한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제4호 (2011년 11월), 143–155

방정식의 판별식과 교육과정에서 활용 방안

Discriminant of Polynomial in highschool mathematics curriculum

최은미 Eunmi Choi

수학교육과정에서 이차방정식 풀이와 관련되어 소개되는 판별식이 삼차 이상의 방정식의 판별식으로 발전하는 역사적 과정을 살펴보고, 고차방정식의 판별식의 역할을 연구한다. 이를 바탕으로 학교수학에서 고차방정식 지도에 활용할 수 있는 방안을 알아본다.

The discriminant is one of the important concepts in school mathematics according to second degree polynomials. In this paper we survey the history of development to discriminant of any higher degree polynomials and investigate how the discriminant works for determining the graph of polynomials.

Keywords: 판별식(discriminant), 실베스터 행렬식(sylvester determinant)

1 서론

방정식은 수학교육과정의 핵심 영역중 하나로서, 현행 10단계는 일$\cdots$ 이차방정식과 간단한 고차방정식 그리고 연립방정식을 다루고, 더 나아가 이차곡선의 소개까지 포함한다. 판별식(discriminant)은 이차방정식과 관련하여 학교수학에서 가장 활용도가 높은 개념 중 하나인데 방정식의 근을 조사하고 중근의 존재를 확인하며 그래프를 그리는 중요한 척도가 된다. 함수 관련 학습에서 겪는 어려움을 연구한 김성문 [2]은 많은 고등학생들이 이차함수와 이차부등식 관련 문제에서 뿐만 아니라 그래프의 위치관계를 인식하는데 힘들어하며, 더욱이 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 과 판별식의 관계를 이해하기 어려워한다고 했다. 이는 학생들이 판별식을 공식으로 암기하고 있을 뿐 그 의미와 해석을 제대로 알지 못하기 때문에 겪는 어려움이라고 볼 수 있다. 학교수학에서는 특수한 형태의 고차방정식의 풀이법을 배우는데 김문정 [1]은 이차방정식을 배운 이후에 학생들은 다양한 고차함수를 접하면서 판별식 $b^2 - 4ac$는 이차방정식에 국한되어 적용 가능한 것이며 삼차 이상의 방정식에서는 적용되지 않는다는 사실을 깨닫게 된다고 했다.

그러나 판별식은 임의의 n차방정식에서도 정의되며 방정식이 중근을 갖는지의 판단

MSC: 01A72, 01A73 ZDM: A30
제출일: 7월 25일 수정일: 8월 27일 게재확정일: 9월 20일

뿐만 아니라 실근인지 복소수 근인지, 또는 유리수 근인지 무리수 근인지를 결정하는 기준이 된다. 이는 삼차방정식의 그래프 개형을 아는데 큰 도움이 되며, 더 나아가 근들이 방정식이 정의된 체 위에 존재하는지 혹은 확대체에 존재하는지를 알 수 있어서 주어진 체에서 기약인지를 판정할 수 있는 근거가 된다.

이 연구에서는 n차방정식의 판별식의 역사적 발전과정을 살펴보며, 이차방정식에서 근의 개수나 그래프 개형에 대한 판별식의 역할이 고차방정식에서는 어떻게 활용될 수 있는지를 알아본다. 그와 더불어 방정식의 차수가 커질수록 더욱 복잡해지는 판별식을 계산하기위해 정의된 실베스터 행렬식의 발생과 발전을 수학사적 관점에서 조사한다. 행렬과 일차변환의 간단한 이론은 수학교육과정에서 소개될 뿐만 아니라, 차수가 커지더라도 적어도 컴퓨터를 사용하여 구할 수 있기 때문에 고차방정식의 판별식을 학교수학에서 소개할 수 있는 방안을 조사한다. 이 연구를 통해 이차방정식으로 국한하여 설명되는 판별식의 개념을 폭넓게 이해할 수 있을 것으로 보인다.

2 수학교육과정에서 소개되는 판별식과 n차방정식의 판별식

기원전 2000년경의 바빌로니아에는 $x+y=p$와 $xy=q$를 만족하는 x, y를 찾는 문제가 있었는데 이것은 이차방정식 $x^2+q=px$를 푸는 것이었다. 기원전 300년경의 유클리드를 포함한 고대 수학자들은 이차방정식을 기하적 방법으로 연구했다. 628년경이 되어서 인도의 브라마굽타(Brahmagupta, 598∼668)는 방정식 $ax^2+bx=-c$를 대수적 방법으로 접근하여 오늘날의 대수 표현인 $x=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$로 근을 나타냄으로써 판별식 $\Delta=b^2-4ac$ 와 방정식의 근의 관계를 설명할 수 있게 되었다.

