한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제4호 (2011년 11월), 119–141

학교 수학에 활용 가능한 확률 · 통계 영역에서의 역사적 패러독스

Historic Paradoxes of Probability and Statistics Usable in School Mathematics

이종학 Lee, Jong Hak

수학의 여러 분야 가운데 패러독스가 가장 풍부한 분야는 확률 · 통계 영역이다. 이것은 역사적으로 확률 · 통계 이론의 전개 과정에서 지난 시기 동안 연구자들이 직관과 상식에 의해 참이라고 믿고 있었지만 그 사이에는 감춰져 있던 다양한 패러독스들이 존재했으며, 이 패러독스들을 수학자들이 밝히고 수학적으로 해결해 나가면서 현재의 형식적 체계에 이르게 되었음을 시사하는 것이다. 학교 수학에서 확률 · 통계 영역의 교수 · 학습 자료로 적절하게 활용할 수 있는 역사적 패러독스들은 그 당시 현실적 맥락의 도입에 따른 학생의 흥미와 관심을 불러일으킬 수 있으며, 또한 교실 수업에서 역사 발생적 원리에 따라 패러독스를 제기하고 해결하고자 고민한 수학자들의 수학적 사고를 엿볼 수 있는 타당한 교수 · 학습 자료이다. 더불어 확률 · 통계 영역에서 역사적 패러독스를 활용하는 교실 수업은 형식적이고 연역적인 학교 수학을 학생의 발견적 · 형성적인 측면을 강조하는 수학으로 변화하게 할 수 있다. 이에 본 연구에서는 확률 · 통계 영역의 형식화 과정에서 발생한 역사적인 패러독스들 중에서 중 · 고등학교 확률 · 통계 수업에 활용할 수 있는 패러독스들에 대해서 알아보고, 또한 이 패러독스들을 교실 수업에 활용할 수 있는 구체적인 방안에 대해서 논해보고자 한다.

This paper analysed the mathematical paradoxes which would be based in the probability and statistics. Teachers need to endeavor various data in order to lead student's interest. This paper says mathematical paradoxes in mathematics education makes student have interest and concern when they study mathematics. So, teachers will recognize the need and efficiency of class for using mathematical Paradoxes, students will be promoted to study mathematics by having interest and concern. These study can show the value of paradoxes in the concept of probability and statistics, and illuminate the concept being taught in classroom. Consequently, mathematical paradoxes in mathematics education can be used efficient studying tool.

Keywords: 수학교육(Mathematics Education), 확률(Probability), 통계(Statistics), 역설(Paradox), 역사 발생적 원리(Historic-Genetic Principle).

MSC: 01A05 ZDM: A34
제출일: 7월 6일 수정일: 8월 25일 게재확정일: 9월 9일

1 서론

사전적으로 역설(逆說)또는 역리(逆理)라고 해석되는 패러독스(paradox)는 그리스어로 par·a(넘다, 반(反)하다, 벗어나다)와 doxa(생각, 통념)의 합성어이다. 논리학에서 말하는 패러독스에 대해서 엄정식(1984)은 전제나 추론의 과정에 무리가 없음에도 서로 양립할 수 없는 결론이 도출되는 경우라고 정의하고, 수학에서의 패러독스에 대해서 조미혜(2000)는 논리학의 범위에서 다루는 이율배반적인 결과를 함의할 뿐만 아니라 수학적 사고방식에 의해 유도한 결과가 직관이나 상식을 벗어나는 경우를 포함한다고 주장한다. 또한 Gardner(1982)는 패러독스를 직관이나 상식을 벗어나는 모든 결과로 정의하면서, 다음과 같이 패러독스의 외연을 확대하여 네 가지 형태로 수학에서의 패러독스를 분류하고 있다.

첫째, 명백히 거짓인 것처럼 보이지만 실은 참인 명제.
둘째, 명백히 참인 것처럼 보이지만 실은 거짓인 명제.
셋째, 전혀 오류가 없어 보이지만, 결과적으로 논리적 모순에 직면하는 추론.
넷째, 참인지 거짓인지 판단할 수 없는 사실.

Bachelard는 모든 지식은 문제에 대한 응답이라고 주장하면서, 수학의 역사에서 만약 어떠한 문제도 존재하지 않았다면 그와 연관된 지식도 또한 없었을 것이라고 말한다. 이는 역사적으로 수학적 개념과 이론들이 그 당시에 존재하고 있던 문제와 역설(Paradox)들을 해결하기 위해 발생되었고, 수정·발전되면서 현재의 수학적 지식으로 확장되었음을 의미하는 것이다. 한 예로 그리스 수학의 수 체계에서 정사각형의 대각선의 길이를 정확하게 표현할 수가 없다는 사실은 그 당시 곤혹스러운 문제이자 역설이었다. 그렇지만 이 역설을 통해 이후에 무리수라는 수학적 개념이 발생하였고, 새로운 수학 이론으로 발전하였다.

또한 그리스 수학에서 무한을 계속해서 무언가를 향해가는 것으로 파악한 무한 개념은 제논의 역설, 이분법의 역설, 화살의 역설 등과 같은 다양한 패러독스를 유발하였다. 이 패러독스 중에서 제논의 역설은 달리기 경주에서 빨리 달리는 아킬레스가 보다 느리게 달리지만 조금 앞에서 출발한 거북이를 결코 따라잡을 수 없다는 것을 그 당시의 무한 개념을 통해 논리적으로 주장하는 역설이다. 제논의 패러독스에 내재된 이 역설적 오류를 그리스 시대의 무한 개념을 사용하여 수학적으로 반박하는 것은 가능하지 않은 일이었지만, 현실 상황에서 실제로 경주를 한다면 아킬레스가 거북이를 이길 것이라는 것은 자명한 사실이다. 이 패러독스에 대한 수학적인 해결은 어떤 양수를 무한 번 더해도 그 합은 유한할 수 있다는 실무한의 무한 개념이 수학자들에 의해 제기된 이후에 논리적인 설명이 가능하게 되었다.

그리스 수학에서 제논의 역설을 유발한 것과 같은 무한에 대한 사고가 현재의 학교 수학에서도 존재한다. 김남희 외(2011)는 중·고등학교 학생들이 가지는 무한에 대한 잘못된 개념 이미지 중 대표적인 한 가지로 「무한급수의 합이 존재한다는 것은 어떤 수에 한없이 가까워진다는 것이지 정확히 그 수가 되는 것은 아니다.」를 제시한다. 다시 말해 중학교 수학에서 다루는 $0.\dot{9} = 0.9999\cdots$ 와 같은 수학적 개념은 학생들에게 무한은 어떤 값을 향해 계속 진행하는 과정이라는 개념 이미지가 형성되도록 할 수 있지만, 사실은 $0.\dot{9}$는 완결된 실무한의 결과로 $0.\dot{9} = 1$이다. 그렇지만 개체 발생은 계통 발생을 되풀이 한다는 역사 발생적 원리에 의하면 대부분의 학생들은 그리스 시대에 가졌던 가능성의 무한에 대한 관점에서 무한의 결과인 실무한의 관점으로 이행하는 가운데 제논이 제기한 것과 유사한 형태의 역설적 상황에 직면할 수 있다. 따라서 학교 수학에서 이러한 역설적 상황을 해결하기 위해서 제논의 역설과 같은 무한과 관련된 몇 가지 역사적인 패러독스들을 제시하고 이를 통해 무한의 의미를 직관적으로 유추하며, 점진적으로 무한을 이해하고 형식화하여 실무한의 개념으로 확장하는 교수·학습 방안을 고려해 볼 수 있다. 이와 관련하여 김춘영(1993)은 학교 수학에서 패러독스와 관련한 수학사 도입의 효과를 다음과 같이 제시한다.

> 첫째, 수학사를 활용한 수업은 학생들의 흥미와 자신감을 고취시켜, 긍정적인 수학적 태도를 함양할 수 있다.
>
> 둘째, 수학적 지식의 형성 배경, 변천 과정, 확립 과정에 대한 수학사적 고찰을 통해 변화하며 폭넓게 수용하는 수학에 대한 인식을 갖게 할 수 있다.
>
> 셋째, 그 당시 수학사적 문제와 수학자의 사고에 대한 탐구를 통해, 학생들의 수학적 사고를 신장하고 수학적 개념을 명확히 할 수 있다.

수학사적으로 확률·통계는 수학의 여러 분야 중에 패러독스가 가장 많은 영역이다. 이는 수학의 역사와 같이 확률·통계의 형식화 과정에서 현재의 확률·통계적 지식들이 그 당시에 제기된 역설들을 탐색하고, 기존의 지식 체계와 맞지 않는 패러독스의 해결 방안을 밝혀가면서 지금의 수학적 체계로 구성되었음을 시사하는 것이다. 그렇다면 현재 학교 수학에서 다루고 있는 확률·통계 내용과 관련되어 제기되었던 역사적인 패러독스들은 무엇이며, 그 패러독스들이 어떠한 수학적 배경을 띠고 나타나게 되었으며, 또한 이후에 패러독스들이 어떻게 해결되고 새로운 확률·통계 이론으로 적용되었는지를 알아보는 것은 수학 교육의 역사 발생적 원리에 비추어 의미 있는 교수학적 시도일 것이다.

