

배중률을 둘러싼 구성주의의 두 입장 비교

A Comparing Study of Two Constructivisms on L.E.M.

오채환 Oh Chae-Hwan 강옥기 Kang Ok-Ki 이상욱 Ree Sang-Wook

20세기 초반에 등장한 수학기초론의 주류 세 학파(직관주의·논리주의·형식주의)는 상호 대립관계를 보인다. 큰 틀에서 볼 때, 논리주의는 프레게를 계승하는 입장이다. 이와 대립관계의 기초론 중 하나인 직관주의는 구성주의 수학철학의 주축으로 평가된다. 그리고 직관주의가 터를 닦은 구성주의 수학철학을 후속 개진시킨 주역은 의미론적 반실재론을 주창한 마이클 더밋이다. 따라서 외형상으로는 더밋이 직관주의를 계승하는 후계세대처럼 여겨질 수 있지만 그의 철학적 기반은 분명 프레게이다. 더밋이 논리주의가 아닌 직관주의 계열에 합류한 사실의 속내는 구성주의 내부의 두 입장(즉, 직관주의와 반실재론)이 보이는 배중률을 둘러싼 태도의 드러난 일치뿐만 아니라 가려진 차이까지 헤아려질 때 해명될 수 있다고 본다. 본고는 이런 해명을 통해 구성주의 수학철학에 대한 이해도 한층 더할 수 있다는 판단에 따른 제안적 노력이다.

Constructionists believe that mathematical knowledge is obtained by a series of purely mental constructions, with all mathematical objects existing only in the mind of the mathematician. But constructivism runs the risk of rejecting the classical laws of logic, especially the principle of bivalence and L. E. M. (Law of the Excluded Middle). This philosophy of mathematics also does not take into account the external world, and when it is taken to extremes it can mean that there is no possibility of communication from one mind to another.

Two constructionists, Brouwer and Dummett, are common in rejecting the L. E. M. as a basic law of logic. As indicated by Dummett, those who first realized that rejecting realism entailed rejecting classical logic were the intuitionists of the school of Brouwer. However for Dummett, the debate between realists and anti-realists is in fact a debate about semantics — about how language gets its meaning. This difference of initial viewpoints between the two constructionists makes Brouwer the intuitionist and Dummett the semantic anti-realist.

This paper is confined to show that Dummett's proposal in favor of intuitionism differs from that of Brouwer. Brouwer's intuitionism maintained that the meaning of a mathematical sentence is essentially private and incommunicable. In contrast, Dummett's semantic anti-realism argument stresses the public and communicable character of the meaning of mathematical sentences.

Keywords: 구성주의(constructivism), 직관주의(intuitionism), 반실재론((semantic anti-realism), 배중률(L. E. M.), 브라우어(Brouwer), 더밋(Dummett)

1 들어가는 말

수학철학에서 구성주의(constructivism)가 개진된 역사를 거시적 관점과 미시적 관점으로 나눠볼 때, 전자 즉 거시적 관점의 역사를 칸트를 기점으로 삼는다면 후자 즉 미시적 관점의 역사는 브라우어(Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881~1966)와 하이팅(Arend Heyting, 1898~1980)으로 이어지는 직관주의와 이에 대한 마이클 더밋(Michael Dummett, 1925~)의 이례적인 합류를 기점으로 삼을 수 있다 [4, pp. 29-52]. 여기서 더밋의 합류를 ‘이례적’이라고 표현한 이유는 그의 철학이 전체적으로는 논리-언어적 방법에 바탕을 둔 프레게(Friedrich Ludwig Gottlob Frege, 1848~1925)를 계승하고 있는데, 푸앵카레(Jules-Henri Poincaré, 1854~1912)가 직관주의의 선구이듯이 프레게는 논리주의의 선구이기 때문이다.

한편 수학교육 영역에서는 근원적 뿌리를 수학철학의 구성주의와 공유하면서도 교수-학습방법의 입론에 초점을 맞춘 독자적인 양상의 구성주의가 상대적으로 최근 들어 개진되어 왔다 [4, pp. 29-31]. 이런 구성주의는 주로 교육 및 심리학적 인지이론에 기반을 둔 몇 가지 학설들로서, 수학철학이라기보다는 ‘수학교육철학’이라고 구분해서 불리는 것이 마땅해 보인다. 특히 수학교육의 흐름이 학습자 중심인 창의성·자기주도·자기성찰·문제중심·문제해결·상황체험 등의 학습을 강조하게 되는 현실을 반영하듯 수학교육철학으로서의 구성주의는 마치 하나의 새로운 대안적 패러다임처럼 수용되고 있다 [3]. 이에 비례해서 이론의 성급한 실천적 적용을 자성하며 인식론으로서의 구성주의와 교수-학습론으로서의 구성주의를 포괄하는 보다 철저한 검토 또한 요청되고 있다 [2, pp. 79-81]. 이처럼 수학교육의 관점에서 수학철학의 구성주의에 대한 검토·논의는 학문적 당위로 여겨진다.

본고에서는 수학철학에서의 구성주의의 위상 및 성격을 보다 정확히 이해하기 위한 일환으로 미시적 관점의 구성주의 수학철학의 역사 중에서도 그 기점이 되는 ‘직관주의와 마이클 더밋의 합류’ 대목의 검토에 집중한다. 일견 배경 학문적 혈통이 판이해 보임에도 불구하고 양자의 합류를 가능하게 했던 핵심 연결고리는 잘 알려진 대로 이가논리와 배중물을 둘러싼 태도의 일치이다. 이에 본고에서는 양자의 일치된 궤보기 태도 이면에 가려진 속내의 차이는 없는지 살피는 것을 제한된 목표로 삼는다. 만일 차이가 발견된다면 그것은 후속 전개된 구성주의 수학철학의 추이에서도 지속적인 논의의 요체로 작용할 수 있기 때문이다.

