

Unbounded Johnson 분포를 이용한 GARCH 수익률 모형의 적용

정승현¹ · 오정준² · 김성곤³

¹서울시립대학교 통계학과, ²서울시립대학교 통계학과, ³서울시립대학교 통계학과

(2011년 11월 10일 접수, 2011년 12월 7일 수정, 2011년 12월 7일 채택)

요약

주식, 환율 등과 같은 금융자료의 수익률의 분포는 정규분포에 비해 꼬리가 두껍고, 좌우 비대칭성을 보인다. 조건부수익률이 정규분포를 따른다고 가정한 GARCH 모형을 이용하여 VaR을 추정하였을 때, 이러한 비정규성 때문에 적절한 추정이 이루어지지 않고, VaR을 초과하는 손실의 발생과정에 군집(clustering)현상이 발생하는 문제점이 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해, 본 논문에서는 조건부수익률의 분포로 unbounded Johnson 분포를 이용한 GARCH 모형을 이용하여 VaR을 추정한다. 또한, 조건부수익률이 각각 정규분포, Student-t 분포를 따르는 GARCH 모형의 경우와 비교하였다. 초과손실 발생과정 자료를 이용하여 실패율검정과 군집성검정을 통해 조건부수익률 분포로 unbounded-Johnson 분포를 사용하는 방법의 타당성을 살펴보았다. Unbounded Johnson 분포가 조건부수익률 분포로 주어지는 GARCH 모형의 경우는 과소, 과대추정을 하지 않고, 군집현상 또한 발생하지 않아 적절한 추정을 하고 있음을 확인하였다.

주요어: 군집성검정, 실패율검정, GARCH 모형, Johnson Distribution, Value at Risk.

1. 서론

금융 감독기관들은 위험을 측정하고 관리하는 방법으로 VaR(Value at Risk)의 사용을 권고하고 있다. VaR을 추정하기 위해서는 수익률의 분포를 추정하는 것이 필요하다. 이와 관련된 많은 모형들이 제안되었다. 가장 널리 쓰이는 방법 중 하나는 수익률의 평균의 변화는 AR 모형으로, 변동성(분산)의 변화는 GARCH 모형으로 설명하는 것이다. 이재득 (2003), 황선영과 박진아 (2005), 황선영 등 (2009)는 GARCH 모형을 이용하여 국내 시계열 금융자료를 분석하였다.

GARCH 모형의 조건부수익률 분포로는 정규분포가 가장 널리 쓰이고 있다. 그러나 조건부수익률 분포로 정규분포를 사용하였을 때는 몇 가지 문제점이 발생한다. Cont (2001)에 의하면, 실제 금융시장에서는 극단적인 일들이 일어나며, 주식, 환율등과 같은 금융자료의 수익률의 경우 관찰된 자료의 형태는 대개 정규분포에 비해 꼬리가 두껍고, 좌우 비대칭성을 보인다는 특성을 가지고 있다. 이러한 비정규성을 해결하기 위해 Student-t 분포 (Bollerslev, 1987; Hsieh, 1989), skewed-t 분포 (Hansen, 1994), generalized error distribution(GED) 분포 (Baillie와 Bollerslev, 1989), skewed GED 분포 (Theodossiou, 1998) 등 여러 가지 분포들이 GARCH 모형에 도입되어 연구되었다. 최필선 (2005)과 Choi와 Min (2011)는 종합주가지수와 원화의 대미달러환율 그리고 미국의 3개 주식시장, 2개의 개별

³교신저자: (130-743) 서울시 동대문구 전농동 시립대길 13, 서울시립대학교 통계학과, 부교수.

E-mail: sgkim@uos.ac.kr

주식가격, 5개 국가의 환율자료에 조건부수익률 분포로 unbounded Johnson 분포를 사용한 GARCH 모형을 적합하고, unbounded Johnson 분포가 정규분포와 Student-t 분포 등 다른 분포보다 수익률분포의 비정규성을 더 잘 반영한다는 점을 적합도검정 및 VaR의 실패율검정을 통하여 보였다.

GARCH 모형은 현시점 이전의 수익률 자료로부터 현시점 수익률의 분포 및 변동성을 추정한다. 따라서 이 모형이 적절하다면 매 시점에서 임의의 신뢰수준 p 에 해당하는 VaR을 초과하는 손실이 발생할 확률이 $1 - p$ 이며, 이러한 사건들의 발생이 서로독립이다. 즉, 초과손실의 발생간격들이 서로독립이어야 한다. 하지만, Berkowitz와 O'Brien (2002)에 의하면 미국의 6개 상업은행의 실제 VaR을 추정하였을 때, VaR을 초과하는 손실이 발생한 시점간격이 독립이 아니다. 즉, 초과손실 시점 사이에 군집(clustering)현상이 발생하였다. 이 점은 GARCH 모형을 적용할 때, 분석의 대상이 되는 금융자료에 따라 조건부수익률 분포로 정규분포와 다른 분포를 사용할 필요가 있음을 보여준다.

본 논문에서는 조건부수익률 분포로 정규분포와 Student-t 분포, unbounded Johnson 분포를 사용하여 실제 국내 금융 시계열 자료에 대해 GARCH 모형을 적합하고 비교를 한다. KOSPI 수익률과 KOSDAQ 수익률의 VaR이 unbounded Johnson 분포를 조건부수익률로 하는 GARCH 모형에 의해, 잘 추정될 수 있음을 밝힌다. 이를 위해, 최필선 (2005)에 의해 수행된 VaR 실패율검정 뿐만 아니라, 군집성검정을 수행하여 VaR 발생시점들 사이에 군집이 발생하지 않음을 확인한다. 기존의 다른 모형들과의 비교를 통하여 unbounded Johnson 분포를 조건부수익률 분포로 한 GARCH 모형이 VaR의 추정에 사용될 수 있는 적절한 모형임을 보인다.

2. Unbounded Johnson 분포를 이용한 VaR의 추정 및 사후검정

2.1. Unbounded Johnson 분포

Unbounded Johnson 분포는 지금까지 도입된 다양한 비정규 분포 중 비대칭성과 초과첨도를 가장 잘 표현할 수 있는 분포 중 하나이다. 이 분포는 정규분포를 변환시켜 도출되었으며, 정규분포의 특성을 이용할 수 있다는 점이 가장 큰 장점이라 할 수 있다. 예를 들어 새로운 분포함수에 의존하는 것에 비해 난수 발생이나 분포함수의 값을 쉽게 계산할 수 있다.

