

## 상태변수 조합 퍼지 제어기를 이용한 도립진자 시스템의 안정화

이윤형<sup>1</sup> · 김종필<sup>2</sup> · 진강규<sup>3</sup> · 소명옥<sup>†</sup>

(원고접수일 : 2012년 9월 26일, 원고수정일 : 2012년 11월 8일, 심사완료일 : 2012년 11월 15일)

### Stabilizing Inverted Pendulum System Using Fuzzy Controller Based on State Variables Combination

Yun-Hyung Lee<sup>1</sup> · Jong-Phil Kim<sup>2</sup> · Gang-Gyoo Jin<sup>3</sup> · Myung-Ok So<sup>†</sup>

**요약** : 도립진자 시스템은 제어이론의 다양한 기본 요소를 포함하는 제어문제를 다루는데 많이 사용되고 있다. 초기에 도립진자 시스템의 안정화 제어는 PD, PID 등의 고전적인 방법이 주로 사용되었으나 최근에는 현대제어 이론과 지능제어 기법을 이용한 방법이 주로 적용된다. 최근 비선형 제어에 종종 사용되는 퍼지제어기는 도립진자 시스템과 같이 시스템의 상태 변수가 많으면 퍼지 규칙은 급격하게 증가되어 설계가 까다롭게 된다. 또한 상태 변수를 2개씩 구분하여 퍼지제어기를 설계하면 하나의 제어시스템에 2개의 퍼지제어기를 설계해야 하는 번거로움이 발생한다. 본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위해 도립진자 시스템의 4개의 상태변수를 물리적 의미에 따라 새로운 2개의 신호로 재구성하고, 이를 퍼지 입력 변수로 사용하는 상태변수 조합 퍼지 제어기(FCSC)를 제안한다. 제안한 제어기는 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 그 유효성을 확인한다.

**주제어** : 도립진자시스템, 소속함수, 퍼지규칙, 변수조합 퍼지제어기

**Abstract**: The inverted pendulum system is a common, interesting control problem that involves many basic elements of control theory. In the early, controls of stabilization for the inverted pendulum system were used classical methods like PD, PID controller. In recently, however, control methods based on modern and intelligent control theory are widely applied. The fuzzy logic controller which is often used in nonlinear control is a little too hard to design due to increasing fuzzy rules rapidly if the given system like inverted pendulum has many state variables. Also, in case the state variables are divided into two parts, two fuzzy controllers are needed in the control system. In this paper, the authors propose FCSC(Fuzzy Controller based on State variables Combination) that reorganized into two new signals depending on the physical meaning of the four state variables of the inverted pendulum system. The proposed method is applied to the inverted pendulum system and simulations are accomplished to illustrate the control performance.

**Key words**: Inverted pendulum, Membership function, Fuzzy rule, FCSC

### 1. 서론

도립진자 시스템은 고차, 불안정성, 다변수, 비선형 그리고 강한 결합(coupling) 특성을 가지고

있으며 이족 로봇[2], 로켓 발사 등과 매우 유사한 특성을 갖는다. 이러한 도립진자 시스템의 안정화는 대차위의 진자를 직립 상태로 유지시키는 것으

<sup>†</sup> 교신저자(한국대학교 기관공학부, E-mail: smo@hhu.ac.kr, Tel: 051-410-4248)

1 한국해양연구원 부산연수원, E-mail: domse54@daum.net, Tel: 051-621-0550

2 한국해양수산연수원, E-mail: kmusek@daum.net, Tel: 051-624-4521

3 한국해양대학교 IT 공학부, E-mail: ggjin@hhu.ac.kr, Tel: 051-410-4341

로 이는 전형적인 비선형 제어 문제로 생각할 수 있다.

이와 같은 특성 때문에 도립진자는 비선형 시스템의 표본으로서 많은 연구자의 연구대상이 되어 왔으며 새로운 제어기법의 성능과 유효성을 검증하는 기준척도로서 빈번하게 사용된다.

