한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제25권 제4호 (2012년 11월), 101–119

바둑돌 줍기에 관한 수학적 연구

Mathematical Study on the Removal of the Go Stones

이광연 Gwang Yeon Lee 조성훈 Seong Hoon Cho 양승범 Seung Bum Yang

바둑돌 줍기는 간단한 규칙만으로 바둑판 위에서 누구나 쉽게 즐길 수 있는 게임이다. 바둑돌 줍기 게임은 매우 흥미로울 뿐만 아니라 여러 가지 수학적 내용에 대한 이해가 요구되는 전형적인 수학 게임이다. 학생들은 바둑돌 줍기 게임에 나타난 규칙이나 원리를 탐구하는 활동을 통하여 평소에 쉽게 지나치던 많은 현상들에 대하여 새로운 수학적 시각을 갖고 주의 깊게 살펴보는 태도를 가질 수 있을 것이다. 또한 학생들이 수학적이라고 생각하지 않았던 게임을 문제로 제시함으로써 문제의 외형뿐만 아니라 문제의 본질적인 의미를 생각할 수 있도록 하는 수학적 사고력을 기를 수 있다.

The removal of the Go Stones is a game that anyone can play through simple rules. It is not only an interesting game but also a mathematical game that requires comprehensive knowledge of several mathematical theories. Through analyzing the rules and theories of this game, students can get a new mathematical perspective and recognize something that they didn't realize as important before. Furthermore, this game is given to students as a mathematical problem unconsciously. This helps them get a mathematical approach to understanding the actual concept of the problem as well as the basic principle of the problem.

Keywords: 바둑돌 줍기(the Removal of the Go Stones), 치환행렬(permutation matrix), (0,1)-matrix((0,1)-행렬)

1 서론

최근 학교 수학교육에서는 창의성 신장이 강조되고 있다. 특히 2009개정 교육과정(교육과학기술부, 2009)에서는 '기초 능력의 바탕 위에 새로운 발상과 도전으로 창의력을 발휘하는 사람'을 추구하는 인간상의 하나로 설정하고 있다. 이것은 교육의 출발점이라고 할 수 있는 교육과정에서부터 창의적인 능력의 신장을 염두하고 구성한 것이라고 볼 수 있다.

학생들이 수학적 개념을 창의적 수준으로 더 깊게 연구하고 탐구하도록 하기 위해서는 다양한 방법과 수준에서 접근 가능하면서도 풍부하고 흥미로운 과제들을 활용해야

MSC: 97A20 ZDM: K20, U60
제출일: 2012년 8월 20일 수정일: 2012년 9월 20일 게재확정일: 2012년 10월 2일

한다. [4]와 [10]에서는 수학 학습에서 매혹적이며 재미있고 흥미 있으며 스릴 있는 동시에 중요하며 자극적인 도전 문제의 필요성을 언급하였다. 그들이 주장한 이런 도전 문제에 가장 적합한 것은 개방형 문제이다. 개방형 문제는 다양한 해법을 가진 문제로 종종 예상치 못한 훌륭한 교육적 상황과 결과를 제공한다. 개방형 문제에서 많이 활용하는 것이 수학적 게임이다. 특히 수학적 게임은 [1, 2, 3, 7]의 논문에서 다루어지고 있으며, [6]에서는 생활수학을 활용한 효과적인 수학교육방안을 연구하였다. 사실 [6]의 연구배경도 수학적 게임에 있음을 알 수 있다. 또한 [8, 9]에서는 수학 창의성을 다루었는데, 수학 창의력은 수학적 게임을 통하여 개발할 수 있다고 생각한다.

수학적 게임은 단순한 놀이를 넘어선 내용과 규칙 및 사고과정이 들어있는 것을 말한다. 많은 학자들이 수학적 게임을 강조한 수학학습의 교육적 가치를 주장하였는데, 이에 대하여 [5]에서는 다음과 같이 모두 다섯 가지로 정리하였다.

첫째, 딱딱하고 재미없다는 수학교과에 대한 선입견을 벗겨 학생의 흥미와 욕구를 충족시키면서 학습동기를 유발하고 강화할 수 있다.

둘째, 수학적인 기초 지식과 기능을 강화하고 더 나아가 개념형성과 발달에 도움을 준다.

셋째, 개념학습과 응용을 위한 다양한 수학 교수 전략을 가능하게 한다.

넷째, 학습내용에 대한 다양한 경험을 통해 수학적 개념을 실생활과 연결 짖는데 도움을 준다.

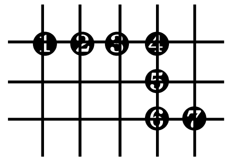
다섯째, 일상생활의 활동을 수학적으로 생각하도록 하는 태도의 신장을 통하여 창의적인 문제해결력을 신장시킨다.

이와 같은 교육적 가치를 가진 수학적 게임 가운데 하나는 바둑돌 줍기이다. 바둑돌 줍기는 바둑판에서 가로 선과 세로 선이 교차되는 지점에 바둑돌을 올려 적당한 모양을 만든 후, 일정한 규칙에 따라 바둑돌을 하나도 남김없이 주워가는 게임이다. 따라서 바둑돌이 어떤 모양으로 배열되어 있는가에 따라 모두 주을 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다.

이 논문에서는 바둑돌 줍기를 수학적으로 분석하여 게임 속에 숨어 있는 수학적 의미에 대하여 알아볼 것이다.

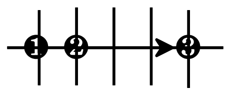
바둑돌 줍기는 에도시대 일본의 나카네 겐쥰(中根 彦循)의 산법서에 「ひろひものの事」(줍기 놀이)이라고 소개되어 있는 게임으로 바둑돌을 줍는 규칙은 다음과 같이 모두 5가지이다.

규칙 ① : <그림1.1>과 같이 바둑돌 ❶에서 줍기 시작하여 차례로 ❶ → ❷ → ❸ → ❹ → ❺ → ❻ → ❼과 같이 가로 또는 세로의 선을 따라 전진한다. 이때 예를 들어 ❹를 지나지 않고는 ❺로 비킴으로 전진할 수 없다.



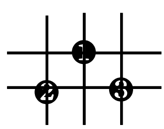
<그림 1.1>

규칙 ② : <그림1.2>와 같이 같은 선상이라면 아무리 떨어져 있어도 바둑돌 줍기가 가능하다. 이를테면 ❷에서 ❸으로 전진하여 주울 수 있다. 또, 전진하는 길의 선상의 돌은 반드시 줍지 않으면 안 된다. 이를테면 ❶을 줍고 ❷를 남기고 ❸을 주울 수 없다.



