http://dx.doi.org/10.11627/jkise.2012.35.4.110 pISSN 2005-0461
eISSN 2287-7975

Optimal Production Capacity and Outsourcing Production Planning for Production Facility Producing Multi-Products

Suk-Hwa Chang†

Department of Industrial and Management Engineering, University of Incheon

다제품을 생산하는 생산설비에 대해 최적 생산용량과 외주생산계획

장 석 화†

인천대학교 산업경영공학과

The demand for facility used in producing multi-products is changed dynamically for discrete and finite time periods. The excess or the shortage for facility is occurred according to difference of the facility capacity size and demand for facility through given time periods. The shortage facility is met through the outsourcing production. The excess facility cost is considered for the periods that the facility capacity is greater than the demand for the facility, and the outsourcing production cost is considered for the periods that the demand for facility is greater than the facility capacity. This paper addresses to determine the facility capacity size, outsourcing production products and amount that minimizes the sum of the facility capacity cost, the excess facility cost and the outsourcing production cost. The characteristics of the optimal solution are analyzed, and an algorithm applying them is developed. A numerical example is shown to explain the problem.

Keywords : Production Capacity, Outsourcing Production Planning, Multi-products Facility, Dynamic Demand for Facility

1. 서 언

기업에서 생산설비가 여러 종류의 제품을 생산하는데 사용되는 경우에 생산설비의 생산용량을 구하는 문제를 생각한다. 기업에서 설비의 생산용량은 중장기적으로 설비에 대한 수요를 고려하여 정해지게 된다. 한번 정해진 설비의 생산용량은 단기적으로 제품을 생산하는 설비에 대한 수요변동이 동적으로 발생하더라도 자체 설비의 생산용량을 변화시키면서 대응하기는 쉽지 않다. 설비에 대한 수요는 제품에 대한 수요와 관련되어 있다. 제품에 대한 수요가 증가하면 설비에 대한 수요도 동일하게 증가한다. 여기서는 설비에 대한 수요를 설비를 사용하여 생산하는 제품에 대한 수요로 정의한다. 설비의 생산용량은 제품에 대한 수요변화로 발생할 수 있는 비용을 고려하여 비용을 줄일 수 있는 크기가 되어야 한다.

자체 생산설비의 생산능력은 한번 정해지면 주어진 계획기간 동안에는 일정하게 고정된다. 이산적인 유한기간 동안에 기간에 따라 제품의 수요는 동적으로 변하며 발생한다. 기간에 따라 설비의 생산용량이 제품에 대한 수요량에 비해 부족하여 일부 제품은 외주생산을 하거나

Received 15 August 2012; Finally Revised 12 September 2012; Accepted 4 October 2012

† Corresponding Author : shchang@incheon.ac.kr

반대로 생산용량이 제품에 대한 수요량에 비해 넘쳐 설비의 일부 생산용량은 사용하지 못할 수 있다. 생산설비가 여러 종류의 제품을 생산하고, 설비의 생산용량이 수요에 비해 부족 시 일부 제품을 외주생산으로 해결할 수 있는 상황에서 설비의 적정 생산용량, 외주생산제품과 외주생산량을 구하는 문제를 다룰 필요가 있다.

적정 생산용량을 갖추는데 있어 생산용량에 비례하여 비용이 발생한다. 외주생산을 하게 되면 외주생산비용이 발생한다. 외주생산을 할 수 있는 제품 종류도 다수이고, 제품 종류별로 외주생산비용이 다를 수 있다. 일부 제품에 대해 외주생산을 할 때 비용을 줄일 수 있는 외주생산제품과 외주생산량을 정해야 한다. 생산용량이 일부 사용되지 않아 남게 되면 생산설비를 일부 사용하지 못함으로 인한 기회비용이 발생한다. 여기서는 기회비용을 초과설비비용으로 정의한다. 초과설비비용은 생산활동에 단위설비를 사용하여 얻을 수 있는 평균 이익으로 고려될 수 있을 것이다. 생산용량을 적게 유지하면 생산용량비용과 초과설비비용은 줄지만 외주생산비용이 증가할 수 있고, 반대의 경우는 외주생산비용은 줄지만 생산용량비용과 초과설비비용은 증가할 수 있다.

이산적인 유한기간에서 생산설비는 여러 종류의 제품의 생산에 사용되고, 제품의 수요가 시간의 흐름에 대해 동적으로 변할 때, 생산용량이 부족한 기간에 일부 제품은 외주생산으로 생산할 수 있을 때 외주생산제품과 외주생산량을 생산용량과 함께 정하는 문제를 다룬다.

