韓國數學教育學會誌 시리즈 C
<初等數學教育>
2012. 12. 제 15권, 제 3호, 201-218

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Dec. 2012, Vol. 15, No. 3, 201-218

공약수의 Schema가 공배수와 최소공배수의 관계적 이해에 미치는 영향에 대한 사례연구

김 화 수 (세한대학교)

본 연구에서는 초등학생들을 대상으로 공약수와 공배수 그리고 최소공배수를 내용으로 하였을 때, 정확한 개념의 인지와 개념의 연결로 인해 형성되는 스키마와 변형된 스키마를 이용한 학습에서 학생들의 개념구성능력과 문제해결력 그리고 학생의 스키마가 어떻게 상위 수준으로 발전해 나가는지, 학생의 개념구성과 문제해결력에서의 스키마는 어떻게 변형을 이루어 나가는지를 심도 있게 조사하였다.

그 결과 일차적 개념에서 이차적 개념으로 발전 할 때, 정확한 개념에 대한 인지와 스키마 그리고 변형된 스키마가 중요한 요인으로 작용을 한다는 것을 알 수 있었고 이 때, 일차적 개념끼리의 연결에 의한 이차적 개념의 형성(이차적 스키마의 형성)보다는 정확한 일차적 개념에 대한 인지로 의해서 만들어지는 변형된 스키마의 형성과 연결이 이차적 개념으로 발전 할 때, 무엇보다도 중요한 역할을 하는 것을 볼 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학은 추상적인 학문이다. '추상'은 몇 개 또는 무한히 많은 사물의 공통성이나 본질을 추출하여 파악하는 사고 작용이다. 그리고 분류된 사물들의 공통적인 속성을 추상화하고 그 다음에 분류된 것들에 이름을 붙인다. 이러한 일련의 과정이 바로 개념(concept)이 형성되는 과정이고 수학자가 수학을 하는 과정이다. 그리고 이 개념들은 여러 가지 모양으로 결합하여 스키마(Schema)라고 부르는 개념의 구조를 형성하게 되는데, 이 스키마(Schema)는 수학적 사고를 하는데 매우 중요한 역할을 한다(이상덕, 김화수, 2004, p. 111).

본 연구의 연구 대상들은 이 전의 연구에서 사칙연산의 일차적 개념에 대해서 학습한 학습자들로 사칙연산에서, 덧셈은 무엇이고, 뺄셈은 무엇인지, 덧셈과 곱셈은 어떠한 관계가 있으며 덧셈과 나눗셈은 어떠한 관계가 있고 '왜' 나눗셈을 할 때 곱셈을 사용하여 몫을 구하는지를 스스로의 개념연결로 그 이유를 설명할 수 있을 뿐만 아니라, 다양한 형태의 스키마를 형성하여 여러 가지 방법으로 문제를 해결 할 수 있는 능력을 가지고 있다. 즉, 연구 대상들은 일차적 개념을 학습한 후, 수학을 관계적으로 이해하려고 하는 성향을 강하게 나타내었고, 관계적으로 이해한 수학적 내용을 자신이 스스로 형성한 스키마(schema)를 사용하여 논리적으로 설명하였다.

Skemp(1987)는 스키마를 구성하기 위하여 먼저 수학을 관계적으로 이해해야 한다고 하였다. 즉 학생들이 수학을 관계적으로 이해하기 위해서는 먼저 교사들의 활발한 일차적 개념[2]에 대한 연구와 문제 해결을 위한 여러 가지 모양의 스키마를 미리 형성해 보아야 한다는 것이다. 많은 초등학생들은 여러 사설 교육기관이나 국립기관 그리고 개인 교습을 통하여 많은 양의 선수학습을 행하고 있다. 이들 중 대부분은 방법과 이유를 아는 관계적 이해를 하기보다는, 주어진 규칙을 적용하여 정답을 찾아내는 도구적 이해를 하고 있고 수학을 능동적이기보다는 수동적인 입장에서 받아들이게 되는 성향을 강하게 보이고 있다. 실제로 본 연구자가 연구한 초등학교 4학년 학생들은 연구자와 연구를 같이 하기 전에는 교사 중심의 환경에서 수학을 배운 학생들이어서 NCTM(1991 & 2000),

* 접수일(2012년 9월 19일), 게재 확정일(2012년 10월 5일)
* ZDM 분류: D42
* MSC2000 분류: 97D40
* 주제어: 스키마

2) 개념들의 결합으로 만들어지지 않은 단독으로 쓰인 개념(수학적 약속이나 정의), 또는 스키마를 구성하는 가장 하위 단계의 개념을 뜻한다(보는 시각이나 상황에 따라서 일차적 개념의 범위는 유동적일 수 있다).

