Korean J. Math. 20 (2012), No. 1, pp. 137-159

AN ANALYSIS OF RECENT RESEARCH ON THE METHOD OF EXCESS AND DEFICIT (Ying Nü and Ying Buzu Shu)

盈朒과 盈不足術에 관한 최근 동서양의 연구 분석

Sang-Gu Lee and Jae Hwa Lee*

ABSTRACT. In this paper, we deal with recent researches on Ying Nü(盈朒) and Ying Buzu(盈不足) which were addressed in the book *Jiu Zhang Suan Shu*(九章算術, *The Nine Chapters on the Mathematical Art*). Ying Nü(Ying Buzu) is a concept on profit and loss problems. Ying Buzu Shu(盈不足術, the method of excess and deficit) represents an algorithm which has been used for solving many mathematical problems. It is known as a rule of double false position in the West.

We show the importance of Ying Buzu Shu via an analysis of some problems in 'Ying Buzu' chapter. In 1202, Fibonacci(c.1170–c.1250) used Ying Buzu Shu in his book. This shows some of Asian mathematics were introduced to the West even before the year 1200. We present the origin of Ying Buzu Shu, and its relationship with Cramer's Rule. We have discovered how Asia's Ying Buzu Shu spread to Europe via Arab countries. In addition, we analyze some characters of Ying Nü(Ying Buzu) in the book *Suan Xue Bao Jian*(算學寶鑑).

1. 서 론

이상설(李相卨 1870-1917, 字 舜五, 號 溥齋)은 자신이 쓴 책 <수리 數理>를 통하여 <수리정온 數理精蘊>(1723)의 내용을 학습하고, 새로운 내용을 보탠다. 저자

Received June 23, 2011. Revised March 2, 2012. Accepted March 5, 2012.
2000 Mathematics Subject Classification : 01A13, 01A15, 01A25, 01A73, 01A90
Key words and Phrases : Ying Nü, Ying Buzu (Shu), Jiu Zhang Suan Shu; The Nine Chapters on the Mathematical Art, Suan Shu Shu(算數書), Suan Xue Bao Jian(算學寶鑑), Fibonacci
This work was partially supported by 2011 Academy of East Asian Studies Research Cluster support and BK21 Math. Modeling HRD Project.

*Corresponding author.

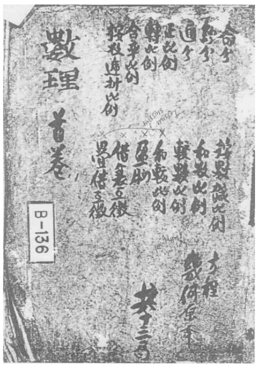

그림 1 <수리>

는 이 책의 표지(그림 1 참조)에서 영뉵(盈朒)이라는 소제목을 처음 접하였다[1]. 그리고 생소한 이 용어를 충실히 이해하기 위하여 관련 연구를 시작하였다.

영뉵의 다른 이름은 영부족(盈不足)으로 <구장산술 九章算術>1) 卷七의 장(章) 이름이다. 조사한 바에 따르면 지금까지 우리나라에서 영뉵 또는 영부족에 관하여 연구된 결과는 [2, 3]밖에 없다. 이에 본 논문에서는 우리나라에 알려지지 않은 새로운 사실들을 연구하여 중국 수학의 중요한 부분인 영부족의 내용과 역사, 그리고 유럽으로의 전파에 대하여 중점적으로 논한다. 2절에서는 영부족의 대표적인 문제(1번 문제)를 통하여 영부족술의 기본적인 내용과 산법으로써의 의미를 기술하고 3절에서는 영부족과 관련하여 최근에 중국과 미국에서 연구된 내용을 소개한다. 4절에서 유럽에 '거란산법'으로 소개된 영부족이 중국, 아라비아를 거쳐 유럽에 전파된 배경을 조사하고 5절에서 결론을 유도한다.

2. 영뉵과 영부족술

먼저 영부족이 무엇인지에 대해서 살펴보자. <구장산술>에서는 다음과 같이 설명하고 있다.

盈不足, 以御隱雜互見2)

[5]의 <구장산술> 제7권「영부족」에서 위의 문장에 대한 해석으로 '영부족으로써 감춰진 여러가지가 서로 드러나는 것을 다룬다'고 하였다. 또 주석에서 '영부족은 남고 모자라는 것들의 관계로부터 미지수의 값을 구하는 방법을 가리킨다'고 설명하였다. 그리고 이적(李籍)3)의 <구장산술음의 九章算術音義>에 보면 영부족에

1) 전국(戰國), 진(秦), 한(漢) 시기의 수학적 성취를 체계적으로 총 정리하여 편찬한 수학 문제집으로 모두 246개 문제와 해법을 제시해주고 있다.

2) 互見에는 '동시에 존재한다' 또는 '서로 설명・보충한다(be mutually explained; cross reference)' 라는 의미가 있다.

대해 다음과 같이 설명하고 있다[11].

盈者, 滿也; 不足者, 虛也. 滿, 虛相推, 以求其適, 故曰 '盈不足'.
(해석) 영은 가득하다는 것이다. 부족은 비어있다는 것이다. 가득한 것과 비어있는 것으로 서로 유추하여 그 적절한 것을 구하는 것이기 때문에 '영부족'이라 일컫는다.

또 <수리정온>「영뉵」절의 맨 앞부분에 소개하는 문장을 보자.

盈, 有餘也. 朒, 不足也. 設有餘不足以求適中. 亦爲因較而得正數之法.
(해석) 영은 남음이 있다는 뜻이다. 뉵은 부족하다는 뜻이다. 알맞은 값을 구하기 위해 남음과 부족 관계를 세우는 것이다. 또한 비교하여 정수를 얻어내는 방법이다.

그림 2 <산법통종>

종합해보면 영뉵(영부족)이란 넘치는 것과 부족한 것에 관계된 '과부족'문제를 나타낼 때에 유용한 개념으로 영과 뉵이란 글자의 뜻을 적절히 활용하여 새로운 개념을 표현하였다.[4] 산학책에서는 영뉵(예: 수리정온, 산법통종 算法統宗, 수리) 또는 영부족(예: 구장산술, 산학보감 算學寶鑑)을 과부족문제를 다루는 장의 이름으로 쓴다. 그리고 영부족술은 과부족문제를 푸는 일종의 산법이다. <구장산술>의「영부족」장에는 20개의 문제가 모두 영부족술로 풀이되고 있다. 조선 산학에 등장하는 영부족 내용은 [2, 3]을 참고하라. 이하에서는 모두 영부족으로 통칭한다.

[12]는 "영부족술은 중국수학사에서는 원시적인 해법의 하나여서 후대의 수학자들이 매우 중시하지는 않았으나 서양으로 전해진 후에는 오히려 눈부신 발전과정을 겪어 세계 수학사에서 영광스러운 자리에 있다"고 언급하였다. 그럼에도 영부족술은 여전히 중국 전통수학의 중요한 한 부분이었다. 명대 오경(吳敬)의 <구장산법

3) 이적이 생존했던 연대에 대해서 언급한 사료가 없으나 당(唐)대의 사람이었을 것으로 추정된다[7]. 이적은 <구장산술> 본문과 유휘(劉徽)의 주(注), 이순풍(李淳風)등의 주석(注釋)의 글자, 단어, 구에 대해 발음을 표시하고 해석을 <구장산술음의>에서 제공하였다.
4) 영뉵은 또한 달의 운동과 관련된 용어이다[2, 3]. 盈月은 滿月을 의미하고, 朒은 초하룻달(초승달)을 의미한다.

비류대전 九章算法比類大全>(1450) 卷七, 정대위(程大位, 1533-1606)의 <산법통종>(1592) 卷十, 청(淸)대 강희제(康熙帝)의 어제(御制) <수리정온>(1723) 下編 卷八에도 <구장산술>「영부족」장의 기본공식과 형태가 유지되었다[9].

