

## Variance Gamma 과정을 이용한 옵션 가격의 결정 연구

이현의<sup>1</sup> · 송성주<sup>2</sup>

<sup>1</sup>고려대학교 통계학과, <sup>2</sup>고려대학교 통계학과

(2011년 8월 9일 접수, 2011년 8월 10일 수정, 2011년 11월 7일 채택)

### 요약

블랙-숄츠 모형이 실제 기초자산의 움직임을 반영하지 못한다는 사실이 실증연구에 의하여 밝혀진 이후 기초자산의 움직임을 레비확률과정을 이용하여 모형화한 옵션가격결정 모형들이 그 대안 중 하나로 연구되어 왔다. 본 논문에서는 블랙-숄츠 모형의 대안으로 제시된 레비모형 중 Variance Gamma 모형이 국내 주식시장에서의 기초자산의 움직임을 블랙-숄츠 모형보다 충실히 재현해내는지 알아보고자 한다. 이를 위하여 Madan 등 (1998)의 연구에서와 같이 로그수익률의 확률밀도함수와 옵션 가격 결정식을 바탕으로 KOSPI 200자료를 이용하여 모수를 추정하고 우도비 검정을 실시하였다. 또한, 옵션 가격을 추정한 후 모형 간의 비교를 위하여 다양한 통계량을 계산하고, 회귀분석을 통하여 변동성 스마일 현상이 교정되는지를 살펴보고자 하였다. 연구결과로부터 Variance Gamma 모형 하에서 추정된 옵션 가격이 블랙-숄츠 모형 하에서 추정된 그것보다 더 시장가격과 가까우나, 이 모형도 변동성 스마일 현상을 해결해주지는 못함을 확인할 수 있었다.

주요어어: 블랙-숄츠 모형, 레비확률과정, Variance Gamma 확률과정, 옵션가격결정 모형.

### 1. 서론

1973년에 Black과 Scholes에 의해 제안된 블랙-숄츠 모형은 옵션 가격을 결정하는 문제에 있어서 오랜 기간 이론에서 뿐만 아니라 실무적으로도 많이 활용되어 왔다. 그러나 이 모형이 실제 기초자산의 움직임을 적절히 반영하지 못한다는 사실이 실증 연구에 의하여 밝혀졌다. 블랙-숄츠 모형은 주식가격의 로그 수익률이 정규분포를 따른다고 가정하였으나, 실제 로그 수익률의 분포는 정규분포보다 큰 첨도를 가지고 있다. 또한, 블랙-숄츠 모형에서는 변동성이 상수라고 가정하는데 반하여, 실제 금융자료에서는 내재변동성이 고정된 만기일에 대해 통화성(moneyness)에 따라 차이를 보이는 변동성 스마일(volatility smile) 현상이 나타나고 있다. 이러한 현상들이 발견되면서 블랙-숄츠 모형에서 사용되는 브라운 운동을 일반화하는 더 유동적인 분포의 필요성이 제기되었고, 기초자산의 움직임을 브라운 운동에 점프가 더해진 형태의 확률과정으로 모형화하는 점프확산모형(Jump Diffusion model)이 Merton (1976)에 의해 제안되었다. 그리고 점프확산모형을 포함하는 더 일반화된 레비모형들이 1990년대 이후 활발히 연구되어져 왔는데 Madan 등 (1998)의 Variance Gamma 모형, Carr 등 (2002)의 CGMY 모형 등이 그 예이다.

일반적으로 레비모형은 실제 시장에서 주식가격의 움직임을 블랙-숄츠 모형보다 더 충실히 재현해 내는 것으로 알려져 있다. Maekawa 등 (2008)는 Nikkei 225 지수의 로그 수익률의 분포가 정규분포보다

이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업이며 (No. 2011-0026070), 제 1저자 이현의의 석사학위논문 의 축약본임.

<sup>2</sup>교신저자: (136-701) 서울시 성북구 안암동 5-1, 고려대학교 통계학과, 부교수. E-mail: sjsong@korea.ac.kr

Kou (2002)가 제안한 점프확산모형에 더 근접하고, 블랙-숄즈 모형 가격과 Kou의 모형가격을 시장가격과 비교하여 Kou의 옵션 가격이 시장가격에 더 가까움을 보였다. 또한, Geman (2002)은 SPX 지수의 로그 수익률의 분포가 정규분포보다 CGMY 모형에 더 근접함을 보였다. 그러나 기초자산의 움직임을 레비확률과정을 이용하여 모형화 할 경우에는 확률밀도함수와 옵션가격의 결정식이 닫힌 해(closed form)의 형태로 존재하지 않는 경우가 많다는 단점이 있다. 그래서 레비모형의 경우 이론적인 옵션 가격을 결정하기 위한 모수 추정과 계산이 어려워지는 경향이 있으나 Variance Gamma 모형에서는 확률밀도함수와 옵션가격의 결정식이 닫힌 해의 형태로 존재하므로 모수의 추정과 계산이 다소 쉬워진다.

Madan 등 (1998)은 기초자산의 움직임이 Variance Gamma 모형을 따른다고 가정하고 로그 수익률의 확률밀도함수와 콜옵션 가격 결정식을 닫힌 해의 형태로 제시하였다. 또한, S&P500 선물옵션자료를 이용하여 Variance Gamma 모형가격이 블랙-숄즈 모형가격보다 시장가격에 더 가깝게 추정되며, 블랙-숄즈 모형가격과 시장가격의 간차가 통화성, 만기일, 그리고 통화성의 제곱과 유의한 상관관계가 있는데 반하여 Variance Gamma 모형은 이러한 상관관계를 감소시킬 수 있음을 보였다.

