응용통계연구 (2012)
25(1), 1–13

DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2012.25.1.001

생명보험에서 수명분포 단수부분에 대한 가정에 관한 연구

이수빈[1] · 차지환[2]

[1]이화여자대학교 통계학과, [2]이화여자대학교 통계학과

(2011년 9월 1일 접수, 2011년 9월 24일 수정, 2011년 11월 29일 채택)

요 약

생명보험에서 생명표에 기초하여 사망즉시지급식 상품의 일시납 순보험료를 구하기 위해서는 단수부분에 대한 가정이 필요하다. 기존의 대부분의 연구에서는 단수부분에 대한 균등분포를 도입하고 연구를 진행하였다. 하지만, 노년층의 경우 사망원인에서 계절적 요인이 차지하는 비중이 상당히 크다는 점을 고려할 때, 과연 단수부분에 대한 균등분포 가정이 전 나이구간에 대하여 적절한지에 대한 면밀한 검토가 필요하다. 이에 본 연구에서는 사망데이터로부터 단수부분에 대한 균등분포 가정의 타당성을 조사해보고, 보다 적합한 단수부분에 대한 모형을 제시하고자 한다. 제안된 모형에 기초한 순보험료와 리스크 분석을 통하여 균등분포 가정이 전 나이구간에 대하여 적절하지 않을 때 이를 도입하는 경우에도 큰 문제점이 없이 균등분포 가정을 적용할 수 있는지에 관하여 알아보고자 한다.

주요용어: 소수연령, 단수부분에 대한 가정, 균등분포 가정, 순보험료, 리스크.

1. 서론

보험에 있어서 보험영업과 관련한 보험료를 제외한 순보험료는 보험금 지급에 해당하는 지출과 보험료 수입을 각각 보험 가입 시점의 가치로 환산하여 수지상등의 원칙에 따라 수입(보험료)의 기대현가와 지출(보험금)의 기대현가가 같아지도록 산정된다. 따라서 일반 상품과 마찬가지로 기본적으로는 발생 비용에 해당하는 보험금의 크기가 수입에 해당하는 보험료의 수준을 결정하게 된다. 그러나 보험의 경우 가격결정에 있어서 일반 상품과의 차이점은 미래에 대한 불확실성으로 인하여 계약기간이 끝나기 전까지는 발생 비용의 현재가치를 미리 알 수 없다는 것이다. 생명보험의 경우 지출에 해당하는 지급되는 보험금의 현재 시점에서의 가치는 보험금이 언제 지급되느냐에 의해 결정되며, 이러한 보험금 지급시기를 결정하는 변수는 계약자의 생존기간이다. 이렇듯 수명분포는 순보험료 산정에 직접적으로 관련되어 있기 때문에 생명보험에서 매우 중요한 요소이며, 보다 정확한 보험료 산정을 위해서는 현실과 부합하는 수명분포를 적용시키는 것이 매우 중요하다.

통계청이 발표한 '2010년 인구주택총조사 전수집계 결과'에 따르면, 지난해 전체인구에서 65세 이상 인구가 차지하는 비중이 11.3%로 나타났다. 또한 여러 통계자료에 기초하여 판단할 때, 이미 모든 시·도가 고령화 사회로 들어섰다고 한다. 더구나 통계청은 대한민국이 2018년 14.3%로 고령 사회로 진입하고 2026년 20.8%로 초고령 사회에 진입할 것으로 전망한 바 있다. 앞서 설명하였듯이, 보험료의 산정에 있어서는 계약자의 장래 수명 분포가 중요한 요소이다. 그런데 보험 계약자의 수명이 늘어나게 되면

이 논문은 2009년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 대학중점연구소 지원 사업으로 수행된 연구임(2009-0093827).

[2]교신저자: (120-750) 서울특별시 서대문구 대현동 11-1, 이화여자대학교 통계학과, 교수.
E-mail: jhcha@ewha.ac.kr

보험 계약자의 장래 수명 분포에 65세 이상의 고령자의 수명 분포가 보다 많은 영향을 주게 되며, 결과적으로 보험료 산정에 있어서 65세 이상 고령자의 수명 분포가 매우 중요한 요소로 작용하게 된다.

보험료 산정을 위하여 필요한 수명분포로는 일반적으로 생명표를 이용한다. 생명표는 사람의 수명을 일정 기간 집단적으로 관찰하여, 연령과 함께 변화하는 사망 자료를 취합해 1년 간격으로 작성한 표이다. 사람의 수명은 연속인데 반하여 생명표상로부터 얻어질 수 있는 확률분포는 각 나이구간별 사망 또는 생존확률로서 이산적이다. 따라서 생명표상의 확률분포를 이용하여 장래 수명 분포를 구하기 위해서는 이러한 이산적인 분포를 연속적인 분포로 변환하여 주어야 하는데, 이 때 도입하는 것이 바로 단수부분에 대한 가정이다. 보험수리에서 일반적으로 사용하는 단수부분에 대한 가정으로는 균등분포 가정(UDD; uniform distribution of death)이 있다. 균등분포 가정에서는 보험계약자가 1년 사이에 사망했을 경우, 사망 시점이 1년 내 어느 시점이나 균일하다고 가정한다. 예를 들면, 40세인 한 계약자가 41세가 되기 전 사망했을 경우, 40.1세에 사망했을 가능성이나 40.9세에 사망했을 가능성이 동일하다는 것이다. 하지만 특히 고령자의 사망 원인이 계절에 따라 변화하며 이러한 계절적 요인에 상당한 영향을 받는다는 사실에 주목할 때, 이러한 균등분포 가정은 현실과는 다소 차이가 있을 수 있음을 짐작할 수 있다. 그런데 앞서 설명한 바와 같이 보험료 산정에 있어서 고령자의 수명분포가 점점 중요해지고 있기에, 전체 나이 구간에 대하여 이러한 균등분포 가정을 적용하여 수명분포를 추정하고 보험료를 산정하는 것이 타당한지를 따져보는 일은 현실적으로 매우 중요하다.