Raymond(1997), 및 Kuhs와 Ball(1986)이 언급한 것처럼 기본적인 규칙과 수학적인 내용, 그리고 문제를 해결하는 방법과 공식은 알아도 '왜', 그렇게 되는지에 대해 아는 학생은 연구 초반에는 거의 없었다. 또한 그들이 가지고 있는 스키마가 새로운 개념이나 스키마에 연결이 되지 않을 경우(자신이 알고 있는 개념과 교사가 학습자에게 제공해주는 개념 사이의 거리가 멀면 멀수록)에는 방법과 이유를 아는 관계적 이해의 수학이 아닌 주어진 공식에 대입하여 정답을 찾아내는 도구적 이해의 수학을 하려는 성향이 강하게 나타났다. 그러나 이들은 공식이나 수학적 현상이 '왜' 그렇게 되는지에 대해 알고 싶어 했고 그러한 궁금증에 대해 교사가 직접 해결책을 주기보다는 학생들이 가지고 있는 개념에 조금 더 가까운 개념을 제공해 주었을 때, 그들은 수학에 흥미를 가지는 것과 함께, 놀라운 과제 집착력과 응용력 그리고 여러 가지 방법을 이용한 문제해결력을 보여 주었다.

Skemp(1987)에 의하면, 개념적 사고는 어떠한 환경에서도 그 곳에 맞도록 행동을 적응시킬 뿐만 아니라 자신의 의지대로 환경을 만들어 가는데 큰 힘을 제공하고 이것은 개념의 분리 또는 현재의 지각 자료와 행동, 그리고 이들과 독립된 조작으로부터 얻을 수 있다고 하였다. 또한 개념은 많은 다른 경험과 경험의 부류를 결합하거나 관련시키는 힘을 가지고 있고 개념이 추상화되면 될수록 이러한 힘은 더욱 커지며, 이러한 의미에서 수학은 모든 이론 체계 중에서 가장 추상적이며, 가장 큰 힘을 가지고 있다고 말하였다. 그러나 너무나 많은 학생들이 단순히 암기한 공식에 따라 의미가 거의 없는 기호의 조작만을 연습하기 때문에 수학에 대한 흥미와 수학의 필요성을 느끼지 못하고 있을 뿐만이 아니라, 수학의 힘 또한 느끼지 못하고 있다. 스키마는 이러한 수학의 현실에 진정한 의미의 수학 학습을 할 수 있도록 도움을 주는 교차연결고리이고 수학을 관계적으로 이해하는데 커다란 영향을 준다.(이상덕, 김성숙, 김화수, 2003, p. 172)

교사가 수학의 개념을 스키마로 구성하여 알고 있을 때, 교사는 학생들과의 수업이 이루어지기 이전에 자신과의 반영적 사고를 통하여 수업을 미리 진행해 볼 수 있고, 그로 인해 교사는 학생 개개인의 사고 과정을 면밀히 관찰 할 수 있으며, 학생 스스로 자신의 사고 과정에서 발생하는 여러 가지 오류를 개선하도록 도와 줄 뿐만 아니라, 여러 가지 모양의 스키마를 형성하여 문제해결에 접근을 할 수 있는 것이다. 그러므로 본 논문에서는 연구 대상들에게 1차적개념을 학습시켰을 때, 연구 대상들 스스로가 어떠한 스키마(Schema)를 형성하여 문제해결에 접근을 하고, 어떻게 관계적이해를 하는지에 대해 아는데 그 목적과 필요성을 둔다.