실수계수 이차방정식 $f(x)=ax^2+bx+c$의 근은 Δ의 제곱근의 형태로 표현되므로, 방정식의 근이 실수체에 포함되기 위한 동치조건은 판별식이 실수의 완전제곱 꼴로 되는 것이다. 또한 방정식이 완전제곱 꼴이 되려면 $\Delta=0$이어야 하므로, 판별식과 그래프 개형의 관계가 유도되어 수학교육과정 10단계에서 다음과 같이 소개된다. (1) $\Delta>0$ 이면 f는 두 개의 실근을 가져 x축을 두 번 지나며, 실수에서 인수분해된다. (2) $\Delta=0$이면 f는 중복도 2인 하나의 중근 $r=-b/2a$을 갖는다. 실수에서 완전제곱 형태로 인수분해되며 그래프는 점 r에서 x축과 접한다. (3) $\Delta<0$이면 f는 두 개의 (켤레)복소수근을 가지며, 실수에서 인수분해되지 않는다.

이차방정식의 판별식은 삼차방정식 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프 개형을 결정하는데도 큰 역할을 한다. 실제로 도함수 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$의 판별식이 $4(b^2-3ac)$이므로, (1) $b^2-3ac>0$이면 f'은 실근 r_1, r_2를 가지며 구간 $(-\infty,0)$, (r_1,r_2), (r_2,∞)에서 부호가 차례로 바뀐다. 따라서 r_1, r_2는 f의 극점이 되어 그 점들의 좌우에서 증가와 감소를 반복한다. (2) $b^2-3ac=0$이면 f'은 하나의 중근 $r=-b/3a$을 갖는다. r

을 중심으로 f'은 감소하다가 증가하거나 혹은 증가하다가 감소한다. 따라서 f는 r을 변곡점으로 하여 위로 오목하다가 아래로 오목하거나, 그 반대가 되어 개형을 결정할 수 있다. (3) $b^2 - 3ac < 0$ 이면 f'의 실근이 존재하지 않는다.

이와 같이 삼차방정식 그래프의 개형은 도함수의 판별식으로부터 유추될 수도 있지만 삼차방정식의 판별식은 개형을 결정하는 직접적인 도구가 된다. 삼차방정식의 판별식 연구는 16세기 이탈리아의 타르탈리아(Tartaglia), 카르다노(Cardano), 페로(del Ferro) 등이 주도했다. 그들은 우선 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$을 모닉(monic) $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$로 가정한 후 $x = y + r$로 치환했다. 그러면

$$y^3 + (3r + b)y^2 + (3r^2 + 2rb + c)y + r^3 + r^2b + rc + d$$

가 되는데, $r = -b/3$ 즉 $x = y - \frac{b}{3}$로 치환하여 2차 항이 제거된 방정식

$$y^3 + Ay + B = 0 \quad (\text{이때 } A = -\frac{b^2}{3} + c, \quad B = \frac{2b^2}{3^3} - \frac{bc}{3} + d)$$

을 만들었다. 다시 $y = z + \frac{s}{z}$로 치환하면

$$z^6 + (3s + A)z^4 + Bz^3 + s(3s + A)z^2 + s^3 = 0$$

이 되므로, $s = -A/3$ 즉 $y = z - \frac{A}{3z}$로 치환하여

$$z^6 + Bz^3 - A^3/27 = 0$$

을 얻었다. 이것은 $z^3 = u$에 대한 이차방정식 $u^2 + Bu - A^3/27 = 0$ 이므로 판별식은

$$\Delta = B^2 + \frac{4A^3}{27} = 4(\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27})$$

이다. 실제로 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$와 판별식 $\Delta = \frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}$ (이 때 $A = -\frac{b^2}{3} + c$, $B = \frac{2b^2}{3^3} - \frac{bc}{3} + d$)에서, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ 또는 $\Delta < 0$는 f가 하나의 실근, 2개의 서로 다른 실근, 또는 3개의 서로 다른 실근을 갖는 경우와 동치가 되므로 판별식의 부호에 따라 모닉 삼차방정식의 근과 그래프의 개형을 알 수 있다. 한편 페라리(Ferrari)는 사차방정식의 판별식을 연구했고 그 후 임의의 n차방정식의 판별식의 대수적 표현의 연구가 계속되었다.

판별식이라는 용어는 1851년에 실베스터(J.J. Sylvester)가 처음 사용했는데 [4, p. 145], 그는 방정식이 중근을 가질 조건을 표현하는 함수로써 판별식을 정의했다. 임의의 체 K에서 최고차항의 계수가 a_n인 n차방정식 f가 K의 확대체에서 근 $r_1, \cdots, r_n$ (중복 허용)을 가질 때 f의 판별식을

$$\Delta_n = a_n^{2n-2} \prod_{i<j} (r_i - r_j)^2$$

로 정의했다. 따라서 f가 모닉이면 판별식은 방정식의 근들의 차이의 제곱들의 곱이다. 또한 실수계수 이차다항식 $f(x) = ax^2+bx+c$는 근 $r_i = (-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$ $(i = 1, 2)$을 가지므로 $r_1-r_2 = \sqrt{b^2-4ac}/a$이며 $\Delta_2 = a^2(r_1-r_2)^2 = b^2-4ac$ 가 되는데 이것이 잘 알려진 판별식이다. 한편 삼차방정식 $f(x) = x^3+bx^2+cx+d$가 실수확대체에서 세 근 r_1, r_2, r_3을 갖는다면 판별식은