2 미시적 관점의 구성주의 배경구도

수학철학에서의 구성주의의 위상 및 성격을 보다 정확히 이해하기 위해서는 특히 미시적 관점에서의 20세기 전반에 제기된 수학기초론의 주류를 이룬 세 학파, 즉 논리주의, 직관주의, 형식주의 간의 관계구도를 미리 상술할 필요가 있다. 그 이유는, 수학철학에서의 구성주의가 본격적으로 개진되는 중요세기 중 하나가 직관주의로부터 검증가능성 논제(verifiability thesis)를 통해서 이행 전개된 반실재론(antirealism)이기 때문이다; 그 주역인 마이클 더밋에게 결정적 영향을 준 프레게가 실은 논리주의에 보다 큰 영향을 주었을 뿐만 아니라 형식주의와도 무관하지 않은 실재론 계열의 인물이기 때문인 것이다. 어찌 보면 프레게는 수학기초론 세 학파 모두에게 영향을 준 셈이다. 이 사실이 구성주의 철학 역사의 상술에서 가다를 잡기 어렵게 하기도 하지만, 역으로 이 자체를 논의의 전기로 삼으면 전반적인 구도에 대한 일목요연한 정리의 실마리를 제공할 수도 있을 것이다. 이 때 복잡하게 얽히는 관계의 구도를 다소라도 간명하게 파악하는 방법은, 어느 정도 뚜렷했던 프레게와 직관주의의 대립적 면모가 나중에 더밋의 등장으로 인해서 더욱 여러 갈래 성격으로 얽히게 된다는, 큰 얼개를 미리 염두에 두는 것이다. 실제로 본고 역시 논의 기술을 다소라도 간명하게 전개하기 위해 더밋의 등장 이전의 구도를 먼저 집중해 본다. 이런 이유로 해서 함께 고려해야 할 당시의 여러 단편적 모습들은 다음과 같다.

2.1 더밋 이전의 관계 구도

수학을 논리학으로 환원시키려는 프레게의 시도가 (비록 러셀 패러독스의 발견으로 막바지에 중단되었지만) 직관주의를 일으킨 브라우어에 맞서는 논리-언어중심의 수학철학 학파에 의해 공유된 것이 사실이다. 하지만 이런 단정에는 주의 깊은 첨언이 필요하다. 왜냐하면 프레게의 시도는 브라우어의 직관주의 못지않게 힐베르트(David Hilbert, 1862~1943)의 형식주의에 대해서도 대립되는 입장을 보였기 때문이다. 실제로 프레게는 어떤 수학적 존재를 입증하기 위해서라면 무모순성의 증명만으로, 즉 공준들이 모순으로 인도되지 않는다는 것을 증명하는 것만으로는 충분하지 못하다고 하면서 형식주의에 대한 반대를 분명히 했다 [6, p. 152]. 그리고 힐베르트의 형식주의에 대한 이런 성격의 반대는 브라우어의 직관주의 진영에서도 똑같이 표명한 바 있다 [7, p. 79].

한편, 프레게는 수학적 대상의 객관적 존재를 믿으며, 수학적 진리에 대한 탐구를 독립적으로 존재하는 대상의 객관적 속성에 대한 탐구로 이해한다는 점에서 확실히 실재론자다. 한 마디로 프레게는 이성을 통해서 발견할 수 있는 세계의 논리적 구조가 있다고 믿는다. 이는 분명 프레게의 실재론자로서의 면모이다. 이에 비해 형식주의자들은 프레게처럼 실재론자임을 적극적으로 드러내기를 유보하는 대신, 특성상 수학적 진리가

형식적 체계의 도출 가능한 결과에 있을 뿐이라고 생각한다.

직관주의자들은 수학이 정리의 도출을 위해 사용되는 언어와는 구분되는 자체적 체계와 의미를 지닌다는 프레게의 입장에 동의하는 반면에, 그들은 이 체계와 의미가 우리의 ‘구성적 활동’의 결과라고 본다.¹⁾ 직관주의를 대표하는 브라우어는 “인간의 사고 밖에는 수학적 진리란 없다”고 단언한다 [5, p. 6]. 인간은 본성적으로 순서를 창조하고, 측정과 계산 법칙은 인간의 활동에 근거한다는 것이다 [7, p. 124]. 여기서 특기할 점은 브라우어의 정신주의적 요소만 빼고 나면 그것은 비트겐슈타인의 활동으로서의 수학이라는 입장과 일치한다는 점이다.

프레게의 실재론을 해석하는 방법이 논리적 진리의 본성을 이해하는 데에서 구현된다는 주장은 충분히 가능하다. 이 주장에 따르면 수학적 진리와 논리적 진리는 객관적으로 존재하는 개념들 간의 상호 교차관계에 있으며, 이는 프레게가 결코 고전논리학의 타당성을 의심하지 않았다는 평가와도 잘 부합한다. 여기서 프레게가 브라우어와는 (물론이고 더뒀고) 구별되는 결정적인 입장 차이를 보인다. 프레게와 달리 브라우어는 (물론이고 더뒀도) 고전논리의 기본법칙인 이가논리(bivalence)와 배중률(Law of the Excluded Middle) 적용의 제약을 요구했기 때문이다. 이런 요구는 논리적 원리가 독립적으로 존재하는 실재에 대한 지식을 제공한다는 프레게의 신조에 반하는 것이다.

고전논리를 가정한다는 점에서는 형식주의자들도 프레게와 같은 입장에 서있다. 그런데 형식주의자들은 가정의 지위에 대해서 좀 더 다양한 특징을 보인다. 고유의 오랜 전통을 가지고 있는 그들은 각각의 형식적 구조를 정립하는 도출규칙을 고전적 추론양식으로부터 제공받았다. 하지만 중요한 것은 비-고전논리에 대해서도 형식주의적 입장을 취하는 것이 가능할 뿐만 아니라, 그렇게 도출된 언어를 위한 형식적 의미론을 개발하는 것도 가능하다는 점이다. 다시 말해, 형식주의는 그 논리가 고전논리에의 배타적 국한성을 보이지 않는다. 이러한 점에서 형식주의자들은 프레게의 입장과 차이를 보인다.

이상에서 살핀 더뒀 등장 이전의 구도를 정리하면 다음과 같이 요약된다.