2. 용어의 정의

일차적 개념

개념들의 결합으로 만들어지지 않은 단독으로 형성된 개념(수학적 약속이나 정의), 또는 스키마를 구성하는 가장 하위 단계의 개념을 뜻한다(보는 시각이나 상황에 따라서 일차적 개념의 범위는 유동적일 수 있다).

예를 들면, 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈과 같은 연산을 비록 수학적으로는 서로 관련된 개념이나 초등학생들의 입장에서 가장 기본적인 연산이라 생각하여 본 연구에서는 일차적 개념으로 한다.

이차적 개념

일차적 개념들의 결합으로 만들어진 개념을 뜻한다. 예를 들면, 약수[3]는 사칙연산(덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈)의 스키마와 변형된 스키마의 연결로 만들어진 이차적 개념이다. 그러므로 피제수에 제수가 한 번 또는 여러 번 포함되거나, 포함된 개수만큼 피제수에서 제수를 뺏을 때, 피제수의 나머지가 없으면[4] 그때의 제수는 약수가 된다. 그리고 제수를 한 번 또는 여러 번 더하거나, 더한 제수의 개수를 제수에 곱했을 때, 피제수가 나오면 이때의 제수와 곱해진 수(더한 제수의 개수)는 약수가 된다.

---

3) 어떤 수를 나누었을 때, 나누어떨어지게 하는 수.

4) 6의 약수는 6을 나누었을 때, 나누어떨어지게 하는 수이므로 이것을 뺄셈과 연결시키면, 피제수 6에서 제수 1을 6번(6÷1), 제수 2를 3번(6÷2), 제수 3을 2번(6÷3), 제수 6을 한 번(6÷6) 피제수의 나머지가 없이 뺄 수 있다. 그러므로 6의 약수는 1, 2, 3, 6이 된다.

변형된 스키마

Skemp가 말하는 스키마는 개념과 개념들의 결합으로 이루어진 개념의 구성체를 말한다. 그러나 본 연구에서 변형된 스키마라 함은 정확한 개념의 인지(이해)로 인한 개념 안에서 스스로 형성되는 스키마로써, 기존에 형성되어 있던 스키마와 새롭게 학습되는 개념이 서로 연결되어 형성되는 새로운 스키마, 그리고 기존의 스키마에 새로운 개념이 결합하여 생기는 새로운 스키마와 달리 다른 형태로 형성되는 스키마를 통 털어 본 연구에서는 변형된 스키마라고 부른다.

예를 들면, 덧셈의 개념은 하나의 수 또는 양에 또 하나의 수 또는 양(같은 종류, 같은 크기)을 첨가하거나(포함시키는) 병합하는 계산법을 뜻한다. 이 개념을 바탕으로 하나의 수 또는 양에 또 하나의 수 또는 양(같은 종류, 같은 크기)을 1의 크기로 한 번 또는 여러 번 첨가하는(포함시키는) 계산법[5]과 같은 변형된 스키마를 형성 할 수 있다. 예를 들면, $7+8$과 같은 덧셈의 경우 $7+8$을 $(7+3)+5$와 같은 과정에 의하여 합을 구하는 것으로 형성된다. 그럼에도 불구하고 일부 아동들은 $7+8$을 7부터 수를 1씩 세는 여덟 번을 세서 더하는 방법(이 방법은 덧셈과정에서 이미 형성되어 있는 스키마이다) 즉, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15와 같이 합을 구한다. 이와 같은 방법으로 덧셈의 합을 구하는 과정을 본 연구에서는 기존의 스키마에 일차적 개념이 연결된 변형된 스키마라고 한다.

3. 연구 문제

본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 문제가 설정되었다.

1. 학생들은 어떠한 스키마와 변형된 스키마를 형성하여 이차적 개념에 대한 관계적 이해를 하는가?
2. 학생들이 스키마와 변형된 스키마를 이용하여 구성한 수학적 개념은 상위수준의 수학 내용에 어떠한 영향을 미치는가?