초기에 도립진자 시스템의 안정화 제어는 PD, PID 등의 고전적인 방법이 주로 사용되었다. 그러나 초기 동조(Tuning)가 잘 되었더라도, 부하나 제어대상의 파라미터 변동이 크면 제어기의 이득을 재조정해야 할 필요가 있어 최근에는 현대제어 이론과 지능제어 기법을 이용한 방법이 주로 제안되어 왔다[3-7].

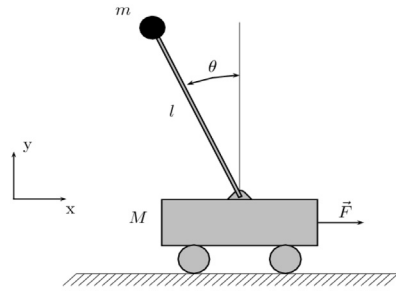
특히, 최근 비선형 제어에 종종 사용되는 퍼지제어기는 일반적으로 특정한 상태변수와 이의 변화율을 입력변수로 사용하는데 시스템의 상태 변수가 많으면 퍼지 규칙이 급격하게 증가되어 설계가 까다롭게 된다.

본 논문에서 다루는 도립진자 시스템은 잘 알려진 대로 4개의 상태변수를 갖는다. 만약, 이 4개의 상태 변수 모두를 사용하여 하나의 퍼지제어기를 설계하면 퍼지규칙의 수는 256개가 되어 퍼지제어기의 적용이 사실상 불가능하게 된다. 이러한 이유로 대부분의 연구에서 도립진자의 각도와 각속도만을 퍼지제어기의 입력변수로 사용하거나[5], Sugeno 형식의 퍼지제어기를 설계하기도 하는데 정밀한 규칙이 도출되지 못하면 대차와 진자가 계속 헌팅을 일으키기도 한다[7]. 또는, 대차위치와 진자의 각도에 대해서 각각 퍼지제어기를 설계하고, 이 두개의 퍼지제어기를 결합하는 방법도 있지만 이는 퍼지제어기를 두개 사용해야 한다는 번거로움이 있다[8].

따라서 본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위해 도립진자 시스템의 4개의 상태변수를 물리적 의미에 따라 새로운 2개의 신호로 재구성하고, 이를 퍼지 입력 변수로 사용하는 상태변수 조합 퍼지 제어를 제안한다. 제안한 기법은 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 그 유효성을 확인한다.

## 2. 시스템 모델링

도립진자 시스템의 모델링은 여러 문헌에서 찾아볼 수 있으며, 본 논문에서는 **Figure 1**과 같이 대차위에 피봇(pivot)으로 연결된 도립진자 시스템을 고려한다. 이때 **Figure 1**과 같이 진자가 기울어진 경우를 양의 각도( $\theta > 0$ )로 정의한다.



**Figure 1:** The inverted pendulum on cart system

대차는 수평(x축)방향으로만 움직일 수 있고, 진자는 x-y평면상에서 회전이 가능하다. 이처럼 도립진자 시스템은 2자유도를 가지기 때문에 수평방향의 대차의 이동과 평면상에서 진자의 각도로서 운동을 나타낼 수 있다. **Figure 1**에서 비선형 쿨롱마찰과 진자의 회전으로 인해 발생하는 대차의 움직임을 무시하고 뉴턴의 운동법칙을 이용한다. 그러면 도립진자 시스템은 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있으며 이와 같은 형태는 여러 문헌에서 쉽게 찾아볼 수 있다[5-7].

$$(M+m)\ddot{x}+b\dot{x}-m\ell\ddot{\theta}\cos\theta+m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta=F \tag{1}$$

$$(I+m\ell^2)\ddot{\theta}-mgl\sin\theta-m\ell\ddot{x}\cos\theta=0$$

진자가 도립된 상태에서 움직임이 작다고 가정하고,  $u=F$ 로 대치하면 다음과 같은 선형 방정식을 구할 수 있다.