가. 영부족술의 기본내용

<구장산술>「영부족」장의 가장 첫 번째 문제를 보자.

今有共買物, 人出八, 盈三, 人出七, 不足四. 問人數, 物價各幾何? - (1)

(해석: [5]) 여럿이서 함께 물건을 구매하려고 하는데, 각자 8전씩 내면 3전이 남고, 7전씩 내면 4전이 모자란다. 사람 수와 물건 값은 각각 얼마인가?

이것은 현재 산술교과서에서 '과부족' 문제라고 불리는 것으로 일반적인 형식은 '여럿이서 함께 물건을 구매하려고 하는데, 각자 a_1씩 내면 b_1이 남고, a_2씩 내면 b_2가 모자란다. 사람 수 u와 물건 값 v는 각각 얼마인가?'이다. <구장산술>에서 앞의 세 문제까지는 답만 주고 네 번째 문제가 되어서야 그 뒤에 영부족술의 방법을 기술하고 있다(아래 번호는 저자가 방법을 설명하기 위해 임의로 표기하였음).

盈不足術曰: ① 置所出率, 盈, 不足各居其下. ② 令維乘所出率, 并以爲實. ③ 并盈, 不足爲法. ④ 實如法而一. 有分者, 通之. 盈不足相與同其買物者, ⑤ 置所出率, 以少減多, 餘, 以約法, 實. 實爲物價, 法爲人數. 其一術曰: ⑥ 并盈不足爲實. 以所出率以少減多, 餘爲法. ⑦ 實如法得一人. 以所出率乘之, 減盈, 增不足卽物價.

위에 제시된 방법에 따라 영부족술의 기본 절차를 현대의 수학적인 방식으로 설명해보자. <구장산술>에서는 a_1, a_2를 소출율(所出率), b_1, b_2를 각각 영(盈), 부족(不足)이라 부르고 있다[14].

① 置所出率, 盈, 不足各居其下.

소출율을 놓고 영과 부족을 각각 그 아래에 놓는다. $\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}$

② 令維乘所出率, 并以爲實.

소출율과 유승(維乘: 교차하여 곱함)한 뒤, 더하여 실(實: 피제수)이라 한다. $a_1b_2 + a_2b_1$

③ 并盈, 不足爲法.

영과 부족을 더하여 법(法: 제수)이라 한다. b_1+b_2

④ 實如法而一. 有分者, 通之. 盈不足相與[5]同其買物者

법으로 실을 나눈다. 분수가 있으면 통분한다. $\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}$ 영과 부족이 서로 같으면 그 물건을
사는 것과 같다.[6]

⑤ 置所出率, 以少減多, 餘, 以約法, 實. 實爲物價, 法爲人數.

소출율이 큰 것에서 작은 것을 빼고 남은 것 a_1-a_2에서 ④의 실과 법을 나누면 각각 물건 값 v
와 사람 수 u를 얻을 수 있다.

$$v=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1-a_2},\ u=\frac{b_1+b_2}{a_1-a_2}$$

<구장산술>에서는 또 위에서 구한 사람 수 u를 이용하여 별해(其一術)로 물건 값을 구하는 또 다른 공식을 주고 있다.

⑥ 幷盈不足爲實. 以所出率以少減多, 餘爲法.

영과 부족을 더하여 실 b_1+b_2이라 하고 소출율이 큰 것에서 작은 것을 빼고 남은 것 a_1-a_2을
법이라 한다.

⑦ 實如法得一人. 以所出率乘之, 減盈, 增不足卽物價.

법으로 실을 나누어 사람 수 $u=\dfrac{b_1+b_2}{a_1-a_2}$를 얻고 소출율을 곱한 뒤 영을 빼거나 부족을 더하면
물건값이다.

$$\frac{b_1+b_2}{a_1-a_2}\times a_1-b_1(\text{영})=\frac{b_1+b_2}{a_1-a_2}\times a_2+b_2(\text{부족})$$

---

5) 相與에는 서로 같다(相同)는 의미가 있다.

6) 이런 경우에 식을 정리하면 $\dfrac{a_1+a_2}{2}=\dfrac{v}{u}$가 되어 모든 사람이 똑같이 내야하는 돈을 바로 알 수 있어 그대로하면 거래가 성립된다는 것을 그 물건을 사는 것과 같다고 표현한 것으로 여겨진다.

<구장산술>에서는 ④의 식 $\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}$ 이 의미하는 바를 설명하지는 않았는데 유휘가 첨가한 주석(263) [8, 14]에서 ‘不盈不朒之正數 남지도 않고 부족하지도 않은 참값’이라고 한 것에 근거하면 $\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}$ 은 여럿이 낸 돈의 총 합계가 물건 값에 비해 많지도 적지도 않게 되는 모든 사람이 똑같이 내야하는 돈이다. 위의 첫 번째 문제에 대한 산가지 계산의 대략적인 배치는 그림 3과 같다.

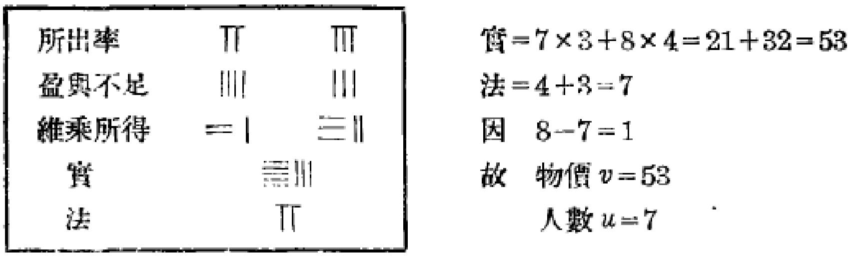

그림 3 「영부족」장의 첫번째 문제에 대한 산가지 계산[12]

위의 산법에서는 두 번 가정했던 내야하는 돈과 물건 값을 비교할 때 하나는 남고 하나는 부족한 것이었다. 그러나 어떤 경우는 두 번 모두 남거나 두 번 모두 부족한 상황이 있고 때로는 한 번은 남고 한 번은 딱 들어맞는 또는 한 번은 모자라고 한 번은 딱 들어맞는 상황도 있다. 이 네 가지 상황을 각각 양영(兩盈), 양부족(兩不足), 영적족(盈適足), 부족적족(不足適足)이라고 한다. <구장산술>은 이에 상응하는 계산법도 모두 기재하였다.「영부족」장에서 양영(5번)문제와 양부족(6번)문제를 기술한 후에 그 뒤에 한꺼번에 이 두 가지 상황에 대한 방법을 기술하고 있는데 술문(術文)은 다음과 같다.

兩盈兩不足術曰: 置所出率, 盈, 不足各居其下. 令維乘所出率, 以少減多, 餘爲實. 兩盈, 兩不足以少減多, 餘爲法. 實如法而一. 有分者, 通之. 兩盈, 兩不足相與同其買物者, 置所出率, 以少減多, 餘, 以約法, 實. 實爲物價, 法爲人數. 其一術曰: 置所出率, 以少減多, 餘爲法. 兩盈, 兩不足以少減多, 餘爲實. 實如法而一, 得人數. 以所出率乘之, 減盈, 增不足卽物價.

