한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제25권 제4호 (2012년 11월), 69–82

복소수 지도에 관한 De Morgan의 관점

The De Morgan's Perspective on the Teaching and Learning Complex Number

이동환 Dong Hwan Lee

본 논문은 복소수 지도에 대한 De Morgan의 관점을 분석하였다. De Morgan의 복소수를 도입하고 정당화하는 과정은 그의 대수에 대한 관점이 보편적 산술, 기호 대수, 의미 대수로 발전해가는 과정과 일치한다. De Morgan은 허수의 유용성을 이유로 수학적으로 엄밀하 지 않은 허수를 인정하였다. 이를 설명하기 위해 De Morgan은 기호의 의미나 대상은 고려할 필요가 없다는 기호대수를 수용했다. 그러나 그는 허수의 의미를 포기할 수 없었고, 결국 길이와 방향을 가진 직선을 대상으로 하는 이중대수 이론을 전개하였다. De Morgan은 복소수 지도를 정당화하는 과정을 정련해가면서 대수와 수학 전반에 관한 자신의 관점을 지속적으로 발전시켜나갔다고 볼 수 있다. 이는 복소수의 지도가 새로운 수학적 개념의 도입에 머물지 않고 대수에 대한 관점의 변화와 발전을 일으키는 촉매가 될 수 있음을 보여주고 있다.

The objective of this paper is to study De Morgan's perspective on teaching and learning complex numbers. De Morgan's didactical approaches reflect the process of development of his thoughts about algebra from universal arithmetic, symbolic algebra to meaning algebra. De Morgan develop his perspective on algebra by justifying and explaining complex numbers. This implies that teaching and learning complex numbers is a catalyst for mathematical development of De Morgan.

Keywords: De Morgan, 복소수(complex number), 허수(imaginary number), 이중대수 (double algebra)

1 서론

De Morgan(1806–1871)은 뛰어난 수학자이자 수학교육에도 많은 관심을 가지고 다양한 저술을 남긴 수학교육자이다(Rice[8], 최지선 외[3]). 최근 De Morgan의 수학교육에 대한 관점과 구체적인 교수법을 분석한 연구가 이루어지고 있다. 최지선 외([3])는 수학교육에 대한 De Morgan의 관점을 체계적으로 파악하여 현재의 수학교육에 시사점을 도출하였고, 손홍찬과 고호경([2])은 De Morgan의 수학교육철학과 교수법을 재

MSC: 01A99 ZDM: A30
제출일: 2012년 10월 2일 수정일: 2012년 11월 8일 게재확정일: 2012년11월 15일

조명하였다. 권석일 외 ([1])은 De Morgan의 음수 지도 방법을 연구하여 현재의 음수 지도 방법과 비교하였다. 이러한 선행연구는 De Morgan의 대수에 대한 관점 변화 및 대수 교육에 대한 통찰 등에 초점을 두고 이루어졌다. 음수의 도입과 관련하여 기호대수를 완성시켜가는 과정에서 De Morgan의 수학교육에 대한 관점을 분석하였다. 그러나 De Morgan 대수에 대한 관심은 음 수의 도입과 정당화에 머물지 않고 허수와 복소수의 정당화에서 마무리 되었다. 따라서 De Morgan의 복소수 도입과 지도에 대한 관점을 살펴보는 일은 De Morgan의 수학교육에 대 한 관점을 온전히 파악하는 것이며, 현재의 복소수 지도에 대한 시사점도 얻을 수 있는 것 이다. 본 연구는 De Morgan의 음수와 허수에 대한 관점이 잘 나타난 두 저서 On the study and difficulties of mathematics(De Morgan[5]), Trigonometry and Double Algebra(De Morgan[4])를 분석하여 De Morgan의 복소수 지도에 대한 관점을 재조명하는 데 목적이 있다.

2 허수에 대한 De Morgan의 관심

De Morgan은 대수의 골칫거리인 음수와 허수의 기원과 발달에 관한 글과 수학교육에 관련된 글을 많이 남겼다(Richards[9], p. 21). 허수는 당시의 수학자들 사이에 논란이 많았던 개념이었지만, De Morgan에게 그것은 수학자들만의 문제가 아니었다. 그는 수학교육의 맥락에서 허수를 둘러싼 어려움들을 논의하였다. De Morgan에 따르면, 수학은 그 내용뿐만 아니라 건전한 추론능력을 길러주는 교육적인 가치가 큰 학문이다(Pycior[7], p. 214). 그는 수학만큼 개념이 명확하고 그 제일원리가 자명한 학문이 없다고 생각했다. 기하학이 바로 그 대표적인 예로서 "학생들이 기하학을 공부하면서 장애를 만나더라도 그러한 어려움은 결코 개념이 모호한 탓이 아니며, 그들이 받아들여야할 전제가 의심스러운 탓도 아니다."(De Morgan[5], p. 1) 그러나 당시 허수를 가르치는 상황을 보면, 허수는 그 정의조차 모호하였으며 학생들은 아무 설명도 없이 암기한 규칙에 따라 기계적인 연산을 수행할 뿐이었다. 건전한 추론능력을 길러주려는 목표와는 거리가 멀었다. 대학의 교양교육으로서 수학의 위상을 확고히 하려는 그에게 허수의 사용은 어렵지만 반드시 해결해야할 문제였다.