임의의 확률변수 X 의 분포를 추정하기 위해, Johnson (1949)은 다음과 같은 형태의 변환을 제안하였다.

$$Z = \lambda + \delta \log f\left(\frac{X - \xi}{\lambda}\right),$$

여기서, Z 는 표준정규분포를 따르는 확률변수이며, $f(\cdot)$ 는 다음의 네 가지 형태를 가진다.

$$\begin{aligned} S_L : f(u) &= u, \\ S_U : f(u) &= u + (1 + u^2)^{\frac{1}{2}}, \\ S_B : f(u) &= \frac{u}{1 - u}, \\ S_N : f(u) &= e^u. \end{aligned}$$

$f(\cdot)$ 가 S_L 형태를 가질 때, 확률변수 X 는 lognormal 분포를 따른다. S_U 인 경우에는 X 의 값이 모든 실수의 값을 가지게 되며, S_B 인 경우에는 $(\xi, \xi + \lambda)$ 사이의 값을 가진다. 따라서 S_U 와 S_B 각각의 경우에, X 의 분포를 차례로 unbounded Johnson 분포, bounded Johnson 분포라 부른다. $f(\cdot)$ 가 S_N 인 경우 X 의 분포는 정규분포를 따르게 되며, 이 4가지 분포들은 조합 가능한 모든 왜도와 첨도를 나타낼 수 있

다. 즉, 주어진 $-\infty < s < \infty$, $k > 0$ 에 대해, $f(\cdot)$ 의 적절한 형태와 모수 λ , δ , γ , ξ 가 있어, 이에 해당하는 Johnson 분포의 왜도와 첨도가 각각 s 와 k 가 된다. 위의 네 가지 분포 중에 우리는 unbounded Johnson 분포를 사용한다. 이유는 $f(\cdot)$ 가 S_L 와 S_B 인 경우는 변수 x 가 취할 수 있는 영역에 제한이 있기 때문에 수익률 모형화에 적절하지 않기 때문이다. 확률변수 X 가 unbounded Johnson 분포를 따를 때, 위 식으로부터 다음을 얻는다.

$$X = \xi + \frac{\eta}{2} \sinh\left(\frac{Z - \gamma}{\delta}\right), \quad -\infty < \xi < \infty, \quad -\infty < \gamma < \infty, \quad \eta \geq 0, \quad \delta > 0, \quad (2.1)$$

여기서, $\sinh(x) = 1/2(e^x - e^{-x})$ 이다.

위 식에서 $\xi = 0$, $\eta = 1$ 인 경우를 확률변수 Y 로 놓자. $1/\delta = \theta$, $-\gamma/\delta = \lambda$ 로 놓는다면, 다음의 식을 얻는다.

$$Y = \sinh(\lambda + \theta Z), \quad -\infty < \lambda < \infty, \quad \theta > 0,$$

여기서, λ 와 θ 는 각각 왜도와 첨도를 결정짓는 모수이다. 확률변수 Y 의 분포를 표준화 unbounded Johnson 분포라 하며, 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2(y^2 + 1)}} \exp\left[-\frac{(\sinh^{-1}(y) - \lambda)^2}{2\theta^2}\right]. \quad (2.2)$$

Y 의 평균과 분산을 각각 μ , σ 라 놓자. 위 식으로부터 Y 의 평균과 분산이 다음처럼 주어짐을 알 수 있다 (Choi와 Min, 2011).

$$\begin{aligned} \mu &= \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2\right) \sinh(\lambda), \\ \sigma^2 &= \frac{1}{2} (\exp(\theta^2) - 1) (\exp(\theta^2) \cosh(2\lambda) + 1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

확률변수 X 가 평균이 0, 분산이 1인 unbounded Johnson 분포를 따르는 경우, 식 (2.1)로부터,

$$X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

로 주어지며, 따라서 X 의 확률밀도 함수는

$$f_X(x) = \sigma f_Y(\sigma x + \mu)$$

이다. 식 (2.2)로부터, 다음을 얻는다.

$$f_X(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\theta^2((\sigma x + \mu)^2 + 1)}} \exp\left[-\frac{(\sinh^{-1}(\sigma x + \mu) - \lambda)^2}{2\theta^2}\right].$$

2.2. GARCH-uJohnson 모형

조건부수익률 분포로 unbounded Johnson 분포를 사용하는 GARCH 모형은 최필선 (2005)에 의해, 처음으로 제안되었으며, 구체적 형태는 다음과 같다. y_t 를 시간 t 에서의 수익률이라 할 때,

$$y_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

여기서, $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ 는 서로 독립이며, 평균이 0, 분산이 1인 unbounded Johnson 분포를 따르는 확률변수들이다. $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ 는 아래의 식에 의해 주어진다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2. \quad (2.5)$$

우리는 위 모형을 GARCH(p, q)-uJohnson 수익률 모형이라 부른다. 본 논문에서는 단순한 형태인 GARCH(1, 1)-uJohnson 모형을 다룬다. 또한, 비교를 위해 일반적으로 많이 사용하는 정규분포와 Student-t 분포를 $\sigma_t, t = 1, 2, \dots$ 의 분포로 사용하는 모형을 고려한다. 각 모형을 차례로 GARCH(1, 1)-normal과 GARCH(1, 1)-t라 놓고, 위 세 모형을 이용하여 주어진 수익률 자료를 적합해 이로부터 VaR을 추정한다.

2.3. VaR 추정

시점 t 에서, $y_t, t = 1, 2, \dots$ 를 특정 자산의 1일 수익률이라 하자. 시점 t 에서의 손실률은 $x_t = -y_t$ 로 정의된다. $\{x_1, x_2, \dots\}$ 가 stationary 라 가정한다. t 시점 이전의 과거의 손실률의 정보를 $\Phi_t = \{x_t, x_{t-1}, \dots\}$ 라 하자. 과거의 손실률들 Φ_{t-1} 을 알 때, 시점 t 에서의 손실률 x_t 의 조건부 분포를 $F(\cdot|\Phi_{t-1})$ 이라 놓는다면, 조건부 VaR(p)는 다음 식에 의해 주어진다.

$$F(\text{VaR}(p)|\Phi_{t-1}) = p. \quad (2.6)$$

즉, VaR(p)는 1일 조건부손실률 분포의 $p \times 100\%$ 백분위 수이다.

