를 다른 식으로 읽고자 한다. 그들은 여기서 힐버트의 요지는 이념적 명제가 도구적 성격만을 갖는다는 것이 아니라, 도리어 이념적 명제도 일단 일관성이 증명되면 다른 명제들만큼이나 근거가 있는 명제로 여겨질 수 있다는 것을 말하는 것으로 이해하고자 한다.

나는 이런 견해차는 사실 강조점의 차이에 지나지 않는다고 본다. 두 견해는 요지를 서로 다르게 이해하고자 할 뿐이다. 만약 일관성이 증명된 이후라면, 이념적 대상이나 이념적 명제도 이미 정당성이 확보된 다른 것들과 지위가 크게 다르지 않다고 말할 수 있을 것이다. 하지만 그런 점이 확보되지 않았다면, 그것들은 도구적인 혹은 잠정적인 지위를 지닌다고 여전히 말할 수 있을 것이다. 결국 정당성이 입증된 이후 그것들이 지니는 지위의 성격에 초점을 맞추느냐 아니면 그 이전에 그것들이 지니는 지위의 성격에 초점을 맞추느냐의 차이일 뿐이라고 할 수 있다. 이런 점에서 두 번째 비판 또한 도구주의적 해석에 대한 강력한 비판일 수 없는 것으로 생각된다.

(3) 우리가 앞에서 살펴본 비판은 이념적 명제도 유의미하다고 말할 수 있다는 점에서 실재적 명제와 큰 차이가 없다는 것이었다. 이번에 살펴볼 비판은 이와는 반대로 이

념적 명제가 무의미하듯이, 실재적 명제도 무의미하다고 말할 수 있음을 지적하는 방안이다.

우리가 이미 앞에서 보았듯이, 이념적 명제는 실재적 명제와 대조적으로 무의미하다는 힐버트의 명시적 언급에도 불구하고, 이런 입장이 과연 가능할까? 그런데 우리는 힐버트의 저작에서 이런 해석의 여지가 있는 대목을 발견할 수 있다.

이를 설명하려면, 먼저 우리가 앞에서 말한 바 있는 힐버트의 "기본적인 철학적 입장"을 주목할 필요가 있다. 그 입장에 따를 때, 수 이론의 대상은 숫자 자체이며, 그것은 그 자체로 아무런 의미도 갖지 않는 것으로 이해된다. 그래서 힐버트는 다음과 같이 말한다.

> 수 이론에서 우리는 숫자 1, 11, 111, 11111 를 갖는데, 각각의 숫자는 1 다음에 또 1 이 나온다는 사실에 의해 지각적으로 인식가능하다. 우리 탐구의 대상인 이들 숫자는 그 자체로는 아무런 의미도 지니지 않는다 [12, p. 377].

그런데 수 이론에서의 탐구 대상에 대한 이런 성격 규정을 힐버트는 증명이론의 탐구 대상인 식의 성격에도 고스란히 투영하는데, 이 점이 우리 논의에 중요한 의미를 지닌다.

> 숫자가 있던 곳에 지금은 식이 있다. 이 식들은 구체적 대상들로서, 이것들은 우리의 지각적 직관에 의해 파악되며, 일정한 규칙에 따라 한 식으로부터 다른 식을 도출하는 일이 내용에 근거한 수 이론의 증명 자리를 대신 차지하게 된다 [13, p. 469].[10)]

그러므로 힐버트에 따르면, 증명이론의 식들도 숫자처럼 '구체적 대상'으로 이해된다. 만약 그의 말대로 수 이론에서의 숫자의 자리를 차지하던 것이 정확히 식이라고 한다면, 우리는 이제 숫자가 그 자체로 아무런 의미도 지니지 않듯이, 식도 아무런 의미를 지니지 않는다고 말할 수 있을 것이다. 이렇게 된다면, 식들 가운데 일부는 이념적 명제이고, 이것이 유한적 명제와 대비된다는 도구주의적 해석의 기본 전제도 힘을 잃게 되는 것으로 보인다.

그러면 무엇이 잘못된 것인가? 힐버트는 유한적 명제와 달리 이념적 명제는 아무런 의미도 갖지 않는다는 주장을 포기한 것인가? 증명이론의 식도 숫자처럼 구체적 대상으로 이해된다는 주장은 식들 가운데 일부는 아무런 의미도 갖지 않는 이념적 명제라는 주장이 나오는 글에 같이 나온다. 따라서 우리는 힐버트가 중간에 입장을 바꾸

10) 또한 [12, p. 379]도 참조.

었다거나 단순히 무언가를 혼동했다고 말할 수는 없다. 도리어 힐버트가 서로 다른 어떤 측면에서 이들에 대해 달리 서술한 것이라고 보는 것이 더 합당할 것이다.

아마 이를 이해하는 실마리를 우리는 다음과 같은 서로 상충되어 보이는 힐버트의 주장을 이해하는 방안에서 찾아볼 수 있을 것 같다. 이미 드러났듯이 힐버트에 따를 때, 가령 숫자 11는 그 자체로 아무것도 의미하지 않는다. 그러면서 힐버트는 이런 기호들 이외에 무엇인가를 의미하고 정보를 전달하는 역할을 하는 기호들이 초등 수이론을 전개하는 데 필요하다고 말하고, 그런 예의 하나로 기호 11의 약어인 2를 들고 있다 [12, p. 377]. 이는 언뜻 보면 이해하기 힘들다. 만약 11가 그 자체로 아무런 의미도 갖지 않고, 기호 2는 11의 약어일 뿐이라면, 2도 아무런 의미를 갖지 않는다고 말하는 것이 자연스러워 보이기 때문이다. 그런데 힐버트는 2는 무언가를 의미하며, 정보를 전달하는 역할을 한다고 본다.