- 1) 수학과 논리학의 관계에서 프레게와 형식주의자는, 논리적 본성을 이해하는 데 있어서 차이가 있지만, 수학이 논리학의 분과라는 견해의 큰 틀을 공유한다.
- 2) 그러나 이 관계에서, 직관주의를 대표하는 브라우어는, 수학이 논리학과는 별개임을 주장하며 프레게와 형식주의자들에 반대하는 독자적 태도를 분명히 견지한다.
- 3) 한편, 수학적 진리가 오직 형식적 체계에만 관련된 진리인지 여부에서는 프레게와 직관주의자가 함께 이에 대한 부정적 입장을 공유하며 형식주의에 반대한다. 바꿔 말하면 ‘수학명제는 자체적 체계와 의미를 지닌다.’는 점에 있어서만큼은 프레게와

1) 보다 상세한 직관주의의 기본입장은 [12, pp. 84-85]에 요약·정리되어 있다.

직관주의자가 공통이다.

- 4) 반면에 프레게는 논리주의적 실재론자로서 직관주의자와는 대립 또한 두드러지는데, 그것은 이가논리와 배중률의 적용여부이다. 프레게는 제약 없는 적용을 하는 데 비해 직관주의 진영에서는 그 엄격한 제약을 그들의 모토로 삼는다. 프레게와 마찬가지로 고전논리를 가정하는 형식주의 역시 이가논리와 배중률을 제약하지 않음은 물론이다.

2.2 더밋을 포함한 관계 구도

더밋의 수학철학이 프레게의 연구에서 출발했다고 해도 과언이 아닐 정도로 프레게가 더밋에게 미친 학문적 영향은 매우 크다. 그럼에도 불구하고 더밋의 수학철학이 프레게를 계승한 논리주의가 아닌, 직관주의와 밀접하게 연관된다는 사실 자체가 뜻밖일 수 있다. 왜냐하면 (시기적으로는 나중에 개입되긴 했지만 입장의 위치상) 중간의 더밋을 팔호치고 나면, 앞서 확인한 것처럼 수학적 진리에 관한 프레게의 태도와 직관주의의 입장은 여러 모로 정반대이기 때문이다. 브라우어의 제자 하이팅의 보고 [7, pp. 123-138]에 따르면, 직관주의의 브라우어는 언제나 형식주의의 힐베르트와 논리주의의 러셀을 함께 특징짓는 논리-언어적 방법을 직관주의의 선구자(예컨대 푸앵카레) 및 그 계열의 태도와 대립되는 것으로 대별시키곤 했다.

프레게가 수학을 논리학으로 환원시키고자 시도했던 것은 분명한 사실이며, 그의 시도는 우리로 하여금 그를 논리-언어적 방법을 추구하는 계열, 즉 논리주의의 선구로 여기게끔 하는 것처럼 보인다. 또한 더밋은 프레게가 수학에 관한 우리의 사고를 명료화하기 위한 열쇠로 언어분석을 채택했음을 인정한다.

이에 반해 브라우어가 표명한 ‘직관주의의 최초 작업’의 내용은 다음과 같이 기술된다.

시간운동²⁾ 으로부터 그 기원을 가지는 직관주의 수학은, 수학을 수학언어로부터 완전히 분리하고 이론 논리학에 의해 기술되는 현상으로부터도 분리하면서, 본질적으로 언어 없는 정신적 활동이라고 인식하는 바이다 [5, p. 4].

사실, 직관주의의 최초 동력은 수학적 진리의 원천을 지각의 범주에 있는 것으로 보는 칸트의 시각에서 비롯된 것인데, 이는 더밋의 표현법에서 핵심을 차지하는 언어적 관심과는 분명히 관계가 없다. (더밋의 저작들에서 보이는 언어적 경향성은 오히려 비트겐슈타인의 영향에서 유래한다고 보는 것이 훨씬 더 타당해 보인다.) 이미 언어 중심의 환경에서 성장한

2) 브라우어는 수학이 선형적 직관에 의한 선천적 종합판단이라는 칸트의 철학을 수용했다. 그러나 그는 비유클리드 기하학의 출현으로 공간에 관한 한 선형적 직관은 주장할 수 없게 되었음을 인정했다. 대신 그는 시간의 선형적 직관을 강조함으로써 수학에 대한 칸트의 입장을 구출했다 [7, pp. 551-552].

더밋은 실재론과 직관주의 간의 논쟁이 의미이론(semantic) 내의 차이에서 유래하는 것임을 파악하고서, 존재에 관한 문제가 의미에 관한 언어의 문제로 변형될 수 있음을 강조했다. 바로 이 점이 더밋이 직관주의로부터 반실재론을 개진하는 출발점이 되었지만, 이는 어디까지나 존재론 중심인 브라우어의 입장과는 확연히 다르다는 사실을 유념할 필요가 있다.

이상의 단편적 모습들을 통해 읽혀지는 관계구도는 프레게로부터 출발하는 더밋이 직관주의와 밀접하다는 사실을 뜻밖으로 여기기에 충분해 보인다. 여기서 우리는 ‘수학문장은 자체적 의미를 가진다’는 점에 있어서만큼은 프레게와 직관주의자가 공히 인정한다는 사실에 주목하자. 그리고 그런 주목을 누구보다 더밋이 집중했음을 상기할 필요가 있다. 더밋은 이 점을 매우 중요하게 인식하고 있었고, 다만 논리학의 지위에 관한 두 입장의 차이를 강조하지 않았을 따름이다 [1, p. 164].