여기에서는 두 가지 산법을 주었는데 앞의 방법에서는 모든 사람이 똑같이 내야

하는 돈$=\dfrac{|a_1b_2-a_2b_1|}{|b_1-b_2|}$, 사람 수 $u=\dfrac{|b_1-b_2|}{|a_1-a_2|}$, 물건 값 $v=\dfrac{|a_1b_2-a_2b_1|}{|a_1-a_2|}$ 이고 뒤의 방법은 앞의 사람 수를 이용하여 b_1, b_2가 양영일 때는 $\dfrac{|b_1-b_2|}{|a_1-a_2|}\times a_1-b_1 = \dfrac{|b_1-b_2|}{|a_1-a_2|}\times a_2-b_2$, b_1, b_2가 양부족일 때는 $\dfrac{|b_1-b_2|}{|a_1-a_2|}\times a_1+b_1 = \dfrac{|b_1-b_2|}{|a_1-a_2|}\times a_2+b_2$ 이다. 이 공식에서는 편리하게 표시하려고 절댓값 기호를 사용하였다. 이것은 고대 사람들이 큰 수에서 작은 수를 빼는 것을 반영할 뿐 – 以少減多(밑줄 친 부분) 작은 것을 큰 것에서 뺀다 – 고대 사람들이 절대 값의 개념을 가지고 있었다는 것을 표시하지는 않는다.

또 영적족(7번)문제, 부족적족(8번)문제를 기술한 뒤에 한꺼번에 각각 그 계산법을 기술하고 있다.

盈適足, 不足適足術曰: 以盈及不足之數爲實. 置所出率, 以少減多, 餘爲法. 實如法得一人. 其求物價者, 以適足乘人數, 得物價.

이 뜻은 만약 영적족인 상황 $(a_1>a_2)$에서는 사람 수 $u=\dfrac{b_1}{a_1-a_2}$, 물건 값 $v=\dfrac{b_1}{a_1-a_2}\times a_2$이고 부족적족인 상황 $(a_1<a_2)$에서는 사람 수 $u=\dfrac{b_1}{a_2-a_1}$, 물건 값 $v=\dfrac{b_1}{a_2-a_1}\times a_2$가 된다. 이 두 가지 경우에서는 적족에서 바로 모든 사람이 똑같이 내야하는 돈의 수를 구할 수 있으므로 유승하는 과정이 없다. 문제의 형식으로 보면 영부족 유형의 문제는 영부족, 양영, 양부족, 영적족, 부족적족의 5가지로 나눌 수 있지만 <구장산술>에서는 방법상으로 분류하여 양영과 양부족을 하나의 유형으로 보고, 영적족과 부족적족을 또 하나의 유형으로 처리하였다. 이 세 가지 상황에 대해 고대 사람들은 각각 그 방법을 서술하고 있으나 그들 간의 관련성을 설명해주지는 않고 있다. 그러나 그들이 사용하는 용어와 표현방식이 근접하여 동일한 장에 배열한 것은 이 세 가지 상황을 동일한 유형으로 처리하고 있음을 설명하는 것이다.

<구장산술>「영부족」장의 앞의 네 문제는 가정한 영수 b_1과 부족수 b_2가 모두 양수로 표준 형태의 과부족 문제이다. 이 네 문제 이후에 각각의 변형 형태를 제시하고 해법의 술문에 조금씩 수정을 가하고 있는데 사실 b_1과 b_2를 모두 양수로 규정하지 않으면 이 8개의 문제를 동시에 처리할 수 있고 다시 술문을 수정할 필요도 없다[12]. 예를 들어 b_1, b_2가 모두 영이라면 b_1이 남고 $-b_2$가 모자라는 것으로 보고, b_1, b_2가 모두 부족이라면 $-b_1$이 남고 b_2가 모자라는 것으로 보며, 또 영적족, 부족적족의 상황에서는 각각 $b_2=0$, $b_1=0$으로 인식하면 이 세 가지 상황을 모두 통일적으로 처리할 수 있다. 그러나 <구장산술>에는 아직 확실히 0에 대한 개념이 없었고, 음수에 대한 개념은 비록 「방정 方程」장에서 볼 수는 있으나 다른 장에서는 볼 수가 없다. 아마도 「영부족」장이 성립되던 시대가 너무 일러서 그때는 아직 음수의 개념을 사용하여 해법을 간단하게 하는 것을 알지 못했을 것으로 짐작된다. 이런 측면에서 보면 고대 사람들이 이 세 종류의 영부족술에 대해 통일적인 표시를 하지 못한 것도 사실 자연스러운 일이다. [14]에서는 영부족술이 생겨날 때에는 아직 명확하게 음수개념과 수치로서의 0의 개념이 없었거나 적어도 영부족술이 아직 '알고리즘적' 계산의 지식 체계에 들어가지 않았을 가능성이 매우 크다고 지적하였다.

<구장산술>의「영부족」장은 앞 부분에 세 가지 유형의 전형적인 문제(8개의 문제)를 기술한다. 그러나 뒤에 주어진 12개의 문제는 형식상으로는 영부족 유형에 속하지 않는다. 하지만 두 차례의 가정을 통해 얻어지는 결과와 이미 알고 있는 수와의 차를 계산하므로, 영과 부족의 두 수치를 얻어 다시 영부족술로 풀고 있다. 이는 영부족술의 광범위한 이용 가능성을 보여주고 있다. [2, 3]은 이 문제들이 영부족술을 적용하는 응용문제로 이중 가정법에 해당한다고 지적하였다. 또한 [16]은 선형연립방정식이 명백하게 없던 시대에 이중 가정법의 공식에 Cramer's Rule이 있음을 설명하였다. 이는 3절에서 다룬다.

나. 영부족술의 산법적인 의미

일반적인 산술문제의 해법은 문제에 드러난 이미 알고 있는 수(旣知數)로부터 구하고자하는 답(未知數)을 점차적으로 추산한다. 문제의 유형이 다양하고 각 유형의 문제도 각각 특수한 해법이 필요하므로, 산술을 처음 배우는 사람은 종종 난이도가 높은 문제를 어떻게 해결해야 할지 갈피를 잡을 수 없다. 「영부족」장을 편

저한 수학자는 모든 산술문제가 영부족 유형에 속하는지 여부에 관계없이 모두 영부족술로 해결할 수 있다고 생각하고 영부족술을 일종의 만능의 산법으로 보았던 것 같다. 예를 들어 앞서 기술한 첫 번째 문제 (1)에서 '모든 사람이 똑같이 얼마나 내야 꼭 들어맞는가?'라고 질문할 수 있다. 영부족술을 응용하면 물건 값을 대표하는 실과 사람을 대표하는 법을 계산할 수 있고, 법으로 실을 나누어 각 사람이 분담해야 하는 돈을 얻을 수 있다.

$$\frac{v}{u}=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}=\frac{53}{7}$$

산술 문제의 답을 구할 때, 임의로 하나의 수를 답으로 가정하고 문제에 따라 검산을 했을 때, 모든 주어진 관계를 만족하면 정답을 얻은 것이다. 만일 결과가 다르다면 차이가 나는 수량은 남든지 모자라든지 할 것이다. 이렇게 두 차례 서로 다른 가정을 통하여 원래 문제를 영부족 문제로 바꾼 후, 영부족술에 의해 구하고자하는 답을 얻는다. 대수적인 방법으로는 이런 유형의 산술 난제를 풀 때 구하고자 하는 수를 x라 놓고 문제에 제시된 조건에 따라 하나의 방정식 $f(x)=0$을 세운다. 이 방정식을 풀면 x를 대신하는 수를 얻을 수 있다. 방정식을 모르던 고대 사람들은 직접 이 문제를 풀 방법이 없었다. 그러나 이들도 임의의 수 x를 대입하여 $f(x)$의 대응값을 따져서 계산할 수 있었다. 예를 들어 $f(x)$가 구간 $a_1 \le x \le a_2$상의 연속함수이고 $f(a_1)=b_1$, $f(a_2)=-b_2$의 부호가 다르다면 방정식 $f(x)=0$의 구간 $a_1 \le x \le a_2$상의 실근의 근삿값은 영부족술에 의해

$$x=\frac{b_2a_1+b_1a_2}{b_2+b_1}=\frac{a_2f(a_1)-a_1f(a_2)}{f(a_1)-f(a_2)}$$

로 얻는다. 만약 $f(x)$가 일차함수이면 이 해법은 정확하지만, $f(x)$가 일차함수가 아니면 우변의 수치는 근삿값이다. 이 식을 변형시켜 보면