이를 어떻게 이해할 수 있을까? 한 가지 제안은 다음과 같다. 힐버트가 숫자나 식이 아무런 의미도 갖지 않는다고 할 때, 그 말은 그것들이 지닌 통상적 혹은 전통적 의미를 지니지 않는다는 뜻이다. 가령 2는 짝수라거나 1의 후자라거나 등과 같은 통상적인 속성을 갖지 않는다는 점에서 아무런 의미를 갖지 않는다고 말할 수 있다. 반면 2는 이제 그가 말한 철학적 입장에 따라 원초적으로 주어지는 '논리 외적인 구체적 대상'이 지녀야 하는 그런 특성을 갖는다는 점에서 의미가 있다고 할 수 있다. 식을 두고서도 같은 이야기를 할 수 있을 것이다. 식들은 순수한 구문론적 대상으로 여겨진다는 점에서 본다면 통상적 의미를 갖지 않는 것이며, 그런 점에서 의미를 갖지 않는다고 할 수 있다. 반면 그 식은 진정한 수학을 형식화한 것이기 때문에[11)] 의미를 지닌 것이라고 할 수 있다. 다만 이 경우에도 그것이 표현하는 내용이 유한적 방법에 의해 정당화되는 것이라면 실재적 명제라고 할 수 있겠지만, 그렇지 않다면 이념적 명제라고 할 수 있을 것이다.

결국 이상의 논의를 통해볼 때 우리는 이념적 명제뿐만 아니라 식들이 모두 무의미하다고 말할 여지가 있지만, 그것은 다른 관점에서 그렇게 말할 수 있는 것임을 알 수 있다. 따라서 이 점이 도구주의적 해석의 기본 전제인 유의미한 실재적 명제와 무의미한 이념적 명제의 구분을 무너뜨리는 것은 아니라고 할 수 있다.

4 나가는 말

앞에서 나는 힐버트를 도구주의자로 간주하는 데 반대하는 논거들을 세 가지로 나누어 살펴보았다. 이상의 논의를 통해 나는 이 가운데 어느 것도 그런 해석을 포기할 만큼 강력한

11) 그는 식들이 사상의 '그림자' 혹은 '복사물' 이라는 표현을 자주 한다. [11, p. 1139] 및 [13, p. 465] 참조.

논거로 보기 어렵다는 점을 보였기를 바란다. 따라서 힐버트 프로그램 시기의 힐버트의 사상을 도구주의로 보는 견해는 여전히 유지될 수 있을 것으로 보인다.

참고 문헌

1. 박정일, 「힐베르트의 프로그램에 관하여(I)」, 철학 59(1999), pp. 249–278.
2. 박정일, 「유한주의와 철학적 해석」, 논리연구 4(2000), pp. 37–62.
3. 박준용, 「힐버트 형식주의와 이념적 방법」, 철학연구 43(2011), pp. 157–202.
4. 박창균, 「20세기 수학의 패러다임」, 수학사학회지 9(1996), No.2, pp. 22–29.
5. 이종권, 「수학적 형식주의의 전개 과정(I)」, 철학탐구 11(1999), pp. 167–201.
6. M. Detlefson, *Hilbert's Program*, Reidel, 1986.
7. W. Ewald, ed., *From Kant to Hilbert*, vol. 2, Oxford Univ. Press, 1996.
8. M. Giaquinto, "Hilbert's Philosophy of Mathematics," *British Journal for Philosophy of Science*, 34(1983), pp. 119–132.
9. M. Hallett, "Physicalism, Reductionism and Hilbert", *in Physicalism in Mathematics*, ed. A. D. Irvine, Kluwer, 1990, pp. 183–257.
10. D. Hilbert, "The New Grounding of Mathematics"(1922), *in Ewald*, pp. 1115–1134.
11. D. Hilbert, "The Logical Foundations of Mathematics"(1923), *in Ewald*, pp. 1134–1148.
12. D. Hilbert, "On the Infinite"(1925), *in van Heijenoort*, pp. 367–392.
13. D. Hilbert, "The Foundations of Mathematics"(1927), *in van Heijenoort*, pp. 464–479.
14. D. Hilbert, "The Grounding of Elementary Number Theory"(1931), *in Ewald*, pp. 1148–1157.
15. P. Kitcher, "Hilbert's Epistemology," *Philosophy of Science* 43(1976), pp. 99–115.
16. M. Potter, *Reason's Nearest Kin*, Oxford Univ. Press, 2000.
17. M. Resnik, *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Cornell Univ. Press, 1980.
18. S. Shapiro, *Thinking about Mathematics*, Oxford Univ. Press, 2000.
19. W. Sieg, "Reflections on Hilbert's Program," *in Acting and Reflecting*, W. Sieg, ed. Kluwer(1990), pp. 171–182.
20. van Heijenoort, ed., *From Frege to Godel*, Harvard Univ. Press, 1967.
21. R. Zach, Hilbert's Program, `http://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/(2003)`.

최원배 한양대학교 정책학과
Department of Policy, Hanyang University
E-mail: wonbaechoi@hanmail.net