생명보험과 관련한 연구 분야에서 이러한 단수부분에 대한 몇몇 선행연구들이 이루어져 오고 있다. 몇 가지 대표적인 연구들로, Willmot (1997)은 다소 강한 제약조건을 포함하는 UDD 가정보다 일반적인 FI(Fractional age Independence) 가정을 도입하고 다중탈퇴모형을 포함한 생명보험분야에서의 여러 공식들이 기존의 UDD 가정의 경우로부터 쉽게 일반화될 수 있음을 보였다. Jones와 Mereu (2000)에서는 단수부분에 대한 분포로서 새로운 분포족을 도입하여 연구를 진행하였으며, Jones와 Mereu (2002)에서는 기존의 단수 부분에 대한 분포들이 갖는 비연속성의 문제점을 극복하기 위한 새로운 모형들을 소개하였다. 또한 이항석 (2008a)에서는 UDD 가정 하에서 연 기준 절대탈퇴력을 월 기준 다중탈퇴력으로 전환하는 방법과 연 기준 다중탈퇴력을 월 기준 절대탈퇴력으로 전환하는 방법을 연구하였다. 그리고 이항석 (2008b)에서는 Willmot (1997)에서 제안된 일반적인 FI(Fractional age Independence) 가정을 도입하고 이항석 (2008a)의 연구에서 다룬 전환 방법에 관한 연구를 진행하였다.

본 논문에서는 우리나라의 실제 '사망데이터'에 기초하여 이러한 단수부분에 대한 UDD 가정이 타당한지 검토해보고, 보다 현실과 부합하는 단수 부분에 대한 가정을 도입한다. 이러한 새로운 단수 부분에 대한 가정 하에서 순보험료와 리스크를 산출하며, 새로운 단수 부분에 대한 가정이 옳음에도 불구하고 기존의 UDD 가정을 도입하고 보험을 운영하게 되는 경우 어떠한 문제점이 있을 수 있는지, 혹은 아무런 문제없이 기존의 UDD 가정을 적용할 수 있는지에 관한 면밀한 검토를 진행 하도록 한다. 이러한 연구는 실제 사망 데이터에 입각한 단수 부분에 대한 타당한 가정과 관련 문제점 분석에 관한 연구로서, 기존의 단수부분에 대한 연구들과는 차별화되며, 실제 생명 보험의 개발과 운영에 반드시 고려되어야 할 현실적 가치를 지닌 연구라고 할 수 있겠다.

먼저 2장에서는 통계청의 2009년도 사망자 조사 자료를 통하여 단수부분에 대한 균등분포 가정이 현실적으로 타당한 가정인지 확인하고 단수부분에 대한 보다 적합한 가정을 제시한다. 3장에서는 새로이 제안된 단수부분에 대한 가정 하에서 사망즉시지급식 종신보험에서의 순보험료 산출에 관하여 알아보고, 제안된 단수부분에 대한 가정이 옳을 때 기존의 UDD 가정 하에서 산출된 보험료에 입각하여 보험을 운영하는 경우의 의미를 해석해보도록 한다. 4장에서는 새로이 제안된 단수부분에 대한 가정 하에서 리스크를 구하고, 이를 기존의 UDD 가정 하에서 산출된 리스크와 비교함으로써 리스크와 관련된 문제점 분석을 실시하고자 한다. 마지막으로 5장에서는 본 연구 결과의 요약과 결론을 제시하고자 한다.

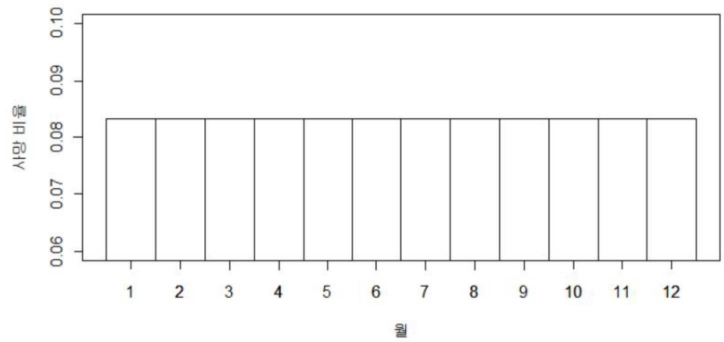

그림 **2.1.** UDD 가정 하에서의 월별 사망비율

표 **2.1.** 월별 사망자 수 (통계청 자료, 2009년) (단위: 명)

나이	월											
	1월	2월	3월	4월	5월	6월	7월	8월	9월	10월	11월	12월
65세 이상	6628	5866	6448	6184	6609	6136	6229	6147	5917	6148	6149	6315
65세 미만	16085	13386	14536	14660	14650	13398	13011	13497	13132	14705	14849	15268

2. 단수부분에 대한 새로운 가정 제시

신생아, 즉 0세인 사람의 수명을 연속형 확률변수 X로 나타내자. 그러면 x세 계약자의 장래 생존기간 $T(x)$는 연속형 확률변수인데 반하여 생명표상의 확률분포는 각 나이구간별 사망 또는 생존확률로서 이산적이다. 따라서 생명표상의 확률분포를 이용하여 $T(x)$의 분포를 구하기 위해서는 이러한 이산적인 분포를 연속적으로 만들어주어야 하는데, 이 때 도입하는 것이 바로 단수부분에 대한 가정이다. 보험수리에서 일반적으로 사용하는 단수부분에 대한 가정으로는 균등분포 가정(UDD; uniform distribution of death)이 있다 (이창수와 황선영, 1996; Gerber, 1997; Promislow, 2006). 균등분포 가정은 보험계약자가 x년에서 $x+1$년 사이에 사망했을 경우, 사망 시점이 1년 내 어느 시점이나 균일하게 분포한다고 가정한다. 예를 들면, 40세인 한 계약자가 41세가 되기 전 사망했을 경우, 40.1세에 사망했을 가능성이나 40.9세에 사망했을 가능성이 같다는 것이다. 즉, $S(\bullet)$을 X의 생존함수, $F(\bullet)$를 X의 단수부분에 대한 조건부 누적분포함수라 정의했을 때, 균등분포 가정 하에서

$$\Pr(x < X \le x+t | x < X \le x+1) = \frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)-S(x+1)} = F(t) = t, \quad \text{for all} \quad x$$

가 성립한다. 단 여기서 x는 정수이며 $0 < t \le 1$을 만족한다. 위에서 볼 수 있듯이 조건부 누적분포함수 $F(\bullet)$은 $[0,1]$에서의 균등분포의 누적분포함수와 같다.