> 음수와 허수를 사용하는 것은 가장 큰 어려움이지만, 사실은 대수가 인간 지성에 줄 수 있는 유일한 자산이다. 몇 마디의 말로 설명할 수 있거나 간단한 연산을 거쳐 구한 결과들은 학생들이 쉽게 받아들이지만, 그 과정이 긴 결과들은 어렵다고 생각하는데, 이것은 수학을 배우는 어린 학생들의 특징이다. 학생들은 $a\times(-a) = -a^2$의 의미에 대해서 대수롭지 않게 생각하는 반면에, $(a^m + a^n) \times (b^m + b^n)$의 계산에 대해서는 매우 어렵게 생각한다. 이것은 아마도 그가 그 전에 학습했던 방식에서 비롯된 결과일 것이다. 어려서부터

> 그는 스스로의 관찰로부터 사실을 습득한 적이 없고, 자신의 추론을 통해 진리를 연역한 경험이 없었다. [...] 연구하는 경험이 형성되지 않은 채, 학생들은 대수를 그저 참임이 확실한 규칙 따르기로 생각하고 있다. 따라서 학생들이 주어진 규칙을 기억해서 적용하는 것에 비례해서 어려움을 느낀다는 것은 당연한 일이다. 그 규칙을 만들어 낸 추론의 본성에 대해서는 생각할 필요성을 못 느끼는 것이다.(De Morgan[5], p. 182)

이처럼 De Morgan은 대수를 단지 규칙 따르기라고 생각하는 학생들의 잘못된 학습방식을 반성하게 만드는 계기로서 음수와 허수의 사용을 권장하고 있다. 대수가 학생의 추론능력에 기여를 해야 한다면 바로 그 힘은 $(a^m + a^n) \times (b^m + b^n)$을 계산하는데 있지 않고 음수와 허수의 연산 규칙을 만들어낸 추론의 본성을 이해하는데 있음을 밝히고 있다.

허수를 둘러싼 문제가 심각한 만큼 이를 해결하기 위한 De Morgan의 제안은 지속적으로 개선되었다. Pycior([7])에 따르면, 대수에 대한 De Morgan의 생각은 하나의 관점으로 설명하기 힘들 정도로 변화가 심했다. 그의 대수 연구는 보편적 산술, 기호대수, 의미대수 세 단계를 거쳐 갔다. 1830년대 초기까지 그는 대수와 수학에 대한 전통적인 관점을 지지했다. 그는 수학이 자명한 제일 원리에 기초하고 있다고 보았으며 따라서 유클리드 원론과 산술을 수학의 전형으로 보았다. 그러나 1830년대 중반 그는 Peacock의 기호대수에 관한 연구를 수용하고 확장하여, 대수에 대한 매우 현대적인 형식적 접근을 수용하였다. 1830년대 말, 다시 기호의 의미를 탐색하였고 이를 반영한 의미 대수에 집중하였다. 이러한 역동적인 변화를 일으킨 동인이 허수였다.

본 연구는 On the study and difficulties of mathematics(De Morgan[5])와 Trigonometry and Double Algebra(De Morgan[5])를 중심으로 De Morgan의 복소수 지도의 관점을 분석한다. 전자의 경우 보편적 산술에서 기호대수로 넘어가는 과정에서, 후자는 기호대수에서 의미대수로 넘어가는 과정에서 복소수에 대한 그의 지도방식을 명확하게 보여주고 있다.

3 '심정적 확신'에 호소

On the study and difficulties of mathematics의 머리말에서 De Morgan([5]. p. ⅴ)은 '지금까지 학생들에게 설명이나 증명 없이 규칙암기만을 강요해 온 교사들과 이렇게 배우고 있는 학생들을 위해 책을 출간하였다'고 밝히고 있다. De Morgan은 수학교육에서 학생 스스로의 생각이 중요함을 수차례 강조하고 있다.

> 학생은 교사의 말을 신뢰할 것이다. 그러나 이러한 학생의 태도를 점검할 필

> 요가 있다. 교사는, 학생 스스로의 생각에 의해 획득하지 못한 것은 아무 효과도 없음을 학생에게 말해줘야 한다. 수학은 스스로 해야 한다. 수학은 권위에 의해 그 믿음을 강요해서는 안 되는 유일한 과학이기 때문이다. 이러한 환경을 갖추어 주는 것이 교사의 유일한 책무이다.(De Morgan[5], p. 8)

그러나 당시에 음수와 허수는 '교사의 권위에 의해 그 믿음을 강요하는' 대표적인 개념이었다. 따라서 음수와 허수를 학생들에게 어떻게 설명할 것인가가 이 책의 중심 주제가 되는 것은 당연하였다. '학생 스스로의 생각에 의해' 음수와 허수를 이해할 수 있는 환경을 만드는 것이 De Morgan의 목표였다. 그러나 음수와 허수는 당시의 수학자들 사이에서도 논란이 많았던 개념이기에 학생들이 이 개념을 이해하는 것은 불가능했다. De Morgan도 이 점을 인정하였다.

> 우리가 예를 들어, 음수 사용의 찬반 논쟁에 학생을 참여시키려는 것은 아니다. 그것은 학생들이 이해할 수 없는 논쟁이며, 아직 찬반도 확실히 결정되지 않았다. 그러나 학생들은 무언가 어려움이 존재한다는 것을 의식할 수 있고, 충분한 예제를 생각하면서 그 규칙이 유도한 결과에 대한 확신을 얻을 수 있을 것이다. 아무리 생각해봐도, 이러한 방법이 대다수의 대수 교과서에 아무 근거 없이 제시된 규칙 따르기보다 나을 것이다.(De Morgan[5], p. 183)

De Morgan은 무조건적인 수용이나 배척보다 학생 스스로 허수 사용에 대해 판단하여 모종의 확신을 가질 것을 요구했다. 수학자들도 결정하지 못한 허수 사용에 대한 판단과 확신을 학생들에게 요구하는 것이 과연 가능한가? De Morgan은 수학자의 엄밀한 확신이 아닌 학생 수준의 확신을 고려하였다. 그것이 심정적 확신(moral certainty)이다. 심정적 확신은 수학자들이 만족하는 수학적 확신과 대비되는 일종의 직관적인 확신으로서, De Morgan은 학생들이 수학자들과는 다른 방식과 수준에서 확신을 얻는다고 굳게 믿었다. Freudenthal 역시 비슷한 관점을 보여준다. 수학은 확실성을 추구하는 정신적 활동이고, 인간에게는 상식이 가장 확실한 것이다. 그러나 수학에서의 확실성은 어떤 일을 당연히 받아들이는 정도로 충족되는 것이 아니라 최선의 근거를 요구하며, 이는 다른 학문과는 구별되는 특수한 정신적 활동에 의해 추구되는 것이다(Freudenthal[6], pp. 1–2). 수학학습은 건전한 상식에서 출발하여 점진적으로 그 확신을 심화시켜야 한다는 Freudenthal의 관점처럼, De Morgan은 음수나 허수와 관련하여 학생 수준에서 추구할 수 있는 최선의 것을 심정적 확신으로 보았다. 그가 제기한 심정적 확신은 합리성과 인간성의 결합체로 플라토니즘과 일반대중교육의 간격을 메우는 인식론적 도구이

다.(최지선 외[3])[1] 수학적 확신에 이르게 하기 위해 먼저 심정적 확신을 경험하게 하려는 접근 방식이었다.