이에 본 논문에서는 Variance Gamma 모형이 국내 주식시장에서의 기초자산의 움직임을 블랙-숄즈 모형에 비하여 더 충실히 재현해내는지 알아보기 위해 KOSPI 200 지수 자료와 옵션 자료를 이용하여 분석해 보고자 한다. 실제확률측도와 위험중립측도 하에서 블랙-숄즈 모형과 Variance Gamma 모형에서의 최대우도추정량을 구하고 우도비 검정을 실시하였다. 실제확률측도는 시장에서 관측되는 확률측도를 의미하므로 이 측도에서의 우도비 검정은 주식시장에서 관측되는 기초자산의 움직임이 어떤 모형에 더 잘 적합되는가를 확인하고자 하는 것이고, 위험중립측도는 실제확률측도와 동치이면서 할인된 기초자산의 가격을 마팅계일로 만들어 옵션의 가격결정을 위해 사용되는 측도이므로 이 측도에서의 우도비 검정은 관측되는 옵션가격이 어떤 모형가격에 더 가까운지를 확인하고자 하는 것이다. 또한, 최대우도추정량을 이용하여 Variance Gamma 모형과 블랙-숄즈 모형에서의 옵션가격을 구하고 APE(average absolute error as a percentage of the mean price), AAE(average absolute error), ARPE(average relative percentage error) 통계량을 계산하여 Variance Gamma 모형이 블랙-숄즈 모형보다 옵션 가격을 더 잘 추정하는지를 확인하였다. 마지막으로 시장가격과 모형가격의 간차를 종속변수로 하고, 통화성, 통화성의 제곱 그리고 만기일을 설명변수로 하는 회귀분석을 시행하여 Variance Gamma 모형에서 변동성 스마일 현상이 교정되는지를 살펴보았다.

## 2. Variance Gamma 모형

레비확률과정은 우연속이고 좌극한이 존재하고, 0에서 시작하는 확률과정 중에서 각 증분이 독립이고 정상적(stationary)이며 확률적으로 연속인 것을 일컫는다. 이러한 레비확률과정은 무한분해가능(infinitely divisibility)하다는 성질이 있으며, 식 (2.1)에 주어진 Lévy-Khintchine 공식을 만족하는  $\psi(u)$ 를 레비확률과정의 특성지수(characteristic exponent)라고 한다.

$$\psi(u) = \log E[\exp(iuX)] = i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(iux) - 1 - iux1_{|x|<1}) k(dx). \quad (2.1)$$

위 식에서  $\gamma \in R$ ,  $\sigma^2 \geq 0$ 이고,  $k$ 는  $R \setminus \{0\}$ 에서의 측도로서  $\int_{-\infty}^{\infty} (1 \wedge x^2)k(dx) < \infty$ 을 만족한다. 이 때  $(\gamma, \sigma^2, k(dx))$ 를 레비 triplet이라고 하며, 측도  $k$ 는 레비측도라고 부른다.

모수가  $\sigma, \nu, \theta$ 인 Variance Gamma 과정은 레비 triplet  $(\gamma, 0, k(dx))$ 을 갖고 있으며,  $\gamma$ 와  $k(dx)$ 의 형태는 식 (2.2), (2.3)과 같다.

$$\gamma = \frac{-C(G(\exp(-M) - 1) - M(\exp(-G) - 1))}{MG}. \quad (2.2)$$

단,  $C = 1/\nu$ ,  $G = (\sqrt{1/4\theta^2\nu^2 + 1/2\sigma^2\nu} - 1/2\theta\nu)^{-1}$ ,  $M = (\sqrt{1/4\theta^2\nu^2 + 1/2\sigma^2\nu} + 1/2\theta\nu)^{-1}$ 이다.

$$k_X(x)dx = \frac{\exp(\theta x/\sigma^2)}{\nu|x|} \exp\left(-\frac{\sqrt{2/\nu + \theta^2/\sigma^2}}{\sigma}|x|\right) dx. \quad (2.3)$$

식 (2.3)에서  $\theta = 0$ 인 경우에는 레비측도가 0에 대해서 대칭이 되며, 이는 Madan과 Milne (1991)이 언급한 대칭적인 Variance Gamma 과정과 동일하다.

또, Variance Gamma 과정  $X(t; \sigma, \nu, \theta)$ 은 추세가  $\theta$ 이고 변동성이  $\sigma$ 인 브라운 운동  $b(t; \theta, \sigma)$ 과 평균이 1인 감마과정  $\gamma(t; 1, \nu)$ 에 의하여

$$X(t; \sigma, \nu, \theta) = b(\gamma(t; 1, \nu); \theta, \sigma)$$

와 같이 표현될 수 있다. 이 때, 평균이  $\mu$ 이고 분산이  $\nu$ 인 감마과정  $\gamma(t; \mu, \nu)$ 은 시간구간  $(t, t+h)$ 에서의 두 감마과정의 독립증분으로 정의되며  $g = \gamma(t+h; \mu, \nu) - \gamma(t; \mu, \nu)$ 의 확률밀도함수는 평균이  $\mu h$ 이고 분산이  $\nu h$ 인 감마 밀도함수와 동일하다. 즉, Variance Gamma 과정은 브라운 운동을 감마과정에 의해 주어지는 시간에서 평가함으로써 얻어질 수 있으며, 브라운 운동의 변동성  $\sigma$ , 시간을 변형시켜주는 역할을 하는 감마과정의 분산  $\nu$ , 브라운 운동의 추세  $\theta$ 라는 세 모수를 갖게 된다. 이 세 모수 중  $\theta$ 는 분포의 왜도를 조절하고,  $\nu$ 는 첨도를 결정한다.

시간  $t$ 에서 Variance Gamma 과정,  $X(t)$ 의 확률밀도함수는 시간에 변화를 주는 감마과정  $g$ 에서의 조건부 분포인 정규분포와 감마과정의 결합 밀도함수를  $g$ 에 대한 적분을 통해 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$f_{X(t)}(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi g}} \exp\left(-\frac{(x-\theta g)^2}{2\sigma^2 g}\right) \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \exp\left(-\frac{g}{\nu}\right)}{\nu^{\frac{t}{\nu}} \Gamma\left(\frac{t}{\nu}\right)} dg. \quad (2.4)$$

이제, 금융시장에서의 기초자산의 모형화를 생각해보자. 기초자산의 움직임이 Variance Gamma 과정을 따를 때, 그 확률과정은 블랙-숄즈 모형에서 브라운 운동의 역할을 Variance Gamma 과정으로 대체함으로써 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S(t) = S(0) \exp(mt + X(t; \sigma_s, \nu_s, \theta_s) + w_s t), \quad (2.5)$$

여기서 첨자  $s$ 는 실제확률측도에서의 모수를 의미하고,  $m$ 은 이 확률측도에서의 평균 주식 수익률이다. 또한,  $w_s = 1/\nu_s \ln(1 - \theta_s \nu_s - \sigma_s^2 \nu_s / 2)$ 으로 이는  $E(S(t))$ 를  $S(0) \exp(mt)$ 로 만들어주는 역할을 한다.