$$(M+m)\ddot{x}+b\dot{x}-m\ell\ddot{\theta}=u \tag{2}$$

$$(I+m\ell^2)\ddot{\theta}-mgl\theta=m\ell\ddot{x}$$

여기서  $x_1=x$ ,  $x_2=\dot{x}$ ,  $x_3=\theta$ ,  $x_4=\dot{\theta}$ 으로 상태변수를 정의하고, 식 (2)으로부터 상태방정식을 유

도하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \end{aligned} \quad (3)$$

이때, **A**, **B**, **C**는 각각 4×4, 4×1, 2×4의 실계수 행렬로 다음과 같이 구성된다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4b}{(4M+m)} & \frac{3mg}{(4M+m)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-3b}{(4M+m)\ell} & \frac{3g(M+m)}{(4M+m)\ell} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ \frac{0}{(4M+m)} \\ 3 \\ \frac{0}{(4M+m)\ell} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Table 1**은 모델링에 사용된 파라미터를 나타낸 것이며, 이를 이용하면 **A**, **B** 행렬을 얻을 수 있다.

**Table 1:** System parameters

Parameter	Description	값	단위
M	대차의 질량	0.5	kg
m	진자의 질량	0.2	kg
b	대차의 마찰계수	0.1	N/m/s
ℓ	진자의 길이	0.3	m
I	진자의 관성	0.006	kg·m <sup>2</sup>
g	중력가속도	9.8	m/s <sup>2</sup>

### 3. 변수조합 퍼지 제어기 설계

본 논문에서는 서론에서 언급한 기존의 퍼지제어기에서 발생할 수 있는 문제점을 해결하기 위해 기존의 연구[5, 7-8]와는 다르게 변수조합 퍼지제어기(Fuzzy controller based on state variables combination, FCSC) 설계 방법을 제안한다.

이 방법은 4개의 상태변수를 2개의 새로운 신호로 조합(Combination)함으로써 퍼지 제어를 한 개만 사용하는 동시에 퍼지 규칙을 감소시킬 수 있는 장점을 갖는다.

도립진자 제어시스템에 널리 적용되는 상태피드백 제어입력 신호인 식 (4)를 생각하자.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{Kx} \\ &= -\sum_{i=1}^n k_i x_i \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $\mathbf{K}=[k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$ 는 피드백 이득행렬이고,  $\mathbf{x}=[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ 는 상태 변수이다.

실제 시스템에서 물리적인 의미에 따라 상태 변수를 구분할 수 있다면 상태변수는 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}^1 \ \mathbf{x}^{p+1}]^T \quad (5)$$

단,  $\mathbf{x}^1 = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]^T$ ,  $\mathbf{x}^{p+1} = [x_{p+1} \ x_{p+2} \ \dots \ x_n]^T$ 을 의미한다. 그러면 식 (5)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\left\{ \sum_{i=1}^p k_i x_i + \sum_{j=p+1}^n k_j x_j \right\} \\ &= -\left\{ k_1 \sum_{i=1}^p \frac{k_i}{k_1} x_i + k_{p+1} \sum_{j=p+1}^n \frac{k_j}{k_{p+1}} x_j \right\} \\ &= -\{ \tilde{k}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{k}_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_2 \} = F(\tilde{\mathbf{X}}) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $\tilde{k}_1 = k_1$ ,  $\tilde{k}_2 = k_{p+1}$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \sum_{i=1}^p \frac{k_i}{k_1} x_i$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \sum_{j=p+1}^n \frac{k_j}{k_{p+1}} x_j$ 이고,  $F(\cdot)$ 는 퍼지연산을 의미한다.

도립진자 시스템의 상태는 대차의 위치(x), 대차의 속도(ẋ), 진자의 각도(θ), 진자의 각속도(θ̇)이고 대차에 관련된 변수와 진자에 관련된 변수 두 개로 구분할 수 있으므로  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}^1 : \mathbf{x}^2]^T = [x \ \dot{x} : \theta \ \dot{\theta}]^T$ 와 같이 상태변수를 구성할 수 있다. 그러면 식 (6)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\mathbf{u} = F(-\{k_1 x + k_2 \dot{x} : +k_3 \theta + k_4 \dot{\theta}\}) \quad (7)$$

식 (7)에서 알 수 있듯이 최종적인 제어입력은 상태 피드백 제어와 상태 변수 4개를 2개로 다시 조합하여 입력으로 사용하는 퍼지제어기가 결합된 형태로 구성되며,  $F(\cdot)$ 는 퍼지 연산을 의미한다.