$$\Delta_3 = (r_1-r_2)^2(r_1-r_3)^2(r_2-r_3)^2$$

이다. 그런데 $f(x) = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$으로 부터 근과 계수와의 관계를 이용하면

$$\Delta_3 = -4b^3d + b^2c^2 + 18bcd - 4c^3 - 27d^2$$

이다. 만약 r_1이 복소수라면 그것의 켤레 $\bar{r}_1$도 근이 되므로, 세 개의 근이 모두 실근이거나, 또는 하나는 실근이며 나머지 두 개는 복소수 근이어야 한다. 따라서 판별식의 부호에 따라, (1) $\Delta_3 > 0$일 동치조건은 세 개 모두 서로 다른 실근이다. (2) $\Delta_3 = 0$일 동치조건은 실근 중에 중근이 있다. (3) $\Delta_3 < 0$일 동치조건은 하나의 실근과 두 개의 복소수 근을 갖는다.

판별식은 실수계수의 이차 또는 삼차방정식의 중근을 판정하는 것뿐만 아니라 실근의 개수를 결정하는 단서가 되어 그래프 개형을 알 수 있다. 마찬가지로 실수계수의 n차 방정식 f가 중근을 갖지 않을 때 f의 실근의 개수는 그래프가 x축과 만나는 횟수로서, 이 숫자는 f의 최고차항 계수의 부호와 함께 x축의 위 또는 아래에 있는 그래프 영역의 개수를 제시함으로써 그래프 개형을 결정하는 주요 도구가 된다.

3 기하적 판별식과 그래프

Nickalls [6]은 이탈리아 수학자들의 삼차방정식 풀이를 재해석하면서 Δ_3의 기하적 성질을 연구했으며, 이를 발전시켜 Nickalls과 Dye [7]는 n차방정식의 그래프를 설명할 수 있는 새로운 대상물로서 기하적판별식을 정의했다. 실수계수 n차방정식의 기하적판별식이란 f의 도함수가 0이 되는 점(극점)에서의 함수 값들의 곱

$$D_n = \prod_{f'(t)=0} f(t)$$

으로 정의된다. 기하적판별식 D_n과 구별하기위해 Δ_n을 대수적판별식이라고 불렀는데, Δ_n의 경우와 마찬가지로 $D_n = 0$일 동치조건도 f가 중근을 갖는 것이며 D_n의 부호로부터 f의 실근의 개수를 알 수 있다. f'의 복소수 근이 켤레로 나타나는 것처럼 f의 복소수 극점도 켤레의 형태로 나타나므로, f가 중근을 갖지 않는 방정식이라면 D_n의 부호는 단지 실수 극값들만의 곱으로 정의하든지 혹은 모든 극값들의 곱으로 정의하든지

차이가 없다. 또한 $\Delta_2 = -4aD_2$ 인데, 이처럼 임의의 n 에 대해서도 두 개의 판별식 Δ_n 과 D_n 은 적당한 스칼라를 곱함으로써 서로 같아지므로 D_n 은 근본적으로 판별식 Δ_n 의 기하적 성질로 이해할 수 있다.

$f(x)$ 는 최고차항의 계수를 a 로 하는 n 차방정식이라고 하자. f 는 복소수체에서 n 개의 근 $r_1, \cdots, r_n$ (중복가능)을 가지므로 $f(x) = a\prod_{j=1}^{n}(x-r_j)$ 로 쓸 수 있다. f 의 극점 t_i 는 f' 의 근이며 또한 f' 의 최고차 계수가 na 이므로 $f'(x) = na\prod_{i=1}^{n-1}(x-t_i)$ 이다. 따라서 모든 t_i 와 r_j $(1 \le i \le n-1; 1 \le j \le n)$ 에 대해

$$f(t_i) = a\prod_{j=1}^{n}(t_i - r_j) \text{이며} \quad f'(r_j) = na\prod_{i=1}^{n-1}(r_j - t_i) = (-1)^{n-1}na\prod_{i=1}^{n-1}(t_i - r_j)$$

이다. 한편 f 를 직접 미분하면 $f'(x) = a\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\neq i=1}^{n}(x-r_i)$ 가 되므로

$$f'(r_j) = a\prod_{j\neq i=1}^{n}(r_j - r_i)$$

이다. 따라서 기하적판별식 D_n 과 대수적판별식 Δ_n 의 관계를 볼 수 있다.

$$\begin{aligned} D_n &= \prod_{f'(t)=0} f(t) = \prod_{i=1}^{n-1} f(t_i) = \prod_{i=1}^{n-1} a\prod_{j=1}^{n}(t_i - r_j) = a^{n-1}\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n-1}(t_i - r_j) \\ &= (-1)^{n(n-1)}a^{n-1}(na)^{-n}\prod_{j=1}^{n}f'(r_j) = (-1)^{n(n-1)}n^{-n}a^{n-1}\prod_{j=1}^{n}\prod_{j\neq i=1}^{n}(r_j - r_i) \\ &= (-1)^{n(n-1)/2}n^{-n}a^{n-1}\prod_{i<j}(r_j - r_i)^2 \;=\; (-1)^{n(n-1)/2}n^{-n}a^{-n+1}\Delta_n \end{aligned}$$