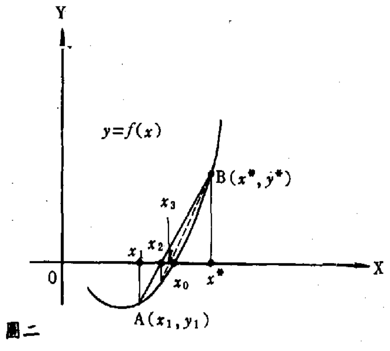

그림 4 영부족술의 의미

$$x=\frac{a_2f(a_1)-a_1f(a_2)}{f(a_1)-f(a_2)}=a_1-\frac{(a_2-a_1)f(a_1)}{f(a_2)-f(a_1)}$$

으로 바로 비선형방정식(nonlinear equation)의 근을 계산하는 할선법(secant method) 또는 선형보간법(linear interpolation)과 같아지게 된다[2, 12]. 예를 들어 <구장산술>「영부족」장의 11번 문제를 보면[5]

붓꽃은 첫날에 3자(尺) 자라고, 왕골은 첫날에 1자 자란다. 그 뒤로 붓꽃의 성장은 매일같이 반으로 줄고, 왕골의 성장은 배로 불어난다. 며칠이 지나야 길이가 같아지겠는가?

현대 수학의 방법으로 이 문제를 풀어보자. x일 만큼 지났을 때 붓꽃의 길이는 $6(1-\dfrac{1}{2^x})$이 되고 왕골의 길이는 $-1+2^x$이 되므로 방정식 $6(1-\dfrac{1}{2^x})=-1+2^x$으로 부터 간단히 정리하면 $(2^x)^2-7(2^x)+6=0$이다. 따라서 풀면 $2^x=6$이 되어 $x=\log_2 6\approx 2.59$가 된다. 이런 초월방정식(transcendental equation)은 고대의 비율을 이용한 방법으로는 해결할 수 없다. 다만 추측과 검산의 도움을 받아야 한다. 예를 들어 다음과 같은 기록을 얻게 되었다고 해보자. (여기서 1자는 10치(寸)이다)

표 1 날 수에 따른 붓꽃과 왕골의 길이와 그 차이[8]

날 수	붓꽃의 길이(치)	왕골의 길이(치)	붓꽃과 왕골의 길이의 차(영, 뉵)
1	30	10	20이 모자란다.
2	45	30	15가 모자란다.
3	$52\frac{1}{2}$	70	$17\frac{1}{2}$이 남는다.

표 1을 보면 두 식물의 길이 차이가 0이 되는 날(즉 '不盈不朒之正數')은 2일과 3일사이임을 알 수 있다. 예를 들어 두 식물의 성장이 고르다고 가정하고 영부족술로 계산하면 $x=\dfrac{2\times 17\frac{1}{2}+3\times 15}{15+17\frac{1}{2}}=\dfrac{80}{32\frac{1}{2}}\approx 2.46$을 얻을 수 있다. 영부족술을 사용하기 위해 '두 식물이 고르게 성장한다'고 가정한 것은 '凡數相與者謂之率 무릇 수량관계가 있는 수를 율(率: 비례관계를 포함하는 의미)이라 한다'는 전통 수학관과 상통하며 현대적인 의미의 선형보간법이라고 볼 수 있다[8].

대수적인 방법으로 문제를 풀기가 곤란할 당시에 이런 독창적인 계산법이 하나의 해법이 되었다. 이후 산술문제를 직접 해결할 수 있게 되면서 모든 문제를 영부족술로 처리할 필요는 없어졌다. [12]에서는 영부족 이외의 다른 해법으로 사용한

예를 다음과 같이 몇 가지 들었다.

"「영부족」장 20번 문제의 유휘의 주는 기존의 해법에 보태어 영부족술보다 간편한 새 해법을 첨가했으며, 또한 <장구건산경 張邱建算經>(5세기말) 卷中 49번 문제는 이 문제 유형과 동일한데 역시 유휘의 새 해법을 써서 풀고 있다. 또한 <장구건산경> 卷上 20번 문제는「영부족」장의 13번 문제와 동일한 유형인데, 분배비례법으로 풀고 있으며, 卷中 50번 문제는「영부족」장 11번 문제와 동일한 유형인데 '혼합법(<손자산경 孫子算經>의 雉兎同籠 문제의 해법)'으로 풀고 있다. 위의 세 문제의 해법을 서술한 후에 장구건은 '영부족술로 이것을 구하여도 얻을 수 있다(以盈不足術求之, 亦得)'는 문장을 보탰다. 남송(南宋)시대 양휘(楊輝)의 <상해구장산법 詳解九章算法>(1261)의「영부족」장에는 9개의 문제가 있는데 여기서도 영부족술 해법 외에 다른 해법을 추가하였다. 명대 정대위의 <산법통종>도 '영뉵'을 별도의 장으로 다룬다. 그러나 그가 제시한 문제들은 영과 부족의 수량을 분명하게 밝히고 있다. <구장산술>의 영부족술에 대해서 한나라 이후의 수학자들은 만능의 계산법이 아니라 단지 과부족문제를 해결하는 특수한 방법으로 간주하였다."

위의 분석에서 보듯이 영부족술이 후대에는 과부족 문제를 해결하는 특수한 방법으로만 여겨졌을지라도, 영부족술은 3절에서 다룰 기원전 186년에 쓰여진 <산수서 算數書>에서부터 <수리정온>은 물론 19세기 말에 쓴 이상설 선생의 <수리>에까지 사용되어 오면서 오랜 기간 중국 전통수학의 중요한 부분을 차지한 점은 특별히 기억하여야 한다. 특히 영부족술은 그 알고리즘적인 의미(할선법, 선형보간법)와 해법의 단순성을 고려하면 현대적인 수치해석 알고리즘으로 여겨지기에 전혀 손색이 없다.

3. 영부족에 관한 최근 연구내용

가. <산학보감>에서 영부족술의 특징

명대의 수학 중흥을 대표하는 최고수준의 수학 저작이며 중국 수학사의 연속성을 증명해주는 유력한 증거인 왕문소(王文素)의 <산학보감>(1524)을 손으로 필사한 유일본이 1939년에 발견되었다. 그 卷二十五에서는 한 권(卷) 전체 지면을 할애하여 영부족술을 특별히 논술하고 있는데 왕문소는 영부족술에 대해 깊고 세세하게 연구하여 여러가지 창의적인 것을 만들었다. 그 중 대표되는 몇 가지 내용이

[9]에 다음과 같이 소개되어 있다.

우선 왕문소는 최초로 <구장산술>의 영부족술과 그의 변형 및 그가 만든 거의 모든 영부족 관련 내용을 통속적으로 알기쉽게 산법가결[7]로 만들고 해석을 담았다. 예를 들어 가장 기본적인 영부족 공식에 대한 가결과 그에 대한 왕문소의 해석은 다음과 같다. 본 절의 원문은 [10]에서 인용하였다.

(가결) 盈和不足互相乘, 相幷名爲物實稱
不足幷盈人數實, 出銀相減較除攻
較除物實知其物, 以較除人人數淸
兩盈兩朒俱相減, 用法如前一例行

解曰: 凡一盈一朒, 互乘, 相幷爲物實.
幷盈, 不足爲人實. 以 (盈不足) [出率] 相減, 餘爲法.
除物實得物, 除人實得人數.
或兩盈 (兩朒之乘) 皆相減, 餘爲物實,
兩朒皆相減, 餘爲人實.
亦出率相減, 餘爲法. 除之.