본 연구와 동일한 형태의 연구는 문헌에 특별히 보이지 않는다. 생산용량은 설비의 용량문제로 생각할 수 있다. 그러나 본 연구와는 직접적으로 같지는 않지만 용량확장에 대한 연구는 많이 이루어졌다. 용량확장 모형은 경영과학에서 긴 역사를 갖고 있다. Freidenfelds[3]과 Luss[6]는 선형의 확정적인 수요로 된 간단한 모형으로부터 확정적 및 확률적 수요를 갖는 두 개의 다른 용량 형태의 상호작용과 같은 복잡한 모형까지 수리적모형의 포괄적인 연구를 하였다. Berman and Ganz[2]은 지리적으로 널리 퍼져 있는 서비스 공급자에 대한 용량확장 모형을 연구하였다. 저장될 수 없고, 이동될 수 없는 서비스에 대한 용량을 확장하는데 있어 유일한 면을 지적하였다. Gaimon and Ho[4]는 가격을 줄이고 수요를 증가시키기 위해 서비스 공급자를 경쟁시킴으로써 용량확장을 연구하는데 게임이론을 사용하였다. Marin and Jaramillo[7]는 도시의 신속 전달 네트워크 설계에서 다 기간 용량확장 문제를 다루었다. 매 기간에 제한된 예산을 사용하여 라인을 설계할 때 공공 수송수요를 최대화하는 문제를 다루었다. Tompkins et al.[10]는 정량적인 설비계획 모형들을 다루었다. Ballou[1]는 자가 창고와 영업 창고의 경제적인 최적 결합을 정하는 방법에 대해 다루었다. Rao[8]는 창고설비에서 다기간 동안에 자가 설비비용, 자가 설비의 용도별 사용비용과 영업용 설비의 사용비용의 합을 최소화하는 자가 설비크기와 사용설비 크기를 구하는 문제를 구하였다. Tanrisever et al.[9]는 주문생산 제조환경에서 다기간 유연 생산 용량을 관리하는 문제를 다루었다.

본 연구에서는 이산적인 유한기간에서 생산설비의 용량을 외주생산제품 및 외주생산량과 함께 정하는 내용에 대해 제 2장에서는 문제를 분석하고, 최적해를 구하기 위한 목적함수의 특성을 밝히고, 최적해가 존재하는 위치를 밝힌다. 제 3장에서는 수치적인 예제를 제시하여 문제를 설명한다.

2. 최적 생산용량과 외주생산계획

2.1 모형 정식화

이산적인 유한기간 동안에 제품의 수요는 동적으로 변하며 발생하고, 제품을 생산하는 설비의 생산용량이 설비에 대한 수요보다 적은 기간에는 일부 제품의 외주생산이 가능한 경우에 생산용량, 외주생산제품과 외주생산량을 정하는 문제를 고려한다. 주어진 계획기간 동안에 설비의 생산용량은 고정되어 있고, 제품의 수요는 기간에 따라 동적으로 변하기 때문에 생산용량은 기간에 따라 수요보다 부족하기도 하고 수요보다 넘치기도 한다. 자체 생산설비의 생산용량이 수요보다 적을 경우는 외주생산을 이용하게 되어 외주생산비용이 발생하고, 반대인 경우는 사용하지 않는 설비의 일부 생산용량에 대해 초과설비비용이 발생한다. 일부 제품의 외주생산을 할 경우에 외주생산제품과 외주생산량을 구한다. 비용을 줄일 수 있는 외주생산제품과 외주생산량을 정해야 한다.

생산설비의 생산용량비용, 외주생산비용과 초과설비비용 등을 고려하여 주어진 계획기간 동안에 발생하는 총비용을 최소화할 수 있는 설비의 적정 생산용량과 외주생산제품과 외주생산량을 정한다.

문제를 설명하기 위한 부호를 정의한다.

s, t = 기간을 나타내는 첨자
T = 계획기간
j = 제품 종류를 나타내는 첨자
N = 제품 종류의 수
i, l, n = 순서를 나타내는 첨자
p = 계획기간 동안 설비의 단위당 생산용량비용
c_{tj} = 기간 t에서 제품 j을 외주생산을 할 경우에 단위당 외주생산비용
c_t = 기간 t에서 단위당 초과설비비용

r_{tj} = 기간 t에서 제품 j의 설비 수요량
x = 생산용량으로 의사결정변수
y_{tj} = 기간 t에서 제품 j의 외주생산량
z_t = 기간 t에서 설비의 초과 생산용량 크기

문제와 관련된 가정은 다음과 같다.

① 이산적인 유한기간 동안에 매 기간 제품의 수요는 확정적이고 알려져 있다.
② 매 기간 생산용량에 비해 제품의 수요가 많으면 외주생산을 하고, 외주생산량은 제품의 총 수요량에서 생산용량을 뺀 값이다.
③ 외주생산은 자가 생산용량이 수요량에 비해 적은 경우에만 한다.
④ 외주생산을 하는 제품은 동일 제품의 수요의 일부도 가능하다.
⑤ 계획기간 동안에 자가 생산용량은 일정하게 고정되어 있다.
⑥ 매 기간 각 제품의 수요량은 해당 제품의 생산을 위한 설비에 대한 수요량을 의미한다. 설비에 대한 수요량은 어떤 기간의 수요량이 다른 기간의 수요량으로 이월 될 수 없다.

목적함수인 비용함수를 구한다. 비용은 생산용량에 비례하여 발생하는 생산용량비용, 생산용량에 비해 제품의 수요량이 클 경우에 외주생산을 하는 제품의 외주생산비용, 그리고 제품의 수요량이 생산용량에 비해 적을 경우에 사용하지 않는 생산설비의 초과설비비용 등으로 이루어진다. 계획기간 T동안 발생하는 비용은 다음 식 (1)과 같다.

$$px+\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{N}c_{tj}y_{tj}+\sum_{t=1}^{T}c_t z_t \tag{1}$$

식 (1)에서 첫 번째 항은 생산용량비용이고, 두 번째 항은 외주생산비용이고, 그리고 세 번째 항은 초과설비비용이다. 실질적으로, 매 기간 두 번째와 세 번째 항의 비용요소는 많아야 하나만이 발생하게 된다.