<그림 1.2>

규칙 ③ : 하나의 돌을 주었을 때 그 돌이 있는 가로 줄 또는 세로 줄의 선상에 다른 돌이 없으면 더 이상 전진할 수 없다. 예를 들어 <그림1.3>에서 ❶의 돌을 가장 먼저 주었다면 그 돌이 있는 곳을 지나는 가로 줄, 세로 줄에 다른 돌이 하나도 없으므로 더 이상 전진할 수 없다. 이런 돌을 고립된 돌이라고 한다. 고립된 돌이 하나라도 남아있으면 바둑돌을 모두 주울 수 없게 된다.

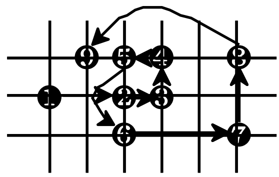


<그림 1.3>

규칙 ④ : 지나온 길을 바로 되돌아가는 것은 허용되지 않는다. 예를 들어 <그림1.4>에서 ❷→❸→❶과 같이 줍는다면 ❷에서 ❸을 줍고 바로 되돌아가서 ❶을 줍는 것이므로 이와 같이 줍는 것은 허용되지 않는다. 그러나 ❶에서 시작하여 화살표 방향으로 실선을 따라 주워가면 ❷, ❹, ❺가 있던 자리를 두 번 지나가지만 바로 되돌아가는 것이 아니므로 바둑돌을 줍는 데 아무런 지장이 없다. 하지만 이 경우에 역의 방향으로 ❾→❽→❼→⋯→❶과 같이 가는 것은 ②에 반하므로 허용되지 않는다.

규칙 ⑤ : 바둑돌이 없는 곳에서 방향을 바꾸는 것은 허용되지 않는다.

이 논문에서는 바둑판에 바둑돌이 어떻게 배열되어 있을 때 모두 줍기가 가능한지에 관



<그림 1.4>

한 문제를 해결하는 전략으로 (0, 1)-행렬의 성질을 이용하는 방법을 제시할 것이다. 이를 위하여 일반적인 행렬의 기본적인 성질뿐만 아니라 특별한 행렬인 (0, 1)-행렬의 성질을 많이 활용할 것이다.

2 바둑돌 줍기의 수학적 분석

바둑돌 줍기는 바둑판 위에 바둑돌을 일정하게 올려놓고 정해진 규칙에 따라 차례대로 바둑돌을 남김없이 줍는 오래된 게임이다. 그래서 이 게임을 하기 위해서는 바둑판과 바둑돌이라는 기구가 필요하다. 그러나 이 논문에서는 이런 기구를 제거하여 바둑판을 행렬로 바둑돌을 행렬의 성분으로 나타내고, 행렬의 성질을 이용하여 바둑돌 줍기 게임을 분석하고자 한다. 그러기 위해 다음과 같은 몇 가지 정의가 필요하다.

정의 1 자연수 m, n에 대하여 m개의 가로 선과 n개의 세로 선으로 이루어진 바둑판을 $m \times n$ 바둑판이라 하자. 특히 $m = n$일 때, $n \times n$ 바둑판을 간단히 n차 바둑판이라고 하자. 또 $m \times n$ 바둑판에서 가로로 그려진 선을 위에서부터 차례로 번호를 붙였을 경우 i번째 가로 선을 i행선이라 하고, 세로로 그려진 선을 왼쪽부터 차례로 번호를 붙였을 때 j번째 세로 선을 j열선이라고 하자.

정의 2 자연수 k에 대하여, k개의 바둑돌이 $m \times n$ 바둑판위에 서로 다른 k개의 교차점에 겹치지 않고 적당히 놓여 있을 때, 이 바둑판과 바둑돌을 합쳐 (m, n, k)-바둑판이라고 하자. 또 i행선과 j열선의 교차점에 바둑돌이 놓여 있을 때, 이 바둑돌은 (i, j)에 있다고 하자.

각각의 성분이 0 또는 1인 행렬을 $(0, 1)$-행렬이라고 한다. 그러면 (m, n, k)-바둑판을 다음과 같이 행의 수가 m, 열의 수가 n인 $(0, 1)$-행렬로 바꾸어 나타낼 수 있다.

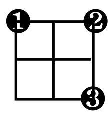
정의 3 바둑판에 대하여 바둑돌 행렬 $A(m, n, k) = [a_{ij}]_{m \times n}$의 (i, j)-성분 a_{ij}는 다음

과 같다.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{바둑돌이 } i\text{행선과 } j\text{열선이 만나는 교차점에 놓여있을 때,} \\ 0 & \text{그렇지 않을 때.} \end{cases}$$

정의 3에 의하여 (m, n, k)-바둑판은 바둑돌 행렬 $A(m, n, k)$를 생성한다. 역으로 바둑돌 행렬 $A(m, n, k)$가 주어지면 (m, n, k)-바둑판을 만들 수 있다.

정의 3에 의하여 바둑돌 행렬은 모든 성분의 합은 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = k$인 $(0, 1)$-행렬임을 알 수 있다. 또한 $A(m, n, 0)$은 바둑돌이 하나도 없는 경우이므로 영 행렬 O이다. 예를 들어 다음 <그림2.1>의 왼쪽은 $(3, 3, 3)$-바둑판이고, 오른쪽은 $(3, 3, 3)$-바둑판으로부터 얻은 바둑돌 행렬 $A(3, 3, 3)$이다.



$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(3, 3, 3)$−바둑판 $A(3, 3, 3)$

<그림2.1>

위의 <그림2.1>에서 바둑돌 ❶은 $(1, 1)$에 놓여있으므로 바둑돌 행렬 $A = [a_{ij}]_3$ 에서 $a_{11} = 1$이다. 또 바둑돌 ❷는 $(1, 3)$에 놓여있으므로 $a_{13} = 1$이다. 마찬가지로 바둑돌 ❸은 $a_{33} = 1$이다. 또 3차 바둑판에서 이 세 개의 돌을 제외하고 교차점에 다른 돌이 놓여 있지 않으므로 바둑돌 행렬의 세 개의 성분을 제외한 다른 성분은 모두 0이다.

이제 <그림2.1>의 3차 바둑판 위에 있는 돌을 게임의 규칙에 따라서 주워보자.

바둑돌 ❶을 주운 후 바둑돌 ❷를 주울 수 있고, 마지막으로 바둑돌 ❸을 주울 수 있다. 물론 바둑돌 ❸에서 줍기 시작하여 앞과 거꾸로 주워가도 모두 주울 수 있다. 어느 경우든지 바둑돌을 하나씩 주워갈 때마다 바둑판 행렬의 해당 성분은 1에서 0으로 바뀌게 된다. 결국 주어진 바둑판 행렬은 1인 성분이 차례로 0으로 바뀌어 영 행렬로 바뀌게 된다. 즉, $A(3, 3, 3)$은 $A'(3, 3, 2)$로 바뀌고 다시 $A''(3, 3, 1)$로 바뀌고[1], 결국 영 행렬 $A'''(3, 3, 0) = O$가 된다.

따라서 다음과 같이 바둑돌 줍기가 가능한 행렬을 정의할 수 있다.