이경화(1996)는 확률·통계와 관련한 대부분의 패러독스들은 이론적으로 높은 수준에 이르러서 발생하는 것이 아니라 확률·통계의 정의와 기본 성질 또는 개념에 대한 간단한 규칙을 다루는 시점에서 발생한다고 말한다. 또한 이경화(1996)는 확률·통계 영역이 아닌 다른 수학 분야에서의 패러독스들은 복잡한 추론을 필요로 하는 경우가 많지만 확

률·통계의 역사적 패러독스들은 모두 기존의 확률·통계 개념에 대한 이해의 과정에서 발생하는 패러독스들로 간단한 계산을 통해 해결할 수 있으므로, 교실 수업에서 패러독스들을 적절하게 이용한다면 학생의 흥미와 관심을 불러일으키고, 직관과 귀납적 추론의 특성을 경험할 수 있는 확률·통계 영역에서의 훌륭한 교수학습 자료라고 주장한다. 한인기(2003)는 중등학교 수학 교육의 개선을 위하여 사범대학 수학교육과에서 다루는 수학사 강좌의 내용 체계에 패러독스들을 포함해야 한다고 주장한다. 박지온(2006)은 학교 수학에서 패러독스를 활용한 수업은 학생들의 정의적 능력의 함양과 수학적 사고의 신장에 도움을 준다고 하면서 패러독스가 학교 수학에서 보다 더 적극적으로 활용되어야 한다고 말한다. 그리고 이정연(2010)은 심프슨의 패러독스를 활용한 수학영재 교육에서 유창성, 독창성, 정교성, 반성적 사고 등의 창의성이 수학영재들에게 발현되고, 또한 수업에서 생산적 논쟁이 나타났다고 주장한다.

일반적으로 우리는 사고의 대상인 지식에 대해서 사고하고, 사고의 과정을 통해 지식을 얻게 된다. 다시 말해 사고라는 것은 아무 것도 없는 상태에서 이루어지는 것이 아니라 사고의 대상에 해당하는 지식이라는 기존의 기반을 사용하여 이루어지는 과정이다. 따라서 학교 수학에서 학생들이 구성하는 수학적 사고는 수학적 대상 그 자체에서뿐만 아니라, 대상을 이해하고 탐구하기 위해 행하는 여러 형태의 수학적 활동의 과정에서 획득되는 것이라고 할 수 있다. 이에 본 연구에서는 학교 수학의 확률·통계 영역에서 수학적 사고와 활동의 대상이 될 수 있는 내용 지식으로서의 역사적 패러독스들에 대해서 알아보고, 학교 수학에서 수학적 활동의 한 방법으로써 패러독스들을 활용하는 방안에 대해서 분석해 보고자 한다. 부연하면 현재의 교실 수업에서 활용 가능한 확률·통계 영역에서의 패러독스들에 대해서 이론의 형식화 과정에서 그 패러독스들이 왜 발생하였고, 어떠한 과정을 거쳐 해결되어졌는지에 대한 고찰과 함께 학교 수학의 확률·통계 영역에서 역사적 패러독스들의 활용 방안에 대해서 논해보고자 한다.

2 학교수학에 활용 가능한 확률·통계 영역에서의 패러독스

2.1 베르트랑(J. Bertrand)의 상자 패러독스

1889년 프랑스 수학자 베르트랑가 그의 저서「확률의 계산(Calcul des probabilites)」에서 주장한 패러독스로, 표본 공간에 대한 직관적 추론에서 발생하는 확률 계산의 역설적 상황을 보여주는 것이다. 또한 상자 패러독스는 특별한 맥락에서의 확률 계산의 예로 학교 수학에서 다루는 몬티 홀(Monty Hall) 문제의 초기 형태이다. 베르트랑의 상자 패러독스는 확률을 계산하기 위해 표본 공간을 다루는 교수·학습 과정에서 다음과 같이 제시될 수 있다.

[베르트랑의 상자 패러독스] 금화 2개가 들어있거나, 은화 2개가 들어있거나, 또는 금화와 은화가 한 개씩 각각 들어있는 3개의 상자가 있다. 3개의 상자 중에서 임의로 하나를 선택하고, 그 상자에서 임의로 1개의 동전을 꺼내 보았다. 꺼낸 동전이 금화라고 할 때, 남은 하나의 동전도 금화가 들어있는 상자를 고를 확률을 구하시오.

기본적으로 베르트랑의 패러독스는 확률을 계산할 때 은화 2개가 들어있는 상자는 처음부터 선택될 수 없다는 데서 발생한다. 다시 말해 확률에 대한 라플라스(Laplace)의 고전적 정의에 의해 시행에서 모든 경우의 수는 금화 2개가 들어 있는 상자와 금화와 은화가 각각 1개씩 들어있는 상자의 2가지이고, 각각의 상자가 선택될 가능성은 같으므로, 꺼낸 동전이 금화라고 할 때 똑같은 동전이 들어 있는 상자를 고를 확률은 $\frac{1}{2}$이라고 할 수 있다. 그렇지만 중·고등학교에서 다루는 라플라스의 고전적 정의에서 제시하는 확률은 가능한 모든 결과를 찾아야 하고 그 각각이 일어날 가능성이 같다는 전제 아래에서 계산이 가능하므로, 베르트랑의 상자 패러독스에서 똑같은 동전이 들어 있는 상자를 고를 확률은 $\frac{1}{2}$이 아니다. 계산상으로는 간단해 보이지만 표본 공간의 선택에 대한 역설을 함의하고 있는 이 상자 패러독스의 타당한 수학적 풀이는 다음과 같다.

[풀이-1] 기본적으로 6개의 동전을 선택할 가능성은 모두 같다. 또한 선택한 동전을 은화만 두 개가 들어있는 상자에서 꺼내거나 금화와 은화가 들어있는 상자에서 은화가 아닌 금화로 꺼낼 수는 없다. 따라서 금화와 은화가 들어있는 상자나 금화가 2개 들어있는 상자에서 금화를 꺼내는 2가지 경우가 있으므로 구하는 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

[풀이-2] 금화 2개가 들어있는 상자에서 금화를 고를 확률을 $P(GG)$, 은화 2개가 들어있는 상자에서 금화를 고를 확률을 $P(SS)$, 금화와 은화가 한 개씩 들어있는 상자에서 금화를 고를 확률을 $P(GS)$라고 할 때, 3개의 상자 중에서 어느 한 개의 상자를 선택할 가능성은 모두 같다. 또한 $P(GG)=1$, $P(SS)=0$, $P(GS)=\frac{1}{2}$이다. 따라서 조건부 확률의 정의에 의해 꺼낸 동전이 금화라고 할 때, 남은 하나의 동전도 금화가 들어있는 상자를 고를 확률은 다음과 같다.

$$\frac{P(GG)}{P(GG)+P(SS)+P(GS)}=\frac{1}{1+0+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

상자 패러독스의 풀이에 나타난 것과 같이 일어날 가능성, 즉 결과로 나올 가능성이 모두 같은 것으로 간주하는 라플라스의 불충분한 이유의 원리는 확률 이론의 발전과 응용을 가능하게 해준 고전적 확률을 정의하는 기본이 되는 원리이다. 그렇지만 이 원리로 인해 학교 수학의 다양한 문제에서 라플라스의 확률에 대한 고전적 정의를 만족하기 위

표 1: 모든 경우의 수

승부 \ 순	첫 번째		두 번째	
	A	B	A	B
현재	4	3	·	·
(가)	5	3	6	3
(나)	5	3	5	4
(다)	4	4	5	4
(라)	4	4	4	5

해서 베르트랑의 상자 패러독스와 같이 실제로 나타나지 않는 인위적인 경우를 구성해야 하는 역설적인 상황이 발생한다. 다시 말해 각각의 모든 경우가 일어날 가능성이 같다는 전제를 내포하고 있는 라플라스의 확률에 대한 정의에 따라 어떤 시행에서 가능한 모든 경우의 수를 찾을 때, 실제로는 나타나지 않는 경우의 수를 포함하여 표본 공간을 구성해야 하는 역설적인 상황이 존재한다는 것이다. 이 역설적 상황은 확률론의 기원으로 알려진 파스칼(Pascal)의 분배 문제에서도 찾을 수 있다.

[파스칼의 분배 문제]　실력이 비슷한 A, B 두 사람이 내기 돈 32피스톨을 각각 걸고 다음과 같은 규칙으로 시합을 했다. 규칙은 승부에서 한 번 이기면 1점을 얻는 시합에서 먼저 5점을 얻는 사람이 내기 돈 64피스톨을 모두 갖는 것이다. 그러데 A는 4점, B는 3점인 상태에서 시합을 중단한다면 내기 돈을 어떻게 분배해야 공정한가 구하시오.

이 분배 문제의 올바른 풀이는 다음과 같다.

[풀이]　시합을 끝내기 위해서는 5점을 획득해야 하므로 2번의 승부가 이루어져야 하고, 이에 따라 가능한 모든 경우의 수는 〈표 1〉과 같다. 위의 표에서 A가 이기는 경우는 (가),(나),(다)이므로 확률은 $\frac{3}{4}$이고, 내기 돈은 $3:1$로 분배하면 공정하다.