정리 3.1: n 차방정식 f 의 최고차항의 계수를 a 라 하면 다음이 성립한다.

$$D_n = (-1)^{n(n-1)/2}n^{-n}a^{-n+1}\Delta_n.$$

다시 말해서,

$$\begin{aligned} &\prod_{f'(t)=0} f(t) = (-1)^{n(n-1)/2}n^{-n}a^{-n+1}\cdot a_n^{2n-2}\prod_{i<j}(r_i - r_j)^2 \\ &= n^{-n}a^{n-1}\prod_{1\le i\neq j\le n}(r_i - r_j) = n^{-n}a^{n-1}a^{-n}\prod_{j=1}^{n}f'(r_j) = n^{-n}a^{-1}\prod_{f(r)=0}f'(r) \end{aligned}$$

이므로, f 의 n 개 근 r 에서 $f'(r)$ 들의 곱은 f' 의 $n-1$ 개 근 t 에서 $f(t)$ 들의 곱에 an^n 을 곱한 것과 같다.

D_n 의 기하적 성질을 보기위해 최고차항의 계수가 a 인 실수계수 n 차방정식 f 를 생각해보자. r_1 과 r_2 가 f 의 연속하는 두 실근이라면, f 의 부호는 구간 (r_1, r_2) 에서 동일

하다가 끝점 r_1과 r_2를 지나면서 부호가 반대로 바뀌어 $f'(r_1)$과 $f'(r_2)$는 서로 다른 부호를 갖는다. 따라서 구간 (r_1, r_2)에서 f의 최대와 최솟점 개수의 합은 홀수(중근허용)이며, f'은 홀수(중근허용)개의 실근을 가진다. 그러므로 구간 (r_1, r_2)에서 f의 극값들의 곱이 음수가 될 동치조건은 모든 $x \in (r_1, r_2)$에서 $f(x) < 0$ 이다.

$$t \in (r_1, r_2)\text{에서} \prod_{f'(t)=0} f(t) < 0 \Leftrightarrow \text{ 모든}x \in (r_1, r_2)\text{에 대해 } f(x) < 0.$$

만일 r_2가 f의 가장 큰 실근이라면, 모든 $x > r_2$에 대해 f 는 a와 같은 부호를 가지며, 모든 큰 양수 x에서 f'도 그러하다. 또한 r_2에서, f는 $-a$의 부호로부터 a의 부호로 변하여 f'은 a와 동일한 부호를 갖는다. 따라서 $x > r_2$에서 f'은 짝수(중근허용)개의 실근을 갖는다. 이와 유사하게, 만일 r_1이 가장 작은 실근이라면 $x < r_1$에서 f'는 짝수개의 근을 갖는다. 그러므로 f가 실근을 가질 때, 연속하는 두 실근 사이에서 $f(x) < 0$이 되도록 하는 실근 쌍의 개수를 N이라고 하면, $D_n = \prod_{f'(t)=0} f(t)$의 부호는 $(-1)^N$이 된다. 만일 n이 홀수이면, f의 실근의 개수 μ는 홀수 $2k+1$ $(k > 0)$이며, k개의 연속하는 실근 쌍들 사이에서 f는 양수이고 나머지 k개 쌍들 사이에서는 음수이다. 그러므로 $N = k$이며, 다음의 동치관계를 볼 수 있다.

$$D_n > 0 \Leftrightarrow N : \text{짝수} \Leftrightarrow \ k : \text{짝수} \Leftrightarrow \mu = 2k+1 \equiv 1 \pmod 4$$

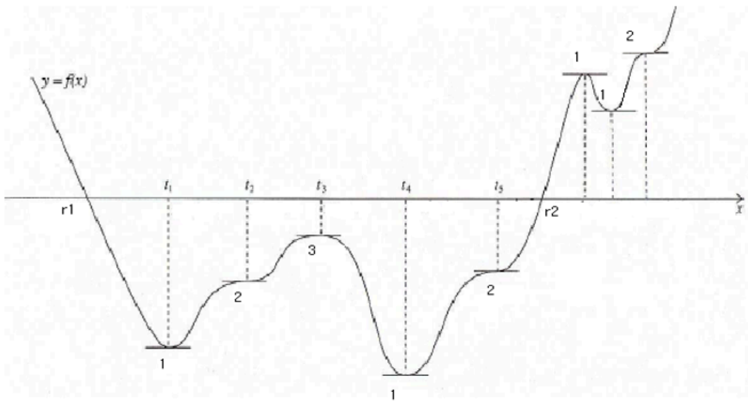
한편 n이 짝수이면, f의 실근의 개수 μ는 짝수 $2k$이며 가장 작은 두 개의 근들 사이에서 f는 a와 반대 부호를 갖는다. (가장 작은 근보다 작은 영역에서 f는 a와 동일한 부호를 갖기 때문이다.) 따라서 a가 양수이면 $N = k$이고, a가 음수이면 $N = k-1$이다. 그러므로 실근의 개수가 법 4에 의해 0이 될 동치조건은 D_n이 a와 동일한 부호를 갖는 것이다.