정의 4 바둑돌 행렬 $A(m, n, k) = [a_{ij}]_{m\times n}$가 줍기 가능한 행렬이라는 것은 이에 대응하는 (m, n, k)-바둑판이 줍기 가능인 경우이다. 이때 줍기 가능한 바둑돌 행렬 $A(m, n, k)$은 바둑돌 줍기 규칙과 같은 차례로 1인 성분을 0으로 바꾸어 영 행렬 $A(m, n, 0)$으로

1) $A'(3, 3, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이고 $A''(3, 3, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이다.

만들 수 있다.

정의 4에 의하면, 어떤 행렬 $A(m,n,k)$의 1인 성분을 차례로 바둑돌 줍기 규칙에 따라 0으로 만들어 영 행렬이 된다면 $A(m,n,k)$가 줍기 가능한 행렬임을 알 수 있다. 역으로 영 행렬의 성분 0을 적당한 차례로 1로 바꾸면 줍기 가능한 행렬이 될 수 있다. 또 1인 성분이 하나인 경우는 항상 줍기 가능한 행렬이다. 따라서 1인 성분이 두 개 이상인 바둑돌 행렬에 대하여 다음 정리가 성립한다.

정리 1 $k \geq 2$에 대하여 바둑돌 행렬 $A(m,n,k) = [a_{ij}]$가 줍기 가능한 행렬이라고 하자. 만약 $a_{ij} = 1$이라면 $a_{il} = 1$인 자연수 $l(i \neq l, 1 \leq l \leq n)$ 또는 $a_{pj} = 1$인 자연수 $p(j \neq p, 1 \leq p \leq m)$가 존재한다.

증명 : 바둑돌 행렬 $A(m,n,k) = [a_{ij}]$가 줍기 가능한 행렬이고 $a_{ij} = 1$이라면 (m,n,k)-바둑판위에서 바둑돌이 (i,j)에 있다. 따라서 다음과 같이 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

경우(1) : (i,j)에 있는 바둑돌이 줍기의 시작이거나 끝나는 돌인 경우.

일반성을 잃지 않고, (i,j)에 있는 바둑돌을 줍기의 시작 돌이라고 하자. $k \geq 2$이고 $A(m,n,k) = [a_{ij}]$가 줍기 가능한 행렬이므로 (m,n,k)-바둑판에서 i행선의 l열선이나 j열선의 p행선이 교차하는 지점에 반드시 주울 바둑돌이 하나 있어야 한다. 즉, $a_{il} = 1$인 자연수 $l(1 \leq l \leq n)$이 존재하거나 $a_{pj} = 1$인 자연수 $p(1 \leq p \leq m)$이 존재한다.

경우(2) : (i,j)에 있는 바둑돌이 줍기의 시작 돌도 끝나는 돌도 아닌 중간 돌인 경우.

i행선에서 주워오거나 j열선에서 주워 와서 (i,j)에 있는 바둑돌을 줍게 된다. 따라서 경우(1)과 마찬가지로 $a_{il} = 1$인 자연수 $l(1 \leq l \leq n)$이 존재하거나 $a_{pj} = 1$인 자연수 $p(1 \leq p \leq m)$이 존재한다. □

정리 1로부터 $k \geq 2$일 때 $A(m,n,k) = [a_{ij}]$가 줍기 가능한 행렬이고 $a_{ij} = 1$이라면 행렬 $A(m,n,k) = [a_{ij}]$에서 (i,j)를 제외하고 i행 또는 j열에 반드시 0 아닌 성분이 있어야 한다. 이와 같이 행렬에서 1인 성분을 차례대로 0으로 바꿀 수 있는 성분들을 차례로 나열한 것을 연결경로라고 한다. 이를테면 1과 1 사이에 0이 있어도 차례대로 0으로 바꿀 수 있다. 이때 연속된 1의 수를 연결경로의 길이라고 한다. 따라서 연결경로에 포함된 1은 차례대로 0으로 바꿀 수 있다. 이때 주의할 점은 바둑돌 줍기의 규칙 ④를 만족하지 않는 경우는 연결경로가 아니라는 것이다. [2)]

예를 들어 다음 행렬 $A(4,4,6)$에서 $a_{11} = a_{12} = a_{14} = a_{24} = a_{42} = 1$이고, 이 차례대로

2) 규칙 ④는 지나온 길을 바로 되돌아가는 것을 허용하지 않는다는 것이다. 이를테면 $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 1$일 때, a_{11}, a_{12}, a_{13} 또는 a_{13}, a_{12}, a_{11}은 연결경로이지만 a_{12}, a_{11}, a_{13}은 a_{12}에서 시작하여 a_{11}로 진행하였다가 바로 되돌아서 a_{13}으로 진행해야 하므로 연결경로가 아니다.

1을 0으로 바꿀 수 있으므로 a_{11}, a_{12}, a_{14}, a_{24}, a_{22}, a_{42}은 길이가 6인 연결경로이다. 또 이 연결경로의 1을 차례로 0으로 바꾸면 $A(4,4,6)$은 $A'(4,4,0)$이 되므로 $A(4,4,6)$은 줍기 가능한 행렬이다.

$$A(4,4,6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

위의 $A(4,4,6)$에서 1인 성분을 $a_{42}, a_{22}, a_{12}, a_{11}, a_{14}, a_{24}$와 같이 차례로 나열하면 a_{12}에서 a_{11}로 진행했다가 바로 되돌아서 a_{14}로 진행해야 하므로 바둑돌 줍기의 규칙 ④에 의하여 $a_{42}, a_{22}, a_{12}, a_{11}, a_{14}, a_{24}$은 연결경로가 아니니다. 따라서 바둑돌 행렬에서 줍기 가능성을 논의할 때 연결경로가 되는 것을 정확하게 선택해야 한다.

정의 3와 연결경로의 정의로부터 다음 정리를 얻을 수 있다.

정리 2 $k \geq 1$에 대하여 바둑돌 행렬 $A(m,n,k) = [a_{ij}]$가 줍기 가능한 행렬일 필요충분조건은 행렬 $A(m,n,k)$에 길이가 k인 연결경로가 존재하여 $A(m,n,k)$를 $A'(m,n,0)$으로 바꿀 수 있을 때이다.

위의 정리 2로부터 바둑돌 행렬의 행과 열을 바꾸어도 마찬가지 결과를 얻을 수 있으므로 다음 따름 정리를 얻을 수 있다.

따름정리 3 $k \geq 1$에 대하여 바둑돌 행렬 $A(m,n,k)$가 줍기 가능한 행렬일 필요충분조건은 $A(m,n,k)^T$가 줍기 가능한 행렬일 때이다.