식 (2.5)의 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ 이 각각 $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$ 로 추정되었다면, 시점 t 의 수익률의 분산은 다음처럼 추정된다.

$$s_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 a_{t-1}^2 + \hat{\beta}_1 s_{t-1}^2.$$

GARCH 모형에서 조건부 분산은 과거 수익률뿐만 아니라, 한 시점 이전의 조건부 분산이 현재시점의 조건부 분산에 영향을 미친다. 따라서 과거 조건부 분산을 먼저 추정해주어야 한다. 과거 처음시점의 분산을 1로 임의설정을 하고, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, s_t$ 를 반복적으로 추정하여, 임의의 시점에 대한 조건부 분산을 추정하였다.

식 (2.1), (2.4), (2.6)으로 부터, GARCH-uJohnson 모형에 의한 시점 t 에서의 조건부 VaR(p)는 다음 식에 의해 추정된다.

$$\widehat{\text{VaR}}(p) = \frac{\sqrt{s_t} \left(\sinh \left(\hat{\lambda} + \hat{\theta} z_p \right) - \hat{\mu} \right)}{\hat{\sigma}},$$

여기서, $z_p = \Phi(p)$ 이며, $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 *c.d.f.*이고, $\hat{\mu}$ 와 $\hat{\sigma}$ 는 식 (2.3)으로부터 추정된다.

2.4. 모형 검정

2.4.1. 실패율검정 VaR 모형의 타당성은 Kupiec (1995)에 의해 제안된 실패율(failure proportion) 방법에 의해 확인될 수 있다. 실패율이란 검정기간 중에 실제 금융자산의 손실이 모형에 의해 예측된 VaR(p)을 초과하는 비율을 의미한다. 시계열 $\{I_t, t = 1, 2, \dots\}$ 를 다음처럼 정의하자. 시간 t 에서의 수

익률이 $\text{VaR}(p)$ 보다 작으면, $I_t = 1$ 로 놓고, $\text{VaR}(p)$ 보다 크면, $I_t = 0$ 으로 놓는다. 즉, 수익률을 R_t 라 하면,

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{if } R_t < -\text{VaR}(p), \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

VaR 의 추정에 사용된 모형이 적절하다면 I_t 의 평균 즉, 실패율은 $q = 1 - p$ 에 가까운 값을 가진다. 손실률들이 stationary 하다고 가정했으므로, $\{I_t, t = 1, 2, \dots\}$ 역시 stationary하다. 실수 q_0 를 임의의 시점에서의 손실이 모형에 의해 예측된 $\text{VaR}(p)$ 보다 클 확률이라 놓으면, 다음을 알 수 있다.

$$q_0 = E[I_t], \quad t = 1, 2, \dots$$

VaR 모형이 적절하다면, I_t 의 값들은 근사적으로 서로 독립이다. 따라서 $\{I_t, t = 1, 2, \dots\}$ 는 연속된 베르누이 시행으로 볼 수 있다. 총 관찰수를 n 이라 할 때, $N_f = \sum_{i=1}^n I_t$ 는 이항분포 $B(q_0, n)$ 를 따르게 된다. N_f 는 n 개의 수익률 중 $\text{VaR}(p)$ 를 초과하는 손실이 발생한 횟수로 총 실패수이다.

다음의 가설검정을 고려하자.

$$H_0 : q_0 = q, \quad H_1 : q_0 \neq q.$$

위 가설을 검정하기 위해, 검정통계량으로 총 실패수 N_f 를 사용 할 수 있다. 유의수준 α 에서 H_0 가 기각된다면, 같은 유의수준에서 $\text{VaR}(p)$ 의 추정이 잘못되었다고 판단할 수 있다.

2.4.2. 군집성검정 추정된 $\text{VaR}(p)$ 를 초과하는 손실들의 발생시점들 사이의 군집(clustering)현상의 존재여부는 Christoffersen과 Pelletier (2004)에 의해 제안된 아래와 같은 초과손실의 발생간격에 기반한 군집성검정을 통해 확인될 수 있다. 초과손실 발생시점 간격들이 군집현상을 보이지 않는다면, 발생간격들은 지수분포를 따른다. 즉 어떤 α 에 대해, 발생간격 D 의 *p.d.f.*는 아래와 같다.

$$f_{\text{exp}}(D; \alpha) = \alpha \exp(-\alpha D).$$

가설검정을 위해, 초과손실 발생간격이 군집현상을 보이는 경우에, D 가 weibull 분포를 따른다고 가정하였다. 즉 어떤 α, β 에 대해, D 의 *p.d.f.*는 아래와 같다.

$$f_w(D; \alpha, \beta) = \alpha^\beta D^{\beta-1} \exp\left(-(\alpha D)^\beta\right).$$

지수분포는 $\beta = 1$ 일때 weibull 분포의 특수한 경우로 표현된다. 따라서, 군집성검정의 귀무가설은 다음과 같다.

$$H_{0,ind} : \beta = 1.$$

유의수준 α 에서 H_0 가 기각된다면, 초과손실 발생시점들 사이에 군집현상이 발생하고 있다고 판단할 수 있다. 위 가설을 검정하기 위해, 시계열 $\{I_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ 에서, 초과손실이 발생했던 시점들, 즉 $I_t = 1$ 인 시점들을 $\{t_1, t_2, \dots, t_{N_f}\}$ 라 놓고, $D_i, i = 1, 2, \dots, N$ 을 다음과 같이 정의한다. $I_t = 0$ 일 경우 D_1 은 첫 번째 초과손실이 발생하는 시점까지의 일수이고, $I_t = 1$ 일 경우 D_1 은 첫 번째 초과손실 발생일부터 두 번째 초과손실 발생일까지 시점간 거리이다. 각각의 경우 $C_1 = 1, C_1 = 0$ 로 정의하자. 또한 $I_n = 0$ 일 경우, D_N 은 마지막 초과손실 발생시점 이후의 일수이고, $I_n = 1$ 일 경우는