> 초보자는 보다 덜 엄밀한 증명에서 심정적 확신(moral certainty)을 얻고 만족한다. 일반화를 이해할 수 없는 상태에서, 학생들은 자신이 이해할 수 있는 간단한 사례 몇 가지를 관찰함으로서 일반적인 정리가 참임을 만족스럽게 받아들인다. 예를 들어, 일반적인 증명으로부터 이항정리가 참이라는 확신을 얻겠는가 아니면 $(a+b)^2, (a+b)^3$ 을 전개하는 특별한 사례를 관찰하는 것에서 확신을 얻겠는가? 우리는 대다수의 학생들에게 엄밀한 증명이 별다른 확신을 제공하지 않는다고 굳게 믿고 있다.[2](De Morgan[5], p. 184)

De Morgan은 엄밀한 증명이 학생에게 확신을 제공하지 않는다는 신념을 가지고 있었다. 특히 허수는 수학자들 사이에서도 엄밀한 증명이 없었고 어려웠기 때문에, De Morgan에게 있어 허수 지도의 목표는 학생들이 허수의 사용에 대한 심정적 확신을 얻는 것이었다. 그는 허수와 관련된 어려움을 정직하게 소개하고, 학생들이 이로부터 심정적 확신을 얻을 수 있는 환경을 만들어 주려고 했다. De Morgan은 허수의 연산과 관련하여, 학생들이 심정적 확신을 가질 수 있는 방안으로 두 가지 즉, 유추와 유용성을 제시했다.

우선 De Morgan은 기존의 규칙을 유지하려는 인간 마음의 자연스러운 경향에서 심정적 확신이 나온다고 보았다. De Morgan은 산술의 표기(notation)에서 시작하여 산술의 규칙으로, 대수의 표기에서 시작하여 대수의 규칙으로 진행하며 책을 구성하였다. 그는 수학에서 기호의 사용을 중요시하고 동시에 그러한 기호사용이 자칫하면 무의미한 규칙 따르기로 전락할 수 있음을 인식하였다. 따라서 새로운 기호를 도입할 때, 그는 기존의 내용과의 관련성을 최대한 활용하는 자연스러운 유추를 강조했다. 그래야 새로운 기호나 개념에 대한 심정적 확신을 얻을 수 있다고 보았다.

> 새로운 기호를 첨가하는 최선의 자연스러운 방법은 다음과 같다. 어떤 규칙을 발견하였는데 그것이 몇몇의 경우에 적용되지 않는다면, 이미 사용되는 기호

1) 최지선 외[3, p. 228]은 심정적 확신의 수학교육적 의미를 다음과 같이 분석하였다. '올바른 수학적 개념을 구성하기 위해서는 [...] 수학적 확실성을 추구하게 하는 지적 심증 즉, 지적 탐색을 유도하는 자극이 필요하다. 예를 들어, 기존의 연산법칙을 유지하며 방정식의 근으로 음수를 도입하는 활동은 "음수가 포함된 대수체계가 맞을 것이다."라는 심증을 갖게 하고, 기호조작에 불과한 측면에 대한 자각과 결부되어 대수기호에 체계적으로 의미를 부여하는 지적 탐색활동을 유도하는 것이다.' 즉, 심정적 확신은 학생들이 어떤 수학적 개념이나 원리에 대한 직관적 믿음내지는 가설이며, 학생들의 수학적 탐구를 자극하는 수단이 된다.

2) 또 다른 예를 살펴보자(De Morgan[5], p. 131). 7이 유리수가 아니라는 것 즉, 완전제곱수가 아님을 De Morgan은 이렇게 설명한다. 우선 자연수 중에서 그 제곱이 7이 되는 자연수가 없다는 것은 쉽게 알 수 있다. 이제 자연수가 아닌 분수를 생각한다. 예를 들어 $\frac{4}{3}$를 제곱하면 $\frac{16}{9}$으로 여전히 자연수가 아니다. 이런 식으로 자연수가 아닌 분수의 제곱이 자연수가 될 수 없다는 확신을 가질 수 있다. 따라서 7은 완전제곱수가 아니다. 이러한 설명은 $\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 보이는 현재의 엄밀한 증명과 분명한 차이가 있다. De Morgan은 전자의 설명이 학생들에게 심정적 확신을 준다고 강력하게 믿고 있었다.

> 들에 새로운 기호를 첨가하거나 새로운 기호를 수정하여 그 규칙이 모든 경우에 성립하도록 한다. 단, 이 때 동일한 기호가 서로 다른 것을 나타내지 않아야 하고, 자연스러운 유추를 손상시켜서는 안 된다. 만약 그 규칙 자체가 지금까지 설명되지 않았던 새로운 기호를 만들어 낸다면, 이것은 규칙을 만들 당시에 의도하지 않았던 경우에 그 규칙을 적용했기 때문이다. 이를 해결하려면, 원래의 원칙(principle)에 의존해야 한다. 새로운 규칙(rule)에 의해 만들어진 기호는 원래의 원칙에 의해 만들어진 것을 나타내고 있을 것이다. 이러한 방식으로 규칙의 일반성은 확립되고, 언어의 유추도 손상되지 않는다. 예를 들어, $a^8 \div a^5 = a^3$ 처럼, 나누기는 지수의 빼기라는 규칙을 볼 수 있는데, 이 규칙을 적용하면 $a^8 \div a^8 = a^0$ 을 만든다. a^0 은 새로운 기호다. 이 기호의 의미는 규칙이 아니라 나눈다는 원래의 원칙에서 그 의미를 찾아야 한다. 즉, $a^8 \div a^8 = 1$ 이므로 a^0 은 1을 의미한다. (De Morgan[5], pp. 26–27)

De Morgan은 원칙과 규칙을 구분해서 사용한다. 간단히 말하자면, 원칙에서 규칙이 파생되어 나온다고 볼 수 있다. 그런데 규칙은 원래 그것을 만들게 된 상황을 벗어날 수 있다. 그는 규칙을 유지하는 방향으로 용어의 의미를 확장한다. 산술 계산형식을 원칙이라 한다면, 산술의 영역을 벗어나 대수에서 그 계산형식이 유지된다고 할 때의 그 형식은 규칙이라고 볼 수 있다. De Morgan은 규칙을 이용하여 산술과의 관련성을 암시하면서 산술을 넘어서는 독자적인 대수적 체계를 만들고자 했다.