한편 $\{1, 2, \cdots, n\}$의 치환 σ에 대하여

$$(1, \sigma(1))\text{-성분},\ (2, \sigma(2))\text{-성분},\ \cdots,\ (n, \sigma(n))\text{-성분}$$

은 1이고, 나머지 성분은 모두 0인 $n \times n$ 행렬을 σ에 대응하는 치환행렬이라고 한다. n차의 치환행렬 $P = [p_{ij}]$은 $P(n,n,n)$과 같이 나타낼 수 있고, 치환행렬에 대하여 다음을 얻을 수 있다.

보조정리 4 $n \geq 2$에 대하여 치환행렬 $P(n,n,n)$는 줍기 가능하지 않다.

증명 : n차 치환행렬 $P = P(n,n,n)$에 대응하는 치환을 σ라고 하면 $P = [p_{ij}]$는 $p_{1\sigma(1)} = p_{2\sigma(2)} = \cdots = p_{n\sigma(n)}$이고, 다른 성분은 모두 0이다. 그리고 σ는 치환이므로 $i \neq j (1 \leq i, j \leq n)$이면 $\sigma(i) \neq \sigma(j)$이다. 즉, i와 다른 모든 $s, t (1 \leq s, t \leq n)$에 대하여 $p_{i\sigma(i)} = 1$일 때 $p_{s\sigma(i)} = 0$이고 $p_{i\sigma(t)} = 0$이다. 따라서 $P(n,n,n)$은 $P(n,n,0)$으로 바꿀

수 있는 연결경로가 존재하지 않으므로 정리 1과 정리2에 의하여 줍기 가능한 행렬이 아니다. □

보조정리 4로부터 치환행렬은 줍기 가능한 행렬이 아님을 알았다. 그렇다면 치환행렬을 어떻게 하면 줍기 가능한 행렬로 바꿀 수 있을까? 다음은 치환행렬을 줍기 가능한 행렬로 변형시키는데 필요한 정리이다.

정리 5 σ를 $n(n \geq 2)$차 치환행렬 $P = [p_{ij}]$에 대응하는 치환이라고 할 때, $i = 1, 2, \cdots, n-1$에 대하여 치환행렬 $P = [p_{ij}]$의 $(i, \sigma(i+1))$-성분 $p_{i\sigma(i+1)}$를 각각 1로 바꾸면 $P = [p_{ij}]$는 줍기 가능한 행렬 $P(n, n, 2n-1)$로 변형된다.

증명 : 보조정리 4에 의하여 $P = [p_{ij}]$는 줍기 가능한 행렬이 아니다. 이때 $P = [p_{ij}]$는 $p_{1\sigma(1)} = p_{2\sigma(2)} = \cdots = p_{n\sigma(n)} = 1$이고, 다른 성분은 모두 0이다. 그리고 σ가 치환이므로 $i \neq j (1 \leq i, j \leq n)$이면 $\sigma(i) \neq \sigma(j)$이고, $i = 1, 2, \cdots, n-1$에 대하여 $p_{i\sigma(i+1)} = 0$이다.

이제 $P = [p_{ij}]$에서 $n-1$개의 성분 $p_{1\sigma(2)}, p_{2\sigma(3)}, \cdots, p_{(n-2)\sigma(n-1)}, p_{(n-1)\sigma(n)}$을 모두 1로 바꾼 행렬을 $P(n, n, 2n-1) = [p'_{ij}]$라고 하자. 그러면 $P(n, n, 2n-1)$은 다음의 $2n-1$개의 성분만 모두 1이고, 나머지 성분은 모두 0인 행렬이다.

$$p'_{1\sigma(1)},\ p'_{1\sigma(2)},\ p'_{2\sigma(2)},\ p'_{2\sigma(3)},\ \cdots,\ p'_{(n-2)\sigma(n-1)},\ p'_{(n-1)\sigma(n-1)},\ p'_{(n-1)\sigma(n)},\ p'_{n\sigma(n)}$$

즉, 행렬 $P(n, n, 2n-1)$은 길이가 $2n-1$인 연결경로를 가지므로 정리 2에 의하여 줍기 가능한 행렬이다. □

예 1 보조정리 4로부터 다음과 같은 4차 치환행렬 $P = [p_{ij}]$는 줍기 가능한 행렬이 아니고, 치환행렬에 대응하는 치환은 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$이다.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

치환행렬 P가 $n = 4$차이므로 정리 5에 의하여 이 치환행렬의 3개의 성분 $p_{1\sigma(2)} = p_{13}$, $p_{2\sigma(3)} = p_{24}$, $p_{3\sigma(4)} = p_{32}$을 1로 바꾸면 다음과 같은 행렬 $P(4, 4, 7)$을 얻을 수 있다.

$$P(4,4,7) = [p'_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 바둑돌 행렬 $P(4,4,7)$ 은 다음과 같은 길이가 7인 연결경로를 가지므로 줍기 가능한 행렬이다.

$$p'_{11},\ p'_{13},\ p'_{23},\ p'_{24},\ p'_{34},\ p'_{32},\ p'_{42}$$

□

모든 성분이 1 인 바둑돌 행렬을 $F(m,n,mn) = [f_{ij}]$ 라 하면, m 이 짝수인 경우는

$$f_{11},\ f_{12},\ \cdots,\ f_{1n},\ f_{2n},\ f_{2(n-1)},\ \cdots,\ f_{21},\ f_{31},\ f_{32},\ \cdots,\ f_{m2},\ f_{m1}$$

인 연결경로가 있고, m 이 홀수인 경우에는

$$f_{11},\ f_{12},\ \cdots,\ f_{1n},\ f_{2n},\ f_{2(n-1)},\ \cdots,\ f_{21},\ f_{31},\ f_{32},\ \cdots,\ f_{m(n-1)},\ f_{mn}$$

인 연결경로가 있으므로 행렬 $F(m,n,mn)$ 는 m, n 에 관계없이 항상 줍기 가능한 행렬이다. 따라서 다음 정리가 성립한다.

정리 6 모든 성분이 1 인 행렬 $F(m,n,mn) = [f_{ij}]$ 는 줍기 가능한 행렬이다.

정리 6에 의하여 $F(m,n,mn)$ 은 줍기 가능한 행렬이다. 특히 n 이 짝수일 때 영 행렬과, n 이 홀수일 경우 $F(m,1,m)$ 과 줍기 가능성이 같다. 또한 정리 5와 정리 6으로부터 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

정리 7 바둑돌 행렬 $A(m,n,k)$ 은 $k-1$ 개 이상 또는 $mn-k$ 개 이하의 0 성분을 1 로 바꾸면 $A(m,n,k)$ 을 줍기 가능한 행렬을 만들 수 있다.

$k \times l$ 행렬 A 와 $m \times n$ 행렬 B 에 대하여 두 행렬의 직합 $A \oplus B$ 는 크기가 $(k+m) \times (l+n)$ 인 행렬로 $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 와 같이 정의한다. 두 행렬 A, B 가 줍기 가능한 행렬이라고 하더라도 두 행렬의 직합 은 줍기 가능한 행렬이 아니다.