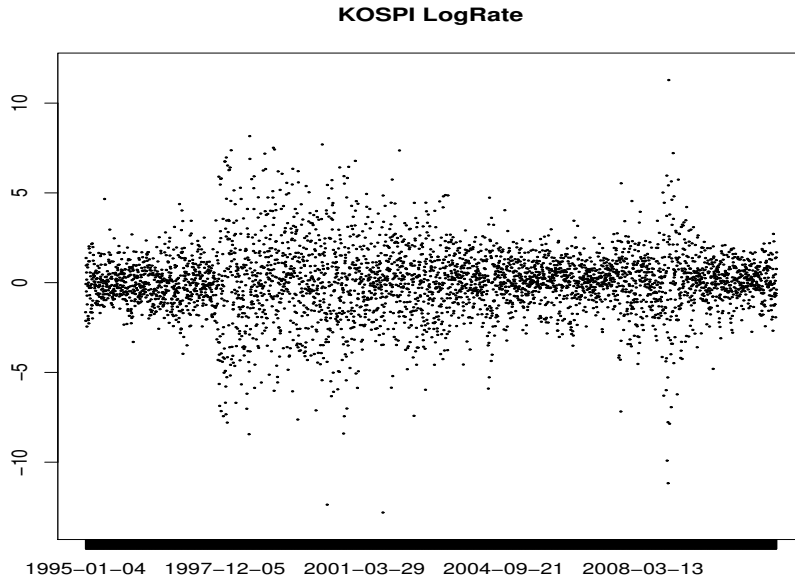


그림 3.1. KOSPI 일일 수익률(%). 1995년 1월 3일 부터 2011년 9월 29일까지

$D_N = t_{N_f} - t_{N_f-1}$ 이다. 각각의 경우에, $C_N = 1$, $C_N = 0$ 로 정의하자. I_1 과 I_n 의 값에 따라 N 은 N_f 와 다른 값을 가질수 있다. 생존함수(survival function)는 다음과 같이 정의된다.

$$\int_{D_i}^{\infty} f_w(x; \alpha, \beta) dx.$$

따라서, 우도함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \ln L(D_1, D_2, \dots, D_N) &= C_1 \ln S(D_1) + (1 - C_1) \ln f_w(D_1) + \sum_{i=2}^{N-1} \ln(f_w(D_i)) \\ &\quad + C_N \ln S(D_N) + (1 - C_N) \ln f_w(D_N). \end{aligned}$$

β 가 주어진 경우 α 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{N - C_1 - C_N}{\sum_{i=1}^N D_i^\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

3. 국내 주식자료 분석

3.1. 자료

본 논문에서, 우리는 일정기간 동안의 종합주가지수 KOSPI(Korea Composite Stock Price Index)와 KOSDAQ(Korean Securities Dealers Automated Quotations)의 로그수익률 자료에 조건부수익률의 분포로 정규분포, Student-t 분포, unbounded Johnson 분포를 사용하여 각각 GARCH(1, 1)-normal,

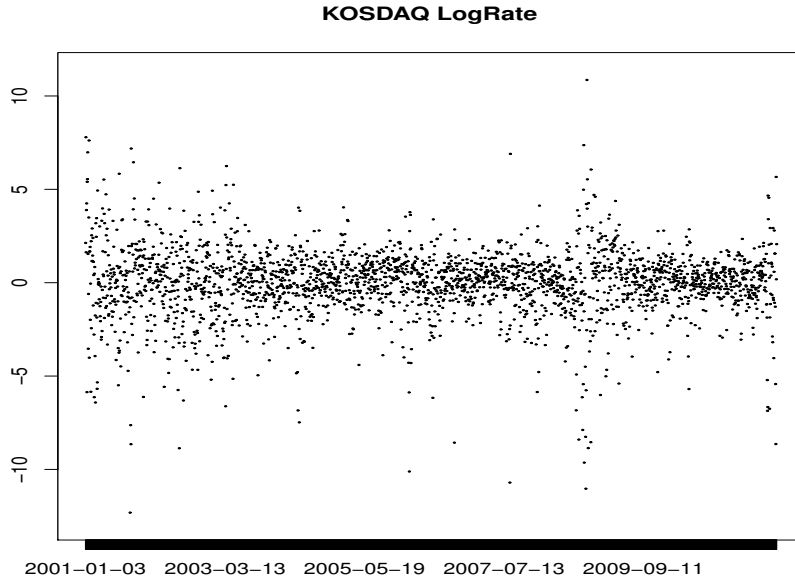


그림 3.2. KOSDAQ 일일 수익률(%). 2001년 1월 2일 부터 2011년 9월 29일까지

표 3.1. 수익률 기술통계

	평균	표준편차	왜도	첨도
KOSPI	0.0170	1.8779	-0.2625	3.8301
KOSDAQ	-0.0086	1.8233	-0.8619	5.7504

GARCH(1,1)-t, GARCH(1,1)-uJohnson 모형을 적합 시킨 후 각각의 모형을 사용하여 1일 VaR(p)를 추정한다. 실패율방법과 군집성검정을 통해 위 모형들의 타당성을 비교하였다.

분석에 사용한 자료는 1995년 1월 3일부터 2011년 9월 29일까지의 KOSPI와 2001년 1월 2일부터 2011년 9월 29일까지의 KOSDAQ 각각 총 4321개와 2656개의 종가(close)이다. 이 종가로부터 각각 4320, 2655개의 로그수익률을 구하여, 이를 수익률 y_i 로 놓았다. 즉,

$$y_i = [\ln(S_{i-1}) - \ln(S_i)] \times 100,$$

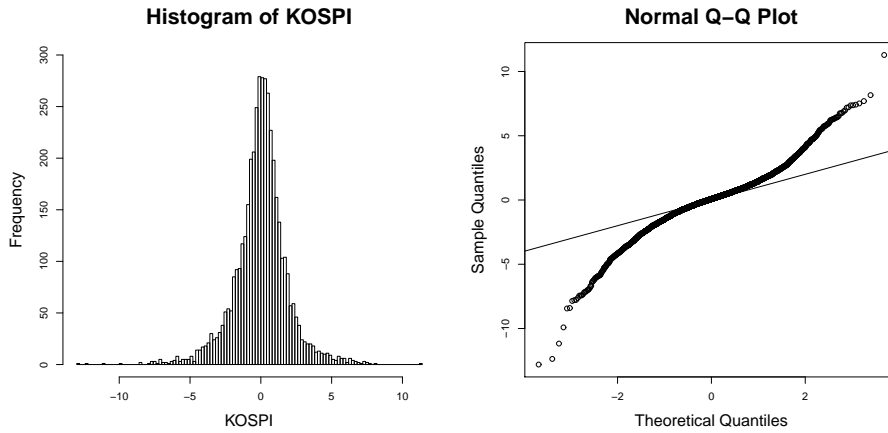
여기서, S_i 는 i 번째일의 종가이다.

KOSPI와 KOSDAQ의 수익률에 대한 기술통계량을 구해보았다. 표 3.1에서 보듯이 수익률의 평균은 0에 가깝다. 표준편차, 왜도, 첨도를 살펴보았을 때 각각의 수익률이 정규분포를 따른다고 판단하기는 힘들다.