둘째, 왕문소는 영뉵구원(盈朒求原)을 제시하였다. 다음의 문제를 보자. (여기서 10분(分)은 1전(錢)이고 10전은 1냥(兩)이다.)

一盈一朒題: 羊不知總數, 亦不知價. 假令每隻價銀八錢, 多三兩; 每隻七錢, 少二兩,
問: 總羊幷價銀各幾何?
答曰: 總羊五十隻, 每隻價銀七錢四分.
術曰: 互乘相幷爲實, 幷盈, 朒爲法, 除之, 得羊正價.
以正副價相減, 餘又爲法, 除盈, 朒, 得總羊數.

(해석) 일영일뉵의 문제이다. 양이 있는데 총 마리 수와 가격도 모른다. 양 한 마리당 가격을 8전(錢)이라하면 3냥(兩)이 남고, 7전이라하면 2냥이 부족하다. 양의 총 마리 수와 한 마리당 가격은 각각 얼마인가?

(답) 양은 모두 50마리이고 한 마리당 가격은 7전 4분(分)이다.

(방법) 서로 곱하여(유승하여) 더한 것을 실이라 한다. 영과 육(뉵)을 더하여 법으로 하고 (그것으로) 실을 나누면 양의 한 마리당 가격(정가 正價)을 얻는다. 정가에서 부가(副價: 가

7) 가결(歌訣): 기억하기 쉽게 비슷한 내용을 노래 형식으로 만든 운문(韻文)이나 글귀.

정하여 얻어진 틀린 가격)를 빼고 남은 것을 또다시 법이라 하고 영, 육(뉵)을 나누면 (양의) 총 마리 수를 얻는다.

위의 방법은 먼저 양 한 마리당 가격(정가)을 구한 뒤에 가정된 틀린 가격(부가)과의 차이를 이용하여 남은 돈이나 혹은 부족한 돈을 나누어 양의 총 마리 수를 구한다. 위의 방법에 따라 계산해보자. 먼저 양 한 마리당 가격(정가)은 $\frac{3\times7+2\times8}{2+3}=7$전 4분이고 정가에서 부가를 뺀 나머지는 8전$-$7전4분$=$6분이다. 영 또는 육(뉵)을 실로 하고 법으로 나누면 양의 총 마리 수를 알 수 있다. 즉 3냥$\div$6분$=$50마리이다. 또는 7전4분$-$7전$=$4분을 이용하면 양의 총 마리 수는 역시 2냥$\div$4분$=$50마리이다.

셋째, 왕문소는 익적영부족(匿積盈不足)을 제시하였다. 일반적으로 <구장산술>의 영부족 문제는 돈으로 한 가지 종류의 물건만 사는 형태가 많은데, 왕문소는 가격 차이를 알고 있는 두 가지 물품을 사는 것으로 확장하였다. 왕문소는 이런 유형의 문제를 <구장산술>과 마찬가지로 일영일뉵(一盈一朒), 일영일족(一盈一足), 일뉵일족(一朒一足), 양영(兩盈), 양뉵(兩朒)의 다섯가지로 나누었다. 다음의 문제를 보자.

一盈一朒題: 將銀不知總數, 買絹三匹剩銀二分. 買布五匹却少四分. 且云布價少絹價一錢二分, 問布, 絹二價幷原銀幾何? 此物多而銀不足.

答曰: 絹匹價三錢三分, 布匹價二錢一分. 原將銀一兩一分.

法曰: 置絹三匹, 乘差價一錢二分, 得三錢六分寄位. 另幷盈二分, 不足四分, 加入寄位, 共得四錢二分爲實. 另以絹三匹減布五匹, 餘二匹爲法. 除之, 先得布匹價二錢一分. 加差一錢二分, 得絹匹價三錢三分. 以絹三匹乘之, 得九錢九分, 加剩二分, 得原銀一兩一(錢)[分], 合問. 或以布五匹乘差一錢二分, 幷盈, 不足共六錢六分, 亦以二匹除之, 先得絹價三錢三分, 亦同.

(해석) 일영일뉵의 문제이다. 가지고 온 돈의 총 수를 모른다. 명주 3필을 사면 돈이 2분이 남고, 포를 5필사면 오히려 4분이 모자란다. 또 포의 가격은 명주의 가격보다 1전 2분이 싸다. 포와 명주의 가격과 원래 가지고 온 돈은 얼마인가? 이 물건들은 많으나 돈은 부족하다.

(답) 명주 1필의 가격은 3전 3분, 포 1필의 가격은 2전 1분이다. 원래 가지고 온 돈은 1냥 1분이다.

(방법) 명주 3필과 가격차이 1전 2분을 곱하여 얻은 3전 6분을 다른 위치에 둔다. 별도로 영 2분과 부족 4분을 합한 후에 이것(방금 계산하여 다른 위치에 두었던 것)에 보태어 얻은

4분 2전을 실이라 한다. 그밖에 포 5필에서 명주 3필을 뺀 나머지 2필을 법이라 하고 (실을 법으로) 나누면 우선 포의 가격 2전 1분을 얻는다. (여기에) 가격 차이 1전 2분을 더하면 명주의 가격 3전 3분을 얻는다. (다시 거기에) 명주 3필을 곱하면 9전 9분을 얻고 나머지 2분을 더하면 원래 가지고 온 돈 1냥 1분을 얻는다. 이 결과는 문제에 부합한다. 또는 포 5필과 가격 차이 1전 2분을 곱하고 (거기에) 영과 부족을 합하면 모두 6전 6분이 된다. 또 2필로 이것을 나누면 먼저 명주의 가격 3전 3분을 얻게 되어 또한 같은 결과를 얻을 수 있다.

이밖에도 왕문소는 쌍투영뉵(雙套盈朒), 쌍투영부족(雙套盈不足)8)이라고도 불리는 호환영부족(互換盈不足)의 간단한 계산법을 소개하였고, 돈을 빌리고 원금과 이자를 나누어 갚는 내용의 체지영부족(遞支盈不足) 등을 소개하였다.

나. 영부족술과 Cramer's Rule

영부족술과 이중 가정법의 관계는 이미 잘 알려져 있다[2, 3]. [16]은 영부족술과 Cramer's Rule의 관계를 다음과 같이 설명했다. 그림 5는 [16]의 논의를 2절에서 기술한 <구장산술>「영부족」장의 1번 문제에 맞게 재구성하였다. 구하고자 하는 식은 $au=v$이다(여기서 u는 사람 수, v는 물건값, a는 각 사람이 분담해야 하는 돈이다).

그림에서 $\triangle HEI \propto \triangle EBF$ 이므로

$\dfrac{a-a_2}{b_2}=\dfrac{a_1-a}{b_1}=y$라 하면 $\begin{cases} a-b_2y=a_2 \\ a+b_1y=a_1 \end{cases}$ 이므로 Cramer's Rule에 의해

각 사람이 분담해야 하는 돈은 $a=\dfrac{\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -b_2 \\ 1 & b_1 \end{vmatrix}}=\dfrac{a_2b_1+a_1b_2}{b_1+b_2}$가 된다. 이는 앞서 2절에서 언급한 '不盈不朒之正數 남지도 않고 부족하지도 않은 참값'을 나타낸다. 영부족술에는 이렇게 선형연립방정식이 명백하게 없던 시대에 Cramer's Rule의 의미가 담겨 있음을 확인할 수 있다.

다. 영부족술의 기원에 관하여

역사적으로 영부족술을 제시하고 사용한 저작은 기원전 186년 이전의 책인 <산

8) [3]에서도 쌍투영뉵(雙套盈朒)을 언급하고 있다.