여기서 우리는 더밋의 두 입장 간의 차이에 대한 인식이, 직관주의도 역시 수학을 논리학의 일부로 간주하는 큰 틀은 공통이지만, 실재의 구조를 기술하는 논리학에 한해서만 직관주의가 프레게에 동의하지 않는다는 정도로 축소해석된 것은 아닌가 하는 추측을 하게 된다. 왜냐하면 수학에서 배중률이 실패하기 때문에 적용을 거부한다는 주장은 수학적 실재의 구성활동이라는 구체적인 사안의 특성에 기초할 때 한해서 제기되기 때문이다. 이에 관한 브라우어의 설의법에 가까운 질문은 이를 뒷받침한다. “직관주의적 수학연산의 실행에서 고전논리를 맹목적으로 적용하면 실제 언어와 무관한 수학적 절차를 동반하는가?” [5, p. 5] 이어지는 브라우어의 준비된 대답은 당연히 그렇다는 것이고, 이로부터 그는 수학적 구성 실행의 구체적인 영역에서 배중률의 무차별 적용에 문제가 있다는 주장을 일관되게 펼친다.

요약하면, 직관주의와는 학문적 혈통이 다르다고 볼 수 있는 더밋이 직관주의와 공조를 이루게 된 요인도 바로 브라우어가 배중률의 적용제한을 일관되게 주장했기 때문이다. 또한 이로부터 배중률의 적용배제와 직관주의는 마치 불가분의 등식처럼 각인되다시피 했으며, 이후 전개되는 구성주의 역시 꾸준히 같은 맥락을 유지한다.

3 브라우어의 직관주의와 더밋의 반실재론 비교

3.1 배중률 문제 일람

앞서 밝혔듯이, 두 입장의 비교를 위해서는 이가논리와 배중률에 관련된 쟁점들을 따로 일별해서 비교해볼 필요가 있다. 더욱이 배중률과 관련된 논의에서 간단한 쟁점의 본질을 놓치는 경우가 종종 있어 보인다. 그래서 먼저 비근한 일상적 예로부터 정리해보겠다. 흔히 듣는 주변의 예들은 의외로 많다. “엄마가 좋아, 아빠가 좋아?”, “자장면이 좋아, 짬뽕이 좋아?”, “물에 빠진 남자 친구와 여자 친구 중 누구를 구할래?” 이런 질문은 이가논리(bivalence)를 요구한다. 물론 이런 질문이 참/거짓을 판정하는 인식론적 요구를 하는 것

은 아니라서 그 성격이 수학적인 경우와 다르긴 하지만, 선택지가 둘밖에 없다는 점에서 근본적으로 이가논리의 적용을 요구한다. 이런 일상적 질문은 대개 이가논리의 요구에도 불구하고 그 적용이 난감한 형태로서, 대부분 우물쭈물하며 대답을 망설이게 된다. 그러면 으레 썰기를 박는 조항이 추가된다. “반드시 둘 중 하나만 고를 것. 다른 선택은 없음!” 이 대목이 바로 배중률에 해당한다.

이런 질문에 대해 실제로 선택지 중 하나를 답한 사람은 이가논리 및 배중률을 따른 것으로 볼 수 있다. (물론 따르지 않으면서도 그런 선택은 할 수 있다.) 하지만 제3의 어떤 것을 제시한 사람은 배중률 이전에 이가논리 자체를 위배한 셈이다. 선택지를 임의로 늘렸기 때문이다.

정작 문제는, 이가논리는 위배하지 않으면서 배중률 수용에만 불만을 느끼는 사람의 대답으로 간주되는 유형도 있을 수 있다는 점이다. 이를테면 빙긋이 웃으며 침묵을 지키는 사람 A를 떠올려 보자. 그리고 관심의 초점을 돌려서, 우리가 A의 태도에 대한 판단을 하고자 한다고 가정하자. 여기에 A를 잘 안다고 자처하는 지인 ‘갑’이 나서서 다음과 같이 답한다.

(갑) “A는 엄마를 좋아한다.”

이 경우 갑의 주장에 대한 진위판정³⁾을 다음과 같이 할 수 있게 된다.

* A가 이가논리와 배중률을 모두 받아들여 적용한 사람이었다면, (A가 침묵했다고 해도), A가 이가논리를 적용했으므로 갑의 대답은 <반드시 참 또는 거짓 둘 중 하나>이다. 뿐만 아니라, A의 대답이 (침묵으로서) 참인지 거짓인지 실제로 확인되지는 않았을지라도, 택일 실행의 썰기를 박는 배중률이 적용되었기 때문에, 그것을 바탕으로 한 다음과 같은 주장도 반드시 참이 된다!

“갑의 주장이 참이면(즉 A가 엄마를 좋아하면) 엄마가 A에게 노트북을 사주고, 갑의 주장이 거짓이면(즉 A가 아빠를 좋아하면) 아빠가 A에게 노트북을 사준다고 했으므로, 어찌 됐든 A는 반드시 노트북을 갖게 된다.”

이것이 참이라는 사실이 당연해 보일지 모른다. 하지만 다음 경우를 보자.

* A가 이가논리는 적용하지만 배중률에는 불만을 느껴 수용하지 않은 사람이었다면, A가 이가논리를 적용했으므로 갑의 대답은 <반드시 참 또는 거짓 둘 중 하나>이다. 하지만 A의 대답이 (침묵으로서) 참인지 거짓인지 실제로 확인되지는 않았는데, 여기에 택일 실행의 썰기를 박는 배중률은 적용되지 않

3) A에게 물었던 질문의 성격은 진위판정이 아닌 심리적 선호판단이지만, 갑에게 물은 ‘A의 태도에 대한 판단’은 참/거짓을 판단하는 인식론적인 형태라는 점에서 수학적인 경우에 보다 가깝다.

왔기 때문에, 위 ‘A는 노트북을 갖게 된다.’ 는 주장이 반드시 참이 된다고 할 수 없다! 이 사실이 의아해보일지 모른다.

이런 의아함을 해소하기 위해서는 배중률의 적용을 망설이게 하는 불만이 어디에서 일어나는지 살펴볼 필요가 있다. 실제로 우리의 일상적인 사고관행은 ‘선택지가 둘로(혹은 유한한 개수로) 정해짐’ 으로부터 ‘그 중 어느 한 특정 선택지가 확정됨’ 으로 이행하는 데 별 거리낌을 느끼지 않는다. (그것은 아마도 배중률이 무의식중에 그 적용을 하게 될 정도로 자연스럽게 당연한 것으로 여겨진다는 증거일 것이다.) 하지만 여기에는 입장에 따라서 불만을 느낄 소지가 다분히 있으며, 그 불만의 진원지는 ‘선택지들이 정해짐’ 에서 ‘특정 선택지가 확정됨’ 으로 이행되는 사이에 있다. 그 사이에 ‘정해진 선택지들 중에서 특정 선택지가 확정되게 되어 있음’ 이라는 ‘이행보증규칙’ 이 빠져있다는 것이다. 바로 이 이행 보증규칙이 주지의 배중률이다.