그는 산술의 원칙과 대수의 규칙들을 소개한 다음 이들을 활용할 수 있는 일차방정식과 이차방정식의 풀이로 넘어갔다. 일차방정식 단원은 등식의 특성을 언급하면서 시작한다. '모든 등식의 공통된 특성은 문자가 상징하는 수에 관계없이 그 등식이 항상 성립한다는 점이다. 등식의 우변은 좌변에 지시한 연산을 수행한 결과를 뜻한다.(De Morgan[5], p. 29)' 그는 방정식을 조건이 있는 등식이라고 부르고, 그 풀이과정을 추론의 과정으로 보았다. 즉, 방정식이 성립한다는 가정 하에, 자명한 방식으로 산술과 대수의 상식적인 규칙을 적용하여 진행하는 추론 과정이다. 방정식 풀이에서 문자가 어떤 수를 상징하는가는 중요하지 않았다. 대수적 규칙을 올바르게 적용하는 것을 강조하였다. 특히 이차방정식 단원은 대수적 연산과 그 역연산의 관계를 언급하면서 시작한다.

> 모든 대수적 연산은 그것과 반대되는 결과를 갖는 연산과 관련이 있다. 따라서 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈은 서로 역연산 관계이다. 즉, 한 연산에 의한 결과는 다른 연산에 의해 되돌려진다. 따라서 $a+b-b$는 a이고 $\frac{ab}{b}$는 a이다. 이제 제곱의 연산과 관련하여 그 반대되는 연산을 제곱근 구하기라고 부르겠다(De Morgan[5], p. 43).

De Morgan이 연산과 역연산을 강조하는 것은 뒤이어 나올 허근을 고려한 것이다. 이차방정식의 풀이에서 각 연산의 의미에 주목하기보다 각각의 연산이 방정식의 변환 과정에서 어떤 결과를 내고 있는가에 주목해야 허근의 의미 논쟁에서 다소 자유로울 수 있다는 판단이었을 것이다. 그는 이차방정식의 근의 공식을 유도하면서 이차방정식의 풀이과정과 그 결과 사이의 딜레마를 솔직하게 밝혔다. 방정식의 풀이과정은 일반적인 대수규칙과 역연산을 적용하는 추론과정이므로 허수에 대해서도 동일한 규칙을 적용하여 방정식을 0으로 만든다면, 그 허수를 근으로 인정해야 한다. 그러나 허수는 양수도 음수도 아니고, 허수가 근으로 나오는 문제는 불가능한 상황을 뜻하는 것이 분명하였다. 그는 상황을 왜곡하지 않고 그대로 인정하였다. 기존의 규칙을 유지하려는 인간의 자연스러운 경향이 어떤 결과를 가져오는지 보여주려고 했다.

> 현 상태에서 바라는 것은 이것이다. 제시된 규칙을 신중하게 적용한다면 결코 잘못된 결과에 다다르지 않는다는 확신을 가지고, 학생들이 이 주제를 대수 메커니즘의 한 부분으로 다루기를 바란다. $\sqrt{a}, a+\sqrt{b}$에 적용할 수 있는 모든 규칙을 $\sqrt{-a}, a+\sqrt{-b}$에도 적용할 수 있다. (De Morgan[5], p. 51)

De Morgan이 보기에, 기존의 수에 적용하던 규칙을 허수 연산에 그대로 사용하는 것은 자연스러운 일이고 게다가 그러한 규칙을 적용하더라도 결코 잘못된 결과가 나오지 않는다는 점에서 학생들은 더욱 강한 확신을 얻는 다는 것이다. 따라서 자연스러운 유추와 더불어 그가 학생들의 심정적 확신을 강화하기 위해 제시한 것이 대수 체계 내에서 허수의 유용성이다. 허수 계산의 결과가 참이라는 것과 대수 체계 전반을 고려했을 때 허수의 필요성을 근거로, De Morgan은 학생들에게 허수 사용에 대한 심정적 확신을 제공하려고 한다. 그래서 그는 이차방정식 풀이에서 근의 공식을 비롯한 여러 성질들을 실용적으로 접근하지 않고 앞으로의 고등수학과의 관계를 고려한 이론적 측면을 강조하고 있다. 그는 구체적인 사례를 들면서 허수의 연산이 올바른 결과를 산출한다는 점을 부각시키고 있다.

> 대수의 어려움에 대한 형이상학적 논의는 배제하려고 한다. 필자는 학생들이 그러한 논의에서 얻을 것이 거의 없다고 생각한다. 대신 학생들은 특별한 경우로부터의 연역을 통해 그 결과가 참임을 확신할 수 있다. 따라서 음수나 불가능한 양(허수)을 다루면서, 필자는 특정 문제를 선택하여 설명하고, 그와 동일한 결과를 다른 방식으로 어떻게 얻을 수 있는가를 밝히겠다. (De Morgan[5], p. ⅵ)

$\sqrt{-1}$을 사용해서 수많은 참을 만들어낸다는 사실은 그것이 모종의 논리를 가지고 있음을 강력하게 시사한다. 물론 그것은 단지 추측일 뿐이지만 참인 결과가 점점 늘어날수록 학생들은 허수가 정당한 수학적 대상일 것이라는 심정적 확신을 얻을 수 있다. 실제로 수학자들은

허수가 올바른 결과를 산출하고 기존의 정리들을 보다 쉽게 확인시켜주는 일이 반복되자 의심스럽지만 계속해서 허수를 사용하였다. De Morgan은 이러한 사실을 솔직하게 고백하고 학생들에게 수학자들이 그럼에도 불구하고 허수를 사용하는 바로 그 심정적 확신을 제공하려고 한 것이다.