위험중립측도 하에서는 할인된 주가가 마팅게일(martingale)이 되며, 이 측도 하에서는 평균 주가 수익률이 복리 이자율  $r$ 이 된다.

$$S(t) = S(0) \exp(rt + X(t; \sigma_{RN}, \nu_{RN}, \theta_{RN}) + w_{RN} t), \quad (2.6)$$

여기서 첨자 RN은 위험중립 모수를 의미하며,  $w_{RN} = 1/\nu_{RN} \ln(1 - \theta_{RN} \nu_{RN} - \sigma_{RN}^2 \nu_{RN} / 2)$ 으로 이는  $E(S(t))$ 를  $S(0) \exp(rt)$ 로 만들어준다.

기초자산이 Variance Gamma 과정을 따를 때, 로그 수익률의 밀도함수는 식 (2.4)를 계산함으로써 얻어지며 이는 다음의 정리 2.1에 제시되어있다.

**정리 2.1 (Madan 등, 1998)** 기초자산의 가격이 Variance Gamma 과정을 따를 때, 로그 리턴  $z = \ln(S(t)/S(0))$ 에 대한 밀도함수는 다음과 같다. 이때,  $S(t)$ 와  $S(0)$ 는 식 (2.5)에서 정의된 바와 같다.

$$h(z) = \frac{2 \exp(\theta x/\sigma^2)}{\nu^{\frac{t}{\nu}} \sqrt{2\pi} \sigma \Gamma(t/\nu)} \left(\frac{x^2}{2\sigma^2/\nu + \theta^2}\right)^{\frac{t}{2\nu} - \frac{1}{4}} \times K_{\frac{t}{\nu} - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{x^2 \left(\frac{2\sigma^2}{\nu} + \theta^2\right)}\right), \quad (2.7)$$

여기서  $K$ 는 수정된 제 2종 베셀함수이며,  $x = z - mt - t/\nu \ln(1 - \theta\nu - \sigma^2\nu/2)$ 이다. 단, 위의 밀도함수에서의 Variance Gamma 모수는 실제확률측도에서의 모수이다.

행사가가  $K$ , 만기일이  $T$ 인 유럽형 콜 옵션의 가격은 옵션의 이윤 함수(payload function)  $\max(S(t) - K, 0)$ 을 위험중립과정에서 기댓값을 취하고, 연속 복리 이자율  $r$ 로 할인을 하여 구해진다. Variance Gamma 과정 하에서의 콜 옵션의 가격 결정식은 다음의 정리 2.2에 제시되어져있다.

**정리 2.2 (Madan 등, 1998)** 기초자산의 움직임이 위험중립측도 하에서 Variance Gamma 과정을 따를 때, 유럽형 콜 옵션의 가격은 다음과 같이 닫힌 해의 형태로 표현된다. 이때,  $S(t)$ 와  $S(0)$ 는 식 (2.6)에서 정의된 바와 같다.

$$C(S(0); K, t) = S(0)\Psi\left(d\sqrt{\frac{1-c_1}{\nu}}, (\alpha+s)\sqrt{\frac{\nu}{1-c_1}}, \frac{t}{\nu}\right) - K \exp(-rt)\Psi\left(d\sqrt{\frac{1-c_2}{\nu}}, \alpha s\sqrt{\frac{\nu}{1-c_2}}, \frac{t}{\nu}\right). \quad (2.8)$$

단,  $d = 1/s[\ln(S(0)/K) + rt + t/\nu \ln((1-c_1)/(1-c_2))]$ ,  $\alpha = \zeta s$ ,  $c_1 = \nu(\alpha+s)^2/2$ ,  $c_2 = \nu\alpha^2/2$ 이며  $\zeta = -\theta/\sigma^2$ ,  $s = \sigma/\sqrt{1 + (\theta/\sigma)^2\nu/2}$ 이다. 또한,

$$\begin{aligned} \Psi(a, b, \gamma) = & \frac{c^{\gamma+\frac{1}{2}} \exp(\text{sign}(a)c)(1+u)^\gamma}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\gamma)\gamma} K_{r+\frac{1}{2}}(c)\Phi\left(\gamma, 1-\gamma, 1+\gamma; \frac{1+u}{2}, -\text{sign}(a)c(1+u)\right) \\ & - \text{sign}(a) \frac{c^{\gamma+\frac{1}{2}} \exp(\text{sign}(a)c)(1+u)^{1+\gamma}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\gamma)(1+\gamma)} K_{r-\frac{1}{2}}(c)\Phi\left(1+\gamma, 1-\gamma, 2+\gamma; \frac{1+u}{2}, -\text{sign}(a)c(1+u)\right) \\ & + \text{sign}(a) \frac{c^{\gamma+\frac{1}{2}} \exp(\text{sign}(a)c)(1+u)^\gamma}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\gamma)\gamma} K_{r-\frac{1}{2}}(c)\Phi\left(\gamma, 1-\gamma, 2+\gamma; \frac{1+u}{2}, -\text{sign}(a)c(1+u)\right), \end{aligned}$$

여기서  $\Phi(\alpha, \beta, \gamma; x, y) = \Gamma(\gamma)/\{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)\} \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta} \exp(uy) du$ ,  $\text{sign}(a) = \begin{cases} -1, & a < 0, \\ 0, & a = 0, \\ 1, & a > 0, \end{cases}$   $c_1 = |a|\sqrt{2+b^2}$  그리고  $u = b/\sqrt{2+b^2}$ 이다.