위의 분배 문제에서도 확률을 구하기 위해서는 각각의 모든 경우가 일어날 가능성이 같다는 전제를 만족해야 하므로 시합에서 실제로 일어나지 않는 경우를 포함하여 표본 공간을 구성해야 한다. 다시 말해 서로 독립이고 각 경우가 일어날 가능성이 같다는 전제를 적용하기 위해서는 시합에서 실제로 일어나지 않는 (가)와 (나)같은 가능성을 고려해야 하는 역설적 상황이 발생한다.

불충분한 이유의 원리는 모든 확률적 상황에서 효율적인 확률 계산이 가능하도록 개개의 경우가 일어날 가능성이 같은 것으로 간주했던 제임스 베르누이(James Bernoulli)

와 드 무아브르(De Moivre)에게서 기원을 찾을 수 있으며, 라플라스 이후 고전적 확률 계산의 기본이 되는 원칙이다. 라플라스의 불충분한 이유의 원리에 의해 발생할 수 있는 패러독스의 또 다른 형태로 우정호(2002)는 다음과 같은 도서관 문제와 문제의 풀이를 제시한다.

> [도서관 문제] 전체 장서 1,000권 중에서 원서가 500권인 어느 도서관에서 무작위로 책을 한 권 뽑을 때, 그 책이 원서일 확률은 얼마인가? 이 도서관에 두 개의 서고가 있어서 한 서고에는 900권의 장서 중에 원서 410권이 있고, 다른 서고에는 100권의 장서 중에 원서 90권이 있다면 무작위로 책을 한 권 뽑을 때, 그 책이 원서일 확률은 얼마인가?
>
> [풀이] 도서관 문제에 대해서 첫 번째 경우의 확률은 0.5이고, 두 번째 확률은 $\frac{1}{2} - \frac{410}{900} + \frac{1}{2} - \frac{90}{100} = 0.678$이다.

위의 도서관 문제에서 우정호(2002)는 불충분한 이유의 원리에 의해 확률이 정해진다면 가능한 경우의 집합은 오직 하나만 존재해야 하고 그에 따라 확률은 유일하게 결정되어야 하지만, 같은 확률적 상황에 대해서 독특한 무작위 생성자에 의해 서로 다른 확률이 나타날 수 있다고 주장한다. 다시 말해 라플라스의 정의에 따르면 무작위로 책을 뽑는 모든 가능한 방법에 대해서 같은 확률이 나와야 하는데, 책을 뽑는 절차가 다르면 다른 답이 나오는 도서관 문제와 같은 역설적 상황이 발생한다고 말한다. 그런데 이와 같은 역설적 상황은 현재 학교 수학의 확률·통계 영역에서 다루는 문제들에서도 다양하게 찾을 수 있다.

2.2 학교 수학에서의 상자 패러독스

일반적으로 학교 수학에서 확률은 상대도수의 극한으로 정의하고, 이에 따른 확률의 계산은 라플라스의 고전적 정의를 사용하여 다음과 같이 사건이 일어날 경우의 수에 대한 모든 경우의 수의 비로 정의한다.

> 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 경우의 수가 n이고, 각 경우는 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대된다고 할 때, 사건 A가 일어나는 경우의 수가 r이면 사건 A가 일어날 확률 $P(A)$를 $P(A) = \frac{r}{n}$로 정의한다 (우정호, 2009).

우정호(2009)가 제시한 것과 같이 라플라스의 고전적 정의에 따라 확률을 계산하는 학교 수학에서 베르트랑의 상자 패러독스와 유사한 유형의 역설이 내재하고 있는 문제들은 다양하게 존재할 수 있다. 다음은 학교 수학의 확률·통계 영역에서 자주 다루는

「공·상자 문제」와 문제의 풀이, 그리고 교실 수업에서 수학적 확률 개념의 이해를 돕기 위해 활용할 수 있는 방안을 제시한 것이다.

[공·상자 문제]　상자 (가)에는 검은 공(B) 2개와 흰 공(W) 1개가 들어 있고, 상자 (나)에는 검은 공(B) 3개와 흰 공(W) 2개가 들어 있다. 동전을 던져 앞면이 나오면 상자 (가)에서 공 한 개를 꺼내고, 뒷면이 나오면 상자 (나)에서 공 한 개를 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률을 구하시오.

[풀이-1]과 [풀이-2]는 위 문제에 대한 확률을 계산한 것이다. [풀이-1]은 수학적 확률의 정의에 의하여 모든 경우의 수 $n(S)$와 사건A가 일어날 경우의 수 $n(A)$의 비로 확률 $P(A)$를 구한 것이고, [풀이-2]는 합·곱의 법칙을 사용하여 $P(A)$를 구한 것이다.

[풀이-1]　라플라스의 고전적 정의를 사용하여 확률을 계산할 때 확률의 분모에 해당하는 모든 경우의 수는 문제 상황에서 직관적으로 다음과 같이 구할 수 있다.

동전을 던져 앞면이 나오면 검은 공(B) 2개와 흰 공(W) 1개가 들어 있는 상자 (가)에서 공 한 개를 꺼내고, 뒷면이 나오면 검은 공(B) 3개와 흰 공(W) 2개가 들어 있는 상자 (나)에서 공 한 개를 꺼내는 시행이다. 가능한 모든 경우의 수의 집합을 S라 하면,

$$\begin{aligned}S = \{&(\text{앞면}, \mathrm{B}), (\text{앞면}, \mathrm{B}), (\text{앞면}, \mathrm{W}),\\ &(\text{뒷면}, \mathrm{B}), (\text{뒷면}, \mathrm{B}), (\text{뒷면}, \mathrm{B}), (\text{뒷면}, \mathrm{W}), (\text{뒷면}, \mathrm{W})\}\end{aligned}$$

이고, $n(S) = 8$이다. 흰 공이 나올 경우의 수의 집합을 A라 하면, A={(앞면,W), (뒷면,W), (뒷면,W)} 이고, $n(A) = 3$이다. 따라서, 흰 공이 나올 확률 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$이다.

[풀이-2]　상자(가)에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$이고, 상자(나)에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$이다. 따라서, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$이다.

흰 공이 나올 확률로 [풀이-1]에서 구한 $\frac{3}{8}$과 [풀이-2]의 결과인 $\frac{11}{30}$에서 결과적으로 중·고등학교에서 다루는 고전적 확률의 정의에 의해서 구한 [풀이-1]은 옳지 않다. 라플라스가 사용한 확률의 정의는 시행에서 각 경우가 일어날 가능성이 같다는 전제를 내포하고 있는데, [풀이-1]에서 구한 모든 경우의 수의 집합 S의 원소들은 일어날 가능성, 즉 결과로 나올 가능성이 모두 같지 않기 때문이다. 즉, 집합 S의 원소 중 상자 (가)에서 일어나는 모든 경우의 수인 (앞면,B), (앞면,B), (앞면,W)의 경우와 상자 (나)에서 일어나는 모든 경우의 수인 (뒷면,B), (뒷면,B), (뒷면,B), (뒷면,W), (뒷면,W)의 경우가 일어날 가능성이 같지 않다. 다시 말해, 상자 (가)에서 일어나는 모든 경우의 수인 (앞

면,B), (앞면,B), (앞면,W)의 경우 중 어느 하나가 일어날 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 상자 (나)에서 일어나는 모든 경우의 수인 (뒷면,B), (뒷면,B), (뒷면,B), (뒷면,W), (뒷면,W)의 경우 중 어느 하나가 일어날 확률은 $\frac{1}{5}$이다. 즉 [풀이-1]에서 구한 모든 경우의 수는 어떤 시행에서 각 경우가 일어날 가능성이 모두 같다는 라플라스의 고전적 확률을 정의하는 바탕이 되는 전제를 만족하지 못하고 있는 것이다. 베르트랑의 상자 패러독스나 파스칼의 분배 문제에서의 패러독스와 유사한 이 역설적 상황은 [방안-1]과 같이 문제 상황에서는 절대로 일어날 수 없지만 대칭성을 고려하여 각 경우가 일어날 가능성을 균일하게 하는 방법, 즉 경우의 수의 동등화를 통해서 해결할 수 있다. 또한 [방안-2]와 같은 방법으로도 이 상황을 해결할 수 있다.

[방안-1] 상자 (가)에서 흰 공을 꺼내는 시행과 상자 (나)에서 흰 공을 꺼내는 시행을 각각 계산하여 각 경우가 일어날 가능성의 동등화를 이룬다. 동전을 던져 앞면이 나오면 상자 (가)에서 한 개의 공을 꺼내는 시행에서 가능한 모든 경우의 수의 집합을 S_1라 하면, S_1은 문제 상황에서는 일어날 수 없지만 대칭성을 고려하여 동전을 던져 뒷면이 나오고 그에 따라 공을 선택하는 경우도 포함해서 모든 경우의 수를 계산해야 한다. 따라서

$$S_1 = \{(\text{앞면}, \text{B}), (\text{앞면}, \text{B}), (\text{앞면}, \text{W}), (\text{뒷면}, \text{B}), (\text{뒷면}, \text{B}), (\text{뒷면}, \text{W})\}$$

이고, $n(S_1) = 6$이다. 동전을 던져 앞면이 나와서 상자 (가)를 택하고, 상자 (가)에서 흰 공을 꺼낼 경우의 수의 집합을 A_1라 하면, A_1 ={(앞면,W)}이고, $n(A_1) = 1$이다. 따라서 동전을 던져 앞면이 나오고 그에 따라 상자 (가)에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{n(A_1)}{n(S_1)} = \frac{1}{6}$이다.