그림 3.3, 그림 3.4는 각 자료의 히스토그램과 QQ-Plot이다. 히스토그램을 살펴보면 두 자료 모두 정규분포에 비해 중심이 뾰족함을 알 수 있고, QQ-Plot을 통해 꼬리가 두꺼움을 알 수 있다. 즉, 수익률의 형태가 정규분포가 아님을 알 수 있다.

3.2. GARCH(1,1) 모형의 적합

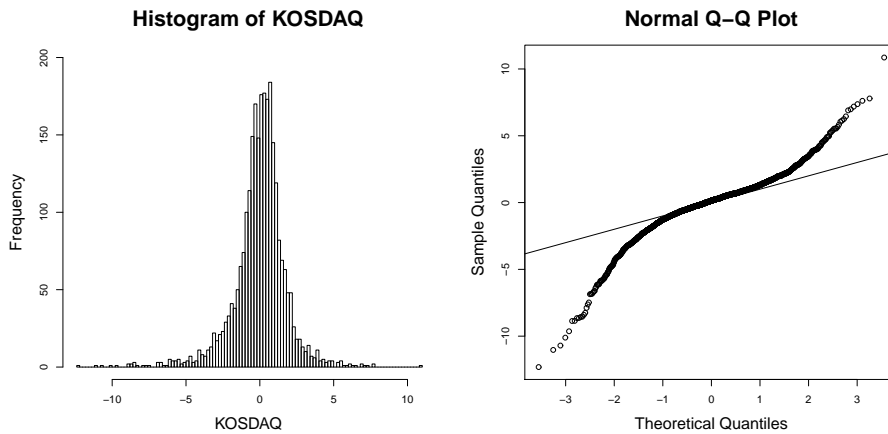
조건부수익률의 분포를 정규분포, Student-t 분포, unbounded Johnson 분포로 한 GARCH 모형 중 어



(a) 히스토그램

(b) Normal QQ-Plot

그림 3.3. KOSPI 일별 로그수익률 분석



(a) 히스토그램

(b) Normal QQ-Plot

그림 3.4. KOSDAQ 일별 로그수익률 분석

떠한 모형이 수익률분포가 가지는 특성을 좀 더 잘 반영하는지 비교해 보았다. 그림 3.5와 그림 3.6은 각각의 경우에 전체 수익률 자료를 사용하여 GARCH(1, 1) 모형적합 후, 잔차 $\hat{\epsilon}_t = y_t/s_t$ 의 QQ-plot이다. 정규분포를 사용하였을 때보다 Student-t 분포와 unbounded Johnson 분포의 경우가 더욱 각각의 분포를 잘 따르고 있다. 또한 unbounded Johnson 분포의 경우가 Student-t 분포보다 더 직선상에 가깝게 위치하고 있는 것을 확인할 수 있다.

임의의 시점 t 에서의 VaR를 추정하기 위해, 시점 t 로부터 직전 750일의 일별 수익률을 이용하여 GARCH(1, 1) 모형에 적합 하였다. 추정에 750개의 자료를 사용한 이유는 3년 내의 수익률 자료가 stationary 하다고 판단되고, 그 보다 작은 기간의 자료를 사용하면, 자료의 개수가 적어서 모수 추정 시 발생하는 분산이 커지기 때문이다. 표 3.2, 표 3.3은 GARCH(1, 1)-normal, GARCH(1, 1)-t,

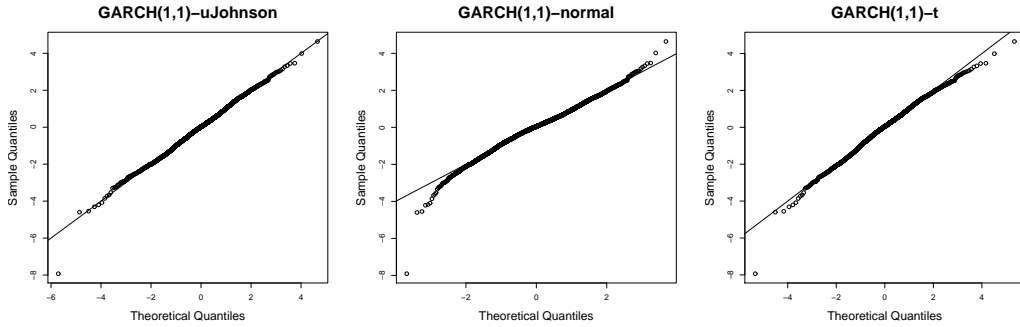


그림 3.5. KOSPI 수익률 자료의 표준화 잔차 QQ-Plot

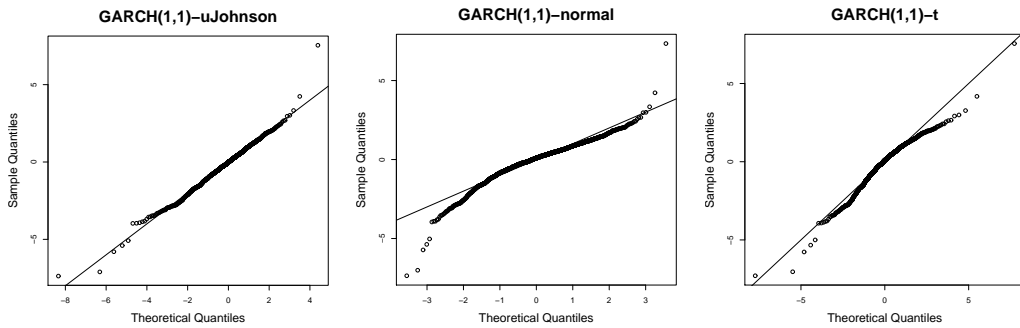


그림 3.6. KOSDAQ 수익률 자료의 표준화 잔차 QQ-Plot

표 3.2. KOSPI GARCH(1, 1) 모형의 모수 추정치

모형	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$
GARCH(1, 1)-uJohnson	0.098971	0.080780	0.840958	0.321927	0.238651
GARCH(1, 1)-normal	0.122556	0.101741	0.800936		
GARCH(1, 1)-t	0.117742	0.098473	0.807561	15.757895	

표 3.3. KOSDAQ GARCH(1, 1) 모형의 모수 추정치

모형	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$
GARCH(1, 1)-uJohnson	0.237319	0.133080	0.822107	0.583234	-0.244263
GARCH(1, 1)-normal	0.383785	0.116803	0.803662		
GARCH(1, 1)-t	0.274378	0.136884	0.815064	5.360770	

GARCH(1,1)-uJohnson 모형을 적합하였을 때, 최초 750일의 경우에 해당하는 모수들의 추정치를 나타내고 있다. 각 추정치들은 매 시점마다 새롭게 추정된다. 여기서, Student-t 분포의 경우 $\hat{\theta}$ 값은 자유도를 나타낸다.