> 지금까지 나는 기호 $\sqrt{-a}$가 무의미하고 심지어 불합리하다는 것을 보였다. 그러나 이 기호를 사용함으로서, 커다란 유용성을 지니는 대수학의 한 분야가 세워질 수 있다. 왜냐하면 경험적으로 보았을 때, 대수의 일상적인 규칙을 이러한 수식에 적용하더라도 잘못된 결과가 나오지 않기 때문이다. 이러한 경험에 의지하는 것이 이 책의 첫 번째 원리[자명한 제일 원리에서 논리적으로 추론]와 모순되는 것처럼 보인다. 실제로 그렇다는 것을 부정할 수는 없다. (De Morgan[5], p. 50)

De Morgan은 허수가 산출하는 결과가 참이라는 사실에 만족하지 않고 허수의 사용이 대수를 체계적인 이론으로 세우는 데 필수적임을 강조한다.

> 초보자들은 수행하기 쉽고 예제를 통해 검증된 규칙에 대해서는, 그 규칙을 만드는 과정에서 등장한 어려움에는 신경을 쓰지 않는다. 초기의 역사가 이것을 말하고 있다. 디오판토스는 $a \times (-b) = -ab, -a \times -b = +ab$라는 등식을 발견하였고, 증명이나 어려움 없이 공리로서 취급하였다. 규칙의 실용적인 유용성이 풍부하고, 귀납에 의한 확신을 가지고 규칙을 사용하는 데 전혀 거리낌이 없었다. 더욱 발달한 다음에, 초기 발견자가 생각하지 못했던 공식의 일반성이 풍부하게 드러나면서, 과학의 근본적인 원리에 대한 탐구가 이루어진다.(De Morgan[5], p. 63)

그는 허수가 가진 유용성이 풍부했기 때문에 허수 역시 그 근본적인 원칙이 발견될 것이라는 확신을 가지고 있었다. 무조건적인 배척이나 수용보다는 학생들이 그러한 확신을 가지고 허수를 사용하면서 확신의 근거를 더욱 넓혀가기를 희망했다. 허수를 실수처럼 계산을 하되, 그 계산의 과정을 분명하게 밝히도록 했다. 그리고 그 계산 결과가 진실이라는 사실을 발견하도록 독려했다. 허수의 의미를 설명할 수 없다면, 허수 사용의 결과라도 학생들이 스스로 판단하도록 하자는 것이 De Morgan의 생각이었다. 그것이 무조건적인 규칙의 제시보다 훨씬 건전하다고 판단하였다. 그 근거는 그러한 과정에서 학생이 심정적 확신을 얻게 된다는 De Morgan의 신념에 있었다. De Morgan에게 있어, 대수적인 규칙들은 산술의 원칙에서 비롯된 것인데 허수의 계산은 대수적인 규칙이 다시 확장된 것으로 허수 계산의 원칙을 찾는 것이 불가능하였다. 그러나 그 확장이 인간 마음의 자연스러운 경향을 좇아 이루어진 것이고 또한 허수의 대수에서의 유용성으로 인해 그러한 원칙이 반드시 발견될

것이라는 추측이 가능한 상황에서, De Morgan은 학생들이 어렴풋하게라도 허수 사용에 대한 심정적 확신을 가질 것이라고 믿었다. 본인 역시 그러한 확신을 가지고 계속해서 허수 연산의 의미를 연구하여 Trigonometry and Double Algebra(De Morgan[4]) 에서 비로소 자신의 심정적 확신을 수학적으로 명확하게 밝히게 되었다.

4 '심정적 확신' 의 형식화 및 의미 추구

De Morgan이 고백하듯이, 학생들이 허수 사용에 대한 심정적 확신을 획득하는 과정은 자신이 목표로 하는 ' 자명한 제일원리로부터 논리적으로 추론하는' 능력과 모순되어 보인다. 그러나 그는 그것 없이는 대수로부터 건전한 추론능력을 길러주겠다는 자신의 목표 실현이 불가능하다고 생각했다. 우리는 그 이유를 Trigonometry and Double Algebra(De Morgan[4]) 에서 엿볼 수 있다. 이 책은 De Morgan의 대수에 대한 관점을 3단계로 구분했을 때, 기호대수에서 의미대수로 넘어가는 마지막 단계를 대표한다.

Trigonometry and Double Algebra는 두 부분으로 구성되어 있다. 전반부는 삼각함수에 관한 논문이고, 후반부는 그가 이중대수라고 부르는 일반화된 대수에 관한 논문이다. 두 가지 의문을 제기할 수 있다. 왜 대수에 '이중' 이라는 수식어를 붙였는가? 그리고 이중대수와 삼각함수를 하나의 책으로 묶은 이유는 무엇인가? De Morgan은 대수 발달의 단계를 구분하였는데, 이로부터 두 질문이 자연스럽게 해결된다. 대수의 발달에서 첫 번째 단계는 산술이다. 산술은 수와 사칙연산 기호만이 등장한다. 그 다음 단계는 보편적 산술이다. 수 대신에 문자가 등장하고, 연산은 그 기호의 값에 관계없이 수행된다. a와 b를 임의의 수라고 하면, $a-b$가 불가능한 경우가 존재한다. 따라서 보편적 산술에서는 항상 그 연산이 가능한 조건을 명시해야 한다. 세 번째 단계는 단일대수(single algebra)이다. 음수를 염두에 둔 명칭으로서, 여기서 등장하는 기호는 방향을 가진 양을 뜻한다. 단일대수에서 음수는 더 이상 불가능한 양이 아니다. 음수는 반대방향의 선분을 표시하는 것으로 해석될 수 있다. 그러나 이차방정식의 풀이에서 등장하는 $a+b\sqrt{-1}$과 같은 수식에 대해서는 단일대수에서 여전히 해석이 불가능하다. 복소수를 해석할 수 있는 네 번째 단계를 De Morgan은 이중대수로 보았다. 이중대수에서 복소수는 평면 위의 선분을 표현한다. 그 기호가 직선의 두 가지 특성, 즉 길이와 방향을 포함하기 때문에 이중이라는 수식어를 쓴 것이다. $a+b\sqrt{-1}$는 x좌표가 a, y좌표가 b인 선분을 표현한다. 당시 Argand과 Warren도 그러한 의미로 복소수 기호를 사용했지만, $e^{a\sqrt{-1}}$을 해석하지는 못했다. De Morgan은 $e^{a\sqrt{-1}}$을 $a+b\sqrt{-1}$꼴로 바꿀 수 있었다. 바로 이 과정에서 삼각함수가 사용되었고, 그래서 그는 삼각함수를 이중대수에 앞서 비중 있게 다룬 것이다. 실제로 그는 이중대수를 해석적인 평면 삼각법으로 보고 있다. 이중대수는 De Morgan이 앞서 제시한 기호대수의 모든 규칙을 만족했으며, 모든 기호의 조합에 의미를 부여할 수 있었다. 그래서 그는 이중대수를 대수의 완전한 형태라고 생각했