제안하는 FCSC의 퍼지추론은 Mamdani 형식을 기반으로 하였으며, 임·출력 변수의 소속함수의 범위는 [-1, 1] 사이로 정규화하여 사용한다. 소속함수를 정규화하면 환산계수(Scaling factor)를 적절히

선정해야 하는데, 본 논문에서는 시행착오를 통해 선정하도록 한다. Table 2는 FCSC의 구성 조건을 나타낸 것이다.

Table 2: The construction of FCSC

형식	Mamdani type
And 연산	min
Or 연산	Max
비퍼지화	무계중심법
입력변수	2개(소속함수 각각7개 사용)
입력변수 범위	[-1 1]
출력변수	1개(소속함수 7개 사용)
출력변수 범위	[-1 1]
퍼지규칙	49개

2개의 입력과 1개의 출력 변수에 사용한 소속함수는 ZO(Zero), PS(Positive Small), PM(Positive Medium), PB(Positive Big), NS(Negative Small), NM(Negative Medium), NB(Negative Big)의 7개로 정의하였으며, NB과 PB은 시그모이드(Sigmoid)형, 나머지는 가우시안(Gaussian)형 소속함수이다. Figure 2는 입·출력 소속함수의 모양을 나타낸 것이다.

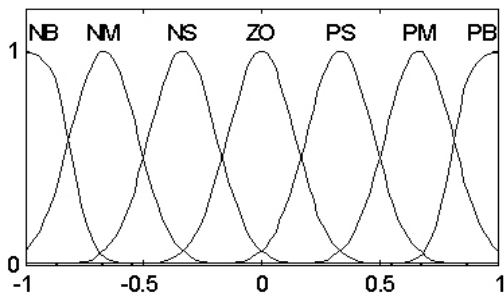


Figure 2: The membership functions (Inputs and output)

본 논문에서 사용된 퍼지 규칙은 7개의 소속함수를 이용하여 Table 3과 같은 49개의 규칙으로 정의하였다.

Table 3: The fuzzy rules of FCSC

	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
NB	NB	NB	NB	NB	NM	NS	ZO
NM	NB	NB	NB	NM	NS	ZO	PS
NS	NB	NB	NM	NS	ZO	PS	PM
ZO	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
PS	NM	NS	ZO	PS	PM	PB	PB
PM	NS	ZO	PS	PM	PB	PB	PB
PB	ZO	PS	PM	PB	PB	PB	PB

이렇게 설계한 FCSC의 제어 시스템은 Figure 3과 같고, 이때 FCSC의 제어표면은 Figure 4와 같다.