이제 실제 사망 데이터로부터 위에서 기술한 균등분포 가정에 대한 타당성을 살펴보도록 하자. 월별사망비율을 전체 연도에 사망한 사람 수에 대한 각 월에 사망한 사람 수의 비율로 정의한다면, 이는 어느 특정한 연도의 사망자가 각 월에 사망했을 근사확률로 이해할 수 있다. 그러므로 균등분포가정을 만족시키는 어느 연도의 사망자들의 월별 사망비율은 다음 그림 2.1과 같이 모든 월에서 균등하게 나타나야 한다.

통계청의 마이크로데이터 서비스시스템(MDSS)을 통해 조사한 2009년에 사망한 사람들에 대한 나이구간에 따른 월별 사망자 수는 표 2.1과 같다.

이를 시각화하여 나타낸 그래프가 그림 2.2에 주어져 있다. 그림 2.2를 보면 65세 미만 사망자의 월별

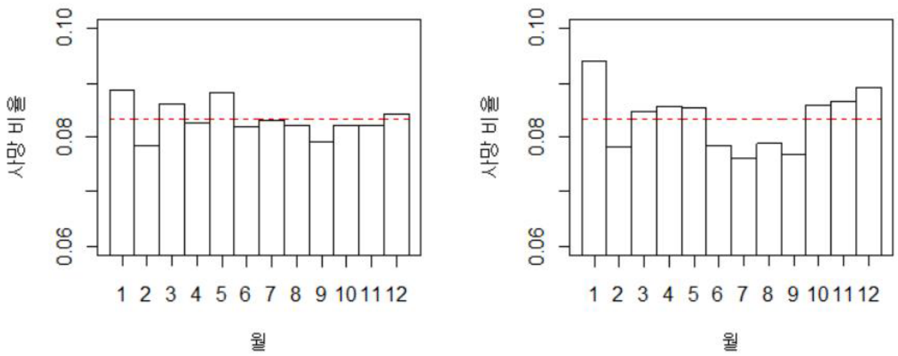

그림 2.2. 통계청자료에 기초한 월별사망비율(65세 미만: 좌, 65세 이상: 우)

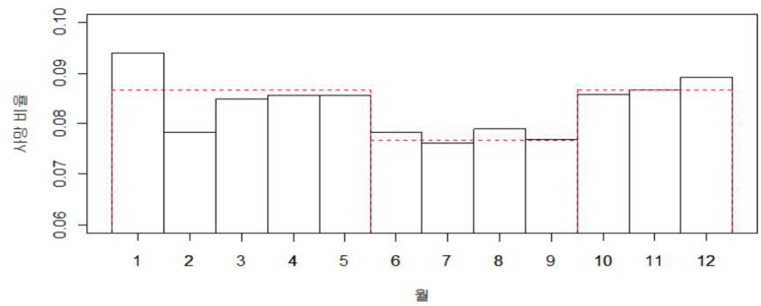

그림 2.3. 적합된 월별 사망비율(65세 이상)

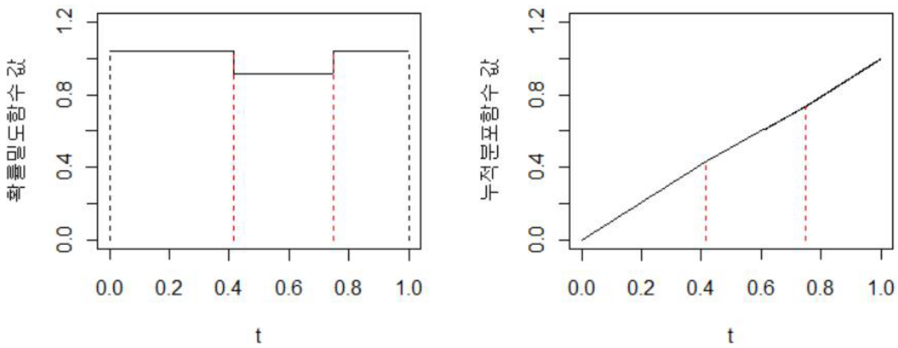

그림 2.4. 단수부분에 대한 확률밀도함수(좌)와 누적분포함수(우)

사망비율은 근사적으로 균등하다고 볼 수 있으나, 65세 이상 사망자의 월별사망비율은 하절기보다 동절기가 높은 일정한 패턴을 가지고 있어서 균등분포 가정을 적용하기에는 다소 무리가 있다고 판단된다. 따라서 위의 자료에 기초하여 65세 이상인 구간에 대하여 단수부분에 대한 새로운 모형을 다음 그림 2.3과 같이 제시하고자 한다.

그림 2.3에서 볼 수 있듯이 1년을 1월에서 5월까지, 6월에서 9월까지, 10월에서 12월까지의 세 구간으로 나누어 사망 비율이 각 구간 내에서 균등하다고 가정하였다. 근사 시킨 사망 비율은 구간 순으로 8.5 : 7.5 : 8.5이다. 하지만 위의 그림 2.3은 가로축이 월 단위로 구성된 그래프이므로, 보험료 산정을 위

해 생명표와 함께 이용하기 위해서는 연 단위의 모형이 제시되어야 한다. 따라서 최종 적합된 단수부분에 대한 조건부 확률밀도함수 $f(\bullet)$와 조건부 누적분포함수 $F(\bullet)$을 그림 2.4와 식 (2.1)과 같이 제시한다.

$$f(t) = \begin{cases} 8.5a, & \text{for } \ 0 < t \le \dfrac{5}{12}, \\ 7.5a, & \text{for } \ \dfrac{5}{12} < t \le \dfrac{9}{12}, \\ 8.5a, & \text{for } \ \dfrac{9}{12} < t \le 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$F(t) = \begin{cases} 8.5a \times t, & \text{for } \ 0 < t \le \dfrac{5}{12}, \\ \dfrac{5}{12}a + 7.5a \times t, & \text{for } \ \dfrac{5}{12} < t \le \dfrac{9}{12}, \\ 8.5a \times t - \dfrac{4}{12}a, & \text{for } \ \dfrac{9}{12} < t \le 1. \end{cases}$$

단, 위에서 a의 값은 약 0.122449, x는 정수이고 $0 < t \le 1$을 만족한다. 앞으로의 분석에서 수명분포에서의 단수부분에 대한 가정으로 보험 가입자들에 대하여 65세 미만구간에서는 기존의 UDD 가정을, 65세 이상인 구간에 대해서는 위에서 제시된 새로운 모형을 사용하기로 한다. 따라서 이러한 단수부분에 대한 가정 하에서는 보험 가입자의 개산여명과 소수연령사이에 서로 독립이 성립하지 않는다. 위 모형은 보험계약자의 가입시점이 1월 1일임을 가정하고 산출되었으므로, 다음 장에서 상세히 설명하는 바와 같이, 가입 시점이 변하는 경우 위의 식 (2.1)에서 얻어진 확률밀도 함수를 가입시점이 0이 되도록 변환(이동)하여 적용하여야 한다.