### 3. 실증분석

#### 3.1. Variance Gamma 모형에서의 모수 추정

기초자산의 가격이 어떤 확률과정을 더 잘 따르는지 살펴보기 위하여 로그 정규분포, 대칭적인 Variance Gamma 그리고 Variance Gamma의 밀도함수를 이용하여 최대우도추정량을 구하고, 우도비 검정을 실시하였다. 사용된 자료는 2008년 1월부터 2009년 12월까지 총 503일 간의 일별 KOSPI 200지수의 종가자료이다. 기초자산이 Variance Gamma 과정을 따르는 경우에는 식 (2.7)에 제시된 밀도함수를 이용하여 모수를 추정하였으며, 대칭적인 Variance Gamma를 따르는 경우에는 동일한 밀도함수에서  $\theta$ 를 0으로 놓은 후 추정하였다. 세 가지 모형에서의 모수와 로그 우도는 표 3.1에 제시되어 있다. 각 모수에 대해  $t$ -검정을 하여  $p$ -value가 .01이상이고 .05미만의 값을 갖는 경우에는 \* 표시를 하였고,  $p$ -value가 .01이하인 경우에는 \*\* 표시를 하였다.

표 3.1. 블랙-숄즈, 대칭적 Variance Gamma 그리고 Variance Gamma 하에서의 일별 로그 수익률을 이용한 최대우도추정량

	블랙-숄즈	대칭적인 Variance Gamma	Variance Gamma
$m$	0.068	0.253	0.272
$s$	0.335*	0.327**	0.328**
$\nu$		0.0037**	0.0037**
$\theta$			0.0839
$\ln L$ (로그우도)	1221.292	1267.626	1267.47

표 3.1을 통해 볼 수 있듯이 변동성은 대칭적인 Variance Gamma와 Variance Gamma가 0.327~0.328로 낮으며, 블랙-숄즈가 0.335로 높음을 확인 할 수 있다. 침도에 영향을 주는 모수  $\nu$ 는 대칭적인 Variance Gamma와 Variance Gamma의 경우 모두 .0037이고 검정결과 0과 유의미하게 차이를 확인할 수 있다.

로그 우도를 이용한 우도비 검정결과, 유의확률  $< 0.01$ 로 블랙-숄즈 모형보다 대칭적인 Variance Gamma 모형이 일별 로그 수익률에 더 적합함을 볼 수 있었다. 또한, Variance Gamma의 로그 우도가 대칭적인 Variance Gamma에 비하여 향상되지 않았으며, 모수  $\theta$ 가 0과 유의미하게 다르지 않다. 이로부터 KOSPI 200 지수가 통계적으로 블랙-숄즈 모형보다 대칭적 Variance Gamma를 더 잘 따른다고 할 수 있으나, 대칭적인 Variance Gamma 확률과정보다 Variance Gamma 확률과정을 더 잘 따른다는 결론은 내릴 수 없다.

위험중립측도 하에서는 각 주별로 모수의 최대우도추정량을 구하였다. 실제확률측도에서는 주식의 일별 증가를 이용하므로 데이터의 양이 많지 않으나, 위험중립측도에서는 식 (3.1)과 같이 옵션가격을 이용하여 우도를 계산하므로 훨씬 많은 양의 데이터를 사용하게 된다. 그래서 1주일 단위로 보더라도 충분한 데이터가 존재하게 되어 추정과 검정을 주단위로 실시하였다. 최대우도추정량은 Jacquier와 Jarrow (1995), Elliott 등 (1995)과 Madan 등 (1998)에서 사용된  $w_i = \hat{w}_i \exp(\eta \epsilon_i - \eta^2/2)$ 의 오차 모형을 채택하여 구하였으며, 식에서  $w_i$ 는  $i$ 번째 옵션 가격이고,  $\hat{w}_i$ 은 옵션 가격 결정식을 이용하여 구해진  $i$ 번째 모형가격이다. 또한,  $M$ 은 관측치의 개수이고  $\epsilon_i$ 는 평균이 0, 분산이 1인 정규분포를 따르며 서로 독립인 확률변수이다. 위의 오차 모형으로부터 최대우도추정량은 다음의 식을 최소화하는 모수가 된다 (자세한 계산은 Madan 등 (1998) 참조).

$$k = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\ln(w_i) - \ln(\hat{w}_i))^2}.$$

이때,  $w_1, \dots, w_M$ 의 로그우도는 다음과 같다.

$$\ln L = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \left( \frac{\ln(w_i) - \ln(\hat{w}_i)}{\eta} + \frac{\eta}{2} \right)^2 - \frac{M \ln(2\pi)}{2} - M \ln \eta - \sum_{i=1}^M \ln(w_i), \quad (3.1)$$

여기서  $\eta = \sqrt{2(\sqrt{1+k^2} - 1)}$ 이다.

위험중립측도 하에서 모수의 평균과 표준편차는 표 3.2에 제시되어있다. 평균 위험중립 변동성은 로그 정규분포의 경우에는 0.319이며, 대칭적인 Variance Gamma와 Variance Gamma의 경우에는 각각 0.307과 0.311이었다. 위험중립측도 하에서 기초자산이 블랙-숄즈, 대칭적인 Variance Gamma 그리고 Variance Gamma 세 모형 중 어느 모형을 따르는지 살펴보기 위하여 식 (3.1)을 이용하여 우도비 검정을 실시하였다. 그 결과는 표 3.3에 제시되어 있다. 귀무가설을 블랙-숄즈, 대립가설을 대칭적인 Variance Gamma로 하는 우도비 검정을 총 105주의 데이터에 대해 실시한 결과 1% 유의수준에서

표 3.2. 위험중립측도 하에서의 최대우도추정량

	모수	평균	표준편차
블랙-숄츠	$\sigma$	0.319	0.133
대칭적인 Variance Gamma	$\sigma$	0.307	0.125
	$\nu$	0.007	0.001
Variance Gamma	$\sigma$	0.311	0.129
	$\nu$	0.040	0.111
	$\theta$	0.483	0.280

표 3.3. 위험중립측도 하에서의 우도비 검정 결과

대립가설	귀무가설	
	블랙-숄츠	대칭적인 Variance Gamma
대칭적인 Variance Gamma	63.54%	
Variance Gamma	97.92%	95.83%

표 3.4. 내표본에서 모형의 성능을 비교하기 위한 통계량

	ARPE	APE	AAE
블랙-숄츠	1.263	0.122	1.713
Variance Gamma	0.694	0.098	1.376

63.54%가 기각되었다. 또한, 귀무가설을 블랙-숄츠, 대립가설을 Variance Gamma로 하는 우도비 검정 결과 1% 유의수준에서 97.92%가 기각되었다. 특히, 귀무가설을 대칭적인 Variance Gamma, 대립가설을 Variance Gamma로 하는 검정을 한 결과 1% 유의수준에서 95.83%가 기각됨을 확인 할 수 있다. 즉, 우도비 검정 결과 위험중립측도 하에서 기초자산이 Variance Gamma 과정을 따른다고 결론 내릴 수 있다.