같은 방법으로 동전을 던져 뒷면이 나오면 상자 (나)에서 한 개의 공을 꺼내는 시행에서 가능한 모든 경우의 수의 집합을 S_2라 하면,

$$S_2 = \{(\text{앞면}, \text{B}), (\text{앞면}, \text{B}), (\text{앞면}, \text{B}), (\text{앞면}, \text{W}), (\text{앞면}, \text{W}), \\ (\text{뒷면}, \text{B}), (\text{뒷면}, \text{B}), (\text{뒷면}, \text{B}), (\text{뒷면}, \text{W}), (\text{뒷면}, \text{W})\}$$

이고, $n(S_2) = 10$이다. 동전을 던져 뒷면이 나와서 상자 (나)를 택하고, 상자 (나)에서 흰 공이 나올 경우의 수의 집합을 A_2라 하면, $A_2 = \{(\text{뒷면}, \text{W}), (\text{뒷면}, \text{W})\}$이고, $n(A_2) = 2$이다. 그러므로 동전을 던져 뒷면이 나오고 그에 따라 상자 (나)에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{n(A_2)}{n(S_2)} = \frac{1}{5}$이다. 따라서, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$이다.

[방안-2] 동전을 던져 앞면이 나오면 상자 (가)에서, 뒷면이 나오면 상자 (나)에

서 공 한 개를 꺼내는 시행에서 가능한 모든 경우의 수의 집합을 S라 하면,

$$S = \{(\text{앞면}, \mathrm{B}), (\text{앞면}, \mathrm{B}), (\text{앞면}, \mathrm{W}),$$
$$(\text{뒷면}, \mathrm{B}), (\text{뒷면}, \mathrm{B}), (\text{뒷면}, \mathrm{B}), (\text{뒷면}, \mathrm{W}), (\text{뒷면}, \mathrm{W})\}$$

이다. 그렇지만 상자(가)에서 일어나는 모든 경우의 수인 (앞면,B), (앞면,B), (앞면,W)의 경우 중 어느 하나가 일어날 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 상자(나)에서 일어나는 모든 경우의 수인 (뒷면,B), (뒷면,B), (뒷면,B), (뒷면,W), (뒷면,W)의 경우 중 어느 하나가 일어날 확률은 $\frac{1}{5}$이므로, 각 경우가 일어날 가능성이 같지 않고, 이를 이용하여 구한 고전적 확률인 시행에서 가능한 모든 경우의 수에 대한 사건이 일어나는 경우의 수의 비의 값인 확률도 옳지 않은 것이 될 수밖에 없다. 따라서 상자 (가)에서 일어나는 모든 경우의 수에는 5배를 하고, 상자 (나)에서 일어나는 모든 경우의 수에 대해서는 3배를 해서 라플라스가 제기한 불충분한 이유의 원리를 만족하도록 각 경우가 일어날 가능성을 동등화하여야 한다. 그러므로 동전을 던져 앞면이 나오면 상자 (가)에서, 뒷면이 나오면 상자 (나)에서 공 한 개를 꺼내는 시행에서 가능한 모든 경우의 수의 집합을 S라 하면,

$$\begin{aligned} S = \{&(\text{앞면}, B), (\text{앞면}, B), (\text{앞면}, W), (\text{앞면}, B), (\text{앞면}, B), (\text{앞면}, W),\\ &(\text{앞면}, B), (\text{앞면}, B), (\text{앞면}, W), (\text{앞면}, B), (\text{앞면}, B), (\text{앞면}, W),\\ &(\text{앞면}, B), (\text{앞면}, B), (\text{앞면}, W), (\text{뒷면}, B), (\text{뒷면}, B), (\text{뒷면}, B),\\ &(\text{뒷면}, W), (\text{뒷면}, W), (\text{뒷면}, B), (\text{뒷면}, B), (\text{뒷면}, B), (\text{뒷면}, W),\\ &(\text{뒷면}, W), (\text{뒷면}, B), (\text{뒷면}, B), (\text{뒷면}, B), (\text{뒷면}, W), (\text{뒷면}, W)\} \end{aligned}$$

으로 경우의 수를 동등화하여 $n(S) = 30$이다. 흰 공이 나올 경우의 수의 집합을 A라 하면

$$\begin{aligned} A = \{&(\text{앞면}, W), (\text{앞면}, W), (\text{앞면}, W), (\text{앞면}, W), (\text{앞면}, W),\\ &(\text{뒷면}, W), (\text{뒷면}, W), (\text{뒷면}, W), (\text{뒷면}, W), (\text{뒷면}, W), (\text{뒷면}, W)\} \end{aligned}$$

이어야 하고, 이에 따라 $n(A) = 11$이다. 따라서 위와 같은 방법으로 불충분한 이유의 원리를 만족하도록 각 경우가 일어날 가능성을 동등화하여 흰 공이 나올 확률을 구하면 $\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{11}{30}$이다.

학교 수학에서 표본 공간과 경우의 수에 대한 수학적 확률 단원을 학습할 때, 수학적 확률의 이해를 위해 복잡한 추론을 필요로 하지 않으면서 간단하게 다룰 수 있는 베르트랑의 상자 패러독스, 파스칼의 분배 문제, 도서관 문제, 공·상자 문제와 같은 예들은

교실 수업에서 학생의 흥미와 관심을 불러일으키고, 다양한 측면에서 학생들이 수학적 확률의 의미를 경험하게 할 수 있다.

2.3 베르누이의 큰 수의 법칙에 대한 패러독스

학교 수학에서는 통계적 확률의 정의를 이용하여 확률의 의미를 파악하고, 라플라스의 고전적 확률의 정의를 사용하여 확률을 계산한다. 교실 수업에서 확률의 의미로 학생들에게 제시되는 통계적 확률은 빈도적 관점에서 본 확률의 정의로, 시행 횟수를 무한히 계속한 상대도수의 극한에 의하여 직관적으로 확률의 의미를 파악하도록 한다. 그렇지만 베르누이의 큰 수의 법칙에 의한 빈도적 관점의 확률의 정의가 확률 개념이 명확하게 정립되지 못한 학생들에게 역설적 상황을 야기할 수 있다.

역사적으로 확률 개념은 애매하다고 할 수 있다. 기본적으로 확률이란 용어는 오래전부터 존재했지만 확률의 정의는 양파껍질을 한 꺼풀씩 벗겨 내듯 그 시대에 맞게 구성되고 발전되어 왔다. 시대적으로 발전해온 확률의 개념들 간에는 엄연히 차이가 존재하며, 따라서 확률에 대한 하나의 개념과 정의로는 확률이란 용어가 담고 있는 그 당시의 의미를 모두 만족하지는 못한다. 역사적으로 초기 확률의 개념은 객관적인 확률과 주관적인 확률을 혼용하여 사용하였다. 객관적인 확률은 실험 또는 관찰에서 우연과 우연사건들의 특성을 기술하는데 이용되었고, 주관적인 확률은 불확실한 지식 또는 판단에 대한 신념의 정도를 측정하는데 사용되었다. 그렇지만 그 당시에 근본적으로 다른 두 의미를 확률이라는 하나의 용어로 사용하므로 확률의 개념 체계를 세우는데 있어서 많은 논란이 있어 왔고, 확률의 정의에 대한 공방이 수학자들 사이에서 존재하였다. 이에 대해 관찰치가 많아질수록 불확실성이 감소하는 것을 확률을 계산하는 기본 전제로 제시한 수학자가 제임스 베르누이(James Bernoulli)이다. 베르누이는 그의 저서「추측술(Ars Conjectandi)」에서 관측하는 값의 개수를 증가시킴으로써 알지 못하는 비율에 대한 개연적 확실성을 얼마든지 얻을 수 있다는 확률 계산에 대한 극한 개념인 큰 수의 법칙을 제시하였다. 학교 수학에서는 베르누이가 주장한 큰 수의 법칙을 〈그림 1〉과 같이 공학적 도구를 사용하여 직관적으로 도입한다.

위의 〈그림 1〉은 주사위를 100, 1000번, 2000번 던졌을 때 각각의 눈이 나오는 상대도수를 통계전용 소프트웨어인 Fathom을 활용하여 그래프로 표현한 것으로, 〈그림 1〉에서 시행 횟수가 점점 많아질수록 각 눈이 나오는 상대도수가 $\frac{1}{6}$에 더 가까워진다는 것을 알 수 있다. 그러므로 베르누이가 제시한 큰 수의 법칙에 의하면 주사위를 던질 때 각 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이라고 할 수 있다.