3. 사망즉시지급식 종신생명보험의 순보험료

이 장에서는 사망 즉시 보험금을 지급하는 사망즉시지급식 종신생명보험에 관하여 알아본다. 앞서 알아본 바와 같이 생명표의 수명분포는 1세 구간별로 이산적으로 나타난 반면, 사망 즉시 지급되는 보험료의 산정을 위해서는 연속적인 수명분포가 필요하다. 이를 위해 먼저 사망연도말지급식 종신생명보험의 일시납순보험료를 구한 뒤, 단수부분에 대한 가정을 통해 이를 보정하는 방법으로 사망즉시지급식 종신생명보험의 일시납순보험료를 구할 수 있다.

X를 신생아의 수명을 나타내는 확률변수, $T(x)$를 현재 x세인 사람의 장래 수명을 나타내는 확률변수라 정의한다. 연 실이율 i가 8%로 고정되어 있을 때, 현재 65세 미만의 x세인 사람이 사망즉시지급식 종신보험에 가입한다고 하자. 우선 현재 x세인 보험가입자의 보험 가입 시점이 1월 1일인 경우를 대상으로 보험료에 관한 논의를 진행한 후, 보험 가입시점이 달라지는 경우에 대하여 알아보도록 한다. v를 실이율 i에 대한 현가율 $1/(1+i)$, Z를 사망즉시지급식 종신생명보험의 보험금 현가라 정의하면

$$Z = v^{T(x)}, \quad \text{for } \ T(x) \ge 0$$

이다. Z의 기댓값을 이 보험의 일시납순보험료 $\bar{A}_x$로 하면

$$\bar{A}_x = E[Z] = \bar{A}^{1}_{x:\overline{65-x|}} + {}_{65-x|}\bar{A}_x \tag{3.1}$$

이 성립한다. 여기서, $\bar{A}^{1}_{x:\overline{65-x|}}$는 현재 x세인 가입자에 대하여 단위금액 1을 사망즉시 지급하는 $65-x$년 정기생명보험의 일시납순보험료를 나타내는 기호이며, ${}_{65-x|}\bar{A}_x$는 현재 x세인 가입자에 대하여 단위금액 1을 사망즉시 지급하는 거치생명보험의 일시납순보험료를 나타내는 기호이다.

식 (3.1)에서, 65세 이전 연령의 단수 부분에 대해서는 UDD 가정을 적용하므로

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{65-x|}} = \frac{i}{\delta} A^{1}_{x:\overline{65-x|}} \tag{3.2}$$

의 관계가 성립함을 알 수 있다 (이창수와 황선영, 1996; Gerber, 1997). 여기서 $A^{1}_{x:\,\overline{65-x|}}$는 현재 x세인 가입자에게 가입한지 $65-x$년 이내에 사망시 사망연도말에 단위금액 1을 지급하는 $65-x$년 정기생명보험의 일시납순보험료를 나타내는 기호이며

$$A^{1}_{x:\,\overline{65-x|}} = \sum_{k=0}^{65-x-1} v^{k+1} \times \Pr[k \le T(x) < k+1]$$

로 주어진다. 또한,

$${}_{65-x|}\bar{A}_x = {}_{65-x}E_x \cdot \bar{A}_{65} \tag{3.3}$$

의 관계가 있으므로, 식 (3.1)의 일시납 순보험료를 구하기 위해서는 $\bar{A}_{65}$만을 산출하면 충분하다. 65세 이상 연령대에 대하여 S를 $T(65)$에서 $K(65) \equiv [T(65)]$ (즉, $T(65)$의 정수부분)를 제외한 나머지 부분, 즉 소수부분이라 하자. 그러면 $T(65) = K(65) + S$의 관계가 성립하고, S의 분포는 앞서 제시한 새로운 분포를 따른다. 그러면

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{65} &= E\left[v^{T(65)}\right] \\
&= E\left[v^{K(65)+1} \cdot v^{-(1-S)}\right] \\
&= E\left[v^{-(1-S)}\right] \cdot E\left[v^{K(65)+1}\right] \\
&= E\left[v^{-(1-S)}\right] \cdot A_{65}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

이 성립하며, 여기서

$$\begin{aligned}
E\left[v^{-(1-S)}\right] &= \int_0^1 (1+i)^{1-s} f(s) ds \\
&= \int_0^{\frac{5}{12}} (1+i)^{1-s} \times 8.5a\, ds + \int_{\frac{5}{12}}^{\frac{9}{12}} (1+i)^{1-s} \times 7.5a\, ds + \int_{\frac{9}{12}}^{1} (1+i)^{1-s} \times 8.5a\, ds \\
&= \frac{a}{\delta}\left(8.5i - (1+i)^{\frac{7}{12}} + (1+i)^{\frac{3}{12}}\right)
\end{aligned}$$

로 계산할 수 있다. 따라서 식 (3.1), (3.2), (3.3), (3.4)로부터 구하고자 하는 일시납순보험료는

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} \times A^{1}_{x:\,\overline{65-x|}} + \frac{a}{\delta}\left(8.5i - (1+i)^{\frac{7}{12}} + (1+i)^{\frac{3}{12}}\right) \times {}_{65-x|}A_x \tag{3.5}$$

로 주어지게 된다. 여기서 ${}_{65-x|}A_x$는 현재 x세인 가입자에게 가입한지 $65-x$년 이후에 사망시 사망연도말에 단위금액 1을 지급하는 거치생명보험의 일시납순보험료를 나타내는 기호이며,

$${}_{65-x|}A_x = \sum_{k=65-x}^{\infty} v^{k+1} \times \Pr[k \le T(x) < k+1]$$

로 주어진다.