그림 5 <산수서> 관련 서적

수서>이다. 이어서 <구장산술>에서는 별도의 장(章)으로 영부족술에 대해 논의하였다. 이후 청말까지 많은 중국 수학자들이 계속해서 영부족술에 맞추어 연구를 했다. 중국에서 시작된 영부족술에 대한 연구는 9세기에 이르러서 아라비아 원전에서 발견된다. 유럽에서는 13세기에 영부족술에 대한 내용이 나온다. 영부족술의 기원에 대하여 최근에 연구한 논문[14]의 내용을 간단히 언급해보자.

영부족술이 어떻게 왔는지에 대해서는 <구장산술> 자체에서는 설명이 없다. 3세기경에 유휘는 ‘율(率)개념(비와 비례의 개념과 비슷하지만 좀 더 넓은 의미)’과 ‘제동(齊同)[9]원리’로 영부족술이 얻어진 기원을 설명하였다. 세부적인 사항이 아마도 완전히 역사에 부합하지는 않겠지만, 진(秦) 이전의 시기에 이미 분수를 광범위하게 쓰고 당시에 분수의 각종 연산방법을 이해하고 있었으며 율개념도 이미 응용되었으므로 유휘의 설명은 확실히 고대에 영부족술을 얻게 된 경로와 수단을 반영한다. 사실 영부족술에서 가정하는 수(<구장산술>에서 ‘소출율’), 영수와 부족수를 <산수서>에서는 각각 모(母)와 자(子)로 부르고 있어 영부족술의 탄생과 분수 개념 및 그 방법이 밀접하게 상관되어 있음을 설명해주고 있다.

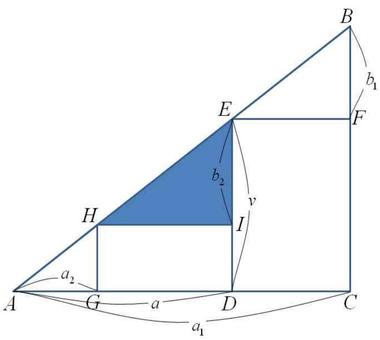

그림 6 영부족술을 설명하는 삼각형

영부족술이 어떻게 탄생했는지는 현재 진나라 이전 시기의 사료에서는 아직 직접적인 증거를 찾을 수가 없지만 영부족술을 탄생시킨 조건과 배경에 대해서는 자취를 찾을 수 있다. 진 이전 시기의 많은 문헌들에서는 물건이 남거나 부족한 상황이 발생하여 그것들을 조정해야할 필요가 있다고 자주 언급하고 있다. 예를 들어 <관자 管子>「사어 事語」편에서 “彼天子之制, 壤方千里, 齊諸侯方百里, 負海子七十里, 男五十里, 若胸臂之相

9) 분수의 통분보다 더 넓은 의미로 앞서 언급한 율의 연산에 대응한다. 제동술(齊同術)은 중국 고대의 비율문제를 처리하는 한 방법으로 통분할 때 분모를 같게 하는 것을 同, 그에 따른 분자의 변화를 齊라고 하였다.

使也. 故準徐疾, 赢[10]不足, 雖在下也, 不爲君憂"라고 하였는데 대국(大國)의 치리(治理)는 일의 늦음과 빠름, 양식과 재물의 남고 부족함에 근거하여 조정하기만 하면 양식과 재물이 민간에 퍼져도 군주가 걱정해야하는 일이 되지 않는다는 뜻이다. 또 「국축 國蓄」편에서 "人君知其然, 故視國之羨[11]不足而御其財物. 穀賤則以幣予食,布帛賤則以幣予衣. 視物之輕重而御之以準. 故貴賤可調而君得其利"라고 하였는데 군주(君主)는 국가 재물의 남음과 모자람에 근거하여 재물의 사용을 안배해야 한다는 뜻이다. 예를 들어 곡물이 너무 싸면 돈으로 양식을 보조하여주고 직물(織物)이 너무 싸면 돈으로 직물을 보조하여 준다. 재물의 경중(수량, 가격)을 고찰하고 적절히 조절하여 적합한 정도에 이르게 하면 재물의 싸고 비싼 것이 조절이 되어 동시에 군주도 그 이익을 얻는다는 의미이다. 이렇듯 사물의 남음과 모자람의 상황이 출현하여 계산하고 조정해야할 필요가 생겼다.

진 이전 시기의 평준(平準)정책은 각지의 다른 곡물의 수확과 물가에 근거하여 지역마다 세금을 조정하는 것이다. 경제생활에서 적합한 숫자는 어떤 경우에는 바로 얻어지는 것이 아니어서 사람들이 쉽게 생각할 수 있는 것은 남거나 모자라는 경우를 일으키는 두 숫자의 중간값을 취하는 것이다. 미리 사후에 일어날 수 있는 상황을 알아야하기 때문에 적절하고 유효한 계산법을 알아내는 것이 필요하게 되었고 부단히 방법을 모색하여 결국 분수의 성질 및 그 계산법 또는 그것과 관련이 있는 율 개념과 제동방법을 이용하여 영부족술을 찾아내게 되었다. 초창기에 영부족술은 실제 생활에 이미 나타난 영과 부족의 상황에서 적합한 중간값을 찾는 것이었을 수 있다. 그러다가 후에 이 방법의 응용범위가 확대되어 두 번의 가설을 통해 영과 부족의 두 상황을 통하여 일반적인 문제를 영부족 문제로 바꾸었고 실제로 근삿값밖에 구할 수 없는 문제에도 응용될 수 있는 것으로 인식되었다. 예를 들어 <산수서>의 53번 문제를 보면 240의 제곱근을 구하는 것인데 이런 문제의 일반적인 풀이법인 개방술(開方術)을 이용하지 않고 영부족술로 풀고 있다[4, 15]. 이 문제의 해법은 다음과 같다.

$$240 = 15^2 + 15 = 16^2 - 16$$

$$\frac{16 \times 15 + 15 \times 16}{16 + 15} = \frac{480}{31} = 15\frac{15}{31}$$

이 문제에서 영부족술은 제곱근 계산에 또 다른 근사공식을 주고 있다.

10) 여기서 赢은 盈과 같다.

11) 羨은 남아있다(盈)의 뜻이다.

⑧ $$\sqrt{a^2+r} \approx a+\frac{r}{2a+1}$$

이는 다음과 같이 유도될 수 있다. 먼저 제곱근을 a라 하면 r이 모자라고, $a+1$이라 하면 $(a+1)^2-(a^2+r)=2a+1-r$이 남으므로 아래와 같이 나타내자.

$$\begin{array}{cc} a & a+1 \\ r & 2a+1-r \end{array}$$

이에 영부족술을 적용하면

$$\frac{a(2a+1-r)+(a+1)r}{r+(2a+1-r)}=\frac{2a^2+a+r}{2a+1}=a+\frac{r}{2a+1}$$

이 되어 ⑧의 우변을 얻는다. 물론 <구장산술>에 이런 유형의 문제는 다시 나타나지 않는다. 이런 방법과 응용은 진나라 이전 수학의 한 과목인 '영부족'을 '영부족'을 형성하였다. 많은 수학사학자는 '영부족'이 현재 우리가 아는 <구장산술>이 완성되기 훨씬 전, 즉 진나라 이전부터 전해져 왔다고 논문을 통하여 보고해 왔다. 그것의 직, 간접적인 영향을 받아 진(秦) 이전에 여러 영부족 문제들이 소개된 것으로 알려진다[14]. <산수서>의 영부족 문제는 바로 이러한 유형에 속하는 것으로 분석된다.