학교 수학에서 큰 수의 법칙에 의한 역설적 상황은 일상적으로 사용하는 동전을 던지는 시행에서 찾을 수 있다. 학교 수학의 확률 결정론적 입장에서는 동전의 대칭성 이외

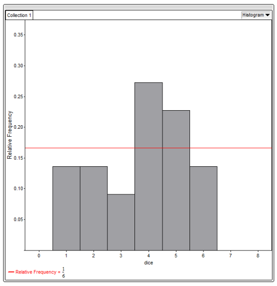
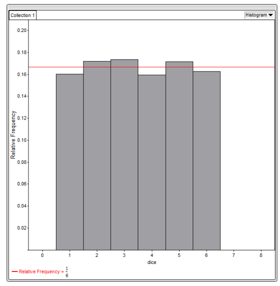
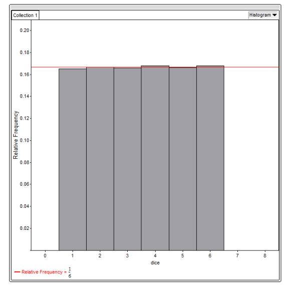
횟수	100회	1000회	2000회
그래프			

그림 1: 주사위를 던지는 시행에서 상대도수의 그래프

의 다른 상황적 특성을 무시하고 동전을 던졌을 때, 앞면과 뒷면에 대해서 가능한 모든 경우이면서 서로 독립이고 일어날 가능성이 동등하다는 전제를 두고 문제 해결을 시작한다. 이와 관련하여 Kapadia & Borovcnik(1991)은 「어떤 동전을 5회 던졌을 때, 앞면만 계속 나타났다. 이 동전을 한 번 더 던지면 어느 면이 나타날 것인가?」에 대한 질문에 대해서 약 80%의 학생이 앞면과 뒷면이 나타날 확률은 $\frac{1}{2}$로 같다고 응답하였다고 주장한다. 이는 20%를 제외한 대부분의 학생들이 우연과 그에 따른 불확실성을 인정하지 않는 학교 수학의 확률 결정론적 인식론의 입장에서 이전에 회에 걸쳐 계속해서 앞면이 나왔음에도, 동전을 던질 때 이 동전은 이상적인 동전으로 여전히 앞면과 뒷면이 나올 가능성은 같다는 수학적인 해석을 한다는 것이다. 그렇지만 불확실한 우연을 고려해야 하는 비결정론적인 현실 상황에서는 확률을 계산할 때, 문맥 자료를 채택해야만 합리적인 판단이 가능한 경우가 많다. 예를 들어 동전을 던지는 시행을 「축구 경기에서 5번을 연속해서 패널티 킥을 실축한 선수가 있다. 당신이 감독이라면 6번째 패널티 킥에 그 선수를 기용할까?」라는 통계적인 실생활 상황에 적용할 수 있다. 실제 상황에서 대부분의 사람들은 이 질문에 대해서 지극히 상식적인 수준에서 볼 때, 다음 번 패널티 킥에 그 선수를 다시 기용하지는 않을 것이다. 일반적으로 축구 선수가 패널티 킥에서 골대에 골을 넣을 확률이 50%를 넘는 현실에서 어떤 사람이든 그 선수를 패널티 킥을 찰 때 다시 기용하지 않으려 할 것이라는 판단의 근거는 앞서의 맥락에 기반한 경험적인 자료가 이 상황에서 중요하게 작용하였기 때문이다.

이와 같은 현실적 상황에서 통계적 확률이 수학적 확률에 가까워진다는 큰 수의 법칙을 개념적으로만 암기하고 있는 학생들은 확률 개념에 대해서 모순된 인지 구조를 구성할 수 있다. 다시 말해 동전을 여러 번 던졌을 때 앞면이 많이 나왔었다면, 바로 다음 번째 시행에서 동전을 던질 때는 현실적으로 뒷면이 나올 확률이 커져서 결국에는 앞면과 뒷면이 나올 확률이 같아질 것이라는 잘못된 직관적 사고를 할 수 있다는 것이다. 그렇

지만 어떤 동전도 앞선 시행에서 얼마나 많은 앞면과 뒷면이 나왔었는지 기억하고, 그에 따라 다음 시행에서 적게 나온 면이 나올 확률을 높여서 수학적 확률인 $\frac{1}{2}$에 가까워지게 할 수는 없다. 즉 근원 사건이 발생할 확률의 동등성과 독립성을 가정하는 학교 수학의 확률 계산에서는 100번 시행에서 앞면이 계속적으로 100번이 나왔다고 할지라도, 101 번째 시행에서도 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이 되는 것이다. 베르누이가 제시한 큰수의 법칙은 동전을 던진 총 시행횟수와 앞면이 나온 횟수의 비율, 즉 n번 던져 앞면이 k번 나왔다면 $\frac{k}{n}$의 값이 근사적으로 1이 될 확률이 $\frac{1}{2}$에 가까워진다는 것으로 다시 말해 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나올 횟수간의 비가 근사적으로 1에 가까워진다는 것이다. 다시 말해 어떤 동전도 이전의 시행에서 앞면이 연속적으로 많이 나왔더라도, 그 다음 번째 동전을 던질 때 뒷면이 나올 확률이 증가하지는 않는다.

2.4 보렐(Borel)의 패러독스

콜모고로프(Kolmogorov)가 1956년에 그의 저서「확률론의 기초(Foundations of the Theory of Probability)」에서 제기한 보렐의 패러독스는 기하학적 확률을 사용하여 확률 현상을 수학화할 때 직관을 통해 무작위성을 고려하는 방법이 가진 수학적 한계를 나타내는 것이다. 중·고등학교 학률·통계 영역의 교육과정에 기하학적 확률은 포함되지 않지만, 일반적으로 학교 수학에서는 확률 개념의 심화 활동으로 뷔퐁의 바늘 문제와 타일 위의 동전 문제와 같은 기하학적 확률 문제를 다루고 있다.

기하학적 확률과 관련한 패러독스의 전형적인 예인 베르트랑의 패러독스는 타당한 수학적 추론에 의해 서로 다른 확률 값에 도달하는 역설적 상황을 제시하여 기하학적 확률의 정의가 지닌 역설을 나타내는 것이다. 다시 말해 베르트랑의 패러독스는 임의의 현에 대한 의미가 분명하지 않음에 의해 여러 가지 수학적 계산에 의한 결과가 다르게 나오는 역설이다. 이에 비해 보렐의 패러독스는 전체의 길이 또는 넓이와 사건이 일어날 길이 또는 넓이의 비로 확률을 계산하는 기하학적 확률에서 완벽한 대칭성을 지닌 두 확률 변수가 나타내는 어떤 영역을 나타내는 확률 값이 확률 변수의 선택에 따라 서로 다를 수 있다는 것을 보여준다. 보렐의 패러독스는 학교 수학의 기하학적 확률에서 확률의 객체와 임의성이 갖는 의미를 간단한 확률적 상황을 통해 명확히 제시할 수 있다는 장점이 있다.

예를 들어 보렐의 패러독스는 직관적으로 완벽한 대칭성을 지닌 확률 변수처럼 여겨지는 위도와 경도를 기준으로 지구(地球) 위에 존재하는 어느 한 영역을 나타내는 확률을 구할 때 나타난다. 일반적으로 지구 위의 어느 한 지점을 표현할 때, 〈그림 2〉과 같이 경도($-\pi$에서 π까지)와 위도($-\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지)를 사용한다.

보렐의 패러독스에 따르면 지구 위에서 영역의 넓이를 기하학적 확률로 계산할 때 위

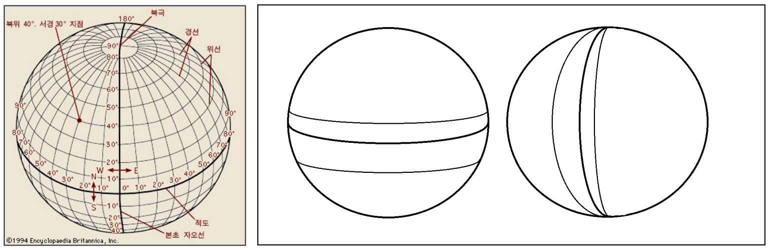


그림 2: 경도와 위도를 통한 위치 표현과 영역의 넓이
(출처: `http://enc.daum.net/dic100/viewContents.do?query1=b17a0735a`)

도와 경도 중에 무엇을 기준으로 하는가에 따라서 서로 다른 확률 값이 구해진다. 위도와 경도의 정의에 의하여 위의 ⟨그림 2⟩와 같이 지구상에서 일정한 범위를 갖는 영역을 위도를 통해 기하학적 확률로 구한다면 그 영역은 어느 두 원의 사이가 되어야 하고, 경도를 이용한다면 구에서 반달 모양의 활꼴이 되어야 한다. 따라서 위도와 경도 중에서 일정한 범위를 갖더라도 무엇을 확률 변수로 하느냐에 따라 서로 다른 넓이로 계산되고, 지구의 전체 겉넓이에 대한 기하학적 확률도 다르게 계산된다.

2.5 페테르부르크(St. Petersburg) 패러독스

제임스 베르누이의 조카인 니콜라스 베르누이(Nicholas Bernoulli)가 제시한 페테르부르크 역설은 무한 번의 시행 횟수와 ∞의 기댓값이 존재하는 확률적 상황이 현실에서는 존재할 수 없다는 것과 관련이 있는 패러독스이다. 다음은 페테르부르크 역설의 초기 문제와 풀이로 니콜라스 베르누이가 제시한 것이다.