이제 가입 시점이 달라지는 경우를 모두 고려하도록 하자. 현실적으로 현재 x세인 보험가입자의 가입 시점은 1년간의 어느 시점에도 있을 수 있지만, 분석의 편의상 가입 시점은 매월 초에만 가능하다고 가

정하도록 하자. 또한 이들 가입 시점이 각 월별로 균등하게 분포한다고 가정하도록 하자. 이러한 가정은 현실과 비교하여 매우 단순화된 가정이기는 하지만, 본 논문에서 목적으로 하는 분석을 위해서는 크게 무리한 가정이 아니라 할 수 있다. 가입 시점을 나타내는 확률변수를 Y로 나타내고, $Y = y$ $(y = 0, 1/12, 2/12, \ldots, 11/12)$는 연중 가입 시점이 y임을 나타내기로 한다. 그러면, 식 (3.5)에 주어진 일시납 순보험료는 $Y = 0$인 경우의 $Z = v^{T(x)}$의 기댓값으로서, 이제 모든 가입 시점을 고려하기 위하여 식 (3.5)는

$$E[Z|Y=0] = \frac{i}{\delta} \times A^1_{x:\,\overline{65-x|}} + \frac{a}{\delta}\left(8.5i - (1+i)^{\frac{7}{12}} + (1+i)^{\frac{3}{12}}\right) \times {}_{65-x|}A_x$$

로 나타낼 수 있겠다. 이제 $Y = 1/12$인 경우를 고려하면, $E[Z|Y = 1/12]$를 산출함에 있어, 확률변수를 S의 분포에 대하여 식 (2.1)에서 얻어진 확률밀도 함수를 가입시점 1/12이 0이 되도록 변환(이동)하여 적용하면,

$$E\left[Z|Y=\frac{1}{12}\right] = \frac{i}{\delta} \times A^1_{x:\,\overline{65-x|}} + \frac{a}{\delta}\left(8.5i - (1+i)^{\frac{8}{12}} + (1+i)^{\frac{4}{12}}\right) \times {}_{65-x|}A_x$$

의 결과를 얻을 수 있으며, 유사한 방법을 통하여,

$$E\left[Z|Y=\frac{2}{12}\right] = \frac{i}{\delta} \times A^1_{x:\,\overline{65-x|}} + \frac{a}{\delta}\left(8.5i - (1+i)^{\frac{9}{12}} + (1+i)^{\frac{5}{12}}\right) \times {}_{65-x|}A_x$$
$$E\left[Z|Y=\frac{3}{12}\right] = \frac{i}{\delta} \times A^1_{x:\,\overline{65-x|}} + \frac{a}{\delta}\left(8.5i - (1+i)^{\frac{10}{12}} + (1+i)^{\frac{6}{12}}\right) \times {}_{65-x|}A_x$$
$$E\left[Z|Y=\frac{4}{12}\right] = \frac{i}{\delta} \times A^1_{x:\,\overline{65-x|}} + \frac{a}{\delta}\left(8.5i - (1+i)^{\frac{11}{12}} + (1+i)^{\frac{7}{12}}\right) \times {}_{65-x|}A_x$$
$$E\left[Z|Y=\frac{5}{12}\right] = \frac{i}{\delta} \times A^1_{x:\,\overline{65-x|}} + \frac{a}{\delta}\left(7.5i + (1+i)^{\frac{8}{12}} - 1\right) \times {}_{65-x|}A_x$$
$$E\left[Z|Y=\frac{6}{12}\right] = \frac{i}{\delta} \times A^1_{x:\,\overline{65-x|}} + \frac{a}{\delta}\left(7.5i + (1+i)^{\frac{9}{12}} - (1+i)^{\frac{1}{12}}\right) \times {}_{65-x|}A_x$$
$$E\left[Z|Y=\frac{7}{12}\right] = \frac{i}{\delta} \times A^1_{x:\,\overline{65-x|}} + \frac{a}{\delta}\left(7.5i + (1+i)^{\frac{10}{12}} - (1+i)^{\frac{2}{12}}\right) \times {}_{65-x|}A_x$$
$$E\left[Z|Y=\frac{8}{12}\right] = \frac{i}{\delta} \times A^1_{x:\,\overline{65-x|}} + \frac{a}{\delta}\left(7.5i + (1+i)^{\frac{11}{12}} - (1+i)^{\frac{3}{12}}\right) \times {}_{65-x|}A_x$$
$$E\left[Z|Y=\frac{9}{12}\right] = \frac{i}{\delta} \times A^1_{x:\,\overline{65-x|}} + \frac{a}{\delta}\left(8.5i - (1+i)^{\frac{4}{12}} + 1\right) \times {}_{65-x|}A_x$$
$$E\left[Z|Y=\frac{10}{12}\right] = \frac{i}{\delta} \times A^1_{x:\,\overline{65-x|}} + \frac{a}{\delta}\left(8.5i - (1+i)^{\frac{5}{12}} + (1+i)^{\frac{1}{12}}\right) \times {}_{65-x|}A_x$$
$$E\left[Z|Y=\frac{11}{12}\right] = \frac{i}{\delta} \times A^1_{x:\,\overline{65-x|}} + \frac{a}{\delta}\left(8.5i - (1+i)^{\frac{6}{12}} + (1+i)^{\frac{2}{12}}\right) \times {}_{65-x|}A_x$$

의 결과를 얻을 수 있다.

위에서 얻어진 결과에 따르면, 각 가입 시점에 따라 보험 계약자의 보험료에 차이가 발생하게 되는데, 이는 가입 시점에 따른 S의 분포의 차이에 기인하고 있으며, 이는 결과적으로 ${}_{65-x|}A_x$의 계수의 차이를 일으켜 보험료 차이를 발생시키게 된다. 계약자의 가입 나이가 40세일 때 ${}_{65-x|}A_x$의 계수를 각 가입 시점별로 나타낸 그래프는 다음 그림 3.1과 같다.