3.2 배중률 문제를 통한 두 입장 비교

직관주의자들의 입장

배중률과 관련된 직관주의자들의 입장이란 어떤 것인지 수학적 예를 통해 보자. 가장 자주 다뤄지는 소재로는 골드바하의 추측이 있다. 골드바하의 추측 내용은 “모든 4 이상의 짝수는 두 개의 소수의 합으로 구성될 수 있다.”이며, “모든 6 이상의 자연수는 세 개의 소수의 합으로 구성될 수 있다.” 도 같은 내용의 표현이다. 이 내용이 배중률과 관련된 예로 자주 등장하는 이유는, 이름이 ‘정리가 아닌 추측’ 으로 불리는 이유도 되는 것으로서, 그 내용이 증명도 반증도 되지 않은 미결정상태이기 때문이다. (1995년 앤드류 와일즈가 증명을 완료하기 이전에는 ‘페르마의 마지막 정리’ 도 자주 소재로 다뤄진 ‘추측의 예들 중 하나’ 였다.) 이와 관련된 직관주의는 어떤 입장인가?

1) 직관주의자들이 골드바하 추측 자체를 수학적 ‘명제’ 로 간주했는지는 단언하기 어렵다. 다시 말해 골드바하 추측이 미결정상태이긴 하지만 ‘반드시 참 또는 거짓’ 이라는 이가 논리의 원리가 적용되는 주장으로 여겼는지는 판단하기 어렵다. 그 이유는 브라우어뿐만 아니라 하이팅이 보인 태도 역시 일관되지 않기 때문이다. 하지만 하이팅이 거부의 입장을 상대적으로 보다 분명히 했다고 볼 수 있다 [14, pp. 131-145].

2) 직관주의자들이 미결정상태인 골드바하 추측에 배중률이 적용될 수 없다고 본 것은 분명하다. 배중률 문제에 관한 한 직관주의자들이 보인 입장은 일관되어 보인다. 하지만 그 결과는 매우 어색해 보이는 것이 사실이다. 배중률의 적용을 거부한다는 것이 터무니없어 보이는 판단임을 확인할 수 있는 예는 쉽게 찾을 수 있다.

수 p 를 다음과 같이 정의하자.

$$p = \begin{cases} 3 & \text{골드바하의 추측이 참인 경우.} \\ 5 & \text{골드바하의 추측이 거짓인 경우.} \end{cases}$$

여기서 다음과 같은 간단한 질문을 한다. “ p 는 소수인가?” 이에 대해서 “그렇다”라고 답하는 것은 분명하고 자연스럽다. 3과 5는 둘 다 소수이기 때문에 골드바하의 추측이 참이든 거짓이든 상관없이 p 가 소수임은 자명한 사실인 것이다. 그렇지만 놀랍게도 직관주의자들은 이런 사실을 받아들이지 않는다 [8].

직관주의자들은 우리가 직관에 의한 구성적 증명을 보유하지 못하는 한 어떤 것을 단언할 수 없다고 본다. 여기서 구성적 증명이란 다음과 같은 것이다. 만일 p 가 실제로 소수라면 그것은 하나의 특정 소수여야 한다. 그 특정 소수가 3이라면 그것을 증명할 필요가 있다. 그렇지만 $p = 3$ 임을 증명하는 것은 오직 골드바하의 추측이 참임을 증명함으로써 얻을 수 있는데, 그것은 아직 우리가 할 수 없는 어떤 것이다. 또한 우리는 여전히 골드바하의 추측을 논박할 수도 없기 때문에 $p = 5$ 임도 증명할 수가 없다. 따라서 우리는 p 가 소수임을 보이는 구성적 증명을 가지지 못한 것이며, 결국 p 가 소수임을 단언할 수 없다는 것이 수학적 직관주의자들의 논리이다.

반실재론자들의 입장

명시적 용어로서 “반실재론”(anti-realism)이라는 용어의 효시는 50년대 후반에 마이클 더밋이 실재론에 관한 특정한 종류의 제약 혹은 유보(reservation)를 명시하기 위해 도입한 것이다 [15]. 원래는, 보다 명확한 신조를 명시할 수 있는 실재론과는 달리, 반실재론의 입장이란 특정된 철학신조가 아니고 실재론에 대한 거부 of 전반적 통칭이었다. 이런 이유로 반실재론은 세 가지 사항⁴⁾으로 요약될 수 있는 ‘형이상학적 실재론’에 대한 막연한 반대의 제약으로 여겨질 수 있었다.

하지만 더밋에 따르면, 반실재론의 실재론에 대한 일련의 제약은 상대적으로 뚜렷한 특징을 보여주는 것으로서, 실재론의 가장 핵심적인 논제를 이루는 것에 대한 반론에 집중된다. 실재론의 그런 핵심논제는 이가논리의 원칙 즉, 모든 의미 있는 문장의 진술은 참이거나 거짓이라는 두 가지 진리 값 중 반드시 하나를 갖는다는 논리의 무제약적 수용이라는 것이 더밋의 판단이다. 어떤 존재의 실재여부는 그에 대해서 우리가 알건 모르건 상관없이 완전히 독립적으로 결정된다는 실재론자의 입장이 더밋에게는 모든 문장이 참이거나 아니면

4) 1) 세계는 인간의 마음으로부터 독립되어 있으며, 일정하게 고정된 양적 대상으로 이루어져 있다. (존재의 독립성) 2) 세계에 대한 참되고 완벽한 기술은 유일하다. (기술의 유일성) 3) 참(truth)은 말이나 생각을 나타내는 기호와 외적 대상 간에 성립하는 대응관계에서 찾을 수 있다. (진리의 대응성) - 퍼트남의 요약용 재인용. 배식한, 〈반실재론을 넘어서〉, 서울대학교출판문화원, 2009, p. 72 참조.