Ⅱ. 이론적 배경

개념이란 각각의 사물로부터 공통적, 일반적 성질을 추출하여 이루어진 표상(表象)을 뜻한다. 일반적으로는 사물의 관념, 심상(心象)을 뜻하며, 더 넓게는 개요, 개관, 지식, 사고방식 등의 의미로도 사용된다. 엄밀한 논리철학 용어로는 경험되는 낱낱의 사물, 즉 개물(個物), 개체(個體)에 대해 그것들을 포괄하여 그것들로부터도 한 단계 차원이 높은 추상적·보편적 존재를 뜻한다(고정일 외 백과사전 편찬부, 2003).

Skemp(1987)는 각각의 개념은 다른 개념의 구조 속에 포함된다. 일차적인 개념을 제외한 각각의 개념은 다른 개념들로부터 유도되고, 다른 개념을 형성하는데 도움을 주므로 분류위계의 일부분이 된다. 또한 각 단계에서 선택적인 분류가 가능한데, 이는 서로 다른 분류 위계를 만든다고 하였다(황우형 옮김, 1997, p. 49). 그러나 Skemp가 언급한 것과 다르게 스키마 중에는 일차적 개념의 정확한 인지로 인해 일차적 개념 안에서 새롭게 형성되거나, 다른 개념의 구조 속에 포함되지 않고 독립적으로 형성되는 스키마, 그리고 기존의 개념 안에 형성되어 있던 스키마와 새롭게 학습되는 개념이 서로 연결되어 형성되는 새로운 스키마가 발견되었는데 본 연구자는 이것을 '변형된 스키마'라고 명명하였다. 이 변형된 스키마는 기존의 스키마보다 더욱더 다양한 형태를 지니고 있어서 문제 해결에 접근하는 방법 또한 여러 가지이고, 새로운 상위 단계의 개념과 스키마 그리고 변형된 스키마를 형성하는데 매우 중요한 역할을 할 뿐만 아니라 기존의 스키마와 같이 새로운 개념에 대한 관계적 이해를 하거나, 기존의 스키마를 설명하고 뒷받침하는데 중요한 역할을 한다. 그러므로 스키마와 변형된 스키마는 수학을 개념적으로 이해하는데 도움을 주고, 새로운 지식을 얻는데 꼭 필요한 필수적인 도구이다.

구성주의자들은, 수학의 교수-학습과정에서 구체적인 조작 활동을 통하여 스스로 지식을 구성 할 수 있게 해야 한다(Kamii & Lewis, 1990; Steffe & Kieren, 1994)는 견해를 밝히면서, 모든 지식은 교사로부터 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 인식의 주체인 학생의 내면세계에서 능동적 구성활동에 의해 자주적으로 형성된다고 주장한다. 또한 상황심리학자들은,

5) 아동들이 덧셈을 행할 때, 기존의 세기(counting) 방법을 덧셈의 개념에 연결하여 형성한 변형된 스키마의 계산법.

탐구를 통해 학습자들은 특정한 지식을 전수 받는 것이 아니라 이해를 구성하게 된다(Brown & Collins & Deguid, 1989; Winn, 1993; 최정임, 1997)고 주장하면서, 상황 학습의 강력한 시사점 중의 하나는, 학습을 보조하는 가장 최선의 방법은 공급(供給)을 하는 것이 아니라 요구(要求)를 하는 것이라고 주장한다. 이와 같은 관점에서 생각해 볼 때 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 스스로 개념을 탐색하고 개념사이의 관련성을 잘 이해할 수 있도록 안내하며 총체적인 환경을 만들도록 도와주는 것이다. 교사가 수학의 개념을 스키마로 구성하여 알고 있을 때, 교사는 학생들과의 수업이 이루어지기 이전에 자신과의 반영적 사고를 통하여 수업을 미리 진행해 볼 수 있고, 그로 인해 교사는 학생 개개인의 사고 과정을 면밀히 관찰 할 수 있으며, 학생 스스로 자신의 사고 과정에서 발생하는 여러 가지 오류를 개선하도록 도와 줄 뿐만 아니라, 여러 가지 모양의 스키마를 형성하여 문제해결에 접근을 할 수 있는 것이다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

대전에 있는 G초등학교 4학년 학생 3(남학생 1명, 여학생 2명)명을 대상으로 실시하였다. 실시한 3명은 모두, 학급 석차 10%안에 포함되는 학생[6]으로, 지능검사(한국 웩슬러 유아지능검사)와 문제 해결력 검사, 창의력 검사를 통해 구성된 비슷한 성향의 학생들이었다.