그림 3.7과 그림 3.8은 GARCH(1, 1)-normal, GARCH(1, 1)-t, GARCH(1, 1)-uJohnson 모형을 사용하였을 때 KOSPI와 KOSDAQ의 추정된 VaR(99%)와 수익률을 함께 나타낸 후 초과수익률이 발생한 시점을 표시하였다. 세 가지 모형 모두 추정된 VaR의 형태는 비슷한 모습을 보이고 있다. KOSPI 보다 KOSDAQ의 경우 변동성이 더 크게 나타나고 있음을 알 수 있다.

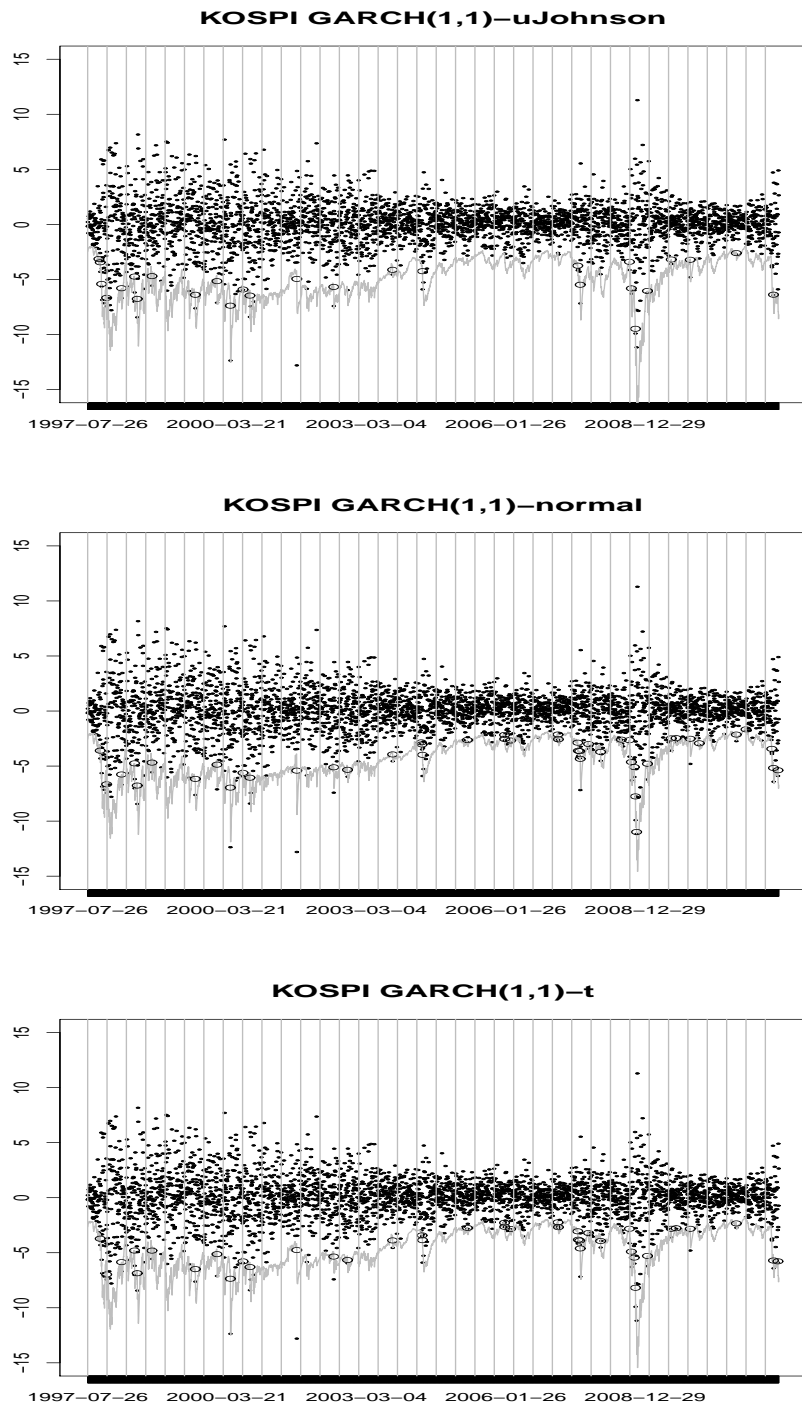


그림 3.7. GARCH(1,1) 모형에서 KOSPI VaR과 수익률

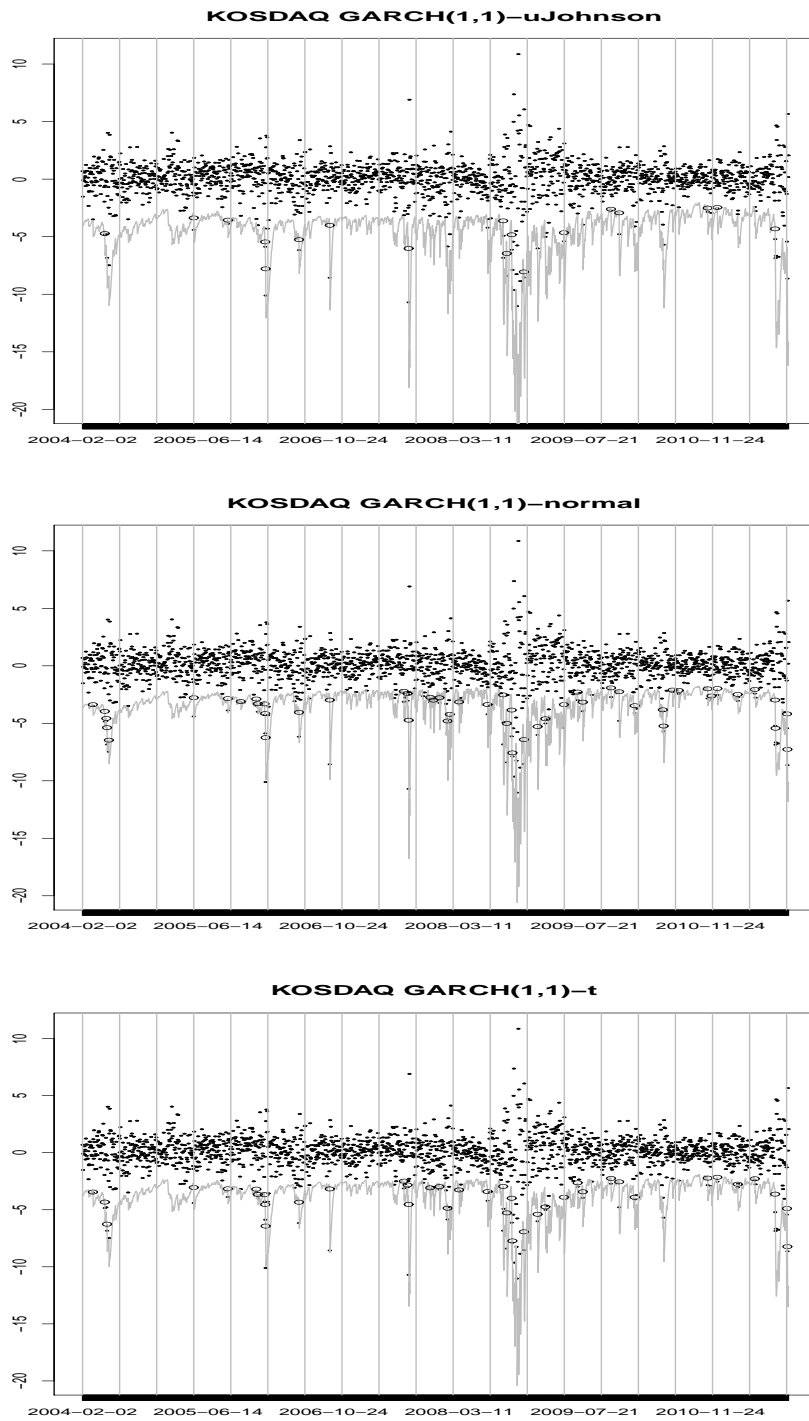


그림 3.8. GARCH(1,1) 모형에서 KOSDAQ VaR과 수익률

표 3.4. AIC 값

모형	KOSPI		KOSDAQ	
	최초 750일	전체	최초 750일	전체
GARCH(1, 1)-uJohnson	2262.019	16119.79	3188.440	9475.197
GARCH(1, 1)-normal	2268.159	16245.16	3249.802	9849.266
GARCH(1, 1)-t	2269.643	16240.25	3245.304	9810.394

표 3.5. KOSPI 실패율검정(유의수준 5%, Back-Testing 표본수: 3570)

신뢰수준(p)	신뢰구간	GARCH(1, 1)-uJohnson	GARCH(1, 1)-normal	GARCH(1, 1)-t
95.0%	$152 < N_f < 205$	194	203	218
97.5%	$70 < N_f < 108$	86	118	115
99.0%	$24 < N_f < 48$	27	46	40

표 3.6. KOSDAQ 실패율검정(유의수준 5%, Back-Testing 표본수: 1906)

신뢰수준(p)	신뢰구간	GARCH(1, 1)-uJohnson	GARCH(1, 1)-normal	GARCH(1, 1)-t
95.0%	$76 < N_f < 114$	99	118	131
97.5%	$34 < N_f < 62$	52	78	73
99.0%	$10 < N_f < 28$	18	51	40

표 3.7. 균집성검정(p -value)

모형	KOSPI			KOSDAQ		
	95.0%	97.5%	99.0%	95.0%	97.5%	99.0%
GARCH(1, 1)-uJohnson	0.7726	0.5197	0.5045	0.3424	0.5924	0.3450
GARCH(1, 1)-normal	0.6793	0.5939	0.6329	0.3963	0.4494	0.6744
GARCH(1, 1)-t	0.6783	0.6323	0.5968	0.4326	0.5731	0.5816

3.3. 모형비교