4. 유럽에서의 영부족술

가. Fibonacci와 영부족술

영부족술은 약 9세기경에 비단길을 따라 아랍으로 전파된다. al-Khwarizmi (780-846) 등의 저서에 모두 영부족에 관한 논술이 있다[9]. 아랍어로 'hisab al-khataain'[17]으로 불리는 '거란(Khitai, Cathay)산법'12), '중국산법'은 13세기 초에 유럽으로 전해졌다. 이탈리아 수학자인 Fibonacci(c.1170-c.1250)의 *Liber Abaci*(1202) 13장은 바로 영부족술에 관한 것으로 'elchataym'이라 불렀는데 이는 아랍어로 음역한 것이다[16]. 또 이것을 'Regula augmenti et decrementi'라고도 불렀는데 이는 중국어의 영부족술의 의역이다. Joseph Needham(李約瑟, 1900-1995)은 *Science and Civilization in China* 제3권에서 중세기 문예부흥시기의 세 명의 유명 수학자는 모두 '거란'이라는 이름으로 이 산법을 명명하였다고 쓰고 있다. 예

12) 당시에 이슬람 국가에서는 중국을 거란(契丹)으로 불렀다.

를 들어 Pacioli(13세기)는 ‘el cataym’(1494)[13], Tartaglia(16세기)는 ‘Regola Helcataym’(1556), Pagnani(16세기)는 ‘Regole del Cattaino’(1591)라고 불러 ‘중국산법’의 원래 의미를 지니고 있었다. 이후에 서양에서는 영부족의 개념은 이중 가정법(rule of double false position)[14]이란 용어로 발전하였는데 그 이유는 영부족술로 일반 산술문제를 풀 때 반드시 두 번의 가정이 필요하기 때문이다[12].

16세기말에 마테오리치(Matteo Ricci, 리마두, 利瑪竇, 1552-1610)가 중국에 왔을 때 이지조(李之藻, 1565-1630)는 그와 함께 서양산술을 학습했는데 명대 만력(萬歷) 41년(1613년)에 <동문산지 同文算指>를 정대위의 <산법통종>과 독일인 예수회 신부 Christopher Clavius(1538-1612)의 *Aritmetica prattica*의 편역에 근거하여 편찬하였다. <동문산지> 通編 卷4 「첩차호징 疊借互徵」은 바로 Clavius가 원저자인 「Regola del falso di doppia positione」(*Aritmetica prattica*의 한 절임)의 역문이다. 영부족과 첩차호징은 같은 종류의 문제로 그 해법은 서로 다른데[6], 이지조는 「첩차호징」에서 다음과 같이 쓰고 있다.

與舊法盈朒略似. 然本無盈朒而借立一數以求盈朒, 乃以盈朒推之者. 與前‘借衰互徵’之法, 俱極超妙. 雖至隱至奧之數. 用此推求, 未有不渙然冰釋者.

(해석) 예전의 방법인 영뉵과 다소 비슷하다. 그러나 이 방법에는 영뉵이 없고 하나의 수를 빌어 영뉵을 구하여 영뉵으로 유추해낸다. 앞의 ‘차쇠호징’의 법과는 굉장히 결함이 없이 정교하고 기묘하다. 비록 숨겨져 있는 오묘한 수이지만 이것을 써서 유추해내면 완전히 풀리지 않는 것이 없다.

중국의 영부족술이 서양에 전해진 후에 아랍과 유럽 각국을 거쳐 이지조가 <동문산지>를 쓴 시기에 다시 중국으로 돌아왔다. 그러나 이지조 등 많은 학자들은 <구장산술>과 왕문소의 영부족술에 대하여 무지하여, 그 내용을 보고도 처음에는 이것이 자신들의 영부족술에서 발전된 것임을 알아볼 수 없었다. 1957년 12월 錢寶琮(1892-1974)은 <중국수학사화 中國數學史話>책에서 다음과 같이 지적하였다[9].

13) cataym 등은 모두 거란을 지칭하는 말이다. 당시에 중국 문화는 중앙아시아에 머물던 서요(西遼)국인(거란인)으로부터 서방의 아랍국가들에 전해져서 중국을 거란으로 불렀다. 거란의 명성이 널리 퍼져서 여러 민족들은 현재까지도 여전히 중국을 ‘거란’이라는 이름으로 부른다. 서구 문헌의 ‘거란’은 Cathay(Khitai)로 쓰여졌고 러시아어 자모의 표기는 Китай (kitai)로 중국을 의미하는 러시아어 Китай (kitai)는 거란에서 온 것이다.

14) http://en.wikipedia.org/wiki/False_position_method

"16, 17세기 유럽에 대수학이 부호를 충분히 이용할 만큼 발전되지 않았을 시기에 이 만능의 산법(영부족산법)은 오랜 기간동안 그들(유럽)의 수학 왕국을 통치하였다."

위에서 보듯이 거란(중국)의 영부족술이 9세기를 전후하여 아랍으로 전파되고, 그 내용이 서기 1200년 전후에 피사의 Fibonacci를 통하여 유럽에 소개된 후, 오랜 기간 널리 사용되며 크게 발전하였음을 확인할 수 있다.

나. 중국 영부족술의 아랍을 통한 유럽 전파 경로

인도-아라비아(Arabia) 수학은 현대수학에 직접 연결되는 '근대수학'의 '도약대'가 되었으며 아라비아인은 아시아-인도-그리스 고전수학을 모두 취합하고 유럽에 전달하여 근대수학 여명기를 열었다. 중국 영부족술은 아랍을 통해서 유럽으로 전파되었는데 이 경로를 살펴보기 전에 먼저 아라비아인은 수학계에 어떤 공헌을 했는지 알아보자.

6세기부터 8세기 유럽은 중세암흑시대에 접어들었고 연이은 전란 등은 전반적인 문화 침체를 가져왔다. 이 암울한 시기에 인도와 아시아 그리고 그리스 수학의 중요 부분이 아라비아로 전해져 인류가 세계 문화를 보존할 수 있는 밑거름이 되었다. 비문화적인 전투민족이었던 아라비아인도 마침내 '사라센 제국(Saracens)'이라는 확대된 영토를 다스리는 평화민족으로 변모해 갔다[13]. 유목 생활을 하는 대상(caravan, 隊商) 집단의 생활양식도 도시에 머물러 사는 방식으로 변해 갔다. 초빙된 그리스와 로마의 의사들이 진료를 마치고 아라비아 청년들에게 학문과 교양을 가르치면서 이슬람에 유럽 문화가 널리 퍼졌다. 한편 재력이 풍부한 역대 국왕(칼리프 Khalīfah)이 학문 예술의 향상을 크게 장려했기 때문에 동(東)인도와 서(西)그리스의 문화가 모두 이 지역에 모이게 되었다. 이슬람의 문화는 그리스와 시리아, 페르시아, 인도, 중국의 전통을 종합하고 나름대로 소화하여 풍요한 결실을 엮어냈다. 인도를 거쳐 중국까

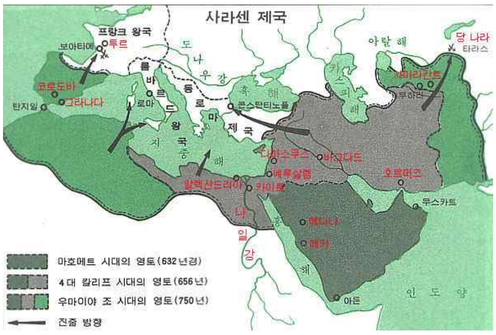

그림 7 사라센 제국의 영토

지 트여 있던 무역로 덕분에 풍부한 물자와 사상을 공급받아 수준 높은 문화를 만개시켰다. 특히 미술과 건축은 내세울 만한 분야이며 의학, 천문학, 항해술, 수학 역시 당대 최고의 수준을 자랑했다. 아라비아인은 동양과 서양의 문화가 모이자 종교를 통해 하나로 묶고 다듬어 문명 전체의 수준을 한 단계 끌어올린 것이다.