다. 복소수가 더 이상 기호대수의 대상이 아니라 의미대수의 대상이 된 것이다. 의미대수는 이미 기호의 의미가 규정되어 있어서 모든 대수적 연산의 의미도 확립된 대수를 뜻한다.

> 이중대수는 그 기호가 서로 독립된 별개의 두 성질을 가진 대상을 다룬다는 점을 뜻한다(직선의 기호가 그것의 길이와 방향을 표현해야 하듯이). 나는 아직 그 보다 더 간단한 이름을 찾을 수 없었다. 여전히 불가능한 양(또는 양이 아닌 양)을 추론의 대상으로 삼는 기법에 당혹해하는 사람이, 다소 놀라운 형용사를 대수에 붙임으로서, 그 기법(art)이 과학이 되고 불가능한 것이 가능해진다는 것을 인식한다면, 그들은 적어도 그러한 용어를 반대하지는 않을 것이다(De Morgan[4], pp. ⅲ-ⅳ).

그러나 엄밀히 말해서 이중대수의 기호가 표현한다는 두 가지 특성은 방향과 길이가 아니라 각과 승수(multiplier)를 뜻한다고 보아야 한다. 이중대수 다음에 삼중대수가 아니라 사원수라는 사중대수라는 사실이 이를 뒷받침한다(Macfarlane[10], pp. 14–15).

그렇다면 그가 자신의 저서에서 왜 처음부터 직선을 대상으로 하는 이중대수를 설명하지 않았을까? 본래 수학교육에 관심이 많았던 De Morgan은 이중대수라는 대수의 완성된 모습을 학생에게 설명하는 과정을 고민한 결과, 그 과정은 단계를 반드시 거쳐야 하고 이때 기호대수가 산술대수와 의미대수를 연결하는데 꼭 필요하다고 판단했기 때문이다. De Morgan은 대수가 단지 일반화된 산술이라고는 생각하지 않았다. 따라서 그는 보편적 산술로부터 어떻게 의미대수를 얻게 되는가를 설명해야 하는 문제에 봉착하게 되었다. 그의 의견에 따르면, 기호적 접근이 결정적이다. 수학자는 보편적 산술에서 시작한다. 그 다음 그는 보편적 산술에서 그것의 의미를 던져버리고, 보편적 산술의 형식이나 법칙들을 모은다. 마지막으로, 그는 가장 기본적인 대수법칙을 목표로 하면서 그러한 형식들을 일반화한다. 이러한 법칙을 선명하게 뽑아낸 다음, 비로소 그는 의미대수의 의미와 발달에 관심을 돌릴 수 있다. De Morgan이 말했듯이, “의미대수로의 첫 단계는 일반과학(허수가 설명되지 않고 해석되지도 않은 대수)의 원리로부터 규칙을 분리해내는 것이다. 또는 연산이 수행되는 기호의 설명으로부터 연산의 법칙을 분리해내는 것이다.”

> 모든 의미를 던져버리고, 기호조합의 규칙을 모으는 것이 가능해지고, 그래서 순수하게 기호적 계산이 가능해진 다음에, 그 계산에 확장된 의미를 부여할 수 있어야 비로소 그는 그 변화(보편산술에서 기호대수로)에 완벽하게 익숙해진 것이다. (De Morgan[4], p. 98)

De Morgan은 이 과정을 가리켜 제거와 복원(reduction and restoration)의 과정이라고 하였다. 그는 이차방정식의 풀이에서 제곱식을 만들기 위해 항을 복원하는 것과(al-jabr), 그 식에서 제곱근을 구하여 방정식을 제거한다는 것(al-muqabala)에서 대수(algebra)라

는 용어가 발생한 것에 착안하였다. 이차방정식의 풀이는 아라비아 대수의 가장 중요한 부분이었다. 이 용어의 순서를 바꾸어 보면, 대수를 확립하는 마지막 모습을 잘 표현하고 있음을 알 수 있다. 보편적 산술에서 의미를 제거하여 기호대수를 다루고, 그 다음 의미를 부여하여 새로운 의미대수를 복원한다(De Morgan[4], p. 98).

실제로 Trigonometry and Double Algebra 의 구성을 보면, 1부는 삼각법에 대한 전통적인 주제를 다루고 2부는 이중대수를 다루고 있다. 1부의 5장 '설명되지 않은 기호 $\sqrt{-1}$ 의 소개' 은 $\sqrt{-1}$에 어떠한 의미를 언급하지 않고, $\sqrt{-1}$를 사용하여 기존의 참인 결과들을 만들어내고, 특히 삼각함수의 여러 성질들을 소개하고 있다. 그는 이러한 $\sqrt{-1}$의 사용을 실험이라고 부르면서, 그 결과들을 검토하였다. $\sqrt{-1}$을 삼각함수의 여러 성질들과 관련시키면서 $\sqrt{-1}$이 반드시 논리를 가질 것이라는 생각을 학생들에게 심어주고 있다.