Akaike information criterion(AIC)를 통해 세 모형을 비교해 보았다. 표 3.4는 세 모형의 AIC 값을 보여준다. 최초 750일 자료와 전체 자료에 대해 AIC 값을 구해 보았다. KOSPI와 KOSDAQ 모두 unbounded Johnson 분포를 사용한 GARCH(1, 1)-uJohnson 모형의 AIC 값이 가장 작았다.

주어진 신뢰수준 p 에 대해 모형별 $\text{VaR}(p)$ 추정의 타당성을 실패율에 의한 검정을 통해 알 수 있다. 표 3.5와 표 3.6은 KOSPI와 KOSDAQ의 모형별 $\text{VaR}(p)$ 의 추정치를 초과하는 손실의 수, 즉, 실패 수를 보여준다. 2.4.1절에서 설명한 시점 t 에서의 손실률이 $\text{VaR}(p)$ 를 초과하는 횟수의 합을 실패수 N_f 로 하여, 이를 검정통계량으로 귀무가설 " H_0 : 실패율 = $1 - p$ "를 유의수준 5%에서 검정하였다. GARCH(1, 1)-uJohnson 모형의 경우 모든 신뢰수준 p 에서 실패수가 신뢰구간 안에 위치하고 있음을 확인할 수 있다. 하지만 GARCH(1, 1)-normal 모형의 경우 KOSPI에 대해서는 97.5%에서 KOSDAQ에 대해서는 모든 신뢰수준 p 에서 실패수가 신뢰구간의 오른쪽에 위치하여, $\text{VaR}(p)$ 를 과소추정하고 있다. GARCH(1, 1)-t 모형의 경우도 KOSPI에 대해서는 95%와 97.5%에서, KOSDAQ에 대해서는 모든 신뢰수준 p 에서 과소추정을 하고 있음을 확인할 수 있다.

본 논문에서 다루어진 세 가지 GARCH 모형을 이용하여 VaR을 추정할 때, 초과손실 발생간격들이 균집현상이 나타나는지를 알아보았다. 표 3.7은 초과손실이 발생하는 시점간격이 지수분포를 따른다는 귀무가설 하에서의 검정결과이다. KOSPI 및 KOSDAQ 수익률 자료를 세 모형에 적합시켰을 때, 세 가지 모형 모두 초과손실 발생간격이 지수분포를 따른다는 귀무가설을 기각하지 못한다. 즉 Christof-

fersen과 Pelletier (2004)이 다룬 미국 6개 상업은행 자료와는 달리 초과손실시점 간에 군집현상은 발생하지 않고 있음을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 GARCH(1,1) 모형을 이용해, 국내 주가지수인 KOSPI와 KOSDAQ의 수익률 자료의 VaR의 추정에 대한 사례분석을 실시하였다. 조건부수익률 분포로 정규분포와 Student-t 분포, unbounded Johnson 분포를 사용하여 추정하고자 하는 시점의 직전 3년(750일) 자료로부터 모수를 추정하여, 이로부터 VaR의 추정 값을 얻는 방법을 사용하여, 관심 있는 기간 동안의 VaR을 추정한 다음 그 결과를 살펴보았다.