[페테르부르크 역설의 초기 문제] 주사위를 던져 처음에 6의 눈이 나오면 A가 B에게 동전 1개를 주고, 두 번째에 6의 눈이 나오면 A가 B에게 동전 2개를 주고, 세 번째에 6의 눈이 나오면 A가 B에게 동전 3개를 주고, 네 번째에 6의 눈이 나오면 A가 B에게 동전 4개를 주는 규칙으로 게임을 무한히 계속한다면 B의 기댓값은 얼마인가? (Hald, 2003)

[니콜라스 베르누이의 풀이] B의 기댓값을 x라 하고, 게임의 첫 번째 시행에서 주사위를 던져 6의 눈이 나오지 않았을 때의 B의 기댓값을 y라 하면, $x = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}y$이다. ($\because$ B의 기댓값 x는 처음에 주사위를 던져 6의 눈이 나오는 경우에 동전 1개를 받고, 처음에 주사위를 던져 6의 눈이 나오지 않는 경우 y를 받는 것이다.) 주사위를 무한히 계속해서 던지는 게임에서 처음에 주사위를 던져 6의 눈이 나오지 않은 후에 B는 2,3,4,5,6의 순서로 동전을 받는 것을 기대할 수 있지만, 원래 게임의 규칙에서의 동전을 지급하는 순서는 1,2,3,4,5로 각 항은 1만큼의 차이가

있다. 따라서 $y = x+1$이다. $y = x+1$을 $x = \frac{1}{6}+\frac{5}{6}y$에 대입하면 $x = \frac{1}{6}+\frac{5}{6}(x+1)$이고, 정리하면 $x = 6$으로 B의 기댓값은 6이다.」

페테르부르크 초기 역설과 같은 무한 번의 게임과 기댓값이 존재하는 문제와 풀이는 학교 수학에서도 다음의 예와 같이 다양하게 나타난다.

[페테르부르크 패러독스] 하나의 동전을 앞면이 나올 때까지 무한히 계속해서 던지는 시행에서 첫 번째 뒷면이 나오면 2원, 두 번째 뒷면이 나오면 4원과 같은 규칙으로 x번째에서 뒷면이 나오면 2^x원을 받는다고 할 때, 기댓값을 구하시오.

[무한급수를 이용한 풀이] 동전을 n번 던졌을 때, n번 모두 뒷면이 나올 확률을 p_n, 상금을 a_n이라 하면, $n = 1$일 때, $a_1 = 2$, $p_1 = \frac{1}{2}$이고, $n = 2$일 때, $a_2 = 4$, $p_2 = \frac{1}{4}$이다. a_n을 받을 가능성은 a_{n-1}을 받을 가능성의 $\frac{1}{2}$이므로 $p_n = (\frac{1}{2})^n$이다. 또한 게임에서 앞면이 계속 나오지 않을 경우에 지속되는 게임 수에 대한 기댓값은 $\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$이다. 반면에 이 게임에서 의미 있는 기댓값은 결과적으로 동전을 던질 때마다 기대되는 지불 금액의 합인데, 동전을 던질 때마다 지불 금액의 기댓값이 $\frac{1}{2}$이기 때문에 게임이 계속 지속될 때 지불 금액에 대한 기댓값은 $E = \sum_{n=1}^{\infty} p_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$이다.

페테르부르크 게임에서 기댓값은 수학적 이론에 의해 ∞가 되지만 참가자나 게임의 주관자 모두 이 게임을 실제로 진행하려는 의지는 작을 수밖에 없다. 왜냐하면 페테르부르크 게임이 공정한 게임이 되기 위해서는 게임에 참가하기 위한 비용과 기댓값이 같아야 하는데, 기댓값이 ∞라고 해서 ∞의 돈을 지불하고 게임에 참가할 사람은 없을 것이기 때문이다. 한 예로 기댓값이 ∞인 만큼 참가자가 10,000원을 내고 게임을 한다면 참가비용을 되찾기 위해서는 기댓값 $E = \sum_{k=1}^{n} p_k a_k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n = 10,000$으로 $n = 10,000$이고, 이 의미는 뒷면이 10,000번 나와야 한다는 것이다. 그리고 뒷면이 10,000번이 나오기 위한 확률 $p_{10000} = 2^{-10000}$이므로 2^{-10000}의 확률을 기대하고 이 게임에 참여할 참가자는 거의 없을 것이다. 또한 이 게임의 참가자들은 게임의 기댓값인 ∞의 참가비용을 내지 못할 것이므로 실제로는 기댓값보다 적은 내기 돈으로 참가하게 될 수밖에 없고, 그렇게 된다면 이 게임의 주관자는 게임의 기댓값보다 적은 참가비용으로 게임을 진행했으므로 손해를 볼 것이고 따라서 이 게임을 계속하려고 하지 않을 것이다. 다시 말해 수학적으로 올바른 기댓값의 결과를 우리의 일상에 그대로 적용할 수 없는데서 발생하는 페테르부르크 역설은 우연과 확률이라는 불확실성 아래에서 기댓값이 반드시 공정하고 합리적인 예측 수단이 될 수 없다는 것을 보여주는 예이면서 이 역설적인 결과로 인해 이후에 확률론과 경제학에서 개연적·도덕적 기댓값에 대한 논의가 이루어지는 계기가 되었다.

경제학에서 기대는 기본적으로 불확실성과 관련되는 개념으로 어떤 결과가 일어날 주관적 확률로 정의되며, 기대효용은 이익과 이익이 일어날 확률을 곱하는 기댓값과는 다르게 이익을 일단 내면적인 함수를 통해 개인적인 양으로 변화시키고 난 후 기대 확률을 곱하여 얻은 것이다. 즉 수학적 기댓값이 확률·통계적인 개념에서 객관적 확률에 근거한 것이라면 기대효용은 내면이나 심정, 신념 등을 기반으로 하는 주관적 확률에 근거한 값이다. 따라서 어떤 이익에 대해서 내면에 존재하는 주관적 감정을 도입한 기대효용은 수학적 기댓값으로 설명할 수 없는 페테르부르크 역설의 모순적 상황을 설명할 수 있다.

2.6 생일(Birthday) 패러독스

어느 한 자리에 365명이 있을 때, 극단적인 경우 이들의 생일은 모두 다를 수 있다. 그렇지만 366명 중에는 생일이 같은 사람이 적어도 한 쌍이 존재할 확률은 1이다. 또한 1년 365일 중에 생일이 같은 경우가 적어도 한 쌍 존재할 확률이 $\frac{1}{2}$보다 크기 위해서는 단지 23명의 인원으로 가능하고, 이 확률이 99%보다 크기 위해서는 57명만으로 가능하다. 그리고 교실에 학생이 30명이라면 이 중에서 생일이 같은 학생이 적어도 한 쌍이 존재할 확률은 70%를 넘는다. 즉 생일 패러독스는 사람들이 지닌 확률 계산에 대한 내적 직관에 반하는 현상을 나타내는 것으로, 학교 수학에서 학생들에게 확률적 현상에 대한 흥미와 관심을 일으킬 수 있는 타당한 교수학적 소재이다. 그렇지만 고등학교 확률·통계 영역에서 생일 패러독스는 다음과 같이 확률의 곱셈 정리의 전형적인 계산 문제로만 제시된다.

> [생일 패러독스] n명 중에 적어도 두 명 이상의 생일이 같을 확률 $P(n)$를 구하시오(우정호, 2009).

학교 수학에서 생일 패러독스가 함의하고 있는 확률 계산에 대한 내적 직관과 실제 확률 값의 차이는 공학적 도구를 활용하여 시각적으로 드러나게 할 수 있다. 〈그림 3〉와 같이 EXCEL을 활용하여 학생들이 실제적으로 변수 n에 대하여 확률을 계산하는 활동을 수행할 수 있고, 또한 1년의 일수를 365일이 아닌 다른 수로 하여 생일이 같은 사람이 있을 확률을 계산하는 활동을 실시할 수 있다. 〈그림 3〉의 왼쪽 자료는 EXCEL에서 셀 B1은 1년의 일수, n은 사람 수(1+A10), P_n은 생일이 같을 확률(= B10*(B$1 − A10)/B$1), $1-P_n$은 생일이 다를 확률(= 1−B10)로 생일 패러독스를 나타내도록 구성한 것이고, 오른쪽 자료는 1년의 일수와 사람 수를 학생이 임의로 설정하여 확률적 탐구 활동을 수행할 수 있도록 구성한 것이다. 〈그림 3〉의 오른쪽과 같은 자료를 통해 학생들은 생일 패러독스가 함의하는 의미뿐만 아니라 같은 사람 수에 대해서 1년의 일수가 작을수록 생일이 같은 확률은 빠르게 1에 접근한다는 사실 등을 시각적으로 탐색할 수

있다.