$$aD_n > 0 \Leftrightarrow \mu = 2k \equiv 0 \pmod 4$$

Nickalls과 Dye [7]는 판별식을 사용하여 아래와 같은 그래프의 개형을 설명했다.

t_1, t_2, t_3, t_4, t_5는 구간 (r_1, r_2)에 속하는 f의 극점들이므로 그 각각은 f'의 근이다. 그런데 점 t_2와 t_5의 근접한 좌우에서 f'의 부호가 변하지 않으므로, 중복도는 짝수로서 각각 2이다. 세 점 t_1, t_3, t_4의 근접한 좌우에서 f'의 부호가 바뀌므로 각각의 중복도는 홀수로서 $1, 3, 1$이며, 이 점들에서 f는 최댓값 또는 최솟값을 갖는다. 따라서 f의 두 개의 인접한 단순근 r_1과 r_2 사이에 모두 9(홀수)개의 극점이 있으며, 극대와 극솟값의 개수는 모두 5(홀수)개이다. 한편 영역 $x > r_2$에서 f'은 각각 중복도가 1,1,2인 모두 4개의 근을 갖는다. 위의 그래프는 $k = 1$이며 $a > 0$이고, 또한 기하적 판별식 $D_n < 0$임을 보여준다.

최고차 계수가 a인 f의 기하적판별식 D_n과 실근 개수 μ의 관계는 다음과 같다.



$D_n = 0 \Leftrightarrow f$ 는 중근을 갖는다.

n 이 홀수일 때: $D_n > 0 \Leftrightarrow \mu \equiv 1 \pmod 4$; $\quad D_n < 0 \Leftrightarrow \mu \equiv 3 \pmod 4$

n 이 짝수일 때: $aD_n > 0 \Leftrightarrow \mu \equiv 0 \pmod 4$; $\quad aD_n < 0 \Leftrightarrow \mu \equiv 2 \pmod 4$

4 연립방정식 풀이와 역사적 발전

주어진 방정식의 근들을 사용하여 정의된 판별식은 4차식 이상인 경우만 되어도 실제로 이용하기가 쉽지 않다. 영국의 수학자로서 케일리(Cayley)와 함께 행렬이론과 대수적 불변식의 기초를 확립한 실베스터 [3]는 판별식을 행렬식으로 표현하는 놀라운 정리를 증명했다.

정리 4.1: 방정식 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 의 판별식은 다음의 행렬식과 같다.

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & \cdot & \cdots & 2a_2 & a_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

이것은 실베스터 행렬이라 불리는 $(2n-1) \times (2n-1)$ 행렬로서 처음 n 개의 행은 f 의 계수들이며, 다음 $(n-1)$ 개의 행은 f' 의 계수들을 치환의 형태로 나열한 것이다. 이로서 임의의 방정식 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ 의 판별식을 계산할 수 있게 되었다. 실제로

(i) $n = 2$ 일 때 $\Delta_2 = a_1^2 - 4a_0a_2$ 이다.

(ii) $n = 3$ 일 때 $\Delta_3 = a_1^2a_2^2 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 + 18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2$ 이다.

(iii) $n=4$일 때 $\Delta_4 = [(a_1^2a_2^2a_3^2 - 4a_1^3a_3^3 - 4a_1^2a_2^3a_4 + 18a_1^3a_2a_3a_4 - 27a_1^4a_4^2 + 256a_0^3a_4^3) + a_0(-4a_2^3a_3^2 + 18a_1a_2a_3^3 + 16a_2^4a_4 - 80a_1a_2^2a_3a_4 - 6a_1^2a_3^2a_4 + 144a_1^2a_2a_4^2) + a_0^2(-27a_3^4 + 144a_2a_3^2a_4 - 128a_2^2a_4^2 - 192a_1a_3a_4^2)]$ 인데, 이 값은 $\begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \end{vmatrix}$ 을 푼 것이다.

모닉 삼차방정식 x^3+bx^2+cx+d의 판별식은 $\Delta = b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3d - 27d^2 + 18bcd$ 이며, 2차 항이 없는 모닉 방정식 x^3+cx+d의 판별식은 $\Delta = -4c^3 - 27d^2$ 임을 행렬식 계산으로부터 쉽게 볼 수 있다. 이것은 앞서 다룬 16세기의 카르다노, 페로, 타르탈리아 등이 이미 알고 있었던 결과와 동일하다. 더욱이 임의의 a에 대해 n차방정식 f의 판별식은 $\Delta(f) = a^{-2n+2}\Delta(af)$이므로 모닉인 경우만 생각해도 충분하다.

판별식을 계산하는 실베스터 행렬은 연립방정식의 풀이 연구로부터 시작되었다 [8]. 가장 간단한 선형연립방정식 풀이는 기원전 2세기경의 바빌로니아인들로부터 시작되어 12세기경에 두 방정식의 변수를 소거하기위해 행렬이 사용되었다. 이러한 기술은 17세기경에 유럽에 알려져서 체계화되면서 다른 분야로 응용되고 확장되었다. 이는 기하 곡선의 연구를 위해 대수 방정식기술을 도입한 것으로써, 곡선과 교점에 관한 문제는 방정식과 공통근의 연구로 자연스럽게 연결되어 고차연립방정식을 풀이에 관한 연구를 촉발하게 되었다.