2. 연구 방법과 절차

1) 연구 방법

최근에는 학습자의 학습결과뿐만 아니라 학습과정에서 무엇이, 왜, 어떻게 일어났는가에 대한 보다 근본적인 문제에 대한 관심이 고조되고 있다. 본 연구는 오늘날 교과교육 분야에서 자주 사용되고 있는 질적 연구방법을 사용하여 학습자의 관점에서 학습과정을 정의하고 이론을 찾아 보다 현장감 있는 연구가 되고자 하였다. 본 연구의 목적은 학생들이 개념을 습득하고 스키마와 변형된 스키마를 형성해 가면서 나타나는 수학적 사고 발달과정을 조사하는 것이므로 사례연구를 택하였다

본 연구에서 사례(스키마와 변형된 스키마를 사용한 학습자의 수학적 사고 발달과정)는 초등학교에서 지도되는 공약수와 공배수, 최소공배수의 내용을 바탕으로 각각의 일차적 개념을 세 명의 연구대상에게 제공했을 때, 나타나는 현상(변형된 스키마)을 중심으로 비디오 촬영과 기록 원고를 작성하여 분석하였다.

본 연구는 스키마를 구성하기 위해 필요한 일차적 개념에 대한 연구와 학습 그리고 이로 인해 형성되는 스키마와 변형된 스키마를 분석 하고 이것을 중심으로 스키마식 수업을 실시하였을 때, 나타나는 여러 현상, 즉 연구 대상자들의 개념형성 과정상의 일차적 개념에서 이차적 개념으로 발전해 나갈 때, 나타나는 현상을 공약수와 공배수, 최소공배수에 대한 수학적 내용을 중심으로 조사 연구 하고자 하였다. 두 가지 연구 문제를 통해 학생들에게 일차적 개념에 대한 숙지와 일차적 개념들을 연결하여 만들어 낼 수 있는 간단한 이차적 개념의 구성에 대한 내용과 학습활동지를 경험하게 하여 학생들에 의해서 발견되고 형성된 변형된 스키마의 분석과 기존 개념들과의 연결성 그리고 확장 범위에 대하여 심도 깊은 연구를 하였다

본 연구자는 학생들에게 새로운 스키마를 형성 할 수 있도록 다음과 같은 지도 절차에 따라 스키마 학습을 전개하였다. 학생들에게 새로운 스키마를 형성할 수 있도록 첫 번째는 일차적 개념을 비롯한 여러 개념들에 대한 설명을 해 주었고, 두 번째는 학생들과 연구자간의 연구문제를 바탕으로 한 토의를 하였고, 세 번째는 토의를 대한 내용을 분석하였고, 네 번째는 토의를 통해 발견된 변형된 스키마를 정리하였다.

2) 연구 도구

연구 도구인 학습 활동지의 전체 구성은 공약수와 공배수, 최소공배수에 관한 관계적 이해와 그들의 연결성과 관련된 일차적 개념과 스키마에 관한 내용으로

6) 학급석차 10%안에 포함되는 학생을 연구 대상으로 한 이유는 Fishbein & Ajzen(1975)이 언급한 것처럼 수학교과에 대하여 일관성 있게 호의적 또는 비호의적으로 반응하게 하는 학습된 기질이 잘 나타나기 때문이다(강신포, 김판수, 유화전, 2003, p. 443).

이루어 졌다(연구 도구는 부록으로 첨부 하였다).

3) 자료 수집 방법

본 연구의 목적인 1차적 개념의 이해와 이들의 구성으로 형성되는 스키마(개념의 구성체)와 변형된 스키마를 여러 가지 모양으로 개발하기 위하여, 연구에 참여한 세 명의 G초등학교 연구대상들의 토의 내용과 학습활동지에 쓰여진 내용, 그리고 비디오 촬영을 통하여 자료를 수집하였다.