제약식을 구한다. 기간 t에서 생산용량, 외주생산량, 설비의 초과생산용량과 수요량 사이의 관계는 다음 식 (2)과 같다.

$$\sum_{j=1}^{N}y_{tj}-z_t+x=\sum_{j=1}^{N}r_{tj} \tag{2}$$

필요한 생산용량은 제품의 수요가 최대인 기간의 수요량의 합 보다 클 수 없다. 생산용량의 범위는 비음이면서 다음의 식 (3)과 같다.

$$x \le \max_{t=1,2,\cdots,T}\left[\sum_{j=1}^{N}r_{tj}\right] \tag{3}$$

이산적인 유한기간 T동안에 시간의 흐름에 따라 제품의 수요는 동적으로 변한다. 외주생산이 가능한 경우에 이를 고려하여 생산설비의 생산용량을 구한다. 설비의 생산용량비용, 외주생산비용과 초과설비비용의 합을 최소화하는 생산용량 크기(x_t), 외주생산제품과 외주생산량(y_{tj})을 구하는 수리적 모형은 다음 P와 같다.

$$\text{P : Minimize } f=px+\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}y_{tj}+\sum_{t=1}^{T}c_t z_t$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{N}y_{tj}-z_t+x=\sum_{j=1}^{N}r_{tj},\quad t=1,2,\cdots,T$$
$$x \le \max_{t=1,2,\cdots,T}\left[\sum_{j=1}^{N}r_{tj}\right]$$
$$x \ge 0$$
$$z_t \ge 0,\quad t=1,2,\cdots,T$$
$$y_{tj} \ge 0,\quad t=1,2,\cdots,T,\quad j=1,2,\cdots,N$$

수리적 모형 P는 선형계획모형이다. 따라서 선형계획해법으로 해를 구할 수 있다. 선형계획법이 아닌 쉽게 해를 구하는 방법을 개발한다. 수리적 모형 P에서 목적함수는 시간의 흐름 순서로 표현되어 있다.

2.2 최적해의 특성과 알고리듬

모형에 대해 최적해를 구하는데 사용되는 최적해의 특성과 최적해 특성을 반영한 알고리듬을 개발한다.

기간 t에서 수요량, $r_t=\sum_{j=1}^{N}r_{tj}$로 정의한다. 기간 t에서 생산용량 x와 수요량 r_t의 사이가 $r_t > x$이면, $r_t - x$만큼 외주생산을 이용해야 한다. 단위당 외주생산비용이 작은 제품부터 시작하여 누적하여 외주생산량이 $r_t - x$가 된다.

기간 t에서 단위당 외주생산비용이 작은 제품부터 큰 제품의 순서로 나열했을 때 $i(i=1,2,\cdots,N)$번째로 작은 제품 j의 단위당 외주생산비용은 $c_{t,j[i]}$라 한다. $r_{t,j[i]}$은 기간 t에서 단위당 외주생산비용이 작은 제품부터 큰 제품의 순서로 정렬할 때 i번째로 작은 제품 j의 수요량이다.

기간 t에서 제품 j의 외주생산량을 구한다.

$\sum_{i=1}^{k}r_{t,j[i]} \le r_t - x$ 이고, $\sum_{i=1}^{k+1}r_{t,j[i]} > r_t - x$가 되는 k을 찾는다. 그러면, 기간 t에서 제품 j의 외주생산량, $y_{t,j[i]}$는 다음 식 (4)과 같다.

$$y_{t,j[i]} = \begin{cases} r_{t,j[i]}, & i = 1, 2, \cdots, k \\ r_t - x - \sum_{l=1}^{k} r_{t,j[l]}, & i = k+1 \\ 0, & i = k+2, \cdots, N \end{cases} \quad (4)$$

기간 t에서 생산용량 x와 수요량 r_t의 사이가 $r_t \le x$이면, 모든 제품은 자체 생산을 하게 된다. 이 경우에 제품 $j(j=1, 2, \cdots, N)$의 외주생산량, $y_{t,j[i]} = 0$이다.

분기점을 정의한다. 분기점은 식 (5)에 정의된 값이다.

$$\sum_{l=i}^{N} r_{t,j[l]}, \quad t = 1, 2, \cdots, T, \quad i = 1, 2, \cdots, N \quad (5)$$

분기점 집합 S_b는 식 (5)에서 정의된 모든 값에 대해 중복되는 것은 하나만 남기고, 작은 값부터 큰 값의 순서로 차례로 나열한 것이다. 분기점 집합 S_b는 다음 식 (6)과 같이 정의된다.

$$S_b = \{q_1, q_2, \cdots, q_K\} \quad (6)$$

여기서 $q_1 < q_2 < \cdots < q_K$. K는 집합 S_b에 있는 개체의 수를 의미한다.