예 2 줍기 가능한 두 행렬

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = [b_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

에서 a_{11}, a_{12}, a_{22} 은 A 의 연결경로이고 또 $b_{11}, b_{13}, b_{33}, b_{32}$ 는 B 의 연결경로이다. 또 두 행렬의 직합 C는 다음과 같다.

$$C = A \oplus B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

행렬 $C = [c_{ij}] = A \oplus B$ 에서 1, 2행의 세 개의 1과 3, 4, 5행의 4개의 1을 연결하는 연결경로가 없기 때문에 두 행렬의 직합 C 는 줍기 가능한 행렬이 아니다. 따라서 두 행렬의 직합은 항상 줍기 가능하지 않다. □

다음 정리는 두 줍기 가능한 행렬의 직합 $A \oplus B$ 을 어떻게 줍기 가능행렬로 변형할 수 있는지 알려준다.

정리 8 줍기 가능한 행렬 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ 의 직합을 $C = A \oplus B = [c_{ij}]$ 라고 하자. 행렬 A 의 연결경로의 마지막 성분이 a_{pq}, 행렬 B 의 연결경로의 첫 번째 성분이 b_{st} 라 할 때, 다른 성분은 C 와 같고 C 의 $(p, q+t)$-성분인 $c_{p(q+t)}$ 또는 $(p+s, q)$-성분인 $c_{(p+s)q}$ 을 1로 바꾼 행렬 $C' = [c'_{ij}]$ 는 줍기 가능한 행렬이다.

증명 : 행렬 A 의 연결경로의 마지막 성분 a_{pq} 와 행렬 B 의 연결경로의 첫 번째 성분 b_{st} 는 직합 $C = [c_{ij}]$ 에서 각각 (p, q)-성분 $a_{pq} = c_{pq}$ 이고, $(p+s, q+t)$-성분 $b_{st} = c_{(p+s)(q+t)}$ 이다. 이제 행렬 A 의 연결경로의 첫 번째 성분을 a_{lm}, 행렬 B 의 연결경로의 마지막 성분을 b_{uv} 라고 하면 $a_{lm}, \cdots, a_{pq}$ 와 $b_{st}, \cdots, b_{uv}$ 는 각각 연결경로이다. 하지만 이 경로는 행렬 C 에서는 연결되어 있지 않다. 이 연결성분은 직합의 성질에 의하여 C 의 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$a_{lm}, \ \cdots, \ a_{pq} \Rightarrow c_{lm}, \ \cdots, \ c_{pq}$$
$$b_{st}, \ \cdots, \ b_{uv} \Rightarrow c_{(p+s)(q+t)}, \ \cdots, c_{(p+u)(q+v)}$$

따라서 두 경로를 연결하기 위하여 다른 성분은 C 와 같고 C 의 $(p, q+t)$-성분인 $c_{p(q+t)}$ 또는 $(p+s, q)$-성분인 $c_{(p+s)q}$ 을 1로 바꾼 행렬 $C' = [c'_{ij}]$ 의 연결경로를 구하면 다음과 같다.

$$c'_{lm}, \ \cdots, \ c'_{pq}, \ c'_{p(q+t)}, \ c'_{(p+s)(q+t)}, \ \cdots, \ c'_{(p+u)(q+v)}$$

또는

$$c'_{lm}, \ \cdots, \ c'_{pq}, \ c'_{(p+s)q}, \ c'_{(p+s)(q+t)}, \ \cdots, \ c'_{(p+u)(q+v)}$$

그러므로 C' 은 줍기 가능한 행렬이다 □

예 3 앞의 예 2에서 살펴보았던 행렬 C 에서 a_{11}, a_{12}, a_{22} 은 A 의 연결경로이고, $b_{11}, b_{13}, b_{33}, b_{32}$ 은 B 의 연결경로이다. 두 경로를 C 의 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$a_{11}, a_{12}, a_{22} \Rightarrow c_{11}, c_{12}, c_{22},$$

$$b_{11}, b_{13}, b_{33}, b_{32} \Rightarrow \begin{array}{l} c_{(2+1)(2+1)} = c_{33}, \quad c_{(2+1)(2+3)} = c_{35}, \\ c_{(2+3)(2+3)} = c_{55}, \quad c_{(2+3)(2+2)} = c_{54} \end{array}$$

또 A 의 연결경로의 마지막 성분은 a_{22} 이고 B 의 연결경로의 처음 성분은 b_{11} 이므로 두 행렬의 직합 C 의 c_{23} 또는 c_{32} 의 0을 1로 바꾸면 C 는 줍기 가능한 행렬 C' 이 된다. 즉, 다음과 같다.

$$C = A \oplus B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ 또는 } C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

이제 바둑판 행렬에서 행렬의 크기에 따라 1이 최소한 몇 개 있어야 항상 줍기 가능한지에 대하여 생각해 보자. 그런데 바둑돌이 하나 있다면 항상 줍기 가능하다. 예를 들어 $A(2,2,k)$에 대하여 $k=1$이면 줍기 가능행렬이다. 그러나 $k=2$이면 줍기 가능할 수도 있고, 그렇지 않을 수도 있다. 그러나 $3 \le k \le 4$이면 $A(2,2,k)$는 항상 줍기 가능행렬이다. 이를테면 $A_1(2,2,2), A_2(2,2,2), A_1(2,2,3), A_2(2,2,3)$ 이 각각 다음과 같다고 하자.

$$\begin{array}{ll} A_1(2,2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_2(2,2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_1(2,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_2(2,2,3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{$*$}$$

그러면 $A(2,2,k)$에서 $k=2$인 경우 $A_1(2,2,2)$는 줍기 가능하지 않지만 $A_2(2,2,2)$는 줍기 가능한 행렬이다. 따라서 일반적으로 $A(2,2,2)$는 줍기 가능하지 않다. 그러나 $k=3$인 경우 $A(2,2,3)$은 모두 항상 줍기 가능하다. [3)]

이제 k가 어떤 범위일 때 주어진 바둑돌 행렬이 항상 줍기 가능한지 알아보자.

3) $A(2,2,3)$은 다음과 같이 모두 4가지이고, 이들은 모두 줍기 가능한 행렬이다.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

정리 6에 의하여 모든 성분이 1 인 $2 \times n$ 행렬 $F(2,n,2n)$ 은 줍기 가능한 행렬이다. 즉, 정리 2에 의하여 행렬 $F(2,n,2n)$ 에 길이가 $2n$ 인 연결경로가 존재하여 $F(2,n,2n)$ 의 연결경로의 각 성분을 1 에서 0 으로 바꾸어 나가면 영 행렬이 되는 것이다.