### 3.2. 옵션 가격 추정의 성능 비교

두 모형에서 옵션 가격추정의 성능을 비교하기 위하여 크게 두 가지를 고려하여 보았다. 우선, 앞에서 추정된 모수를 이용하여 세 모형에서 옵션 가격을 추정하고, 모형 비교를 위하여 ARPE, APE, AAE 통계량을 계산하였다. 각각의 통계량은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \text{ARPE} &= \frac{1}{\text{옵션의 수}} \sum \frac{|\text{시장가격} - \text{모형가격}|}{\text{시장가격}}, \\ \text{APE} &= \frac{1}{\text{옵션 가격의 평균}} \sum \frac{|\text{시장가격} - \text{모형가격}|}{\text{옵션의 수}}, \\ \text{AAE} &= \sum \frac{|\text{시장가격} - \text{모형가격}|}{\text{옵션의 수}}. \end{aligned}$$

또한, Variance Gamma 모형이 블랙-숄츠 모형의 문제로 꼽히는 변동성 스마일의 문제 등을 교정해주는지 확인하기 위하여 가격오차를 종속변수로 하고, 통화성, 통화성의 제곱과 만기일을 설명변수로 하는 회귀분석을 실시하였다. 그리고 외표본에서의 성능을 알아보기 위하여, 앞에서 추정된 105개의 모수 중 2009년 12월 마지막 주의 자료에서 추정된 모수를 이용하여 2010년 1월 첫째 주의 옵션 가격을 추정하고, 모형의 비교를 위하여 앞에서 언급한 세 통계량을 계산하였다.

105개의 모수 추정량을 이용하여 105주 동안의 옵션의 모형가격을 계산한 후 얻은 통계량은 표 3.4에 제시되어 있다. ARPE 통계량의 경우 Variance Gamma 모형은 블랙-숄츠 모형에 비하여 45%정도 낮

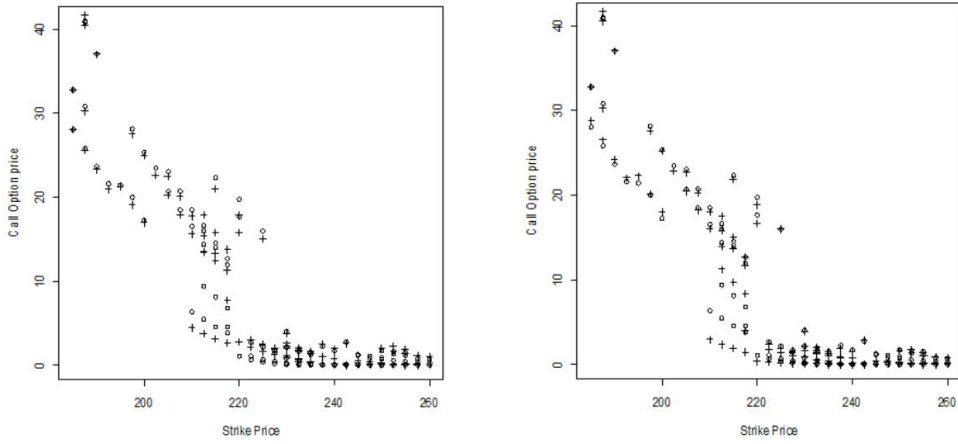


그림 3.1. 내표본에서 블랙-숄즈 모형(왼쪽)과 Variance Gamma 모형(오른쪽)의 행사가격에 따른 모형가격(+)과 시장가격(○)의 산점도

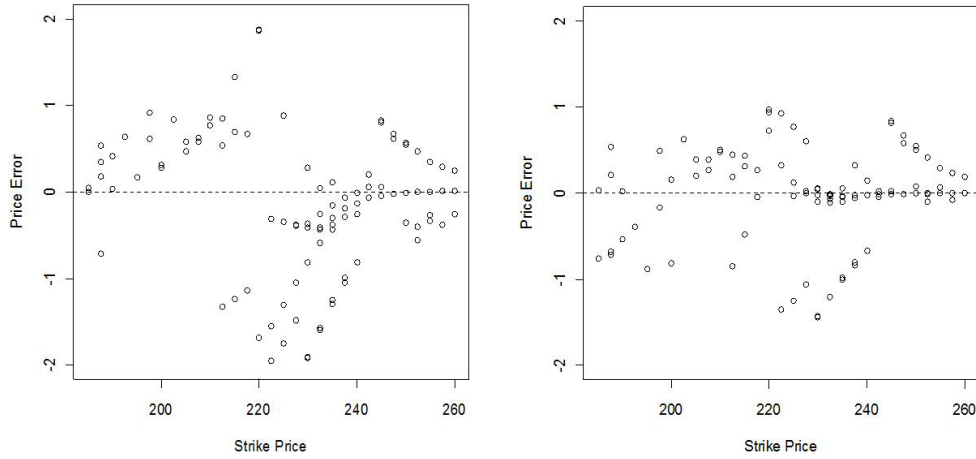


그림 3.2. 내표본에서 블랙-숄즈 모형(왼쪽)과 Variance Gamma 모형(오른쪽)에서의 행사가격에 따른 잔차의 산점도

아졌으며, APE와 AAE 통계량 역시 블랙-숄즈 모형에 비하여 Variance Gamma의 경우에 값이 더 작은 경향이 있었다. 이로 보아 블랙-숄즈 모형보다 Variance Gamma 모형에서 더 나은 적합이 이루어졌음을 알 수 있다.

그림 3.1은 총 41,929개의 옵션 가격 중 100개를 임의 추출한 후 그려진 산점도이다.  $x$ 축은 행사가격,  $y$ 축은 콜 옵션 가격을 나타내고, 시장가격(○)과 계산된 모형 가격(+)이 표시되어 있다. 육안으로 확인할 수 있듯이 세 모형 가격 모두 시장가격과 근접함을 볼 수 있다. 그러나 블랙-숄즈 모형에서는 행사가가 200에서 220 사이인 경우에 시장 가격보다 다소 과소추정되는 경향이 있으며, Variance Gamma 모형 가격은 블랙-숄즈 모형에서의 이러한 경향이 어느 정도 상쇄되었음을 확인할 수 있다.