R_{ti}는 기간 t에서 제품의 외주생산비용이 작은 제품부터 큰 제품의 순서로 나열하였을 때 $i, i+1, \cdots, N$번째 제품의 수요량의 누적 합으로 식 (7)과 같이 정의한다.

$$R_{ti} = \sum_{l=i}^{N} r_{t,j[l]}, \quad i = 1, 2, \cdots, N \quad (7)$$

임의의 분기점 q_s는 $R_{ti}(t=1, 2, \cdots, T,\ j=1, 2, \cdots, N)$의 값 중의 하나이다. 기간 t에서 R_{ti}와 임의의 두 분기점 q_s, q_{s+1}과의 사이에는 다음 관계들 중 하나가 성립한다.

$$R_{t1} \le q_s$$
$$R_{ti} \le q_s < q_{s+1} \le R_{i,t-1},\ i = 2, 3, \cdots, N$$
$$R_{tN} \le q_{s+1}$$

생산용량 x의 범위가 $q_s \le x < q_{s+1}(s=1, 2, \cdots, K-1)$일 때 기간 t에서 목적함수 $f_t(x)$는 다음 식 (8)과 같다.

$$f_t(x) = px + \begin{cases} c_t(x - R_{t1}), \quad \text{if } R_{t1} \le q_s \le x \\ c_{t,j[1]}(R_{t1} - x), \quad \text{if } R_{t2} \le q_s \le x < q_{s+1} \le R_{t1} \\ \sum_{l=1}^{i-2} c_{t,j[l]} r_{t,j[l]} + c_{t,j[i-1]}(R_{t,i-1} - x) \\ \quad \text{if } R_{ti} \le q_s \le x < q_{s+1} \le R_{t,i-1},\ i = 3, 4, \cdots, N \\ \sum_{l=1}^{N-1} c_{t,j[l]} r_{t,j[l]} + c_{t,j[N]}(R_{tN} - x), \ \text{if } x < q_{s+1} \le R_{tN} \end{cases} \quad (8)$$

목적함수 $f_t(x)$는 기간 t에서 생산용량 x의 범위가 $q_s \le x < q_{s+1}$일 때 비용을 나타낸 것이다. $R_{t1} \le q_s$이면, 생산용량이 제품의 수요량의 합보다 크므로 초과설비가 되어 초과설비비용이 발생한다. $R_{t2} \le q_s \le q_{s+1} \le R_{t1}$ 이면, 외주생산비용이 가장 작은 제품의 일부 수요량을 외주생산을 하게 된다. 마찬가지로, $R_{ti} \le q_s < q_{s+1} \le R_{t,i-1}$ $(i=3, 4, \cdots, N)$이면, 외주생산비용이 $1, 2, \cdots, i-2$번째로 작은 모든 제품의 수요량과 $i-1$번째로 작은 제품의 일부 수요량을 외주생산 하게 된다. 마지막으로 $R_{tN} \ge q_{s+1}$이면, 외주생산비용이 $1, 2, \cdots, N-1$번째로 작은 모든 제품의 수요량과 N번째로 작은 제품의 일부 수요량을 외주생산 하게 된다.

생산용량 x의 범위가 $q_s \le x \le q_{s+1}$일 때 모든 기간에 대한 목적함수 $f(x)$는 다음 식 (9)과 같다.

$$f(x) = \sum_{t=1}^{T} f_t(x) \quad (9)$$

정리 1 : 목적함수 $f(x)$는 연속함수이다.

증명 : 임의의 분기점에서 연속인지를 밝힌다. $x = q_s$을 지나는 목적함수가 연속인지 밝힌다. $q_{s-1} \le x < q_s$에서의 목적함수와 $q_s \le x < q_{s+1}$에서의 목적함수에 대해 $x = q_s$에서의 값을 비교한다. q_s는 $R_{ti}(\forall t, \forall i)$값 중에서 하나이다. 따라서 임의의 기간 to에서 한 개의 값 $R_{to,i}$이 $q_s = R_{to,i}$라고 하자. 그러면 기간 to을 제외한 나머지 기간에서는 가정한 x의 범위 $q_{s-1} \le x < q_s$에서 목적함수의 기울기는 변화가 없다. 기간 to에서만 $x = q_s$을 중심으로 목적함수의 기울기는 변화가 발생한다. 기간 to에서 q_s을 중심으로 양쪽 x의 범위에 대해 $x = q_s$의 값을 식 (8)에 대입하여 목적함수 값을 비교한다. 아래의 각 경우에 좌변은 x의 범위가 $q_{s-1} \le x < q_s$의 목적함수에 $x = q_s$을 대입하고, 우변은 x의 범위가 $q_s \le x < q_{s+1}$의 목적함수에 $x = q_s$을 대입하여 값을 구한 것이다.

(가) $R_{to,1} = q_s$인 경우
$R_{to,2} \le q_{s-1} < R_{to,1} = q_s < q_{s+1}$의 관계가 된다.
$x = q_s$에서 양쪽 목적함수의 값은 $c_{to,j[1]}(R_{to,1} - q_s) = c_{to}(q_s - R_{to,1})$이 된다.

(나) $R_{to,2} = q_s$인 경우
$R_{to,3} \le q_{s-1} < R_{to,2} = q_s < q_{s+1} \le R_{to,1}$의 관계가 된

다. $x = q_s$에서 양쪽 목적함수의 값은 $c_{to,j[1]}r_{to,j[1]} + c_{to,j[2]}(R_{to,2} - q_s) = c_{to,j[1]}(R_{to,1} - q_s)$이 성립한다.

(다) $R_{to,i} = q_s$, $i = 3, 4, \cdots, N-1$인 경우
$R_{to,i+1} \le q_{s-1} < R_{to,i} = q_s < q_{s+1} \le R_{to,i-1}$의 관계가 된다. $x = q_s$에서 양쪽 목적함수의 값은 $\sum_{l=1}^{i-1} c_{to,j[l]}r_{to,j[l]} + c_{to,j[i]}(R_{to,i} - q_s) = \sum_{l=1}^{i-2} c_{to,j[l]}r_{to,j[l]} + c_{to,j[i-1]}(R_{to,i-1} - q_s)$이 성립한다.