예를 들어 모든 성분이 1 인 두 행렬 $A(2,3,6) = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B(2,4,8) = [b_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 은 줍기 가능한 행렬이다. 특히 $A(2,3,6)$ 은 $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{12}$ 로 시작하는 연결경로를 이용하여 영 행렬로 바꿀 수 있다. 즉, 위의 길이가 4 인 연결경로의 성분을 먼저 0 으로 만든 행렬을 $A(2,3,2)$ 라고 하면, 결국 모든 성분이 1 인 홀수 개의 열을 갖는 행렬 $A(2,3,2)$ 의 연결경로를 구하여 영 행렬로 바꾸는 것은 짝수 개의 열이 0 인 $A(2,3,2)$ 를 영 행렬로 만드는 것과 같다.

$$A(2,3,6) \leftrightarrow A(2,3,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow A(2,3,0)$$

모든 성분이 1 인 짝수 개의 열을 갖는 행렬 $B(2,4,8)$ 의 경우도 마찬가지이므로 모든 성분이 1 인 짝수 개의 열이 0 인 행렬과 줍기 가능성이 같다.

$$B(2,4,8) \leftrightarrow B(2,4,4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow B(2,4,0)$$

따라서 정리 6에 의하여 $2 \times n$ 행렬에서 성분이 모두 1 인 열이 연속해서 나타나면 그 중에서 짝수 개의 열을 제거하고 생각해도 마찬가지 결과를 얻게 된다.

정리 9 $n \geq 3$ 에 대하여 다음 행렬 $A(2,n,2n-3) = [a_{ij}]$ 는 줍기 가능하지 않다.

$$A(2,n,2n-3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

증명 : 행렬 $A(2,n,2n-3) = [a_{ij}]$ 의 성분을 모두 포함하는 연결경로가 있으면 줍기 가능하다. 위의 행렬이 줍기 가능하지 않음을 n 이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 생각하자. 각각의 경우 성분이 모두 1 인 열이 짝수 개이면 정리 6에 의하여 이 짝수 개의 열은 항상 줍기 가능하다.

n 이 홀수인 경우 : 이 경우는 행렬의 가운데 부분에 성분이 모두 1 인 열은 짝수 개이므로, 일반성을 잃지 않고, 정리 6에 의하여 성분이 모두 1 인 열을 제외하고 $A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 의 경우만 생각하면 된다. 그런데 이 경우는 첫째 행과 둘째 행을 연결하는 경로가 없다. 따라서 n 이 홀수인 경우는 줍기 가능하지 않다.

n 이 짝수인 경우 : 이 경우는 행렬의 가운데 부분에 성분이 모두 1 인 열은 홀수 개이므로,

일반성을 잃지 않고, 정리 6에 의하여 $A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 의 경우만 생각하면 된다. 이 경우 첫째 행의 1 성분에서 줍기를 시작하는 경우를 먼저 생각해 보자. $a_{11} = 1$ 이므로 연결경로의 시작이 a_{11} 이라면 반드시 a_{12} 와 연결되어야 한다. 즉, 연결경로는 a_{11}, a_{12} 로 시작한다. 이때 a_{11}, a_{12}, a_{13} 이면 a_{22}, a_{24} 은 연결경로에 포함되지 않는다. 또 a_{11}, a_{12}, a_{22} 인 경우는 a_{13} 은 연결경로에 포함되지 않는다. 따라서 a_{11} 에서 시작하는 연결경로는 존재하지 않는다.

연결경로가 a_{12} 에서 시작되는 경우 a_{12}, a_{22} 이면 a_{11}, a_{13} 은 연결경로에 포함되지 않는다. 또 연결경로가 a_{12}, a_{11} 이면 지나온 길을 바로 되돌아가는 것은 허용되지 않는다는 바둑돌 줍기의 규칙 ④에 의하여 a_{13} 은 연결경로에 포함되지 않는다. 따라서 연결경로는 a_{12}, a_{22} 로 시작되어야 하지만 이 경우 연결경로는 a_{11}, a_{13} 을 모두 포함하지 않는다. 즉, a_{12} 에서 시작하는 연결경로는 존재하지 않는다.

a_{13} 에서 시작하는 경우는 a_{11} 의 경우와 마찬가지 이유로 1 인 모든 성분을 포함하는 연결경로는 존재하지 않는다. 또한 a_{22} 또는 a_{24} 에서 시작하는 경우도 앞에서와 마찬가지 이유로 성분이 1 인 모든 성분을 포함하는 연결경로는 존재하지 않는다. 그러므로 $A(2, n, 2n-3)$ 은 줍기 가능하지 않다. □

정리 10 $n \geq 2$ 에 대하여 다음과 같은 $2 \times n$ 바둑돌 행렬 $A(2, n, 2n-2)$ 가 n 이 짝수이면 줍기 가능한 행렬이고, n 이 홀수이면 줍기 가능하지 않다.

$$A(2, n, 2n-2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

증명 : 정리 9의 증명에서와 같이 n 이 짝수인 경우 성분이 모두 1 인 열은 짝수 개이므로 $A(2, n, 2n-2)$ 은 정리 6에 의하여 다음 행렬과 같이 생각할 수 있다.

$$A(2, n, 2n-2) \leftrightarrow A(2, 4, 6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow A(2, 2, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

그리고 $A(2, 2, 2)$ 는 줍기 가능한 행렬이므로 $A(2, n, 2n-2)$ 는 줍기 가능한 행렬이다. 한편 n 이 홀수인 경우 성분이 모두 1 인 열은 홀수 개이므로 $A(2, n, 2n-2)$ 는 정리 6에 의하여 다음 행렬과 같이 생각할 수 있다.

$$A(2, n, 2n-2) \leftrightarrow A(2, 5, 8) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow A(2, 3, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A(2, 3, 4)$ 에서 $a_{11} = 1$ 에서 시작하는 연결경로는 a_{11}, a_{12} 이고, a_{11}, a_{12}, a_{13} 이면 a_{22} 를 포함하지 않고, a_{11}, a_{12}, a_{22} 이면 a_{13} 를 포함하지 않는다. 따라서 a_{11} 에서 시작하는 연결

경로는 존재하지 않는다.

a_{22}, a_{12} 로 시작하는 연결경로는 지나온 길을 바로 되돌아가는 것은 허용되지 않는다는 바둑돌 줍기의 규칙 ④에 의하여 존재하지 않는다.

a_{13} 에서 시작하는 경우 a_{11} 과 마찬가지로 연결경로에 포함되지 않는다. 즉, 성분이 1 인 모든 성분을 포함하는 연결경로는 존재하지 않는다.

따라서 n 이 홀수인 경우 $A(2, n, 2n-2)$ 는 줍기 가능하지 않다. □

정리 10에서 $2 \times n$ 행렬에서 바둑돌이 $2n-2$ 개인 경우는 줍기 가능일 수도 있고 그렇지 않을 수도 있었다. 그러나 같은 크기의 바둑돌 행렬에서 바둑돌이 하나 더 늘어난다면 항상 줍기 가능하다. 즉, 자연수 n 에 대하여 바둑돌 행렬 $A(2, n, 2n-1)$ 은 줍기 가능한 행렬이다.