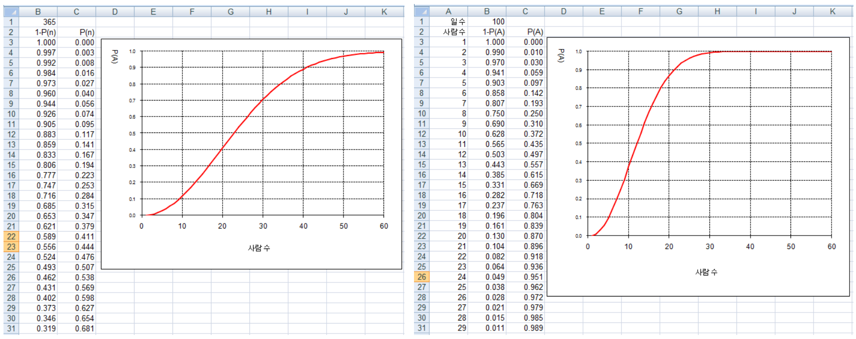


그림 3: EXCEL로 나타낸 생일 패러독스

결론적으로 학생들은 <그림 3>과 같은 생일 패러독스에 대한 엑셀 자료에서 n이 변함에 따른 셀의 귀납적 변화 형태를 통해 생일 패러독스가 내포하고 있는 확률·통계적 의미를 시각적으로 자연스럽게 파악할 수 있다. 이와 같이 학교 수업에서 단순한 확률 계산이 아닌 공학적 도구를 활용하는 활동은 학생들에게 확률을 학습하는 또 다른 즐거움을 제공하고, 직관이 아닌 확률을 활용하여 복잡한 실생활의 궁금증을 해결하는 방법을 제시할 수 있다.

2.7 콩도르세(M. Condorcet)의 패러독스

프랑스 수학자 콩도르세(M. Condorcet)가 18세기에 주장한 콩도르세의 패러독스는 일상에서 흔히 성립하는 추이율(transitivity)이 확률·통계에서는 성립하지 않음을 보여주는 역설이다. 선호도 조사를 예로 들면 콩도르세의 패러독스는 어떤 선거에서 세 후보 A, B, C에 대해서 유권자들이 A보다 B를 선호하고 B보다 C를 선호할 때, A보다 C를 더 선호한다고 할 수 있는 추이율이 반드시 성립하지는 않는다는 것이다. 다시 말해 세 명의 후보 A, B, C에 대한 유권자 7명의 선호도 순위가 <표 2>와 같다면, 다수결에 의해 당선자를 결정할 때 첫 번째 선호도가 가장 많은 후보자 A가 당선이 된다. 그렇지만 이 투표의 결과는 최선이 아닌 최악의 결과일 수 있는데, 유권자의 세 번째 선호도가 가장 많은 후보자도 역시 A이기 때문이다. 또한 두 후보자만을 대상으로 유권자의 선호도에 따른 당선 가능성을 통계적으로 확인해보면, 후보자 A와 B에서는 B가 당선되고 후보자 B와 C에서는 후보자 C가 당선되지만, 후보자 A와 C에서는 추이율에 따라 C가 당선되지 못하고 후보자 A가 당선되는 것을 알 수 있다.

수학적으로 어떤 관계 R에 대해서 $x\,R\,y$, $y\,R\,z$이면 $x\,R\,z$가 성립할 때, 관계 R은 추이적이라 말한다. 현실에서 추이율은 "~보다 큰", "~보다 무거운", "~보다 빠른" 등

표 2: 선호도의 순위

후보자 / 유권자	A	B	C
(가)	2	1	3
(나)	1	2	3
(다)	1	3	2
(라)	1	3	2
(마)	3	1	2
(바)	3	2	1
(사)	3	2	1

의 관계에서 성립하지만, 콩도르세의 패러독스는 "~을 ~보다 선호한다."는 일상적인 관계가 추이적이지 않다는 것을 확률·통계적 상황을 통해 제시한다. 이와 같은 역설적 현상은 다음과 같은 게임의 공정성 문제에서도 발생할 수 있다.

[게임의 공정성 문제] 세 학생 A, B, C가 〈그림 4〉와 같은 원판을 돌려서 큰 숫자가 나오는 사람이 이기는 게임을 할 때, 이 게임은 공정하다고 할 수 있는가?

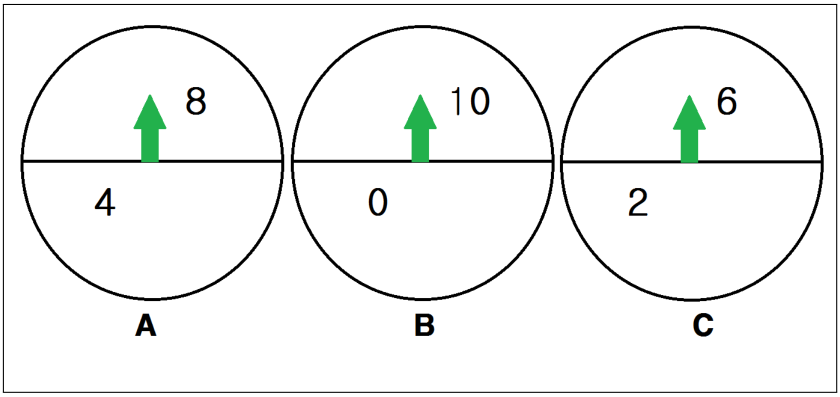


그림 4: 세 학생이 돌리는 원판

위의 문제에서 두 학생 A와 B가 게임을 한다면 이길 확률은 두 학생 모두 $\frac{1}{2}$이므로 공정한 게임이라고 할 수 있다. 또한 두 학생 B와 C가 게임을 하는 경우에도 이길 확률은 두 학생 모두 $\frac{1}{2}$이므로 공정한 게임이다. 그렇지만 두 학생 A와 C가 하는 게임은 공정할 수 없다. 직관적으로는 추이율이 성립하여 공정할 것으로 보이지만, 두 학생 A와 C가 하는 게임은 〈표 3〉과 같이 네 가지의 가능한 경우가 나타난다. 따라서 학생 A가 이길 확률은 $\frac{3}{4}$이다.

표 3: A와 C의 경우의 수

학생 / 경우의 수	A	C
1	8	6
2	8	2
3	4	2
4	4	6

콩도르세의 패러독스나 게임의 공정성 문제와 같이 내적 인식의 직관을 벗어나는 확률·통계적 상황의 또 다른 예는 1951년 심프슨(Simpson)에 의해 제기된 심프슨의 패러독스를 들 수 있다. 심프슨의 패러독스는 전체 집단을 구성하고 있는 소집단에서 자료가 나타내는 확률적 상황이 직관과는 다르게 전체 집단에 그대로 적용되지 않는 현상을 말한다. 〈표 4〉는 두 학과 A, B의 남·녀 합격률로 구성한 심프슨의 패러독스이다. 〈표 4〉에서 A학과에서는 여학생의 합격률이 40%로 남학생의 합격률 33%보다 높고, B학과에서도 여학생의 합격률이 75%로 남학생의 합격률 71%보다 높다. 그렇지만 전체적으로 여학생의 합격률이 56%로서 남학생의 합격률 60%보다 작다는 것을 알 수 있다. 다시 말해 A학과와 B학과의 여학생 합격률이 모두 높은데도 전체 여학생의 합격률은 낮게 나타난다.

표 4: 심프슨의 패러독스

남녀 / 학과	여학생		남학생	
	지원자수	합격자 수(비율)	지원자수	합격자 수(비율)
A	50	20(40%)	30	10(33%)
B	40	30(75%)	70	50(71%)
전체	90	50(56%)	100	60(60%)

심프슨의 패러독스는 수식으로 표현하면 $\frac{a}{b} < \frac{A}{B}$, $\frac{c}{d} < \frac{C}{D}$일 때 $\frac{a+c}{b+d} > \frac{A+C}{B+D}$인 확률·통계적 상황이 존재함을 나타내는 것으로, 논리적 추론을 하는 과정에서 수학적 타당성에 근거하지 않고 직관에 기반을 두는 추론은 타당하지 못한 결과를 가져올 수 있음을

표 5: 타율에 대한 심프슨의 패러독스

타자 / 전·후	A		B	
	타석수	안타수(비율)	타석수	안타수(비율)
전반기	10	4(40%)	100	35(35%)
후반기	100	25(25%)	10	2(20%)
전체	110	29(26.4%)	110	37(33.6%)

보여주는 간단한 예이다. 교실 수업에서 심프슨의 패러독스를 활용할 때, 〈표 5〉와 같이 패러독스가 나타나는 현실 상황을 학생들이 직접 다양하게 구성하도록 할 수 있다.

또한 심프슨의 패러독스는 〈그림 5〉와 같이 EXCEL의 셀 참조 기능을 활용해 셀에 숫자를 입력하면 함수식과 셀 참조 기능을 통해 올바른 확률을 계산할 수 있도록 하여, 교실 수업에서 심프슨의 패러독스가 가진 확률적 의미를 복잡한 계산에 치중하지 않고 효과적으로 탐색하도록 할 수 있다.

	여학생			남학생		
	지원자수	합격자 수	확률	지원자수	합격자 수	확률
A학과	50	20		30	10	
B학과	40	30		70	50	
전체	90	50		100	60	

	여학생			남학생		
	지원자수	합격자 수	확률	지원자수	합격자 수	확률
A학과			#DIV/0!			#DIV/0!
B학과			#DIV/0!			#DIV/0!
전체	0	0	#DIV/0!	0	0	#DIV/0!