> $\sin\theta, \cos\theta$의 무한급수를 살펴보면, 각각의 항이 e^{θ}의 무한급수에서 나타난다는 사실을 알 수 있다. 쉽게 $\cos\theta + k\sin\theta = 1 + k\theta - \frac{\theta^2}{2} - k\frac{\theta^3}{2\cdot3} + \frac{\theta^4}{2\cdot3\cdot4} + \cdots$ 임을 보일 수 있다. 만약, $k^2 = -1, k^3 = -k, k^4 = 1, \cdots$를 만족하는 k가 존재한다면, $\cos\theta + k\sin\theta$는 $e^{k\theta}$가 될 것이다. 그러한 수는 지금까지 살펴본 대수에는 존재하지 않는다.: $k^2 = -1$은 불합리하기 때문이다. 만약 이러한 등식을 만족한다고 가정하고, 우리가 $k = \sqrt{-1}$를 만들어서 합리적인 기호인 양수와 음수를 규제하는 규칙에 따라서 그것을 사용한다면, 우리는 모든 대수학자들이 수행하는 과정을 떳떳하게 밝히면서 따라할 수 있다. 기호 $\sqrt{-1}$(불가능한 양)을 사용하여(실험이라고 불러야 마땅하다) 우리는 그 실험의 결과가 항상 참이 되고 그 결과를 다른 방식으로 증명할 수도 있음을 보일 것이다. 이제 이러한 실험을 행하도록 하겠다. 이 책을 읽는 학생들은 이번 장의 새로운 결과들이 이 책의 2부에서 $\sqrt{-1}$를 분명하게 정의하는 체계를 통해 증명할 수 있다는 데 안심하거나; 아니면 의심할 수도 있다: 그러나 당신이 이 과정에 대한 직관적인 확신[3)]이 있더라도, 이 결과들이 지금 여기에서 증명되었다고 생각해서는 안된다. $\sqrt{-1}$을 사용하는 데 우선권을 줌으로서, 학생들은 어려움을 겪기 전에, 이중대수의 언어에 익숙해지는 장점을 얻을 것이다. (De Morgan[4], p. 41)

De Morgan은 기호대수가 학생의 심정적 확신을 명시적으로 드러내는 단계라고 생각했다. 기존의 규칙과의 자연스러운 유추와 기존의 결과들과의 무모순성을 확인하면서 이미 허수 사용에 심정적 확신을 가진 학생들은 허수기호에 익숙해지게 된다. 증명을 요구하지 않고 익숙함을 요구한 것이다. De Morgan이 형식불역의 원리를 수학적인 측면이 아니라 교육적인 측면에서 수용한 것도 바로 학생들이 허수 사용에 익숙해지는 심정적 확신을 명시적으로

3) 허수를 계산하는 규칙에 대해 내가 논리를 찾았는가의 질문은 중요하지 않다. 그러나 그 계산이 올바른 결과를 만들어내기 때문에 허수 계산은 '반드시 논리를 가져야 한다.'

드러내어 형식화하기 위한 것이었다.

보편적 산술에서 $a > b$를 만족하는 특수한 값 a, b 에 대해 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$가 성립한다. 형식 불역의 원리에 의하면 a, b의 값에 제한을 두지 않고 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$가 성립한다고 말할 수 있다. 그러나 자세히 살펴보면, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$이라는 등식은 덧셈과 곱셈의 교환법칙과 분배법칙이라는 형식적인 법칙에 의해 성립하는 것이다. 따라서 Gregory는 피콕의 대수이론을 개선하여 형식 불역의 원리(permanence of equivalent forms)보다는 형식적 법칙 불역의 원리(permanence of certain formal laws)를 강조하였다. De Morgan은 그레고리의 논의를 수용하여, 산술이 암시한 등식이 내적으로 일관된 대수체계를 형성하는 데 절대적인 것이 아님을 인식하였다. 그는 잘 완비된 규칙이(공리) 필요하다고 생각했다. 피콕이 형식 불역의 원리에 의해 산술적인 의미로부터 제한조건을 제거하여 형식으로 나아갔다면, De Morgan은 추상적인 형식을 확립하고 다시 그로부터 새로운 의미로 나아가기를 원했다. 그는 대수적 형식의 타당성을 판단하는 데 산술에 의존하지 않았다. 그는 대수 체계를 일관되게 이루는 규칙체계를 규정하고, 그 체계에서 대수적 조작이 가능해진 다음에 그것의 의미를 추구하였다. 그가 허수를 사용한 결과들이 진실임을 확인하도록 강조한 것은 바로 일관된 대수체계를 만들 수 있는 가능성을 보기 위해서였다. 허수의 사용에서 올바른 결과가 나올수록 그는 허수 사용을 정당화할 수 있는 일관된 대수체계를 확신할 수 있었다. 그러나 아무리 그 결과가 합리적이라고 해도 결과의 참이 가정의 참을 보장할 수는 없었다. 그는 의미를 제거하기로 결정했다. 그는 Trigonometry and Double Algebra(De Morgan[4])의 '기호대수에 관하여' 라는 제목의 장에서 다음과 같이 말하고 있다.

> 기호의 의미를 포기함으로서, 또한 우리는 기호를 설명하는 용어의 의미도 버려야 한다. 따라서 덧셈은 아무 의미가 없다. 그것은 $+$로 표현되는 조합의 양식이다. $+$가 그것의 의미를 얻을 때, 그 용어도 의미를 얻는 것이다. 이번 장에서 학생들은 산술이나 대수의 모든 기호가 어떠한 의미도 가지지 않는다는 것을 명심해야 한다. 이번 장의 목적은 기호와 그 기호들의 조합을 다루는 기호대수를 소개하는 데 있다. 기호대수는 앞으로 수 백 가지의 의미대수들이 갖는 문법이 될 것이다(De Morgan[4], p. 101).