이제 자연수 n 에 대하여 $3 \times n$ $(0,1)$-행렬에 대하여 생각하자. 먼저 $n = 1$ 이면 3×1 행렬은 1 의 개수에 관계없이 항상 줍기 가능한 행렬이다. $n = 2$ 이면 3×2 행렬이고, 이것은 2×3 와 마찬가지이므로 정리 10의 증명에서 나타난 행렬 $A(2,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 은 줍기 가능하지 않다. 즉, 따름정리 3에 의하여 $A(2,3,4)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 도 줍기 가능하지 않다. 따라서 $A(3,2,k)$ 에 대하여 $k \geq 5$ 이면 행렬 $A(3,2,k)$ 는 항상 줍기 가능이다.[4)]

3차의 바둑돌 행렬 $A(3,3,k)$ 에 대하여 $k = 5$, $k = 6$ 일 때, 다음 행렬 $A(3,3,5)$ 와 $A(3,3,6)$ 은 1 인 성분 모두를 0 으로 바꿀 수 없기 때문에 줍기 가능하지 않다. 즉, 1 인 모든 성분을 포함하는 연결경로는 존재하지 않는다.

$$A(3,3,5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(3,3,6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

보조정리 11 다음 행렬들은 모두 줍기 가능한 행렬이다.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $k = 5$ 이면 모두 6개의 서로 다른 바둑돌 행렬이 있고, 이들은 모두 줍기 가능한 행렬이다. 또 $k = 6$ 이면 $A(3,2,6) = F(3,2,6)$ 이므로 정리 6에 의하여 줍기 가능한 행렬이다.

증명 : A_1, A_2 는 모든 성분이 1 인 연속된 짝수개의 행을 가지므로 줍기 가능이다. A_3 는 연결경로로

$$a_{12}, a_{22}, a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{23}$$

A_4 는 연결경로로

$$a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{32}, a_{31}, a_{21}$$

A_5 는 연결경로로

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{23}, a_{33}, a_{32}, a_{31}$$

A_6 는 연결경로로

$$a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{22}, a_{21}, a_{31}, a_{32}$$

을 갖는다. 따라서 주어진 바둑돌 행렬은 모두 줍기 가능한 행렬이다. □

정리 12 $k \geq 7$ 이면 바둑돌 행렬 $A(3,3,k)$ 은 줍기 가능한 행렬이다.

증명 : 먼저 $k = 9$ 이면 바둑돌 행렬 $A(3,3,9)$ 은 정리 6에 의하여 줍기 가능하다. 또 $k = 8$ 이면 모두 9가지의 서로 다른 $(0,1)$-행렬이 있으며 모두 줍기 가능하다. 마지막으로 $k = 7$ 인 경우를 알아보자. $k = 7$ 인 행렬 $A(3,3,7)$ 은 모두 9개의 성분 중에서 정확히 2개의 0 성분을 포함하고 있으므로 $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} = 36$ 가지의 서로 다른 행렬이 있다. 그런데 따름정리 3 과 정리 6에 의하여 같은 행에 2개의 0이 연속해서 있는 경우와 떨어져 있는 경우, 연속된 행에 2개의 0이 한 칸 또는 두 칸 엇갈려 있는 경우, 연속되지 않은 행에 0이 엇갈려 있는 경우[5]로 나눌 수 있기 때문에 본질적으로 다음 6개의 바둑돌 행렬과 같은 방법으로 줍기가 가능하다.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

5) 예를 들어 연속되지 않은 행에 0이 엇갈려 있는 경우인 바둑판 행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 은 연속된 행에 엇갈려 있는 바둑판 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 와 같은 방법으로 연결경로를 만들 수 있다. 또 모든 성분이 1인 연속된 짝수 개의 행이나 열은 항상 줍기 가능하기 때문에 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 은 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 과 같다.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 보조정리 11에 의하여 모두 줍기 가능한 행렬이다. 그러므로 $k \geq 7$ 이면 바둑돌 행렬 $A(3,3,k)$ 은 줍기 가능한 행렬이다. □

$n \geq 4$ 에 대하여 다음 바둑돌 행렬이 줍기 가능한지 알아보자.

$$A(3,n,3n-6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

정리 6에 의하여 주어진 바둑돌 행렬은 다음에 주어진 행렬 A_1, A_2 에 대하여 n 이 짝수인 경우 A_1 과 홀수인 경우 A_2 와 줍기 가능성이 같다.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

그리고 바둑돌 행렬 A_1 은 경로 $a_{11}, a_{31}, a_{33}, a_{13}$ 과 a_{22}, a_{24} 은 연결되지 않으므로 줍기 가능하지 않다. 또 A_2 의 경우도 1 인 모든 성분을 연결하는 경로가 존재하지 않는다. 예를 들어 A_2 의 a_{11} 에서 시작하는 다음과 같은 경로를 생각해 보자.

$$a_{11}, a_{31}, a_{33}, a_{34}, a_{14}, a_{13}, a_{23}$$

이 경로에 의하면 1 인 마지막 두 성분 a_{22}, a_{25} 가 남는다. 그러나 지나온 길을 바로 되돌아가는 것은 허용되지 않는다는 규칙에 의하여 둘 중 하나는 주을 수 없다. 마찬가지로 A_2 에는 1 인 모든 성분을 포함하는 연결경로는 존재하지 않음을 알 수 있다.

따라서 일반적으로 바둑돌 행렬 $A(3,n,3n-6)$ 은 줍기 가능하지 않다.

정리 13 $n \geq 4$ 에 대하여 일반적으로 $A(3,n,k)$ 가 줍기 가능한 행렬이려면 k 는 적어도 $3n-5$ 이상이어야 한다.

모든 성분이 1 인 바둑돌 행렬 $F(2,n,2n)$ 에 대하여 n 개의 성분 1 를 0 으로 바꾼 다음과 같은 행렬은 줍기 가능하지 않다.

$$A(2,n,n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

일반적으로 모든 성분이 1 인 바둑돌 행렬 $F(m,n,mn)(m,n \geq 2)$ 에 대하여 다음과 같이 한

행에서 $(m-1)$ 개, 한 열에서 $(n-1)$ 개의 1 인 성분을 0 으로 바꾼 바둑돌 행렬 $A(m,n,mn-(m+n)+2)$ 은 줍기 가능하지 않다.

$$A(m,n,mn-(m+n)+2)=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&0\\1&1&\cdots&1&0\\\vdots&\vdots&\ddots&1&0\\1&1&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$$

3 결론

바둑돌 줍기는 간단한 규칙만으로 바둑판 위에서 누구나 쉽게 즐길 수 있는 동양의 고전 게임이다. 본 연구에서 이 게임을 분석해 본 결과 게임이 매우 흥미로울 뿐만 아니라 여러 가지 수학적 내용에 대한 이해가 요구되는 전형적인 수학게임임을 알았다.