일차연립방정식 $\begin{cases} a_1x + a_0 = 0 \\ b_1x + b_0 = 0 \end{cases}$ 을 생각해보자. $x = -a_0/a_1$과 $x = -b_0/b_1$이 각 방정식의 근이므로, $a_0/a_1 = b_0/b_1$, 즉 $a_1b_0 - a_0b_1 = 0$일 때 공통근이 존재한다. 이와 유사하게 이차연립방정식 $\begin{cases} a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \\ b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0 \end{cases}$ 의 근을 찾으려고 할 때도 각 방정식의 근을 먼저 구해 그 값들이 일치하는 경우를 생각하면 된다. 그러나 방정식의 근을 찾는 것은 쉬운 일이 아니다. 이런 점에서 선형대수의 행렬을 도입하게 된다. 일차연립방정식 $\begin{cases} a_1x + a_0 = 0 \\ b_1x + b_0 = 0 \end{cases}$ 의 두 방정식들을 성분 x^1과 x^0의 일차결합으로 이해하여 $\begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 의 행렬방정식 형태로 나타낼 수 있다. 연립방정식이 자명하지 않은 근을 가지려면 계수행렬의 행렬식이 0이어야 하는데, 그것이 바로 $a_1b_0 - a_0b_1 = 0$이며, 이는 수학 10단계와 선형대수 입문과정의 주요한 내용이다. 그

러나 비선형연립방정식 중에서 가장 간단한 연립이차방정식 $\begin{cases} a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \\ b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0 \end{cases}$ 을 $\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ x^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 으로 표현하더라도 계수행렬의 행렬식을 만들 수가 없다. 프랑스의 에띠엔 베조(E. Bezout, 1730～1783)는 주어진 이차방정식들을 성분 x^2, x^1, x^0 에 관한 일차결합으로 이해하여, 두 방정식에 x를 한 번씩 곱하여 새로운 방정식 두 개를 더 만들었다.

$$a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x = 0, \quad b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x = 0$$

그러면 원래의 두 방정식과 더불어 성분 x^3, x^2, x^1, x^0 의 일차결합으로 표현된 모두 4개의 식을 갖게 되어 행렬방정식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{cases} a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x \qquad = 0 \\ \qquad a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \\ b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x \qquad = 0 \\ \qquad b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ x^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

방정식이 0이 아닌 공통의 근을 갖기 위해서는 계수행렬의 행렬식이 0이어야 한다.

$$0 = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = (a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1) - (a_0b_2 - a_2b_0)^2$$

이 식에서 각각의 항은 모두 같은 차수로써 항의 첨자들의 합인 4이다. 이러한 생각은 임의의 m과 n $(m \geq n)$을 차수로 하는 두 방정식 f와 g

$$\begin{cases} f(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \\ g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0 = 0 \end{cases}$$

의 공통근을 설명하기까지 발전되었다. $m \geq n$이므로 $m+1$개 성분 $x^m, \cdots, x^0$ 의 일차결합으로 f와 g를 생각할 수 있으며, g에 $x^{m-n}, \cdots, x^1$ 을 한번 씩 곱해 $m-n$개의 방정식을 더 만든다. 그러면 $m+1$개 성분의 일차결합인 $2+m-n$개의 방정식으로

다음과 같은 연립방정식계를 구성할 수 있다.

$$\begin{array}{lllllllll} a_0 & +a_1x & +a_2x^2 & +\cdots & +a_nx^n & +a_{n+1}x^{n+1} & +\cdots & +a_mx^m & =0 \\ b_0 & +b_1x & +b_2x^2 & +\cdots & +b_nx^n & & & & =0 \\ & b_0x & +b_1x^2 & +b_2x^3 & +\cdots & +b_nx^{n+1} & & & =0 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & b_0x^{m-n} & +b_1x^{m-n+1} & +\cdots & +b_nx^m & =0 \end{array}$$

$n=1$이면 x를 소거할 수 있다. $n>1$이면 각 방정식에 x^k $(k>0)$를 곱해 $m+1+k$개 성분 $x^0, x^1, \cdots, x^{m+k}$의 일차결합인 $2+m-n+2k$개 방정식을 얻게 된다. 연립방정식이 해를 갖기 위해서는 $2+m-n+2k=m+1+k$이어야 하므로, $k=n-1$이다. 따라서 $m+n$개 성분의 일차결합인 $m+n$개 방정식으로 구성된 연립방정식이 되어 크기 $(m+n)\times(m+n)$인 계수행렬이 생기는데, 이것이 바로 실베스터행렬의 일반 형태이다. 더욱이 이 계수행렬의 대각선은 a_0을 n번, b_n을 m번 포함하므로 행렬식의 차수는 mn이다. 가령 방정식 $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$과 $b_2x^2+b_1x+b_0=0$을 생각하면 $m=3$, $n=2$이므로 위수 5인 연립방정식이 되어 $\begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{bmatrix}=0$ 으로 표현된다. 임의의 두 방정식이 공통근을 가질 조건은 계수행렬식, 즉 실베스터 행렬식이 0이다.