이제 의미가 제거된 기호대수에서 새로운 의미를 복원하는 일이 대수의 몫이다. 그는 복원과정을 자신의 책에서 장황하게 설명하고 있지만, 결론은 의미대수는 여러 가지가 있을 수 있는데, 그가 선택한 것은 이중대수이다. 중요한 것은 그가 이중대수를 통해 허수의 의미를 설명할 수 있었지만, 그 전 단계였던 허수의 경험적 유용성과 기호대수에서의 형식적 계산을 간과하지 않았다는 사실이다. 그는 보편적 산술에서 이중대수로 발전하는 과정에서 기호대수를 필수적인 중간단계로 보았다.

5 결론

De Morgan은 복소수의 연산 규칙에 내재된 수학적 추론의 본성을 이해하는 것이 대수의 본질이며 학생들이 대수를 배우는 이유라고 생각했다. 그래서 그는 복소수 지도와 관련된 저서를 두 권이나 저술했던 것이다. De Morgan이 복소수를 도입하는 과정은 그의 대수에 대한 관점이 보편적 산술, 기호 대수, 의미 대수로 발전해가는 과정과 일치한다. 그리고 이러한 발전 과정은 De Morgan이 음수와 허수를 수용하고 정당화하는 과정과 일치한다. 복소수를 교육적으로 정당화하기 위해 대수에 대한 그의 관점이 지속적으로 발전하였다고 볼 수 있다. 초기 전통적 관점에 서 있던 De Morgan은 비록 허수가 자명한 원리에 근거하여 그 의미를 설명할 수는 없지만, 경험적인 사례에서 드러나는 허수의 유용성을 이유로 허수를 묵인하고 있었다. 허수는 일반적인 대수 규칙을 만족하는 기호로서, 그 연산은 항상 올바른 결과를 만들어냈다. 이를 설명하기 위해 De Morgan은 기호의 의미나 대상은 고려할 필요가 없다는 기호대수를 수용했다. 그러나 그는 허수의 의미를 포기할 수 없었다. 그는 길이와 방향을 가진 직선을 대상으로 하는 이중대수 이론을 전개하였다. 이처럼 De Morgan은 허수 지도를 정당화하는 과정을 정련해가면서 대수와 수학 전반에 관한 자신의 관점을 지속적으로 발전시켜나갔다고 볼 수 있다. 이는 허수의 지도가 새로운 수학적 개념의 도입에 머물지 않고 대수에 대한 관점의 변화와 발전을 일으키는 촉매가 될 수 있음을 보여주고 있다.

이러한 De Morgan의 복소수 도입 및 지도 방식은 수학의 본질을 추상적 형식성과 실제적 의미성의 상보적 조화로 보는 그의 관점을 명백하게 보여주고 있다(최지선 외[3]). 그가 임의적인 정의로부터 출발하는 의미 없는 기호와 그것의 조작을 인정했지만, 기호대수를 복소수에 대한 기하학적 표현을 통해 해석한 후 비로소 기호대수가 논리적이 되었다고 판단했듯이, 그러한 기호 조작 활동이 완전해지기 위해서는 의미가 부여되어야한다고 보았다 (Richards[9]). 이처럼 De Morgan은 이중대수와 같은 의미대수를 궁극적인 목표로 삼았지만, 허수의 경험적 유용성과 기호대수에서의 형식적 계산을 간과하지 않았다는 사실과 이를 자세히 서술하고 있다는 점에 주목해야 한다. 그는 보편적 산술에서 이중대수로 발전하는 과정에서 기호대수를 필수적인 중간단계로 보았고, 특히, 복소수를 처음 배우는 학생들이 반드시 거쳐야 하는 단계라고 본 것이다. De Morgan은 복소수의 형식적인 도입이나 기하학적 의미를 지닌 대상으로의 도입 가운데 어느 하나를 우선하지 않았다. 그는 복소수의 역사적 발생 과정을 인정하고 복소수가 수학적으로 정당화되어 가는 과정을 있는 그대로 제시하였다. 구체적으로 살펴보면, 의미 없는 기호 조작이지만 여러 가지 유용한 결과를 가져오는 허수의 존재를 인정하면서 학생들에게 심정적 확신을 제시하였다. 그러나 심정적 확신에 머물지 않고 기호 조작의 이면에 있는 허수의 연산규칙을 형식화하면서 학생들에게 수학적 엄밀성을 강조하였다. 그러나 그는 다시 한 번 형식화된 연산규칙에 의미를 부여하

면서 마침내 이중대수를 제시하여 학생들에게 각 연산의 의미를 설명하였다. De Morgan은 학생들이 그 과정에서 스스로 수학적 추론을 통해 수학의 추상적 형식성과 실제적 의미성을 경험하기를 원했던 것이다.

참고 문헌

1. 권석일 김재홍 최지선 박선용 박교식, 「드모르간의 음수 지도 방법 연구」, 학교수학 10(4), pp. 557–571, 2008.
2. 손홍찬 고호경, 「De Morgan의 수학교육철학과 교수법의 재조명」, 한국수학사학회지, 20(4), pp. 175–190, 2007.
3. 최지선 유미경 박선용 권석일 박교식, 「수학교육에 관한 드모르간의 관점 조명」, 수학교육학 연구 18(2), pp. 223–237, 2008.
4. Augustus, De Morgan, *Trigonometry and Double Algebra*, London: Taylor, Walton & Maberly, 1849.
5. Augustus, De Morgan, *On the study and difficulties of mathematics*, Chicago: The open court publishing company, 1831.
6. Hans Freudenthal, *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Dordrecht: Kluwer, 1991.
7. Helena M. Pycior "Augustus De Morgan's Algebraic Work: The Three Stages." *Isis*, Vol. 74, No. 2. (Jun., 1983), pp. 211–226.
8. A. Rice, "What makes a great mathematics teacher? The case of Augustus De Morgan", *The American Mathematical Monthly*, 106(6), (1999), pp. 534–552.
9. Joan L. Richards. "Augustus De Morgan, the History of Mathematics, and the Foundations of Algebra", *Isis*, Vol. 78, No. 1, (1987), pp. 6–30.
10. Alexander Macfarlane, *Ten British Mathematicians of the 19th Century*, 1916.

이동환 한국교육과정평가원
Korea Institute for Curriculum and Evaluation
E-mail: dhlee@ kice.re.kr