본 연구에서 우리는 바둑돌 줍기 게임에 대하여 수학적으로 연구한 결과, 바둑돌 줍기 게임을 $(0,1)$-행렬로 변형한 후 행렬의 성질을 이용하면 바둑돌 행렬의 어떤 패턴이 줍기 가능하고, 줍기 가능하지 않은지 알 수 있었다. 또 바둑돌 행렬 중 n차의 치환행렬은 줍기 가능하지 않으며 이것을 줍기 가능하게 만들기 위해 적어도 $(n-1)$ 개의 바둑돌을 더 놓아야 한다는 사실도 알았다.

특히 바둑돌을 주울 수 있을 때의 배열을 확인하고, 간단한 경우에 줍기 가능한 이유를 수학적으로 발견하는 것으로부터 시작하여 보다 복잡한 형태로 놓인 바둑돌의 줍기 가능성을 논리적으로 끌어낼 수 있었다. 아울러 각 경우에 일어날 수 있는 모든 경우를 생각하고 각각의 경우의 공통점을 분류한 후, 분류된 각 경우의 줍기 가능성에 대한 정당성을 주장할 수 있었다.

본 연구에서 비교적 단순하고 간단하다고 여기고 있었으며, 혼자서도 즐길 수 있는 바둑돌 줍기 게임을 분석한 결과 수학적 과정을 이해해야만 게임의 의미와 게임의 패턴을 해석할 수 있다는 것을 알았다. 교사가 이러한 바둑돌 줍기 게임을 계획적으로 잘 구성하여 학생들에게 제시하면 학생들의 수학학습에 대한 인식을 새롭게 심어주는 계기가 될 수 있을 것이다. 또 학생들이 보다 즐겁고 논리적으로 사고 할 수 있는 힘을 기를 수 있을 것이다. 그러나 치환과 행렬이 2009 개정 교육과정에는 포함되어 있지 않으므로 영재를 위한 학습이나 수학에 흥미를 불러일으키기 위한 재료로 활용하는 편이 더 나을 것 같다.

바둑돌 줍기 게임은 줍기 가능성을 알아내기 위하여 규칙을 찾는 활동, 다양하고 새로운 규칙을 생각해보는 활동을 통해 수학적 사고력을 자연스럽게 키울 수 있는 수학적 놀이이기도 하다. 따라서 이 게임을 학생들에게 제시하여 학생들이 게임에 나타난 규칙이나 원리를 탐구하는 활동을 한다면 학생들이 평소에 쉽게 지나치던 많은 현상들에 대하여 새로운 수학

적 시각을 갖고 주의 깊게 살펴보는 태도를 가질 수 있을 것이다. 또한 학생들이 수학적이라고 생각하지 않았던 게임을 문제로 제시함으로써 학생들의 문제를 보는 시각을 달리할 수 있다. 즉, 학생들이 문제의 외형이 아니라 문제의 본질적인 의미를 생각할 수 있는 수학적 사고력을 기를 수 있다.

바둑돌 줍기 게임은 학생들에게 시행착오를 통한 조작, 수학적 기호의 활용, 패턴 찾기, 창의적 사고의 확장 등의 해결 전략을 제공할 수 있다. 또한 바둑돌 줍기는 주어진 형태에 대하여 한 가지 해결 방법만 있는 것이 아니기 때문에 학생들에게 열린 문제로서 문제해결의 다양한 전략을 경험할 수 있는 좋은 기회를 제공할 수 있을 것이다.

바둑돌 게임을 행렬로 바꾼 바둑돌 행렬은 $(0,1)$-행렬이므로 $(0,1)$-행렬에 대한 여러 가지 유용한 성질을 바둑돌 행렬에 적용하면 본 논문에서 미처 발견하지 못했던 바둑돌 줍기 게임의 흥미로운 성질을 많이 찾을 수 있을 것으로 기대된다. 특히 일반적으로 $m \times n$ 바둑돌 행렬 $A(m,n,k)$에 대하여 k가 어떤 조건일 때 $A(m,n,k)$가 항상 줍기 가능할지를 알아내는 것은 매우 중요하며 앞으로 더 연구해야할 과제이다.

본 연구에서는 바둑돌 줍기 게임을 수학 수업 현장에 직접 적용시킬 수 있는 지도 방법을 제시하지 않았다. 이와 관련하여 이 게임을 수학 수업의 보조 도구로 활용하여 학생들의 수학적 사고 능력과 수학에 대한 흥미를 높이는 방향으로 좀 더 많은 연구가 진행되어야 할 필요가 있다고 판단된다.

참고 문헌

1. 강병련, 「호박고누놀이와 정렬문제」, 한국수학교육학회지 시리즈A<수학교육>, 45(2006), No. 4, pp. 507–518.
2. 김부윤, 이지성, 「자리바꾸기 문제를 활용한 수학적 창의성의 발현 과정 연구」, 한국수학교육학회지 시리즈E<수학교육 논문집>, 19(2005), No. 2, pp. 327–343.
3. 김부윤, 이지성, 「바둑돌 게임의 교수학적 활용」, 한국수학사학회지, 20(2007), No. 3, pp. 43–58.
4. 김부윤, 이지성, 「수학적 창의성 과제에 대한 고찰」, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육>, 48(2009), No. 4, pp. 443–454.
5. 박옥인, 「수학과 놀이학습의 문제점 분석연구」, 부산교육대학교교육대학원 석사학위논문 (2002).
6. 박형빈, 이헌수, 「생활수학을 활용한 효과적인 수학교육방안」, 한국수학사학회지, 21(2008), No. 2, pp. 135–152.
7. 심상길, 조정길, 「칠교판의 기하학적 특징을 이용한 교육자료 개발에 대한 연구」, 한국수학사학회지, 21(2008), No. 4, pp. 169–182.
8. 이강섭, 「수학 창의성 평가에서 독창성의 점수화 방법」, 한국수학교육학회 시리즈A <수학교육>, 49(2010), No. 1, pp. 111–118.
9. 이경언, 「창의성 신장을 위한 수학 게임 자료 개발 연구II」, 한국수학교육학회지 시리즈E <수학교육 논문집>, 13(2002), No. 2, pp. 477–493.

10. H. Meissner, "Creativity in Mathematics Education", *Paper presented at the web site of Mathematics Education Study Group*(August 7-8, 2000 in Tokyo, Japan), http://wwwmath.uni-muenster.de/didaktik/u/meissne/WWW/indengl.htm

이광연 한서대학교 수학과
Department of Mathematics, Hanseo University
E-mail: gylee@hanseo.ac.kr

조성훈 한서대학교 수학과
Department of Mathematics, Hanseo University
E-mail: shcho@hanseo.ac.kr

양승범 한서대학교 수학과
Department of Mathematics, Hanseo University
E-mail: ysbgood@naver.com