5 이차형식에서 판별식

일변수방정식의 그래프 개형을 파악하는 주요 도구인 판별식은 이변수 이차함수, 특히 수학교육과정에서 다루는 이차형식(이차곡선, 이차곡면)에서도 중요한 역할을 한다. 고대 그리스의 메나에크머스(Menaechmus, 기원전 375∼325)는 직원뿔을 한 모선에 수직인 평면으로 잘랐을 때, 그 단면의 모양이 직원뿔의 꼭지각 크기에 따라 달라진다는 사실을 알아냈다. 그 후 아폴로니우스(Appolonius, 기원전 262∼190)는 각 원뿔 단면의 모양으로부터 만들어지는 이차곡선을 원(circle), 타원(ellipsis), 포물선(parabola), 쌍곡선(hyperbola)이라고 명명했는데, 이는 기원전 500년경에 피타고라스학파에서 사용한 용어로서 elliptic(작은), parabolic(똑같은), hyperbolic(큰)이라는 뜻이다.

수학교육과정에서 이차곡선은 중심, 축, 준선, 초점 등의 몇 가지 기하적 요소로써 설명되고 있다. 그러나 이차곡선은 대수적 표현인 판별식으로 쉽게 제시할 수 있다. 이차형식 $\mathbf{q}: ax^2+bxy+cy^2$은 $[x\ y]\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=X^TA_{\mathbf{q}}X$ 로 표현되며, 대칭행렬

$A_{\mathbf{q}}$의 행렬식에 -4를 곱하면 b^2-4ac가 된다. 행렬식 $|A_{\mathbf{q}}|$를 이차형식 $\mathbf{q}$의 판별식이라고 부르는데, 이는 $\mathbf{q}$를 일변수방정식 ax^2+bx+c의 일반화로 볼 수 있게 해준다. 일반 이차형식 $\mathbf{Q}: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$으로 확장하면,

$$\mathbf{Q}=[x\ y]\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+[d\ e]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+f=[x\ y\ 1]\begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

로 표현된다. 이 때 두 대칭행렬 $\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$와 $\begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$을 각각 $A_{\mathbf{Q}}$와 A라고 하면, $A_{\mathbf{Q}}$는 A의 소행렬이며 $A_{\mathbf{Q}}$의 행렬식을 이차형식 $\mathbf{Q}$의 판별식이라고 부른다. 이차방정식 그래프의 개형이 판별식의 부호로부터 결정될 수 있었던 것처럼, 판별식 $|A_{\mathbf{Q}}|$와 $|A|$는 이차형식곡선 $\mathbf{Q}$의 개형에 대한 많은 정보를 제공한다. $|A|\neq 0$ 또는 $|A|=0$일 때 $\mathbf{Q}$를 각각 정상(non-degenerate)곡선 또는 퇴화(degenerate)곡선이라고 부르며 $|A_{\mathbf{Q}}|$의 부호에 따라 다음과 같이 분류한다.

$\mathbf{Q}$의유형	$\lvert A_{\mathbf{Q}}\rvert=0$	$\lvert A_{\mathbf{Q}}\rvert<0$	$\lvert A_{\mathbf{Q}}\rvert>0$
$\lvert A\rvert=0$일때	평행한두직선	서로만나는두직선	한점또는공집합
$\lvert A\rvert\neq 0$일때	포물선	쌍곡선	타원또는공집합.
			특히$a=c$이고$b=0$이면원

가령 $x^2-4y^2+6x+16y-23=0$은 정상이차곡선이며 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}<0$이므로 쌍곡선이다. 또한 $8x^2-3xy+5y^2-7x+6=0$과 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$은 정상곡선으로 $\begin{vmatrix} 8 & -3/2 \\ -3/2 & 5 \end{vmatrix}>0$ 이며 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}>0$ 이므로 각각 타원과 원이다. 한편 $x^2+4y=0$은 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-4$ 이며 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$ 이므로 포물선이지만, $x^2+4y^2=0$은 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$ 이며 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}>0$ 이므로 한 점 $(0,0)$이 된다.

이차곡면 $\mathbf{S}: ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz+j=0$ 는

$$[xyz]\begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+[ghi]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+j=[xyz1]\begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 & g/2 \\ d/2 & b & f/2 & h/2 \\ e/2 & f/2 & c & i/2 \\ g/2 & h/2 & i/2 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

로 표시할 수 있으며, $A_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$ 와 $A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 & g/2 \\ d/2 & b & f/2 & h/2 \\ e/2 & f/2 & c & i/2 \\ g/2 & h/2 & i/2 & j \end{bmatrix}$ 의 행렬식, 즉 **S** 의 판별식의 부호로부터 그래프의 개형을 판정할 수 있다. 실제로 이차곡면 **S** 는 판별식 $|A_{\mathbf{S}}|$ 의 부호로 부터 모두 17유형으로 분류된다 [5].