단수 부분에 대한 가정으로 균등 분포를 도입하게 되는 경우, 가입 시점에 따라 보험료 변화가 없음에 유의할 필요가 있다. 그림 3.1의 중앙의 점선은 단수 부분에 대한 균등분포를 가정하는 경우 산정된

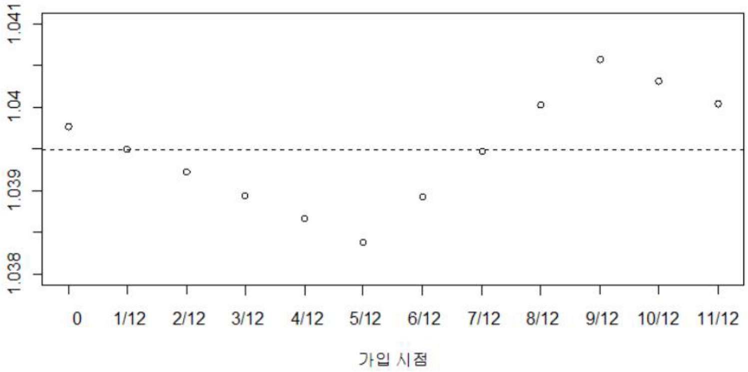

그림 **3.1.** 가입 시점에 따른 ${}_{65-x|}A_x$의 계수 ($x = 40$)

${}_{65-x|}A_x$의 계수로, 가입 시점에 상관없이 i/δ로 주어진다. 본 연구에서 제시된 분포를 도입하는 경우, 가입 시점이 6월인 경우 계수의 값이 가장 작고 가입 시점이 10월인 경우 계수 값이 가장 크게 나타남을 알 수 있다. 전체적으로는 가입 시점이 3, 4, 5, 6, 7, 8월의 경우는 균등분포가정의 경우보다 보험료가 작게, 1, 2, 9, 10, 11, 12월의 경우는 균등분포가정의 경우보다 보험료가 크게 나타났다. 가입 시점에 다른 구체적인 보험료 차이는 나이 별로 다음 표 3.1과 같다.

위와 같이 단수 부분에 대하여 본 연구에서 제시된 분포를 도입하는 경우, 보험 가입자의 가입 시점에 따라 보험료가 달라져서 이를 반영하는 것이 타당하지만, 현실적인 면을 고려할 때 가입 시점에 따른 보험료 차등 부과는 시행되기 힘든 면이 있다. 따라서 모든 보험가입자에게 가입 시점과 무관한 균등한 보험료를 부과하는 경우의 균등 보험료는 수지상등의 원칙을 적용하여 가입 시점에 따른 보험료를 가입 시점에 관하여 평균을 취함으로써 다음과 같이 계산이 가능하다.

$$\begin{aligned} E[Z] &= E\left[E[Z|Y]\right] \\ &= \sum_{m=0}^{11} E\left[Z|Y=\frac{m}{12}\right] \times \Pr\left(Y=\frac{m}{12}\right) \\ &= \frac{i}{\delta}A^{1}_{x:\overline{65-x|}} + \frac{a}{12\delta} \times 98i \times {}_{65-x|}A_x \\ &= \frac{i}{\delta}A^{1}_{x:\overline{65-x|}} + \frac{i}{\delta}\,{}_{65-x|}A_x \\ &= \frac{i}{\delta}A_x. \end{aligned}$$

위의 결과에서 보듯이, 단수 부분에 대하여 본 연구에서 제시된 분포를 도입하는 경우에도 균등한 보험료를 적용하는 경우에는 산출된 보험료가 균등분포를 가정하는 경우의 보험료와 일치함을 알 수 있다. 이는 가입 시점을 변경함으로써 발생할 수 있는 단수부분에 대한 분포 변화가 최종적으로 다시 가입 시점에 대하여 평균을 취함으로써 상쇄된 결과라고 이해할 수 있겠다. 하지만 분명한 사실은 본 연구에서 제시된 단수 부분에 대한 분포가 옳은 경우 가입 시점에 따른 균등 보험료(현행 UDD 가정 하에서 산출된 보험료)를 적용하는 경우 가입 시점에 따라 보험 가입자의 손익이 발생할 수 있다는 점이다. 즉 가입 시점이 3, 4, 5, 6, 7, 8월의 경우는 평균적으로 손실(보험회사의 이익)을, 가입시점이 1, 2, 9, 10, 11, 12월의 경우는 평균적으로 이익(보험회사의 손해)을 보게 된다. 결과적으로는 1, 2, 9, 10, 11, 12월 가입자들로부터 발생하는 보험회사의 손실을 3, 4, 5, 6, 7, 8월 가입자들이 보전해주고 있다고 해석할 수

표 3.1. 가입시점에 따른 순보험료와 그 차이

가입시점	가입나이				
	35	40	45	50	55
0	0.07859418	0.10735080	0.14460860	0.19118270	0.24872020
1/12	0.07858578	0.10733830	0.14459010	0.19115490	0.24867800
2/12	0.07857733	0.10732580	0.14457150	0.19112700	0.24863550
3/12	0.07856883	0.10731320	0.14455280	0.19109890	0.24859280
4/12	0.07856027	0.10730060	0.14453390	0.19107060	0.24854970
5/12	0.07855166	0.10728780	0.14451500	0.19104210	0.24850650
6/12	0.07856834	0.10731250	0.14455170	0.19109730	0.24859030
7/12	0.07858514	0.10733740	0.14458870	0.19115280	0.24867470
8/12	0.07860204	0.10736240	0.14462590	0.19120870	0.24875970
9/12	0.07861905	0.10738760	0.14466340	0.19126490	0.24884520
10/12	0.07861081	0.10737540	0.14464520	0.19123770	0.24880380
11/12	0.07860252	0.10736310	0.14462700	0.19121030	0.24876210
최대차이	**0.00006739**	**0.00009980**	**0.00014840**	**0.00022280**	**0.00033870**
가입시점	가입나이				
	60	65	70	75	80
0	0.31791720	0.40006370	0.49257450	0.58746480	0.67812270
1/12	0.31785170	0.39995930	0.49244600	0.58731160	0.67794580
2/12	0.31778580	0.39985430	0.49231680	0.58715740	0.67776780
3/12	0.31771940	0.39974860	0.49218660	0.58700220	0.67758870
4/12	0.31765260	0.39964230	0.49205570	0.58684600	0.67740840
5/12	0.31758530	0.39953520	0.49192390	0.58668880	0.67722690
6/12	0.31771560	0.39974260	0.49217920	0.58699330	0.67757840
7/12	0.31784670	0.39995130	0.49243610	0.58729970	0.67793210
8/12	0.31797860	0.40016130	0.49269470	0.58760820	0.67828820
9/12	0.31811130	0.40037270	0.49295500	0.58791860	0.67864650
10/12	0.31804710	0.40027040	0.49282900	0.58776830	0.67847300
11/12	0.31798240	0.40016730	0.49270220	0.58761700	0.67829840
최대차이	**0.00052600**	**0.00083750**	**0.00103110**	**0.00122980**	**0.00141960**

있다. 하지만, 이러한 보험료 차이가 현실적 고려가 필요한 만큼 크다고 판단되지는 않는다.