4) 분석 방법

1차적 개념에 대한 이해와 변형된 스키마의 구성능력은 사례 연구를 통하여 연구 대상에게서 나타난 현상 그 자체를 기술한 형식, 그 자체를 취한 상태에서 공약수와 공배수, 최소공배수에 대한 개념을 숙지하고, 공약수와 공배수, 최소공배수의 개념의 연결로 형성된 스키마와 변형된 스키마의 형성으로 아직 학습하지 않은 공약수와 공배수, 최소공배수에 대한 이차적 개념을 어떻게 형성하고 관계적 이해를 하는지를 본연구자와 연구 대상들과의 대화 내용을 촬영한 비디오와 연구 대상들이 직접 작성한 학습 활동지를 바탕으로 연구 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

본 연구자는 위의 연구도구를 학습한 학생들이 스스로 형성한 변형된 스키마를 중심으로 두 가지 연구문제에 대한 접근을 하였다.

1. 학생들은 어떠한 스키마와 변형된 스키마를 형성하여 이차적 개념에 대한 관계적 이해를 하는가?

1) 이차적 개념으로써의 공약수

① 연구 대상들과 연구자(교사)의 토의

다음의 【프로토콜 1】은 공약수의 개념을 설명하자마자 나온 연구자(교사)와 연구 대상들의 대화이다.

【프로토콜 1】

S3 : 선생님, 약수랑 공약수랑 같은 것 같아요?

S2 : 맞아요.

T : 어떻게 같은데?

ⓐ S3 : 공약수도 나누어떨어지게 하는 수잖아요. 그래서 약수를 구하는 방법을 이용하면 될 것 같아요.

T : 그럼, 약수하고 공약수의 차이점은 뭘까?

S1 : 빵!

T : 그래, 선영이 해봐~

ⓑ S1 : 약수는 요, 수가 하나지만 요, 공약수는 수가 2개 이상 있어야 돼요.

T : 그럼 공약수는 어떤 범위를 가지고 있을까?

S2 : 삐!

S3 : 별!

T : 사람 가위, 바위, 보!

S2, S3 : 가위, 바위, 보!

ⓒ S2 : 공약수는 두 개 이상의 수를 동시에 나누어떨어지게 하는 수잖아요~ 그러니까 큰 수의 약수에도 들어 있고, 작은 수의 약수에도 들어 있어요.

S3 : 별!

T : 선하!

ⓓ S3 : 두 수에 다 들어가 있지만 요, 작은 수를 기준으로 하면, 계산하기 더 쉽잖아요~

② 위 프로토콜의 내용을 바탕으로 토의된 내용을 분석

【프로토콜 1】에서 보여준 바(ⓒ)와 같이, 공약수는 두 개 이상의 정수(ⓑ) 또는 다항식을 동시에 나누었을 때, 나누어떨어지게(ⓐ) 하거나 두 개 이상의 정수 또는 다항식에 공통적으로 포함되는 약수이므로 공약수는 두 개 이상의 정수들의 약수 안에 존재한다. 그리고 큰 정수의 약수보다는 작은 정수의 약수를 구하기가 더 쉬우므로 두 개의 정수들의 약수 중에서 작은 정수의 약수를 기준(ⓓ)으로 하여 범위를 좁히면, 공약수는 작은 정수의 약수 안에 포함되어 있음을 알 수 있고 동시에 가장 큰 공약수의 약수가 됨을 알 수 있다. 예를 들면, 2와 6을 동시에 나누었을 때, 나누어떨어지게 하는 수는 2의 약수인 1, 2와 6의 약수인 1, 2, 3, 6중에서 2의 약수인 1, 2안에 존재한다. 그리고 이 공약수(2와 6의 공약수)들은 가장 큰 공약수인 2의 공약수가 된다. 그러므로 가장 작은 공약수는 1이고 가장 큰 공약수는 2와 6의 약수에 공통적으로 들어가는 약수 중에서 가장 큰 약수인 2가 되는 것이다.

① 연구 대상들과 연구자(교사)의 토의

다음의 【프로토콜 2】는 공약수의 개념과 스키마에 대하여 학습한 후, 연구자(교사)와 연구 대상들이 서로 대화를 나누는 장면에서 발췌한 것이다.

【프로토콜 2】

T : 공약수에 대해서 다르게 얘기 해볼 사람?