그림 5: EXCEL로 구성한 심프슨의 패러독스

3 결론

프로이덴탈((Freudenthal)의 주장과 같이 수학의 발달이 통찰에 의해서 획득된 지식을 점진적으로 형식화하는 역사적 과정이었다고 한다면, 수학 교육에서 수학 개념이 발명되어 온 역사적인 계통 발달 과정에 따라 학생들이 다시 수학을 재발명하게 하는 활동을 교수·학습에 도입해야 한다. 이는 형식화되기 이전의 실험적이고 귀납적인 통찰에 의해서 제기된 발생 상태 그대로의 수학과 발명되고 논쟁을 통해 변화하고 발전하면서 정선되어 가는 수학에 대해서 학생들이 수학적 지식이나 아이디어가 발생할 수밖에 없었던 이유를 고민해보고, 그 수학적 개념이 전개되고 발전해 나가면서 직면했던 여러 가지 도전들을 직접 체험해보면서, 수학자들이 처음부터 오랜 시기를 거치면서 이루었던 수학적 사고의 과정을 다시 경험해 볼 수 있다는 것에서 교수학적인 의의가 있다고 할 수 있다. 수학은 다른 어떤 학문보다 더 오래되었지만 수천 년 전에 발명된 수학이 오늘날에도 여전히 유효하게 사용되고 있으며, 수학의 긴 역사 속에서 현재의 수학 교육에 활용할 만한 풍부한 소재들을 발견할 수 있다. 또한 이 가운데 절대적인 것으로 여겨지는 현재의 수학적 개념이나 정리들은 과거에 논란의 대상이었던 문제나 역설들에 대한 반박이며 대답이다.

이경화(1996)는 확률·통계 영역의 교수·학습에서 역사적 패러독스를 다룸으로써 확률·통계 개념의 수학화 과정에서 어떤 수학적 장애에 부딪혔는가를 이해할 수 있으며, 이를 통해 교실 수업에 활기를 불러일으켜 학생들의 수학에 대한 흥미와 동기를 함양할 수 있다고 주장한다. 박지온(2006)은 수학 교사들이 역사적 패러독스에 대한 관심을 가

지고 수학에 관련된 논리와 유익한 내용, 재치와 해학적인 내용, 매력적인 내용 등의 수학적인 이야기 거리를 개발하고 교수·학습에 활용함으로써, 학생들에게 수학은 어렵고 매력이 없는 교과라는 고정 관념을 해소하여 준다면 교실 수업이 보다 발전적으로 이루어질 것이라고 말한다. 또한 이정연(2010)은 패러독스를 활용한 수학 영재교육을 통해 수학영재들의 생산적 논쟁과 창의성을 함양할 수 있다고 주장한다. 따라서 본 연구에서 학교 수학의 확률·통계 내용과 관련된 역사적 패러독스들은 무엇이고 어떠한 수학적 배경에 의해 나타나게 되었으며, 교실 수업에 어떻게 활용할 수 있는가를 알아본 것은 수학 교육의 역사 발생적 원리에 비추어 의미 있는 교수학적 시도이다. 또한 본 연구에서 학교 수학의 확률·통계 영역과 관련하여 제시한 역사적 패러독스들은 교실 수업에서 확률·통계의 개념을 심도 있게 다루기를 원하는 교사와 확률·통계를 좀 더 다양한 측면에서 학습하고자 하는 학생들에게 유용한 교수·학습 자료로 사용될 수 있다는 점에서 그 의미를 가진다고 할 수 있다.

참고 문헌

1. 고성은, 『수학 8-나』, 서울: 블랙박스, 2001.
2. 고옥주, 〈실험·실습을 이용한 확률·통계 교육〉, 인천대학교석사학위 논문, 2001.
3. 김경원, 『확률의 경제학』, 서울: 살림BIZ, 2008.
4. 김남희, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽, 『수학교육과정과 교재연구』, 서울: 경문사, 2011.
5. 김원경, 이승철, 이봉주, 안대영, 허양순, 『확률과 통계』, 교육인적자원부, 2003.
6. 김정수, 〈불확실성, 결정 오차, 그리고 제비뽑기의 역설〉, 한국정책학회보 16(2007), No. 1, pp. 49–72.
7. 김춘영, 〈수학사를 이용한 초등학교 수학과 교재 개발 연구〉, 한국교원대학교 석사학위 논문, 1993.
8. 남주현, 〈초·중등 통계교육을 위한 통계적 방법론에 대한 연구〉, 이화여자대학교 박사학위논문, 2007.
9. 박지온, 〈중등 수학교육에서 패러독스 활용에 관한 연구〉, 건양대학교 석사학위논문, 2006.
10. 변지영, 〈확률 · 통계 영역에 대한 교사들의 지식과 신념에 관한 연구〉, 한국교원대학교 석사학위 논문, 2005.
11. 신보미, 〈시뮬레이션을 활용한 확률 지식의 교수학적 변환 방식〉, 한국교원대학교 박사학위 논문, 2007.
12. 엄정식, 〈에피메니데스의 역설〉, 철학연구19(1984), No. 1, pp. 167–179.
13. 우정호, 『학교수학의 교육적 기초』, 서울: 서울대학교 출판부, 2002.
14. 우정호 외, 『미적분학과 통계 기본』, 서울: 두산 동아, 2009.
15. 이경화, 〈확률개념의 교수학적 변환에 관한 연구〉, 서울대학교 박사학위 논문, 1996.
16. 이정연, 이경화, 〈심프슨의 패러독스를 활용한 영재교육에서 창의성 발현 사례 분석〉, 수학교육학 연구20(2010), No. 3, pp. 203–219.

17. 장대흥, 이효정, 〈제7차 수학과 교육과정에 따른 1—10단계 확률 및 통계단원 분석〉, 응용통계연구 18(2005), No. 1, pp. 229–249.
18. 장인홍, 〈고전확률론과 중심극한정리에 대한 역사적 고찰〉, KJHM 15(2002), No. 3, pp. 65–74.
19. 조미혜, 〈역설과 집합론의 체계〉, 충남대학교 석사학위 논문, 2000.
20. 조차미, 〈Bertrand paradox의 분석을 통한 기하학적 확률에 관한 연구〉, 대한수학교육학회지 학교수학 10(2008), No. 2, pp. 181–197.
21. 최경호, 〈고등학교 수학과 교육과정 중 확률·통계에 나타난 의미의 연결망 구조와 분석〉, Communication of the korean Statistical Society 15(2008), No. 5, pp. 245–254.
22. 최수일, 〈제 7차 교육과정 고등학교 확률과 통계 교육의 문제점〉, 한국통계학회 춘계 학술발표회 논문집(2006).
23. 한인기, 〈중등 교사 양성을 위한 수학교육학 및 수학사 강좌에 대한 연구〉, 수학교육 42 (2003), No. 4, pp. 455–480.
24. 허민, 〈수학교육에 활용할 옛 문제 연구〉, 한국수학사학회지 13(2000), No. 1, pp. 33–48.
25. Appleton, D. R., "An Example of Simpson's Paradox", *The American Statistician* 50(1996), No. 4, pp. 340–341.
26. Bennet, D. J., *Randomness*, Harvard University Press(1998), 박병철(역), 『확률의 함정』, 서울: 영림카디널(2003).
27. Cohen, I. B., *The triumph of number*(2005), 김명남(역), 『세계를 삼킨 숫자이야기』, 서울: 생각의 나무(2007).
28. Gardner, M., *Ata! Gotcha*, New York: W. H. FREEMAN(1982), 이충호(역), 『이야기 파라독스』, 서울: 사계절(1998).
29. Hald, A., *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, Wiley Inc(2003).
30. Hinners, L., *The St. Petersburg Paradox*, Institute of Agricultural Development in Central and Eastern Europe(2003).
31. Kapadia, R. and Borovcnik, M., *Chance Encounter: Probability in Education*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers(1991).
32. Kolmogorov, A. N., *Foundations of the Theoty of Probability*, New York: Chelsea Publishing company(1956).
33. Maxara, C. & Biehler, R., *Students' probabilistic simulation and modeling competence after a computer—intensive elementary course in statistics and probability*, University of Kassel, Germany(2004).
34. NCTM, *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics(2000).
35. Rao, C. R., *Statistics and Truth: Putting Chance to Work*, World Scientific(1997), 이재창, 송일성(역), 『혼돈과 질서의 만남: 확률법칙의 다리를 넘어』, 나남출판사(2003).
36. Salsburg, D., *The lady tasting tea*(2001), 최정규(역), 『천재들의 주사위—20세기를 만든 통계학의 혁명들』, 서울: 뿌리와 이파리(2003).
37. Stigler, S. M., *The history of statistics*(1986), 조재근(역), 『통계학의 역사』, 서울: 한길사 (2005).
38. Székely, G. J., *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, Reidel Pub-

lishing Company(1986).
39. 위도, 경도, http://enc.daum.net/dic100/viewContents.do?query1=b17a0735a
40. 베르트랑의 패러독스, http://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand%27s_box_paradox
41. 보렐의 패러독스, http://en.wikipedia.org/wiki/Borel%E2%80%93Kolmogorov_paradox
42. 생일 패러독스, http://en.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem

이종학 대전 송천 고등학교
Daejeon Songchon High School
E-mail: mathro@hanmail.net