그림 8 Fibonacci

유클리드 <원론>(*Elements*, 총 13권)은 그리스가 멸망하면서 이를 계승한 민족이 없어지자, 거의 600년간 학문의 세계에서 그 모습을 찾아볼 수 없었다. 아라비아 수학자들은 서구에 산재된 모든 기하 자료를 수집해 <원론>을 정확하게 복원하는데 성공했을 뿐만 아니라, '입체기하에 관한 14권과 15권'은 15세기에 2명의 아라비아 수학자가 추가했다. 이상의 공적은 대단히 놀라운 업적이고 만약 아라비아인이 존재하지 않았다면 <원론>은 영원히 소실되었을지 모른다.

아라비아 수학의 전성기인 9-12세기를 대표하는 초기 수학자는 al-Khwarizmi였다. 그의 업적 중 현대 컴퓨터 프로그램의 제작에까지 영향을 미치는 알고리즘(algorithm)은 무엇보다 위대한 업적이다. 고대 이집트, 인도, 중국을 비롯한 당시까지의 수학 문제 해법은 모두 '가정법'이라는 시행착오적 방법에 의하고 있었는데, 아라비아 사람인 al-Khwarizmi는 거의 기계적 처리로 답을 얻을 수 있는 '이항법'을 발견했다. 이것은 물건을 위에 올려 무게를 측정하는 저울(天秤, 천칭)에서 나온 아이디어이다. 그의 유명한 저서 *Al gebr wal mukābala*(820)는 '이항하여 정리한다 –이항과 동류항의 정리'라는 의미가 있으며 후세에 알고리즘과 Algebra(대수)의 어원이 되었다.

Fibonacci는 아라비아의 명저 *Al gebr wal mukābala*를 모델로 자신의 필산법을 *Liber Abaci*에 소개했다. 이것은 인도-아라비아식의 필산법으로 능률이 좋고 정확한 계산을 할 수 있기 때문에 빠르게 다른 상인들에게도 전파됐다[13]. 이탈리아의 피사에서 상인의 아들로 태어난 Fibonacci는 아버지를 따라 알제리(Algeria)의 Bugia에서 아랍사람들로부터 산학을 학습하였고, 그 후 지중해 연안(이집트, 시리아, 비잔틴, 시실리, 플로랑스)을 다니면서 각지의 우수한 수학책들을 접할 기회를 갖게 되었다[15]. 이후 이탈리아로 돌아와서 *Liber Abaci*, *Practica geometriae*, *Flos*, *Liber quadratorum* 등의 저작을 완성하였다. *Liber Abaci*에는 모두 15장이 있는데 산술과 대수의 문제를 처리하고 있다. 실제적인 문제로부터 해답까지 산술

을 응용하여 상업적인 용도로 사용하고 있다. Fibonacci는 *Liber Abaci*의 13장에서 중국의 영부족술을 유럽에 소개한 것이다. 실크로드를 통하여 낙타를 무리지어 동양과 서양을 왕래한 상인들이 수학에서도 동서양의 중개역할을 했다고 볼 수 있다.

5. 결 론

서양에서 이중가정법으로 알려진 영뉵(영부족)은 과부족 문제를 해결하는 산법이다. 본 연구진은 <구장산술>「영부족」장의 대표문제를 통하여 영부족술의 기본 내용과 산법으로써의 의미를 살펴보았다. 특히 진나라 이전 시기에 이미 사물의 남거나 모자라는 상황이 자주 발생하여 계산하고 조정해야할 필요가 생겼으며 이에 대한 적절하고 유효한 계산법을 알아내는 과정 중에 영부족술이 탄생하였고 그 후 오랜 기간동안 만능의 산법으로 여겨졌었음을 확인할 수 있었다.

본 원고에서는 기존에 국내에서 발간된 영뉵 관련 모든 논문과 함께 중국과 미국에서 영뉵(영부족)에 관하여 연구된 논문을 분석하여 유의미한 새로운 내용(Cramer's Rule과의 관계, <산학보감>에서 영부족술의 특징)을 발굴하여 소개하였다. 이에 보태어 중국의 영부족술이 아랍을 거쳐 유럽으로 전파된 과정 및 그 배경과 Fibonacci의 영부족술에 대한 기여를 연구하였다.

초록. 영뉵(盈朒) 또는 영부족(盈不足)은 그 글자의 의미에서 보듯이 넘치는 것과 부족한 것에 관계된 '과부족'문제를 나타낼 때 사용되는 유용한 개념으로, 영부족술(盈不足術)은 과부족문제를 푸는 일종의 산법이다. 본 논문은 먼저 지금까지 영부족에 관하여 소개된 최근의 모든 논문을 분석하고, <구장산술 九章算術> 卷七「영부족」장의 대표문제를 통하여 영부족술의 내용과 산법으로써의 의미를 쉽게 이해할 수 있도록 새롭게 서술하였다. 그리고 서양에서 이중가정법(rule of double false

그림 9 al-Khwarizmi

position)으로 알려진 영부족에 관한 최근의 동서양 연구결과를 분석하여, 영부족술과 Cramer's Rule과의 관계 및 <산학보감 算學寶鑑>에 소개된 진화된 영부족술의 특징에 대하여 논하였다. 더 나아가 영부족술의 기원과 중국의 영부족술이 아랍을 거쳐 유럽으로 전파된 배경을 구체적으로 밝혔다.

참 고 문 헌

[1] 이상구・홍성사・홍영희, 李相卨의 算書 數理, 한국수학사학회지, 22(4) (2009), 1-14.

[2] 장혜원, 동양의 영부족술과 서양의 임시위치법, 대한수학교육학회 수학교육학논총, 25 (2004), 15-27.

[3] 장혜원, 동양의 영부족술과 서양의 가정법, 한국수학사학회지, 18(1) (2005), 33-48.

[4] 차종천, 한간「산수서」와「구장산술」의 비교, 韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學 敎育 論文集>, 15 (2003), 273-280.

[5] 차종천, 東洋數學大系 I 《算數書・算經十書上》, 교우사, 2006.

[6] 홍성사・홍영희, 洪吉周의 代數學, 한국수학사학회지, 21(4) (2008), 1-10.

[7] 郭書春, 李籍《九章算術音義》初探, 自然科學史硏究, 8(3) (1989), 197-204.

[8] 群燕, 今有術與盈不足術, 中學教研, 6 (1992), 30-32.

[9] 潘有發・潘紅麗, 王文素與盈不足術, 新理財, 5 (2004), 11-13.

[10] (明) 王文素 原著, 劉五然 等 校注, 算學寶鑑校注, 北京: 科學出版社, 2008.

[11] (唐) 李籍撰. 九章算術音義. (臺灣: 文淵閣四庫全書影印本)

[12] 錢寶琮, 盈不足術的發展史, 數學教學, 1 (1955), 1-3.

[13] 仲田紀夫, 「社會數學」: 400年の波瀾萬丈, 日科技連, 2000. (이상구・김호순 옮김, 400년의 파란만장-사회와 수학, 경문사, 2011.)

[14] 鄒大海, 從《算數書》盈不足問題看上古時代的盈不足方法, 自然科學史硏究, 26 (3) (2007), 312-323.

[15] 黃清揚, 單設法及其演變, HPM通訊, 11(1) (2008), 12-20.

[16] Boman, E. False Position, Double False Position and Cramer's Rule, *The College Mathematics Journal*, 40(4) (2009), 279-283.

[17] Smith, D. E. *History of Mathematics: Volume II*, Dover Publications, 1958.

Department of Mathematics,
Sungkyunkwan University,
Suwon 440-746, Rep. of Korea
E-mail : sglee@skku.edu

BK21 Math. Modeling HRD Div.,
Sungkyunkwan University,
Suwon 440-746, Rep. of Korea
E-mail : jhlee2chn@skku.edu