그림 3.2는 모형의 잔차(시장가격-모형가격)의 산점도로  $x$ 축은 행사가격,  $y$ 축은 잔차를 나타낸다. 전반적으로 Variance Gamma 모형의 잔차가 블랙-숄즈 모형의 잔차에 비하여 작은 경향이 있음을 확인할 수 있다. 또한, 행사가격이 200에서 220 사이에서는 블랙-숄즈 모형의 경우에 양의 잔차가 나타나

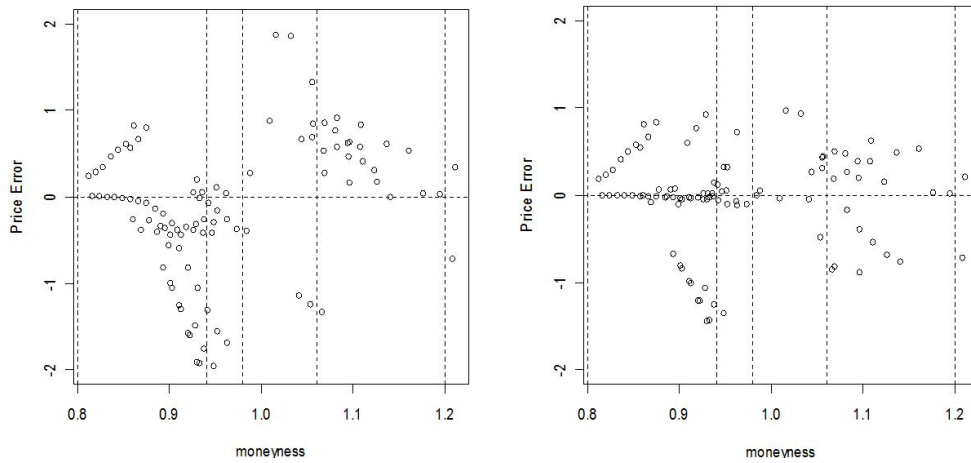


그림 3.3. 내표본에서 블랙-숄즈 모형(왼쪽)과 Variance Gamma 모형(오른쪽)에서의 통화성에 따른 잔차의 산점도

는데, 이는 앞에서 언급한 대로 그 부근에서 모형가격이 실제 시장가격에 비하여 과소추정된 결과이다. 이러한 경향이 Variance Gamma 모형에서 줄어듦을 산점도를 통해 쉽게 확인할 수 있다. 이로부터 Variance Gamma 모형에서 블랙-숄즈 모형보다 더 잘 적합됨을 알 수 있다.

옵션의 기초자산 KOSPI 200 지수를 행사가격으로 나눈 통화성에 따른 모형의 잔차를 살펴해보도록 하겠다. Buraschi와 Jackwerth (2001)을 참고하여 통화성은 그 값을 기준으로 5가지로 구분하였다. 통화성이 0.94~0.97 사이일 때를 외가격, 0.97~1.03 사이일 때를 등가격, 1.03~1.06 사이일 때를 내가격, 1.06이상일 때를 심내가격, 0.8~0.94일 때를 심외가격이라고 정의한다. 그림 3.3은 세 모형의 통화성에 따른 잔차 산점도이다. 그림을 통해서 볼 수 있듯이, 세 모형 모두 심외가격 구간에서 가격이 과소 혹은 과대추정되는 경향이 나타난다. 심외가격 구간에서 통화성이 0.9보다 큰 경우에는 가격이 과대추정되는 경향이 많으며, 0.9보다 작은 경우에는 가격이 과소추정되는 경향이 많은데, Variance Gamma 모형의 경우에 이러한 경향이 다소 줄어들음을 볼 수 있다. 그리고 내가격 구간에서는 블랙-숄즈 모형은 가격을 과소추정하는 경향이 많은 반면에 Variance Gamma 모형은 그러한 경향을 다소 줄임을 알 수 있다.

위와 같은 사실로 미루어보아 Variance Gamma 모형을 이용하는 경우에 블랙-숄즈 모형에 비하여 통화성에 따른 변동성 스마일 현상이 다소 줄어들 것을 기대할 수 있다. 실제 통계적으로 Variance Gamma 모형에서 이와 같은 현상이 줄어들는지 확인하기 위하여 모형의 잔차를 종속변수로 하고, 통화성, 통화성의 제곱 그리고 만기일을 설명변수로 하는 선형회귀분석을 시행하였다. Bates (1995)는 변동성 스마일 현상이 통화성과 관련이 있음을 보여주었고, 일반적으로 외가격, 내가격 구간에서 그리고 만기일이 길어질수록 변동성이 커지는 것으로 알려져 있기 때문에 통화성, 통화성의 제곱과 만기일을 설명변수로 선택하였다. 선형회귀분석 결과 각 설명변수의 회귀계수가 유의하지 않다면, 블랙-숄즈 모형에서 문제가 되었던 변동성 스마일 현상이 Variance Gamma 모형을 도입함으로써 다소 해결이 된다고 할 수 있다.

회귀분석의 결과는 표 3.5에 제시되어 있으며, 표에서 \*표시는 회귀계수에 대한 검정결과  $p$ -value가 .01이상이고 .05미만의 값을 갖는 경우를, \*\*표시는  $p$ -value가 .01이하의 값을 갖는 경우를 나타낸다. 표를 살펴보면,  $R^2$  통계량이 14.22%, 13.28%로 두 모형 모두 모형가격과 시장가격의 잔차의 14%정도가 세 설명변수(통화성, 통화성의 제곱, 만기일)에 의하여 설명됨을 알 수 있다. 또한, 두 모형에서 모



표 3.5. 회귀분석 결과표

	블랙-숄츠	Variance Gamma
상수	-8.999	-4.475
만기일	8.280**	4.315**
(통화성) <sup>2</sup>	-0.583**	-0.332**
통화성	0.189**	-0.960**
Adj-R <sup>2</sup>	0.142	0.133
F	202.3*	188.8*