(라) $R_{to,N} = q_s$인 경우
$q_{s-1} < R_{to,N} = q_s < q_{s+1} \le R_{to,N-1}$의 관계가 성립한다. $x = q_s$에서 양쪽 목적함수의 값은 $\sum_{l=1}^{N-1} c_{to,j[l]}r_{to,j[l]} + c_{to,j[N]}(R_{to,N} - q_s) = \sum_{l=1}^{N-2} c_{to,j[l]}r_{to,j[l]} + c_{to,j[N-1]}(R_{to,N-1} - q_s)$이 성립한다.
정리가 증명되었다.■

다음으로 목적함수 $f(x)$는 piecewise linear 함수임을 밝힌다.

정리 2 : 목적함수 $f(x)$는 에 대해 piecewise linear이다.

증명 : 식 (8)에서 목적함수 $f(x)$는 기간 t에서 x의 범위가 $q_s \le x < q_{s+1}$일 때 R_{ti} 값의 범위에 따라 나누어 표현된 함수이다. 나누어진 모든 경우에 대해 목적함수 $f(x)$는 선형함수이다. 목적함수 $f(x)$도 x의 범위가 $q_s \le x < q_{s+1}$인 구간에서 선형이다. 목적함수 $f(x)$는 모든 x의 범위에 따라 $x = q_1$, $q_s \le x < q_{s+1} (s = 1, 2, \cdots, K-1)$, $q_K \le x$ 구간으로 나누어질 때 나누어진 각 구간에서 기울기가 상수인 일차함수이다. 그리고 분기점에서 연속이다. 따라서 목적함수는 piecewise linear하다. 정리가 증명되었다.■

목적함수 $f(x)$는 x에 대해 아래로 볼록하거나 증가하는 함수임을 밝힌다. 목적함수가 아래로 볼록하거나 증가하는 경우에 최소비용을 갖는 x는 존재하게 된다[5].

정리 3 : $p - \sum_{t=1}^{T} c_{t,j[N]} < 0$이면, 목적함수 $f(x)$는 아래로 볼록한 함수이다.

증명 : x의 범위가 $0 \le x < q_1$일 때 모든 기간에서 일부의 제품은 외주생산을 하게 된다. 이 경우에 목적함수는 $px + \sum_{t=1}^{T}\sum_{l=1}^{N-1} c_{i,j[l]}r_{t,j[l]} + \sum_{t=1}^{T} c_{t,j[N]}(R_{tN} - x)$이다. 목적함수의 기울기는 $p - \sum_{t=1}^{T} c_{t,j[N]}$이고, 음수이다. 그리고 $x \ge q_K$일 때 모든 기간에서 외주생산을 하지 않게 된다. 이 경우에 목적함수는 $px + \sum_{t=1}^{T} c_t(x - R_{t1})$이다. 목적함수의 기울기는 $p + \sum_{t=1}^{T} c_t$이고, 양수이다. x의 값의 증가에 따라 목적함수의 기울기는 처음에는 음수에서 시작하여 최종적으로 양수로 변하게 된다.

임의의 x의 범위 $q_{s-1} \le x < q_s$와 $q_s \le x < q_{s+1}$에서의 목적함수의 기울기의 변화를 분석한다. $q_{s-1} = R_{t1,k}$, $q_s = R_{t2,l}$, $q_{s+1} = R_{t3,n}$인 것으로 가정한다. 그러면, $R_{t1,k}$, $R_{t2,l}$, $R_{t3,n}$을 제외한 나머지 R_{ti}는 q_{s-1}보다 적거나 같든지 아니면 q_{s+1}보다 크거나 같게 된다. 그러면 $x = q_{s-1}$, q_s, q_{s+1}에서 목적함수의 기울기의 변화가 발생한다. $x = q_{s-1}$에서의 기울기의 변화는 $R_{t1,k}$와 관련되고, $x = q_s$에서의 기울기의 변화는 $R_{t2,l}$과 관련되고, 그리고 $x = q_{s+1}$에서의 기울기의 변화는 $R_{t3,n}$과 관련된다. x의 범위가 $q_{s-1} \le x < q_s$에서 $q_s \le x < q_{s+1}$로 바뀔 경우에 단위당 외주생산비용의 변화를 분석한다. 기간 $t2$에서, x의 범위가 $q_{s-1} \le x < q_s$일 때 단위당 외주생산비용은 $c_{t2,j[l]}$이고, x의 범위가 $q_s \le x < q_{s+1}$일 때 단위당 외주생산비용은 $c_{t2,j[l-1]}$이다. 그리고 $c_{t2,j[l]} \ge c_{t2,j[l-1]}$이므로, x의 범위가 $q_{s-1} \le x < q_s$에서 $q_s \le x < q_{s+1}$로 증가할 때 단위당 외주생산비용은 감소한다. 그러나 주어진 x의 범위 변화에서 다른 경우는 단위당 외주생산비용은 동일하다. 이러한 경우에 목적함수의 기울기의 변화는 변하는 것만을 고려하면 $-c_{t2,j[l]}$에서 $-c_{t2,j[l-1]}$로 증가한다. 변하지 않는 다른 요소의 비용의 기울기를 $\triangle$라 하면, 목적함수의 기울기는 $\triangle - c_{t2,j[l]}$에서 $\triangle - c_{t2,j[l-1]}$로 증가하게 된다. x의 모든 범위에 대해 목적함수의 기울기는 음수에서 시작하여 분기점을 중심으로 증가하면서 최종적으로 양수로 변하게 된다. 이러한 기울기의 변화의 관계가 성립하면 목적함수는 아래로 볼록한 함수가 된다. 정리가 증명되었다.■