거짓이라는 의미론적(semantic) 원칙에 의해서도 잘 표현되는 내용이다. 따라서 더밋의(의미론적) 반실재론이란 바로 이와 같은 의미론적 실재론 원칙에 대한 거부인 것이다.

이로부터 더밋은 이가논리에 대한 거부와 그로부터의 실재론에 대한 거부가 고전논리의 유보를 이끈다고 주장한다. 또한 더밋은 그의 주장에서 핵심인 이가논리와 배중률 적용배제의 원천이 곧 수학적 직관주의라고 파악했다.⁵⁾ 더밋이 지적했듯이, 실재론의 거부가 고전논리의 거부를 수반한다는 사실을 처음 깨달은 사람은 브라우어 학파의 직관주의자들이었다. 직관주의자들은 기존의 고전수학을 밀반침하는 고전논리가 실재론자의 존재론적 가정을 끌어와서 그런 원리(이가논리)의 수용을 확고히 했다고 보았다. 하지만 직관주의자들은, 수학적 존재들은 정신의 구성물이라는 가정을 기초삼아, 수학적 명제가 참임은 각 개인의 정신이 그 명제를 증명할 수 있을 때 한해서라고 주장했다. 일단 형이상학적 가정의 거부와 더불어 이가논리의 원리가 거부되면(비록 배중률이 이가논리에 절대적으로 의존하는 것은 아닐 수 있지만) 배중률 적용을 가정할 근거가 없어진다. 따라서 이가논리의 원리를 거부하면 수학적 실재론뿐만 아니라 고전논리도 거부하게 된다. 이가논리가 배중률 문제로 이어지면서 중요한 쟁점이 되는 이유도 여기에 있다.

나아가 더밋은 수학명제의 의미에 대한 직관주의적 설명이 수학 이외의 다른 모든 분야의 담론에서도 유효한 형태의 반실재론적 원형이 될 것으로 믿었다. 이 점은 더밋이 직관주의에 단순 동조한 것이 아니며 더밋의 철학이 프레게의 논리-언어적 방법에서 출발했음을 드러내는 증거로서, 이런 더밋의 입장은 ‘그의 직관주의’ 표명이 특정분야의 담론에 제한되지 않는 의미와 이해의 고려를 바탕으로 삼고 있기 때문에 가능한 것이다. 이를 바탕으로 더밋과 브라우어의 직관주의 간의 성격 차이를 보다 구체적으로 확인해 보자.

3.3 두 입장의 공통점과 차이점

더밋이 직관주의를 선호했지만 그의 입장은 브라우어의 직관주의와 속내의 차이가 있다. 브라우어는 수학명제의 의미가 근본적으로 사적이며 상호소통이 불가능한 것이라는 입장을 인정했다. 그는 직관주의 수학적 구성에 대한 개인의 정신적 탐구라고 주장했는데, 이런 그의 생각은 다음과 같은 언급에서 확인된다:

“시작컨대, 직관주의의 첫 번째 강령은 수학을 수학언어로부터, 특히 이론적

5) 더밋이 이런 판단에 이르는 경위를 부연하면 다음과 같다: (배경학문이 수학이 아닌 철학자로서) 더밋은 언어의 문제에서 출발한다. 한 언어를 자유로이 구사하고자 하는 사람은 그 언어에서 사용되는 문장이 참이 되는 인식 초월적 조건을 알 필요는 없다. 따라서 의미이해를 위해 우리가 참을 필요로 한다면, 그것은 인식 초월적 조건에 따를 것이 아니라 검증주의적으로 해석된 참이어야 한다. 이 경우의 참은 인식 내적인 검증 절차에 의해 확정될 수 있는 참이며, 바로 이런 종류의 참을 설정하기 위해 더밋이 제일 먼저 제안하는 것은 불필요한 인식 초월적인 조건들을 미리 배제하는 것이다. 기존의 논리에서 인식초월적 성격을 지닌 대표적인 예가 바로 이가원리와 배중률이며, 그것을 배제하는 노력의 본보기로 더밋이 발견한 것이 브라우어의 직관주의였던 것이다. - 배식한, <반실재론을 넘어서>, 서울대학교출판문화원, 2009, pp. 71-80.

논리학에 의해 기술되는 언어현상으로부터 완전히 분리시키는 것이다. 그럼으로써 직관주의적 수학이란 근본적으로 언어 없는 (개인) 마음의 활동임을 깨닫는 것이다. ...” [16, pp. 139-146]

하지만 이와 대조적으로 더밋의 직관주의 논변은 수학기명의 의미에 대한 공적이며 상호소통 가능한 특성을 강조한다. 공적이며 일반화를 염두에 둔 반실재론의 범용 형태를 지지하는 논의가 수학으로부터 나오기 때문에 더밋의 반실재론 논증에 대한 분석은 맥락상 특별히 의의가 있다.

더밋에 따르면, 수학적 실재론과 직관주의 사이의 첨예한 불일치는 근본적으로 의미와 수학적 진리에 관한 ‘의미론적’ 불일치이다. 다시 말해 더밋은, 흔히 플라톤주의로 불리기도 하는 형이상학적 실재론이란 우리가 알고모르고와 무관하게 수학기명이 객관적인 진리값(참 혹은 거짓이라는)을 독립적으로 가짐을 주장하는 것이라고 표현한 바 있다. 따라서 실재론자에게는 수학기명의 의미가 그에 대한 증거를 우리가 소유하고 있는지 여부와 무관하다. 반면에 독립적으로 존재하는 진리의 객관성을 거부하는 반실재론 입장에서는 우리가 알 수 있으며 그것이 참임을 보이는 증거가 되는 어떤 것을 통해서만 수학기명이 참이 될 수 있다고 주장한다. 따라서 반실재론자의 경우 수학기명의 의미는 그에 대한 증명으로 무엇이 주어지느냐에 따라서 취해지며, 결과적으로, 의미론적 검증가능성에 의해 참으로 증명될 수 있는 명제들만 의미를 갖는다.