QQ-plot을 살펴보았을 때 KOSPI와 KOSDAQ의 수익률 분포 모두 정규분포를 따르지 않음을 확인할 수 있었고, 조건부수익률 분포로 정규분포를 사용하여 GARCH(1,1) 모형을 적합한 후의 잔차가 정규분포를 따른다는 가정을 만족하지 않음을 확인할 수 있었다. 조건부수익률 분포로 Student-t 분포를 사용하여 GARCH(1,1) 모형을 적합한 후 잔차의 분포를 살펴보면 정규분포에 비해 나아진 모습을 보이거나 좌우비대칭을 반영하지 못하고 있음을 확인할 수 있다. 그에 비해 조건부수익률 분포로 unbounded Johnson 분포를 사용한 GARCH(1,1) 모형을 적합한 후 잔차의 분포를 살펴보면 Student-t 분포를 사용하였을 때 보다 좌우 비대칭성을 잘 반영하고 있음을 확인할 수 있다.

AIC(Akaike information criterion)을 이용하여 모형적합도를 비교하였을 때 KOSPI와 KOSDAQ 수익률자료 모두 정규분포와 Student-t 분포에 비해 unbounded Johnson 분포를 사용한 GARCH(1,1)-uJohnson 모형이 더 적합한 모형을 확인할 수 있다.

어떤 모형을 이용하여 VaR을 추정할 때, 추정된 VaR들이 초과하는 초과손실이 발생한 횟수인 총 실패수가 신뢰수준 p 에서 신뢰구간 안에 위치하고, 초과손실 발생시점들이 군집현상을 보이지 않아야 적절한 추정을 하였다고 판단할 수 있다. 실패율(failure proportion)방법과 군집성검정을 통해 사후검정한 결과 GARCH(1,1)-normal 모형과 GARCH(1,1)-t 모형의 경우 적절한 VaR의 추정이 이루어지지 않고 과소 추정하는 결과를 보여준다. 그에 비해 GARCH(1,1)-uJohnson 모형의 경우는 적절한 추정이 이루어지고 있음을 확인할 수 있다. 또한 세 가지 모형 모두 초과손실 시점간격이 군집현상이 발생하지 않는다. 즉 두 가지 검정을 통해 GARCH(1,1)-uJohnson을 이용하여 VaR을 추정할 때, 관심있는 신뢰수준 영역인 95% ~ 99%에서, 적절한 실패수를 가지고, 군집현상의 문제 또한 발생하지 않는다.

참고문헌

- 이재득 (2003). 한국의 선물가격 변동성과 비대칭성분석: GARCH, EGARCH, TARCH분석, <한국경제통상학회>, **21**, 145-170.
- 최필선 (2005). 새로운 다변량 분포함수를 이용한 GARCH 모형 추정, <財務研究>, **18**, 185-208.
- 황선영, 박진아 (2005). VaR(Value at Risk) for Korean financial time series, <한국데이터정보과학회지>, **16**, 283-288.
- 황선영, 최문선, 도종두 (2009). 사후검정(Back-testing)을 통한 다변량-GARCH 모형의 평가: 사례분석, <응용통계연구>, **22**, 261-270.
- Baillie, R. T. and Bollerslev, T. (1989). The message in daily exchange rates: A conditional variance tale, *Journal of Business and Economic Statistics*, **7**, 297-305.
- Berkowitz, J. and O'Brien, J. (2002). How accurate are Value-at-Risk models at commercial banks?, *The Journal of Financial*, **57**, 1093-1111.
- Bollerslev, T. (1987). A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return, *Review of Economics and Statistics*, **69**, 542-547.

- Choi, P. and Min, I. (2011). A comparison of conditional and unconditional approaches in Value-at-Risk estimation, *The Japanese Economic Review*, **62**, 99–115.
- Christoffersen, P. and Pelletier, D. (2004). Backtesting Value-at-Risk: A duration-based approach, *Journal of Financial Econometrics*, **2**, 84–108.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance*, **1**, 223–236.
- Hansen, B. E. (1994). Autoregressive conditional density estimation, *International Economic Review*, **35**, 705–730.
- Hsieh, D. A. (1989). Modeling heteroscedasticity in daily foreign exchange rates, *Journal of Business and Economic Statistics*, **7**, 307–317.
- Johnson, N. L. (1949). Systems of frequency curves generated by methods of translation, *Biometrika*, **36**, 149–176.
- Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models, *Journal of Derivatives*, **11**, 122–150.
- Theodossiou, P. (1998). Financial data and the skewed generalized t distribution, *Management Science*, **44**, 1650–1661.

GARCH Model with Conditional Return Distribution of Unbounded Johnson

Seunghyun Jung¹ · Jungjun Oh² · Sunggon Kim³

¹Department of Statistics, University of Seoul; ²Department of Statistics, University of Seoul

³Department of Statistics, University of Seoul

(Received November 10, 2011; Revised December 7, 2011; Accepted December 7, 2011)

Abstract

Financial data such as stock index returns and exchange rates have the properties of heavy tail and asymmetry compared to normal distribution. When we estimate VaR using the GARCH model (with the conditional return distribution of normal) it shows the tendency of the lower estimation and clustering in the losses over the estimated VaR. In this paper, we argue that this problem can be resolved through the adaptation of the unbounded Johnson distribution as that of the condition return. We also compare this model with the GARCH with the conditional return distribution of normal and student-t. Using the losses exceed the ex-ante VaR, estimates, we check the validity of the GARCH models through the failure proportion test and the clustering test. We find that the GARCH model with conditional return distribution of unbounded Johnson provides an appropriate estimation of the VaR and does not occur the clustering of violations.

Keywords: Clustering test, failure proportion test, GARCH model, Johnson Distribution, Value at Risk.

³Corresponding author: Associate Professor, Department of Statistics, University of Seoul, Siripdae-gil 13, Dongdaemun-gu, Seoul 130-743, Republic of Korea. E-mail: sgkim@uos.ac.kr