정리 3에 의해서 $p - \sum_{t=1}^{T} c_{t,j[N]} < 0$이면, 목적함수 $f(x)$는 x에 대해 아래로 볼록함을 보였다. 그러나 $p - \sum_{t=1}^{T} c_{t,j[N]} \ge 0$이면, 목적함수 $f(x)$는 x에 대해 기울기가 항상 비음이고, 증가함수이다.

목적함수 $f(x)$은 $x=q_s$, $s=1,2,\cdots,K$에서 기울기가 변한다. 목적함수의 최소값은 설비의 생산용량이 분기점 또는 0에서 존재함을 보인다.

정리 4 : 목적함수 $f(x)$의 최적해는 $x=0$ 또는 분기점에서 존재한다.

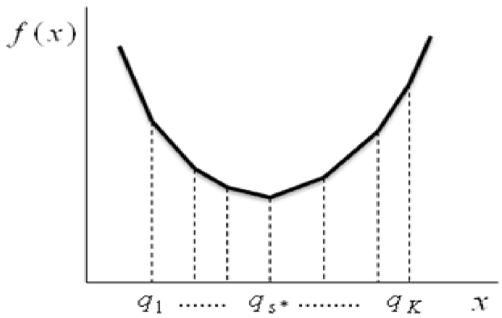
증명 : $p-\sum_{t=1}^{T}c_{t,j[N]}<0$이면, 목적함수 $f(x)$는 아래로 볼록한 연속적인 함수이고, 그리고 분기점 $x=q_n(n=1,2,\cdots,K)$에서 기울기가 변한다. 기울기가 음수에서 양수로 변하는 점에서 목적함수는 최소값이 된다. x의 범위가 $q_{s-1}\le x<q_s$에서 기울기는 음수이고, $q_s\le x<q_{s+1}$에서 기울기는 양수로 바뀌면 $x=q_s$에서 목적함수는 최소값이 된다. 그리고 기울기가 0이면, $f(q_{s-1})=f(q_s)$가 되어 $q_{s-1}\le x<q_s$인 모든 x값에서 목적함수는 최소값이 된다. 이 경우도 $q_{s-1}\le x<q_s$에서 연속적인 두 개의 분기점 q_{s-1}, q_s을 포함한다. $p-\sum_{t=1}^{T}c_{t,j[N]}\ge 0$이면, 목적함수 $f(x)$는 증가함수가 된다. 따라서 목적함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최소값이 된다.■

정리 4는 목적함수의 최소값은 생산용량이 0이거나 분기점에서 존재함을 의미한다.

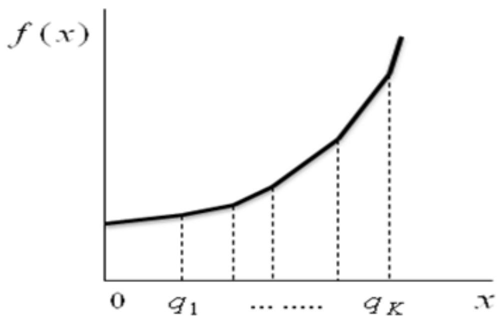
정리 3과 정리 4에서, $p-\sum_{t=1}^{T}c_{t,j[N]}<0$이면, 목적함수 $f(x)$의 기울기가 x의 값에 대해 음수에서 양수로 변하는 위치가 $x=q_{s*}$이면, 최적해는 $x=q_{s*}$에서 존재한다. 목적함수의 기울기는 이산적인 분기점에서 변한다. 유한 개의 분기점에서 목적함수의 기울기를 분석하여 최소값을 갖는 생산용량을 구할 수 있다. $p-\sum_{t=1}^{T}c_{t,j[N]}\ge 0$이면, 목적함수 $f(x)$는 증가함수가 되고 $x=0$에서 최소값이 된다.

비용함수인 목적함수 $f(x)$는 $p-\sum_{t=1}^{T}c_{t,j[N]}<0$이면, 생산용량에 대하여 <Figure 1>과 같은 아래로 볼록한 함수가 된다. 그리고 $p-\sum_{t=1}^{T}c_{t,j[N]}\ge 0$이면, 목적함수 $f(x)$는 증가함수가 된다(<Figure 2> 참조). <Figure 1>, <Figure 2>에서 목적함수의 기울기는 분기점에서 변하고 있다. 기울기가 음수에서 양수로 변하는 분기점이 최소비용을 갖는 분기점이 된다. $p-\sum_{t=1}^{T}c_{t,j[N]}<0$이면, <Figure 1>에서, 목적함수는 기울기가 변하는 분기점 중의 하나인 $x=q_{s*}$에서 최소비용, $f(q_{s*})$을 갖는다.

$p-\sum_{t=1}^{T}c_{t,j[N]}\ge 0$이면, <Figure 2>에서 $x=0$에서 최소비용, $f(0)$을 갖는다.