정리를 해보면 다음과 같다.

<공통점>

- 1-1) 브라우어의 직관주의와 더밋의 반실재론은 수학기명의 증명을 특별히 중시함이 공통이다.
- 1-2) 확실한 증명의 과정에서 관건이 되는 사안이 배중률의 적용배제인 점도 공통이다.

<차이점>

- 2-1) 직관주의의 경우, 기본 입각점이 ‘수학적 존재들은 정신의 내적 구성물’이라는 대전제에서 출발한다. 이로 인해 수학적 명제는 대외적으로 증명해 보일 수 있을 때 한해서 명제가 성립할 수 있기 때문에 증명이 특별히 중요하다. 이에 비해 더밋의 경우, 기본 입각점이 ‘수학적 존재들이 독립적 객관성을 가지고 있지 않다’는 반실재론적 대전제에서 출발한다. 이로 인해 우리가 알고모르고와 무관하게는 보장할 수 없는 수학기명의 진리여부를 확인해서 알아보아야 할 필요가 남아있기 때문에 증명이 특별히 중요하다. 직관주의의 출발이 인식주관의 내부 긍정이라면 반실재론은 외부 부정인 셈이다. (실행과정상 관건이 증명으로서 공통일 따름이다.)

- 2-2) 직관주의의 증명은 개인의 정신적 과정인 직관에 의한 존재론의 사적논증이지만, 더밋의 증명은 의미론적 검증가능성에 의한 인식론의 공적논증이다.
- 2-3) 직관주의의 경우, 증명과정에서 배중률 적용을 배제하게 되는 바탕에는 정신의 내적 구성능력에 대한(특히 브라우어의) 믿음이 자리 잡고 있다. 이에 비해 더밋의 경우, 수학적 존재의 유무가 수학적 명제 의미의 진위로 전환되는 그의 의미론적 반실재론에서, 의미의 검증가능성은 배중률(뿐만 아니라 이가논리까지) 적용의 배제를 함축하기 때문이다 [1, pp. 55-56]. (이 차이를 거칠게 표현하면 직관주의는 믿음이 있었기 때문에 배중률을 배제했고, 반실재론은 믿음을 확보하기 위해서 배중률을 배제해야 했다.)

특히, 배중률을 배제하는 직관주의 쪽의 바탕근거를 그들의 자신감으로 보게 하는 자료로는 다음과 같은 브라우어의 진술을 들 수 있다.

나에게 있어 유일한 진리란, 자아가 믿으며 자아에게 생명을 주는 일군의 이미 지들로 둘러싸여 있는 이 순간 나 자신의 자아(ego)이다. ... 이미지들은 나의 자아를 위해 존재하며 그런만큼 실재한다. 내 자아와 독립적이며 이 이미지들에 대응하는 이차적인 실재란 존재하지 않는다. 이 순간의 내 삶은 자아에 대한 나의 확신이며 내 이미지에 대한 나의 믿음이다 [14, p. 391] [13, p. 14].

4 나오면서

앞서 언급했듯이 직관주의는 수학적 본질적으로 언어와 무관한(languageless) 활동이며, 이는 사고가 언어와 독립적으로 존재한다는 신조를 가진다. 여기서 칸트의 선형적 직관을 강조함으로써 수학을 ‘자율적인 내부 구성적 정신활동’으로 규정한 브라우어는 다시 이것에 입각해 수학에서 경험되지 못하는 진리란 없으므로 배중률은 성립하지 않는다고 주장한다 [7, pp. 551-552]. 이는 뒤집어보면 궁색한 배중률의 적용을 굳이 추가할 필요가 없다는 자신감의 표현인 것이다.

이제 직관주의적 입장에서는 수학적 명제를 알기 위해서 혹은 수학을 하기 위해서라면 외부의 독립적 존재를 발견하는 것이 아니라 마음에 의해서 구성되는 일련의 정신적 과정에 참여해야 한다. 이 때 논리는 정신의 구성에 수반하는 언어적 구조물일 따름이다. 그러므로 정신의 내적 활동인 구성과 관련된 논리가 의미를 갖기 위해서는 그것을 수행하는 창조적 주관은 ‘이상화된 수학자’ (idealized mathematician)⁶⁾ 임을 전제한다. 이처럼 자아에 대

6) ‘이상화된 수학자’에 대한 브라우어의 사변적 표현은 다음과 같다: “적절한 언어를 사용하여 간단한 형태로 자신의 구성을 기록하고 그것을 제약 없이 기억하는 인간으로 가정한다. 그는 이 언어로 일련의 긍정주장들(정리 혹은 명제들)을 탐구하며, 그 결과 수학적으로 변환된 논리적 원리의 언어적 도식이 거기에서 나타남을 알 수 있다.” [18, pp. 427-428] [13, p. 114]

한 확실성을 담보로 해서 수학의 기초를 다질 수 있다는 브라우어의 자신감은 실제로 그로 하여금 배중률을 배제한 구성적 증명을 수학적 존재와 동일시하도록 했으며, 그로부터 해결하고자 했던 것은 형이상학적 실재론에서의 존재론적 문제였다. (브라우어가 이런 신조의 논리를 체계적이고 형식적으로 제시하지는 않았고, 그 일은 하이팅이 맡았다.⁷⁾)

한편, 더밋은 실재론/반실재론 간의 근본적인 불일치가 수학적 대상들에 관한 형이상학적 물음들에 의해서 제기되는 것이 아니라고 생각했다. 그 주요 차이점은 더밋이 “문제는 수학적 대상들의 존재에 있는 것이 아니라 수학명제의 객관성에 있다” 라고 하는 크라이젤의 격률 [17, pp. 135–158]을 수용하고 믿은 점에서 찾을 수 있다. 형이상학적 실재론과의 의미론적 반실재론 간의 불일치에 대한 그의 입장은 무엇보다 논쟁의 통상적인 형식적 관계에서부터 상당한 변화를 일으켰다. 왜냐하면 전통적인 종래의 논쟁은 수학적 대상들의 존재론적 위상에 관한 것이었기 때문이다. 이런 더밋의 판단은 그의 반실재론이 의미론적 반실재론으로 나아가게 했다. 또한 배중률을 배제하는 증명의 성격이 여전히 존재론적인 직관주의와 달리, 의미론적 반실재론의 경우는 일련의 인식론적 믿음을 확보하기 위하여 배중률을 배제한 증명을 필요로 했다고 볼 수 있다.