4. 사망즉시지급식 종신생명보험의 리스크

3장에서는 본 연구에서 제시된 단수 부분에 대한 분포가 옳을 때 가입 시점에 무관한 균등 보험료(현행 UDD 가정 하에서 산출된 보험료)를 적용하는 경우의 균등보험료 적용의 의미를 해석해보았다. 이 장에서는 본 연구에서 제시된 단수 부분에 대한 분포가 옳을 때 단수부분에 대하여 균등분포 가정을 도입하는 경우 보험의 운영 과정에서 발생할 수 있는 위험의 크기(리스크) 측면에서 어떠한 문제점이 있을 수 있는지 알아보고자 한다. 본 장에서는 편의상 여명을 나타내는 확률변수를 $T(x)$에서 x를 생략하고 간단히 T로 표기하기로 한다.

종신보험에 가입하는 모든 계약자의 사망시점이 동일하고 알려져 있다고 가정해보자. 그렇다면 보험회사는 결과적으로 보험계약자들로부터 받은 보험료를 그대로 보험금으로 지급하게 되므로 보험회사가 부담하는 리스크는 0이 된다. 그러나 실제로 보험계약자의 사망시점 T는 고정된 상수가 아닌 확률변수

이므로 보험금 현가 v^T와 일시납순보험료 사이에 차이가 발생한다. 따라서 이러한 차이의 크기를 보험회사의 리스크로 정의한다. 보험회사가 책정한 일시납순보험료를 A로 나타낼 때, 일반적으로 리스크를 아래와 같이 정의한다 (Gerber, 1997; Dickson, 2005; Promislow, 2006).

$$\text{Risk} = E\left[\left(v^T - A\right)^2\right]. \tag{4.1}$$

종신보험에서 일시납순보험료를 지급되는 보험금 현가의 기댓값으로 산출하는 경우 위에서 정의한 리스크는

$$\text{Risk} = E\left[(v^T - \bar{A}_x)^2\right] = \text{Var}\left[v^T\right]$$

로, 지급되는 보험금 현가의 분산이다.

본 연구에서 제시된 단수 부분에 대한 분포를 도입하는 경우의 수명분포를 T_t^*로 표기하고, 단수 부분에 대한 가정으로서 균등분포 가정을 도입하는 경우의 수명분포를 T_U^*로 나타내도록 하자. 단수 부분에 대한 균등분포 가정에 아무 문제가 없으며 이를 무리 없이 적용할 수 있다고 판단할 때 예상되는 리스크는

$$\text{Predicted Risk} = E\left[\left(v^{T_U^*} - \bar{A}_x\right)^2\right] = \text{Var}\left[v^{T_U^*}\right] \tag{4.2}$$

로 주어진다. 여기서 $\bar{A}_x = i/\delta A_x$이다. 따라서 식 (4.2)에 주어진 리스크는 보험회사에서 균등분포 가정을 도입하는 경우 예상하는 리스크라고 할 수 있다.

하지만, 본 연구에서 제시된 단수 부분에 대한 분포가 옳은데도 불구하고 이를 고려하지 않고 균등분포를 가정하여 보험을 운영하는 경우에 보험료는 가입 시점을 고려하지 않고 균등한 보험료 $\bar{A}_x = i/\delta A_x$를 적용하게 되지만 실제 가입자의 사망은 수명분포 T_t^*를 따라 발생하게 되므로, 이 경우 실제 리스크는 식 (4.1)에 기초하여

$$\begin{aligned}\text{Actual Risk} &= E\left[\left(v^{T_t^*} - \bar{A}_x\right)^2\right]\\ &= E\left[\left(v^{T_t^*} - E\left[v^{T_t^*}\right]\right)^2\right]\\ &= \text{Var}\left[v^{T_t^*}\right]\end{aligned} \tag{4.3}$$

로 주어지게 된다. 식 (4.3)에 주어진 실제 리스크가 식 (4.2)에 주어진 예상된 리스크보다 더 큰지 혹은 더 작은지 비교하는 것은 현실적으로 매우 중요한 의미가 있다. 예를 들면 식 (4.3)에 주어진 실제 리스크가 식 (4.2)에 주어진 예상된 리스크보다 더 크게 나타나면 실제 보험 운영 과정에서 발생하는 위험이 미리 예상된 위험보다 더 크게 나타나기 때문에 보험의 운영에 있어서 큰 위험 요인으로 나타날 수 있다. 식 (4.2)의 리스크는

$$\text{Var}\left[v^{T_U^*}\right] = E\left[\left(v^{T_U^*}\right)^2\right] - \bar{A}_x^2$$

의 관계식을 이용하고, $E[(v^{T_U^*})^2]$ 역시 일시납 순보험료를 산출하는 식에 δ(이력) 대신 2δ를 대입함으로써 쉽게 구할 수 있다. 또한 식 (4.3)의 리스크는

$$\text{Var}\left[v^{T_t^*}\right] = E\left[\text{Var}\left(v^{T_t^*}|Y\right)\right] + \text{Var}\left[E\left(v^{T_t^*}|Y\right)\right]$$

표 4.1. 가입 나이에 따른 예상된 리스크와 실제리스크

가입나이	35	40	45	50	55
예상된 리스크	0.012045760	0.017248024	0.023777790	0.030725912	0.037640167
실제 리스크	0.012045760	0.017248025	0.023777792	0.030725916	0.037640177
가입나이	60	65	70	75	80
예상된 리스크	0.043095708	0.046807261	0.047617774	0.044089955	0.037880782
실제 리스크	0.043095732	0.046807329	0.047617877	0.044090101	0.037880976

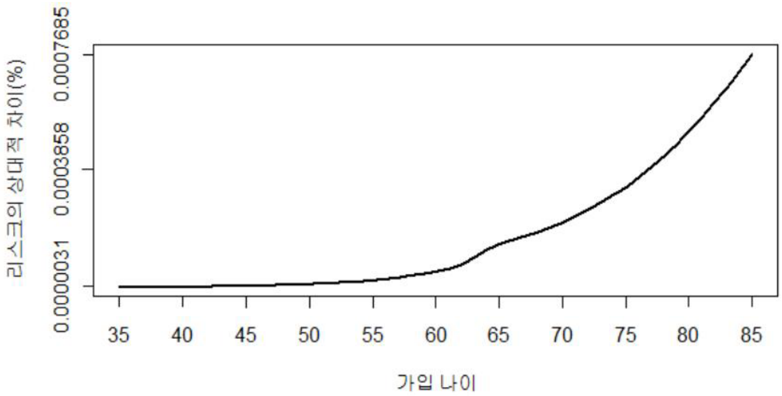

그림 4.1. 리스크의 상대적 차이

의 관계를 이용하여 산출할 수 있다. 가입 나이에 따라 산출된 예상된 리스크와 실제 리스크 값들이 소수점 아래 10째 자리에서 반올림되어 표 4.1에 정리되어 있다.