표 3.6. 2009년 12월 마지막 주 모수 추정 결과

	$\sigma$	$\nu$	$\theta$
블랙-숄츠	0.182		
Variance Gamma	0.189	0.009	0.510

표 3.7. 외표본에서 모형의 비교를 위한 통계량

	ARPE	APE	AAE
블랙-숄츠	0.081	0.039	0.606
Variance Gamma	0.074	0.031	0.483

두 설명변수가 .01 수준에서 유의함으로써 0과 유의하게 다르다. 이는 모형가격과 시장가격의 잔차가 이들 설명변수와 연관되어 있음을 시사한다. 위와 같은 회귀분석 결과로 보아, 블랙-숄츠 모형의 단점으로 언급되는 변동성 스마일 현상이 Variance Gamma 모형에서 교정되지 않았음을 확인할 수 있다. 이와 같은 결과는 S&P 500 자료를 이용하여 동일한 회귀분석을 실시한 Madan 등 (1998)에서의 결과와 상이하다. Madan 등 (1998)은 Variance Gamma 모형으로부터 얻은 모형가격과 시장가격의 잔차가 블랙-숄츠 모형에서 얻은 그것과 달리 위의 세 설명변수와 연관되지 않음을 보이며 미국 주식시장에서 Variance Gamma 모형이 블랙-숄츠 모형의 단점 중 하나인 변동성 스마일 현상을 교정할 가능성이 있음을 시사하였다.

회귀분석을 실시한 후 잔차의 등분산성과 임의성을 진단하기 위한 회귀진단을 실시하였는데, 잔차의 등분산성을 검정해주는 Breusch-Pagan 검정에서 두 모형 모두 유의확률이 .05보다 크게 나왔고 Durbin-Watson 통계량은 두 모형 모두 1과 2사이의 값을 가지므로 잔차의 임의성이 어느 정도 만족됨을 확인할 수 있었다. 잔차와 적합값의 산점도에서도 특별한 경향성이 발견되지 않았다.

이제까지는 추정된 모수를 이용하여 세 모형의 옵션 가격을 계산 후, 이를 이용하여 모형의 성능을 비교하였다. 다음으로는 2009년 12월 마지막 주의 자료를 이용하여 추정된 모수로 2010년 1월 첫째 주의 자료를 이용하여 모형의 적합성을 파악해 보도록 하겠다.

2010년 1월 첫째 주의 옵션 가격 추정을 위해 사용한 모수는 표 3.6과 같다. 이 모수를 이용하여 세 모형의 옵션 가격을 계산하고 모형의 비교를 위한 통계량 ARPE, APE, AAE를 계산한 결과가 표 3.7에 제시되어 있다. Variance Gamma 모형은 블랙-숄츠 모형보다 세 통계량 모두 낮은 값을 가지고 있는데, 특히, AAE 통계량의 경우에는 Variance Gamma 모형에서의 그 값이 블랙-숄츠 모형에서의 그것보다 약 20%정도 낮다. 이로 보아 Variance Gamma 모형이 다른 모형보다 상대적으로 시장가격에 더 잘 적합되는 경향이 있다고 할 수 있다.

그림 3.4는 2010년 1월 첫째 주의 옵션 중에서 만기일이 69일(.1835년), 154일(.4219년)인 경우를 선택하여 그린 산점도이다. 그림을 통해 시장가격(○), 블랙-숄츠 모형가격(♯), Variance Gamma 모

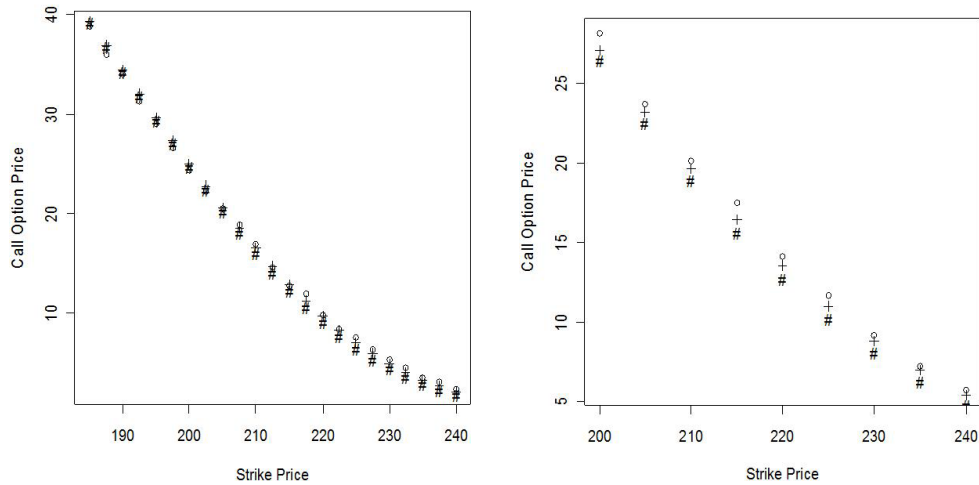


그림 3.4. 외표본에서 블랙-숄즈 모형과 Variance Gamma 모형의 행사가격에 따른 블랙-숄즈 모형가격(#), Variance Gamma 모형가격(+)과 시장가격(○)의 산점도: 왼쪽은 만기일이 69일, 오른쪽은 만기일이 154일

형가격(+의 차이를 확인 할 수 있다. 만기일이 69일인 경우에는 블랙-숄즈 모형 가격과 Variance Gamma의 모형 가격 모두 시장가격과 큰 차이가 없음을 볼 수 있다. 그러나 만기일이 상대적으로 긴 154일인 경우에는 블랙-숄즈 모형가격과 Variance Gamma 모형가격이 모두 시장가격보다 과소추정된 경향이 있지만 그 경향성이 Variance Gamma 모형에서 줄어드는 경향이 있음을 확인 할 수 있다. 한편, 다른 외표본에서의 성능확인을 위해 1월 첫째 주 자료를 가지고 모수를 추정한 다음 1월 둘째 주 자료에 적용해보기도 하였는데 ARPE, APE, AAE 통계량의 값들이 약간 낮아졌으나 전반적으로 위의 결과와 비슷한 경향을 보였다.