결과적으로 브라우어의 직관주의와 더밋의 반실재론은 구성주의라는 큰 틀의 공통적 특성을 공유하면서 배중률을 배제한 증명을 통해 수학적 지식/명제의 구성을 꾀한다. 하지만 이와 관련한 브라우어의 선언적 자신감이나 더밋의 공적 소통의도가 학문적으로 명실상부하게 구현된 것은 아니다. 특히 배중률 배제는 증명가능 범위의 축소를 의미하므로, 구성주의적 입장 주장이 강할수록 배중률 배제의 단호함도 비례해서 강화되어 일관된 이론적 용은 더욱 어려워지기 때문이다. 이 문제는 직관주의는 물론 반실재론을 비롯한 구성주의 전체를 통해 쟁점이 되는 ‘증명의 약순환’이라는 논제인데, ‘실행주의’와 ‘가능주의’로 양분되는 양상의 후속 논의는 추후 논문을 통해서 심도 있게 다루볼 만큼 중요한 사안이다.

이들의 영향은, 직관주의의 경우 브라우어로부터 많은 것을 계승한 프로이덴탈(Hans Freudenthal)이 구성주의적 경향을 수학교육에 적용하며 학문적 해당영역의 외연을 넓혔다. 반실재론의 경우 소위 영국의 후기 더밋 세대로서 맥도웰(John McDowell), 피코크(Christopher Peacocke), 라이트(Crispin Wright) 등을 배출하며 활발한 후속 논의를 진행시켰다. 이들은 실재론-반실재론 간의 논쟁의 심도를 더해가는 양상을 보였는데, 더밋을 직접 계승한 사람은 라이트이다. 한편 더밋과 비슷한 세대인 미국의 비숍(Errett Bishop)은 구성주의적 증명을 실제로 해석학에 적용시킨 ‘구성주의 해석학의 기초’ (Foundations of Constructive Analysis, 1967)를 발표함으로써 구성주의에 입각한 수학의 실재를 제시하는 데 성공했고, 그가 죽은 직후 보완·개정본 ‘구성주의 해석학’ (Constructive Analysis, 1985)을 제자 브릿지(Douglas S. Bridges)가 완성시켜 펴냈다. 현재 왕성하게 활동하고

7) [13, p. 114] 각주 38.

있는 브릿지는 첨단 컴퓨팅 테크놀로지를 활용하여 해석학 및 통계학에서 구성주의 수학의 실제 구현에 많은 확장적 진전을 보이고 있다. 구성주의와 관련된 이와 같은 학문적 동향까지 아우르는 추후 논의도 요망된다.

참고 문헌

1. 카렌 그린 (이윤일 옮김), 『마이클 더밋의 언어철학』, 경기 성남, 북코리아, 2011.
2. 배영주, 『자기주도학습과 구성주의』, 서울, 원미사, 2005.
3. 김문중 외, (1998); 김관수 외, (2000); 한국교원대학교초등교육연구소, (1999); Brooks & Brooks, (1993); Fosnot et al., (1996); Larochelle et al., (1998); Fosnot et al., 1996; Richardson et al., 1997.
4. TomRockmore, *On constructivist Epistemology*, NewYork, Rowman & Littlefield Publisher, INC., 2005.
5. D. van Dalen, *Cambridge Lectures on Intuitionism*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.
6. G. Ferege, *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, trans. E. Kluge, New Haven: Yale University Press, 1971.
7. A. Heyting, *Brouwer Collected Works*, vol,1, Amsterdam: North-Holland, 1975.
8. James Robert Brown, *Philosophy of Mathematics : An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, London and New York, Routledge, 2000.
9. Charles S. Chihara, *Constructibility and Mathematical Existence*, Oxford, Clarendon Press, 2001.
10. Roland Turner, *Thinkers of the Twentieth Century*, 2nd edition, Chicago, STJ., 1987.
11. Saunders Mac Lane (오채환 외 옮김), 『수학, 형식과 기능』, 수원, 청음사, 2001.
12. 박창균 「직관주의」, 한국수학사학회지 Vol. 10, No.2, (1997)
13. 김진형, 「브라우어의 수학적 직관주의 연구」, 중앙대학교 박사학위논문, 2005.
14. Panu Raatikainen, (Helsinki Collegium for Advanced Studies, 2004), Conceptions of truth in intuitionism, HISTORY AND PHILOSOPHY OF LOGIC, 25 (MAY 2004), PO Box 4, FIN-00014 University of Helsinki, Finland,
15. Romina Padró, “The City University of New York”, *On Dummett’s Philosophy of Mathematics V*(2012), <http://www.accionfilosofica.com/misc/1111482311art.htm>
16. L. E. J. Brouwer, “Historical background, principles and methods of intuitionism”, *South African Journal of Science*, 49(1952).
17. Kreisel, G., “Wittgenstein’s Remarks on the Foundations of Mathematics”, *British Journal for the Philosophy of Science*, 9(1959).
18. Brouwer[BMSIA], “Profession of Faith of L. E. J. Brouwer”(미출간논문), in van Stigt; *Brouwer’s Intuitionism*, North-Holland, 1990.

오채환 경기대학교 수학과
 Department of Mathematics, Kyonggi University
 E-mail: 20020580@kyonggi.ac.kr

-
- 강옥기 성균관대학교 수학교육과
Department of Mathematics Education, Sungkunkwan University
E-mail: okkang@skku.edu
- 이상욱 수원대학교 수학과
Department of Mathematics, Suwon University
E-mail: swree@suwon.ac.kr