표 4.1에서 볼 수 있듯이, 40세 이후에는 모든 구간에서 실제 리스크가 예상된 리스크보다 크게 나타남을 알 수 있다. 이러한 위험의 증가는 결과적으로 보험가입자의 수명분포에서의 변동성의 증가에 기인하고 있다고 해석할 수 있다. 또한, 보험가입 당시의 나이가 많아질수록 두 경우의 리스크의 차이가 커짐을 볼 수 있다. 가입 나이에 따른 상대적인 리스크의 크기가 그림 4.1에 나타나 있다.

위 그래프에서 세로축은 리스크의 상대적 차이인

$$\frac{(\text{실제 리스크} - \text{예상된 리스크})}{(\text{실제 리스크})} \times 100(\%)$$

를 나타내며, 이 그래프를 통하여 계약자의 가입 나이가 증가할수록 리스크의 상대적 차이가 커지는 것을 알 수 있다. 이러한 분석을 통하여 본 연구에서 제시된 단수 부분에 대한 분포가 옳은데도 불구하고 이를 고려하지 않고 균등분포를 가정하여 보험을 운영하는 경우에는 실제 리스크가 예상된 리스크보다 크게 나타남을 알 수 있었다. 하지만 위에서 살펴보았듯이 상대적인 리스크의 증가량은 그리 크지 않은 관계로, 본 연구에서 제시된 단수부분에 대한 분포가 옳은 경우 기존의 균등분포를 가정하고 보험을 운영하는 경우에도 현실적으로 큰 문제점은 없다고 할 수 있겠다.

5. 결론

본 논문에서는 수명 분포의 단수부분에 대한 새로운 모형을 고려하고, 이러한 가정의 변화가 종신생명보험의 순보험료와 리스크에 어떠한 영향을 미치는지를 분석하였다. 실제 사망 데이터에 기초하여 단수부분에 대한 새로운 분포를 도입하였으며 이러한 새로운 분포에 기초하여 보험료와 리스크를 산출하였

다. 분석 결과, 본 연구에서 제시된 단수 부분에 대한 분포가 옳을 때 가입 시점에 무관한 균등 보험료를 적용하는 경우 가입 시점에 따라 보험 가입자의 손익이 발생할 수 있음을 알 수 있었고, 이의 현실적 의미를 해석해 보았다. 또한 리스크에 관한 분석에서는 실제 보험 운영 과정에서의 리스크는 예상보다 커지게 되나, 리스크의 상대적인 증가량은 크게 나타나지 않는 관계로 기존의 UDD 가정을 적용하여 보험을 운영하는데 있어 커다란 문제가 있다고 보이지는 않는다.

기존의 보험 통계학에 관한 연구들에서는 거의 모두 단수부분에 대한 가정으로서 균등분포를 도입하고 연구를 전개해 오고 있다. 하지만 앞서 기술한 바와 같이, 노년층 인구가 증가함에 따라 만약 노년층에 대한 단수부분에 대한 분포가 가정된 분포인 균등분포와 다를 경우 보험의 운영에 미치는 영향력 역시 클 수 있으므로 이의 면밀한 검토가 필요하다고 할 수 있다. 본 연구에서 논의된 내용은 이러한 검토에 대한 토대를 제공함으로써 학술적인 면에서 뿐만 아니라, 실용적인 측면에서도 보험 관련분야에서 참고할 만한 가치를 지닌 내용을 다루고 있다고 할 수 있다.

참고문헌

이창수, 황선영 (1996). <보험통계>, 한국방송대학교출판부, 서울.

이항석 (2008a). 다중탈퇴모형과 절대탈퇴모형에서 전환 공식의 일반화, <응용통계연구>, **21**, 739–754.

이항석 (2008b). 소수연령 독립 가정에서 탈퇴율의 성질, <응용통계연구>, **21**, 1045–1063.

Dickson, D. M. (2005). *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge University Press, Cambridge.

Gerber, H. U. (1997). *Life Insurance Mathematics*, 3rd Ed., Springer, Zurich.

Jones, B. L. and Mereu, J. A. (2000). A family of fractional age assumptions, *Insurance: Mathematics and Economics*, **27**, 261–276

Jones, B. L. and Mereu, J. A. (2002). A critique of fractional age assumptions, *Insurance: Mathematics and Economics*, **30**, 363–370

Promislow, S. D. (2006). *Fundamentals of Actuarial Mathematics*, Wiley, Chichester.

Willmot, G. E. (1997). Statistical independence and fractional age assumptions, *Insurance: Mathematics and Economics*, **20**, 258–258.

Study on Assumptions for Fractional Ages in Life Insurance

Soo Bin Lee[1] · Ji Hwan Cha[2]

[1]Department of Statistics, Ewha Womans University
[2]Department of Statistics, Ewha Womans University

(Received September 1, 2011; Revised September 24, 2011; Accepted November 29, 2011)

Abstract

An assumption for fractional ages should be made to obtain the net premium of the whole life insurance payable at the moment of death based on the life table. Most existing studies adopt the assumption of the uniform distribution(UDD) for the fractional ages. However, as seasonal changes may frequently lead to the deaths of elderly people, it is questionable whether the assumption of the uniform distribution is the most appropriate one for the entire age intervals. In this article, based on a real mortality data set, the appropriateness of UDD assumption for the entire age intervals is examined. And then we propose a more suitable model for fractional ages. We analyze the effect of UDD assumption through the net premium and the corresponding risk when the true distribution for the fractional ages is not uniform.

Keywords: Assumptions for fractional ages, UDD, net premium, risk.

This work was supported by Priority Research Centers Program through the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology(2009-0093827).
[2]Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Ewha Womans University, Seoul 120-750, Korea. E-mail: jhcha@ewha.ac.kr