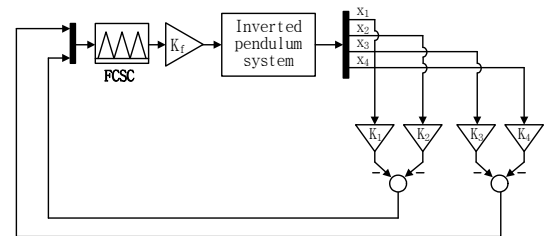


Figure 3: The proposed control system

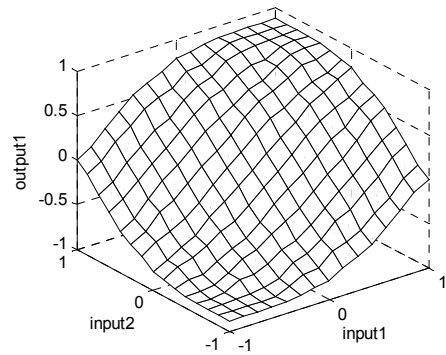


Figure 4: The control surface of FCSC

#### 4. 시뮬레이션

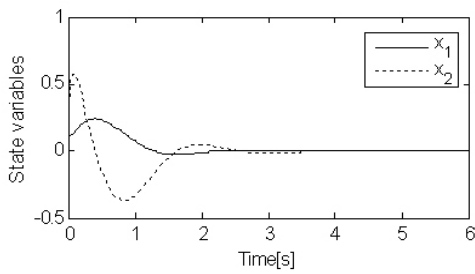
이 절에서는 제한한 방법의 유효성을 검토하기 위해 초기상태와 외란의 인가, 파라미터 변화와 실험 환경을 고려한 잡음의 인가에 따른 응답을 시뮬레이션을 통해 확인한다. 시뮬레이션에 사용되는 모델은 Table 1에 나타난 파라미터를 사용한 비선형 모델인 식 (1)을 사용하고, 샘플링 간격은 0.01[s]

로 설정하였다. 이때 **Figure 3**에서 사용되는 환산 계수는 시행착오를 거쳐  $K_f=20.0$ ,  $K_1=-1.78$ ,  $K_2=-1.32$ ,  $K_3=5.01$ ,  $K_4=1.30$ 으로 선정하였다.

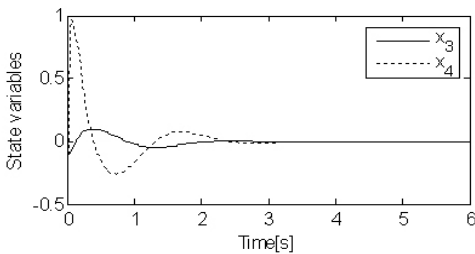
4.1 초기상태와 외란의 인가

다양한 초기조건 중에서 초기상태가  $x(0)=[0.1 \ 0.1 \ -0.1 \ -0.1]^T$ 일 때를 고려해본다. 이와 같은 초기 상태는 대차가 오른쪽으로 위치해있으며, 동일한 방향으로 이동하는 속도가 있고, 진자의 각도도 오른쪽으로 기울어진 상태에서 그 방향으로 기울어지는 각속도가 존재하는 조건으로 제어하기 까다로운 상태이다.

**Figure 5**를 통해 알 수 있듯이 FCSC는 까다로운 초기상태에 대해 안정된 제어결과를 보이고 있다.



(a) cart position and velocity

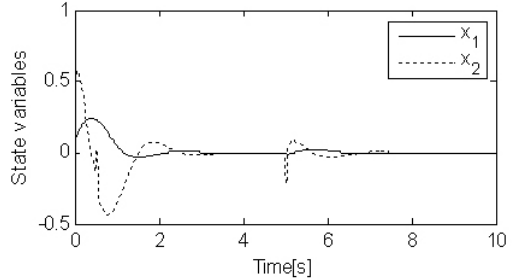


(b) pole angle and angular velocity

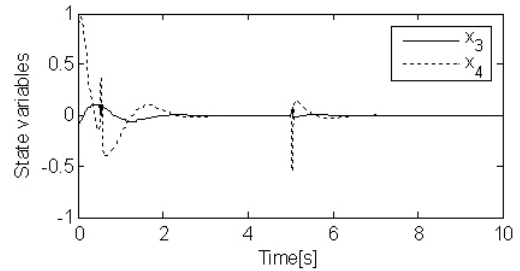
**Figure 5:** The state response of FCSC when  $x(0)=[0.1 \ 0.1 \ -0.1 \ -0.1]^T$

다음으로 위와 동일한 초기상태에서 제어 초기 시점과 안정화 이후의 시점에서 외란을 인가하여 외란에 대한 강인성을 확인해 본다. **Figure 6**은 제어시작 0.5[s] 시점에 0.05[s] 동안 -0.1[rad]의 각도 외란을 인가하고, 안정화 된 상태인 5.0[s] 시점에 -0.1[rad]의 각도외란을 동일한 시간 동안 인가한

경우이다. 그림을 통해 알 수 있듯이 FCSC는 돌발적인 외란이 존재하는 환경에서도 안정된 제어결과를 보이고 있다.