<Figure 1> Objective Function



<Figure 2> Objective Function

목적함수 $f(x)$는 $p-\sum_{t=1}^{T}c_{t,j[N]}<0$이면, 아래로 볼록하다. 아래로 볼록한 함수에서 최소비용을 나타내는 생산용량과 외주생산제품과 외주생산량을 구하는 절차는 다음과 같다.

단계 1 : 기간 $t(t=1,2,\cdots,T)$에 대해, c_{tj}을 작은 값부터 큰 값의 순서로 정렬한다. i번째로 작은 품목 j의 단위당 외주생산비용을 $c_{t,j[i]}$로 한다. $r_{t,j[i]}$는 제품 j의 수요량이다.

$R_{ti}=\sum_{l=i}^{N}r_{t,j[l]}$, $t=1,2,\cdots,T$, $i=1,2,\cdots,N$을 구한다. 모든 R_{ti}에 대해 작은 값부터 큰 값의 순서로 정렬하고, 중복된 값은 하나만 남긴다. 정렬한 값의 집합을 S_b로 정의한다.

$S_b=\{q_1,q_2,\cdots,q_K\}$, $q_1<q_2<\cdots<q_K$

단계 2 : $C1=0$, $C2=0$로 한다.

단계 3 : $s=1$로 놓는다.

단계 4 : $t=1$로 놓는다.

단계 5 : $i=N$로 놓는다.

단계 6 : $q_s \le R_{ti}$이면, 단계 8로 가고, $q_s > R_{ti}$이면, 다음 단계로 간다.

단계 7 : $i=i-1$로 한다. $i<1$이면, 단계 9로 가고, $i \ge 1$이면, 단계 6으로 간다.

단계 8 : $C1 = C1 + c_{t,j[i]}$로 한다. $t< T$이면, $t=t+1$로 하여 단계 5로 가고, $t \ge T$이면, 단계 10으로 간다.

단계 9 : $C2 = C2 + c_t$로 한다. $t< T$이면, $t=t+1$로 하여 단계 5로 가고, $t \ge T$이면, 다음 단계로 간다.

단계 10 : $C=p+C2-C1$을 구한다. $C<0$이면, 다음 단계로 가고, $C \ge 0$이면, 단계 12로 간다.

단계 11 : $s \ge K-1$이면, $s=s+1$로 하여 단계 4로 가고, $s \ge K-1$이면 $s=s+1$로 하여 다음 단계로 간다.

단계 12 : $s^* = s$로 한다. 최소비용의 생산용량, $x=q_{s^*}$이고, 이때 비용은 $f(q_{s^*})$가 된다.

단계 13 : $t=1$로 한다.

단계 14 : $r_t = \sum_{j=1}^{N} r_{tj}$을 계산한다.

단계 15 : $k=1$로 놓는다.

단계 16 : $\sum_{i=1}^{k} r_{t,j[i]} \le r_t - x$이면, 다음 단계로 가고,

$\sum_{i=1}^{k} r_{t,j[i]} > r_t - x$이면, 단계 18로 간다.

단계 17 : $k=k+1$로 놓는다. $k \le N$이면, 단계 16으로 가고, $k > N$이면, 단계 19로 간다.

단계 18 : 기간 t에서, i번째 제품 j의 외주생산량, $y_{t,j[i]}$을 구한다. 단계 20로 간다.

$$y_{t,j[i]} = \begin{cases} r_{t,j[i]}, & i=1,2,\cdots,k-1 \\ r_t - x - \sum_{l=1}^{k} r_{t,j[l]} & i=k \\ 0, & i=k+1,\cdots,N \end{cases}$$

단계 19 : $y_{t,j[i]} = 0,\ i=1,2,\cdots,N$

단계 20 : $t=t+1$로 놓는다. $t \le T$이면 단계 14로 가고, $t > T$이면, 종료한다.

3. 수치적 예제

5-기간 동안에 3가지 제품을 생산하는 생산설비의 생산용량과 외주생산제품과 외주생산량을 정하는 문제를 생각한다. 계획기간 동안에 제품 종류별로 수요, 단위당 외주생산비용과 초과설비비용은 <Table 1>과 같다. 주어진 계획기간 동안에 단위당 설비의 생산용량비용 $p=10$이다.

<Table 1>에서 주어진 자료에 대해 기간별로 외주생산비용이 적은 제품부터 큰 제품의 순서로 제품을 정렬하여 수요와 누적수요 R_{t1}, R_{t2}, R_{t3}을 표현한 것은 <Table 2>와 같다.

<Table 1> Demand, Outsourcing Production Cost and Excess Facility Cost

period t	product 1$(j=1)$		product 2$(j=2)$		product 3$(j=3)$		excess facility cost, c_t
	demand r_{t1}	outsourcing production cost, c_{t1}	demand r_{t2}	outsourcing production cost, c_{t2}	demand r_{t3}	outsourcing production cost, c_{t3}	
1	4	5	6	6	3	7	5
2	6	5	8	7	12	8	5
3	10	4	6	6	8	8	6
4	12	4	10	7	8	6	4
5	6	6	6	5	8	8	6

<Table 2> Demand and Cumulative Demand of the Products Ranked in Ascending Order for Outsourcing Production Cost

period t	demand (product)	demand (product)	demand (product)	R_{t1}	R_{t2}	R_{t3}
1	4(1)	6(2)	3(3)	13	9	3
2	6(1)	8(2)	12(3)	26	20	12
3	10(1)	6(2)	8(3)	24	14	8
4	12(1)	8(3)	10(2)	30	18	10
5	6(2)	6(1)	8(3)	20	14	8

해를 구하는 절차를 적용하여 해를 구한다. 분기점 집합 S_b는 다음과 같다.

$$S_b = \{3, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 18, 20, 24, 26, 30\}$$

분기점을 기준으로 생산용량의 범위에 대해 목적함수의 기울기는 <Table 3>과 같다.