이제까지의 결과를 통해 Variance Gamma 모형이 블랙-숄즈 모형보다 시장가격을 더 정확히 적합해주는 경향이 있다는 것을 확인 할 수 있다. 그러나 회귀분석 결과로 보아, Variance Gamma 모형이 블랙-숄즈 모형의 단점으로 꼽히는 변동성 스마일 현상을 교정해주지는 못하는 것으로 판단된다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 블랙-숄즈 모형보다 기초자산의 움직임에 더 충실히 재현해내는 것으로 알려진 레비모형 중에서 Variance Gamma 모형을 KOSPI 200 자료에 적합 시켜 보았다. 자료를 적합 시키고 우도비 검정을 실시한 결과, 위험중립측도가 아닌 실제확률측도에서 KOSPI 200은 블랙-숄즈모형보다 대칭적인 Variance Gamma 과정을 더 잘 따르고, 위험중립측도 하에서는 Variance Gamma 모형을 따름을 확인 할 수 있었다. 또한, 위험중립측도에서 Variance Gamma 모형의 모수를 2008년 1월부터 2009년 12월 까지 총 105주의 자료를 이용하여 최대우도추정법으로 추정하고 모형 가격을 계산한 결과, Variance Gamma의 모형가격이 블랙-숄즈 모형 가격보다 내표본과 외표본의 경우 모두 실제 시장가격과 더 가까움을 확인할 수 있었다. 그러나 통화성, 통화성의 제곱, 그리고 만기일을 설명변수로 하고, 모형가격의 잔차를 종속변수로 하는 회귀분석의 결과 Variance Gamma 모형가격이 블랙-숄즈 모형의 단점인 변동성 스마일 현상을 해결하지는 못하고 있음을 알 수 있었다.

한국 주식 시장에서 얻은 위의 결과는 Madan 등 (1998)에서 내린 결론과 상이하다. Madan 등

(1998)에서는 S&P 500 선물 지수 옵션 자료를 블랙-숄즈 모형, 대칭적인 Variance Gamma 모형과 Variance Gamma 모형에 적합시켜 구한 모형가격과 시장가격의 잔차를 종속변수로 하는 회귀분석을 실시하고, 설명변수(통화성, 통화성의 제곱, 만기일)가 앞의 두 모형에서는 0과 유의하게 다르나, Variance Gamma 모형에서는 0과 유의하게 다르지 않음을 보였다. 이는 Variance Gamma 모형은 다른 두 모형보다 상대적으로 변동성 스마일 현상으로부터 자유로움을 의미한다.

위의 결과에 비추어 볼 때, Variance Gamma 확률과정은 블랙-숄즈 모형에 비하여 옵션의 가격을 더 잘 적합 시키지만, 한국 주식시장에서는 변동성 스마일 등 블랙-숄즈 모형의 단점을 완전히 해결하지는 못한다는 사실을 확인할 수 있었다. 이는 미국 주식시장에서와 달리 한국 주식시장에서 변동성 스마일 현상을 해결하기 위해서는 Variance Gamma 모형보다는 확률변동성을 포함하는 레비확률과정 등의 다른 대안을 찾아야함을 시사한다고 하겠다.

## 참고문헌

- Bates, D. (1995). *Post-Crash Moneyneess Biases in S&P500 Futures Options*, Rodney, L., White Center Working Paper, Wharton School, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA.
- Buraschi, A. and Jackwerth, J. (2001). The price of a smile: Hedging and spanning in option markets, *Review of Financial Studies*, **14**, 495-527.
- Carr, P., Geman, H., Madan, D. and Yor, M. (2002). The fine structure of asset returns: An empirical investigation, *Journal of Business*, **75**, 305-333.
- Elliot, R., Lahaie, C. and Madan, D. (1995). Filtering derivative security valuations from market prices, In *Proceedings of the Issac Newton Workshop in Financial Mathematics*, Cambridge University Press.
- Geman, H. (2002). Pure jump Lévy processes for asset pricing modelling, *Journal of Banking and Finance*, **26**, 1297-1316.
- Jacquier, E. and Jarrow, R. (1995). *Dynamic Evaluation of Contingent Claim Models: An Analysis of Model Error*, Working Paper, Johnson Graduate School of Management, Cornell University, Ithaca, New York.
- Kou, S. G. (2002). A jump diffusion model for option pricing, *Management Science*, **48**, 1086-1101.
- Madan, D., Carr, P. and Chang, E. (1998). The variance gamma process and option pricing, *European Finance Review*, **2**, 79-105.
- Madan, D. and Milne, F. (1991). Option pricing with variance gamma martingale components, *Mathematical Finance*, **1**, 39-55.
- Maekawa, K., Lee, S., Morimoto, T. and Kawai, K. (2008). Jump diffusion model: An application to the Japanese stock market, *Mathematics and Computers in Simulation*, **78**, 223-236.
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, **3**, 125-144.

# A Study of Option Pricing Using Variance Gamma Process

Hyuneui Lee<sup>1</sup> · Seongjoo Song<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Statistics, Korea University; <sup>2</sup>Department of Statistics, Korea University

(Received August 9, 2011; Revised August 10, 2011; Accepted November 7, 2011)

---

## Abstract

Option pricing models using Lévy processes are suggested as an alternative to the Black-Scholes model since empirical studies showed that the Black-Scholes model could not reflect the movement of underlying assets. In this paper, we investigate whether the Variance Gamma model can reflect the movement of underlying assets in the Korean stock market better than the Black-Scholes model. For this purpose, we estimate parameters and perform likelihood ratio tests using KOSPI 200 data based on the density for the log return and the option pricing formula proposed in Madan *et al.* (1998). We also calculate some statistics to compare the models and examine if the volatility smile is corrected through regression analysis. The results show that the option price estimated under the Variance Gamma process is closer to the market price than the Black-Scholes price; however, the Variance Gamma model still cannot solve the volatility smile phenomenon.

**Keywords:** Black-Scholes model, Lévy processes, Variance Gamma process, option pricing model.

---

---

This research was supported by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (No. 2010-0023191). And this research is part of the first author, Hyuneui Lee's Master thesis.

<sup>2</sup>Corresponding author: Associate Professor, Department of Statistics, Korea University, Seoul 136-701, Korea. E-mail: sjsong@korea.ac.kr