(a) cart position and velocity



(b) pole angle and angular velocity

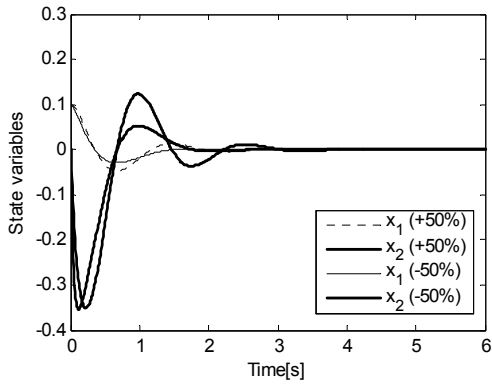
**Figure 6:** The state response of FCSC with disturbance on the pole

4.2 파라미터 변화와 잡음의 인가

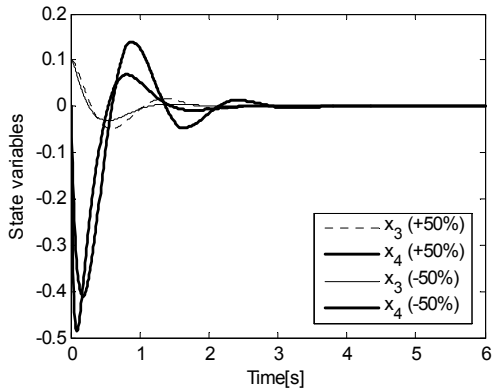
도립진자 시스템을 모델링하는 과정에서 발생할 수 있는 모델 오차를 고려하기 위하여 **Table 1**에 나타난 도립진자 시스템의 파라미터  $M$ ,  $m$ ,  $l$ 이 모두  $\pm 50\%$  변화한 것으로 가정하였다.

즉, +50% 변화한 경우에는  $M=0.75[\text{kg}]$ ,  $m=0.3[\text{kg}]$ ,  $l=0.45[\text{m}]$ 이고, -50% 변화한 경우에는  $M=0.25[\text{kg}]$ ,  $m=0.1[\text{kg}]$ ,  $l=0.15[\text{m}]$ 이다.

**Figure 7**은 초기상태가  $x(0)=[0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0]^T$ 으로 주어질 때의 응답을 나타낸 것으로 (a)는 파라미터가  $\pm 50\%$  변동되었을 때 대차의 위치와 속도를, (b)는 진자의 각도와 각속도를 나타낸 것이다. 그림을 통해 알 수 있듯이 시스템의 모델 오차가 상당량 존재하는 경우에도 FCSC는 안정된 제어를 수행하고 있다.



(a) cart position and velocity

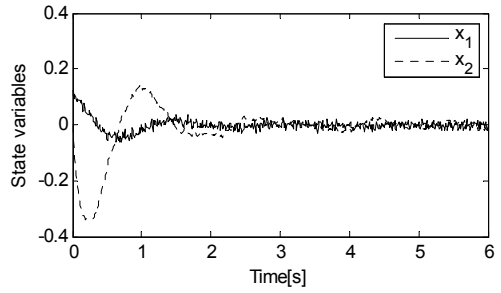


(b) pole angle and angular velocity

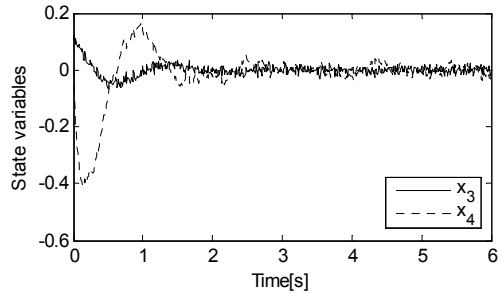
Figure 7: The state responses of FCSC with parameter changes

다음으로 실제 실험에서 발생할 수 있는 측정잡음에 대한 강인성을 확인하기 위해 모델 오차가 +50% 존재하는 상황에서 백색잡음  $n(t) = N(0, 0.01^2)$ 을 인가해 보기로 한다.