<Table 3> Gradient of Objective Function

range of x	gradient of objective function
$0 \le x < 3$	10-7-8-8-7-8 = -28
$3 \le x < 8$	10-6-8-8-7-8 = -27
$8 \le x < 9$	10-6-8-6-7-6 = -23
$9 \le x < 10$	10-5-8-6-7-6 = -22
$10 \le x < 12$	10-5-8-6-6-6 = -21
$12 \le x < 13$	10-5-7-6-6-6 = -20
$13 \le x < 14$	10+5-7-6-6-6 = -10
$14 \le x < 18$	10+5-7-4-6-5 = -7
$18 \le x < 20$	10+5-7-4-4-5 = -5
$20 \le x < 24$	10+5-5-4-4+6 = 8
$24 \le x < 26$	10+5-5+6-4+6 = 16
$26 \le x < 30$	10+5+5+6-4+6 = 26
$30 \le x$	10+5+5+6+4+6 = 34

<Table 3>에서, x에 대해 목적함수의 기울기의 변화를 알 수 있다. 분기점 $x = 20$에서 기울기는 음수 -5에서 양수 8로 변하였다. 따라서 목적함수를 최소화하는 설비의 생산용량은 20이다. 비용은 10×20+5×(20-13)+5×(26-20)+4×(30 -20) = 321이다. 외주생산제품과 외주생산량은 $y_{11} = 0$, $y_{12} = 0$, $y_{13} = 0$, $y_{21} = 0$, $y_{22} = 0$, $y_{23} = 0$, $y_{31} = 0$, $y_{32} = 0$, $y_{33} = 0$, $y_{41} = 0$, $y_{42} = 0$, $y_{43} = 0$, $y_{51} = 0$, $y_{52} = 0$, $y_{53} = 0$이다.

결과를 정리하면 설비의 생산용량은 20이고, 기간 2, 3, 4에서 외주생산을 한다. 기간 2에서는 제품 1의 수요량 6을 모두 외주생산하고, 기간 3에서는 제품 1의 수요량 10 중에서 4를 외주생산하고, 그리고 기간 4에서는 제품 1의 수요량 12 중에서 10을 외주생산 하게 된다.

4. 결 론

이산적인 유한기간 동안에 제품의 수요가 동적으로 변할 때 계획기간 동안에 발생하는 비용을 최소화하는 생산용량과 제품의 외주생산량을 구하는 문제를 다루었다. 제품의 수요량은 설비에 대한 수요량을 의미한다. 생산용량에 비해 제품의 수요가 크면 부족분은 외주생산을 하고, 반대인 경우에는 남는 생산용량은 사용되지 않게 된다. 외주생산을 할 경우에 외주생산비용이 발생하고, 그리고 생산용량이 남는 경우에 기회비용인 초과설비비용이 발생한다. 생산용량비용, 외주생산비용과 초과설비비용의 합을 최소화하는 생산용량, 매 기간 외주생산제품과 외주생산량을 구하는 것을 다루었다. 문제에 대해 최적해의 특성을 분석하고, 최소비용 해를 구하는 알고리듬을 개발하였다.

추가적인 연구과제로는 외주생산을 할 경우에 외주생산시점에서 외주생산기간과 외주생산량에 따라 고정비용과 가변비용이 발생하는 문제를 고려할 수 있을 것이다.

References

[1] Ballou, R.H., *Business Logistics Management*, Prentice-Hall, New Jersey, 1998.

[2] Berman, O. and Ganz, Z., The capacity expansion problem in service industry. *Computers and Operations Research*, 1994, Vol. 21, p 557-572.

[3] Freidenfelds, J., *Capacity expansion: analysis of simple models with applications*. New York, North-Holland, 1981.

[4] Gaiman, O. and Ganz, Z. Uncertainty and acquisition of capacity: a competitive analysis. *Computers and Operations Research*, 1994, Vol. 21, No. 10, p 1073-1088.

[5] Johnson, L.A. and Montgomery, D.C., *Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control*, John Wiley and Sons. Inc., New York, 1974.

[6] Luss, H., Operations research and capacity expansion problems : a survey. *Operations Research*, 30, p 907-047, 1982.

[7] Marin, A. and Jaramillo, P., Urban rapid transit network capacity expansion, *European J. of Operational Research*, 2008, Vol. 191, p 45-60.

[8] Rao, A.K. and Rao, M.R., Solution procedures for sizing of warehouses, *European Journal of Operational Research*, 1998, Vol. 108, p 16-25.

[9] Tanrisever, F., Morrice, D., and Morton, D., Managing capacity flexibility in make-to-order production environments, *European J. of Operational Research*, 2012, Vol. 216, p 334-345.

[10] Tompkins, J.A., White, J.A., Bozer, Y.A., Fraselle, E.H., Tanchoco, J.M.A. and Trevino, J., Facilities Planning, John Wiley and Sons, Inc, NY, 1996.