6 결론 및 교육학적 논의

기원전부터 시작된 이차방정식의 근을 찾기 위한 노력은 6세기경에 근의 공식이 대수적으로 제시됨으로써 해결되었고, 이로써 근과 판별식 Δ_2 의 관계를 알게 되었다. 삼차방정식을 연구했던 16세기 이탈리아의 수학자들은 Δ_3 을 알아내어 근들의 관계를 설명할 수 있었으며, 그 후 판별식은 임의의 n차방정식으로 확장되어 주어진 방정식의 근들의 차의 제곱의 곱으로 정의되었다.

그러나 방정식의 근들의 형태로 정의된 판별식은 방정식의 차수가 커질수록 계산하기 어려워질 뿐만 아니라 5차 이상인 방정식은 근을 갖지 않기 때문에 이러한 방법은 실효성이 적다. 더욱이 판별식을 사용하여 방정식의 근의 존재성을 확인한다는 것과는 오히려 상반된 순서가 되고 만다. 그러던 중에 실베스터가 판별식을 주어진 방정식의 계수들을 성분으로 하는 행렬식으로 표현하면서 n차방정식의 판별식을 계산할 수 있게 되었고 n원 n차 연립방정식의 근의 존재성을 설명하는데 유용한 도구가 되었다. 판별식의 연구는 실베스터 이후에 Jacobi, Hesse, Cayley, Cauchy 그리고 Gordan등을 거쳐 계속 발전하였다. 한편 라그랑주(1773)는 $ax^2+2bxy+cy^2$ 와 같은 이차형식의 판별식은 x 대신 $x+\lambda x$를 대입하여도 변화가 없으며, 이를 확장하여 가우스(1801)는 이변수(binary)와 삼변수(ternary) 이차형식의 판별식은 선형변환에 의해 불변성(invariant)임을 증명했다.

수학교육과정 9단계에서 이차함수의 그래프와 이차방정식의 풀이방법을 다루며, 10단계에서 이차방정식의 판별식과 근과 계수와의 관계가 소개되고 이를 바탕으로 삼, 사차방정식을 배운다. 더 나아가 일차연립방정식과 미지수가 2개인 연립이차방정식의 풀이를 다루며, 이차함수의 최대와 최소를 활용하여 그래프를 학습한다. 그러나 판별식의 개념은 이차방정식과 이차함수 영역에서 소개 된 이후로 더 이상 언급되지 않음으로 인해 판별식은 $b^2 - 4ac$이며 이차방정식에서만 정의되는 것처럼 보이게 되었다. 교육현장에서 판별식을 지도할 때 이차에서 뿐만 아니라 삼차 이상의 방정식에서도 판별식이 정의됨을 설명하고 전체적으로 판별식의 역할을 언급할 필요가 있다고 생각한다.

한편 수학 I에서 행렬과 역행렬이 소개되고 미지수가 두 개인 연립일차방정식을 행렬

로 나타내는 것을 배우며, 또한 수학 II에서 이차곡선의 방정식과 그래프를 다루면서 기하적 특성인 중심, 축, 준선, 초점 등으로 곡선의 개형을 판정한다. 그러나 수학 I의 행렬의 간단한 성질을 사용하여 수학 II의 이차곡선을 행렬로 표현하고, 행렬식과 판별식을 사용하여 이차곡선의 그래프 개형을 쉽게 분류할 수 있음을 제시할 수 있다. 그동안 행렬을 단지 간단한 연립방정식의 풀이에만 활용하도록 언급함으로써 행렬을 가르쳐야 할 필요성에 대한 논란조차 있었는데, 행렬과 판별식 그리고 이차곡선 단원을 연계시킴으로써 여러 영역의 연결성을 보여줄 수 있으리라 생각한다.

감사의 글 좋은 논문을 위해 여러 조언을 해주신 심사위원들께 감사의 마음을 전합니다.

참고 문헌

1. 김문정, 「접선개념 인식에 대한 연구」, 이화여자대학교 교육대학원 석사논문, 2006.
2. 김성문, 「고등학교 학생들의 함수 관련 학습에서 부진의 원인 분석」, 한국교원대학교 대학원, 2010.
3. 이상구, 함윤미, 「실베스터와 클라인 그리고 19세기 미국 수학」, 한국수학사학회지 19 (2006), No.2, pp. 77–88.
4. K. Fink, *A brief history of mathematics*, *COSIMO Classics*, New York, 2007.
5. S. Levy, *Quadratics in geometry formulas and facts*, excerpted from 30th Edition of the CRC Standard Mathematical Tables and Formulas, CRC Press, 1995. `http://www.geom.uiuc.edu/docs/reference/CRC-formulas/`
6. R.W.D. Nickalls, "A new approach to solving the cubic: Cardan's solution revealed", *The Mathematical Gazette*, 77(1993), No.480, pp. 354–359.
7. R.W.D. "Nichalls, R.H. Dye, The geometry of the discriminant of polynomial", *The Mathematical Gazette*, 80(1996), No.488, pp. 275–285.
8. J.J. Sylvester, "On a general method of determining by mere inspection the derivations from two equations of any degree", *Philosophical Magazine* 16(1840), pp. 132–135.

최은미 한남대학교 수학과
Department of Mathematics, Hannam University
E-mail: emc@hnu.kr