실험에 사용되는 도립진자 시스템은 통상적으로 대차의 위치와 진자의 각도 신호를 엔코더 등을 이용하여 측정하므로 위치와 각도에 백색잡음을 동시에 인가하여 그 응답을 살펴본다. Figure 8은 초기상태가  $x(0)=[0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0]^T$ 인 경우로 그림을 보면 잡음의 영향이 나타나기는 하지만 FCSC는 모든 상태를 안정하게 제어하고 있음을 확인할 수 있다.



(a) cart position and velocity



(b) pole angle and angular velocity

Figure 8: The state responses of FCSC with parameter changes and noise

## 5. 결 론

본 논문에서는 도립진자 시스템의 상태변수 4개를 물리적 의미에 따라 결합하여 새로운 2개의 신호로 재구성하고, 이를 퍼지 입력변수로 사용하는 FCSC를 제안하였다. 이는 상태변수 4개를 모두 사용할 때 발생하는 퍼지규칙의 증가문제, 상태변수 2개마다 퍼지제어를 각각 사용함으로써 발생하는 제어기 개수의 증가 문제를 개선한 것이다.

도립진자 시스템의 상태는 위치와 속도, 각도와 각속도로 구성되는데 상관관계가 있는 물리적인 의미에 따라 위치와 속도, 각도와 각속도를 각각 새로운 신호로 조합하여 퍼지제어의 입력변수로 적용하였다. 이를 이용하면 퍼지제어를 하나만 사용할 수 있는 동시에 퍼지 규칙도 합리적으로 구성할 수 있다.

제안한 방법의 유효성을 확인하기 위해 불안정한 도립진자 시스템에 적용하고, 초기상태와 외란의 인가, 파라미터 변화 및 잡음이 존재하는 경우에 대해 시뮬레이션을 실시한 결과 만족할 만한

제어 성능을 확인할 수 있었다.

### 후 기

본 연구는 2012년도 대외경쟁력 강화를 위한 연구강화지원사업의 지원으로 수행한 연구결과입니다.

### 참고문헌

- [1] W. H. Tao, "Control research for single rotation inverted pendulum", Proceedings of the China Control Conference, China, pp. 616-619, 2006.
- [2] T. suji, K. A. and Ohnishi, Control of Biped Robot which Applies Inverted Pendulum Mode with Virtual Supporting Point, Proceedings of the 7th International Workshop on Advanced Motion Control, Yugoslavia, pp. 478-483, 2002.
- [3] M. S. Kim, J. W. Jung, S. G. Sung, H. C. Park, Y. J. Sim and J. T. Lee, "A study on stabilization control of inverted pendulum system using evolving neural network controller", Proceedings of the Korean Society of Marine Engineers Conference, pp. M243-M247, 2001 (in Korean).
- [4] J. K. Ahn, Y. H. Lee, H. H. Yoo, M. O. So and G. G. Jin, "RCGA-based parameter estimation and stabilization control of an inverted pendulum system", Journal of the Korean Society of Marine Engineering, vol. 30, no.6, pp. 746-752, 2006 (in Korean).
- [5] Y. Liu, Z. Chen, D. Xue and X. Xu, "Real time controlling of inverted pendulum by fuzzy logic", Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics, China, pp. 1180-1183, 2009.
- [6] J. Y. Lee, B. R. Lee and C. H. Hyun, "Performance verification of optimal state feedback controller with the inverted pendulum", Journal of Korean Institute of Intelligent Systems, vol. 20, no. 6, pp. 768-773, 2010 (in Korean).
- [7] A. Poorhossein and A. Vahidian-Kamyad, "Design and implementation of sugeno controller for inverted pendulum on a cart system", Proceedings of the IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informations, Serbia, pp. 641-646, 2010.
- [8] S. Jung, Intelligent Control, CNU Press, 2005 (in Korean).