S2 : 삐!

T : 진원이~

ⓐ S2 : 약수처럼 하면 돼요.

T : 어떻게?

ⓑ S2 : 두 개의 수에서 나머지가 없이 나누는 수를 뺄 수 있는 수가 공약수예요.

S1 : 빵!

T : 선영이~

S1 : 그럼, 나눗셈이랑 약수랑 공약수는 친척이네요?

T : 하하하, 그렇네~

S1 : 그럼 저도 하나 할래요.

T : 그래~

ⓒ S1 : 두 개의 수에 나누는 수가 나머지가 없이 포함되는 수가요 공약수예요.

S3 : 별!

T : 선하~

ⓓ S3 : 나누는 수를 더했을 때, 두 개의 수를 나오게 하는 수가 공약수예요.

T : 그럼, 하나는 선생님이 해 볼까?

S1, S2, S3 : 안돼요!

ⓔ T : 나누는 수를 더한 것을 곱셈으로 바꾸어 계산해서 두 개 이상의 수가 나왔을 때, 곱해진 수가 약수다~ 맞지?

S1, S2, S3 : 그런 게 어디 있어요! 안돼요! 물어내요!

다음의 【프로토콜 3】는 공약수를 구하는 방법에 대하여 연구자(교사)와 연구 대상들이 서로 대화를 나누는 장면에서 발췌한 것이다.

【프로토콜 3】

T : 아까 여러분들이 약수하고 공약수를 구하는 방법이 같을 꺼라고 했는데, 어떻게 같은지 얘기해 볼래요?

S1 : 빵!

T : 선영이~

ⓕ S1 : 아까 약수를 구하는 방법에 '두 개 이상의 수'란 말만 넣으면 돼요~

T : 그럼, 하나만 얘기 해 볼래?

ⓖ S1 : 두 개 이상의 수에 나누는 수가 나머지가 없이 포함되는 수를 찾으면 돼요.

S3 : 별!

T : 선하~

ⓗ S3 : 두 개 이상의 수에서 나누는 수를 뺄 때, 나머지가 없이 뺄 수 있는 수를 찾으면 돼요.

S2 : 삐!

T : 진원~

ⓘ S2 : 나누는 수를 더했을 때, 두 개 이상의 수가 나오게 되는 수를 찾으면 돼요.

T : 이 번에도~

S1, S2, S3 : 가위, 바위, 보~. 가위, 바위, 보~.

ⓙ S3 : 나누는 수를 더한 것을... 음... 곱셈으로 바꾸어서 두 개 이상의 수가 나왔을 때, 곱해진 수들을 찾으면 돼요.

② 위 프로토콜의 내용을 바탕으로 토의된 내용 분석

【프로토콜 1 ~ 3】에서는 이미 학습했던 사칙연산과 약수의 스키마와 변형된 스키마를 바탕(ⓐ)으로 공약수의 개념(ⓕ)에 대하여 관계적 이해를 했을 뿐만 아니라, 나눗셈의 변형된 스키마와 약수의 변형된 스키마를 공약수의 개념 안에 포함시켜 공약수의 범위와 공약수의 4가지의 변형된 스키마(ⓑ, ⓒ, ⓓ, ⓔ) 그리고 공약수를 구하는 방법(ⓖ, ⓗ, ⓘ, ⓙ)을 스스로 형성하였다. 위에서 발견된 변형된 스키마와 공약수를 구하는 방법을 정리를 해 보면, 다음과 같다.

③ 발견된 변형된 스키마 정리

ⓒ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 1과 ⓖ의 내용을 바탕으로 한, 공약수를 구하는 방법 1.

두 개 이상의 피제수를 나누어떨어지게(나머지가 0인, 나머지가 없게 만드는) 한다는 것은 '두 개 이상의 피제수에 같은 제수가 한 번 또는 여러 번 포함 될 때, 두 개 이상의 피제수의 나머지가 없는 상태'를 말한다.

그리고 이때의 제수가 공약수이다. 예를 들면, 3과 6의 공약수는 3과 6의 나머지가 없이 한 번 또는 여러 번, 포함되는 수를 말한다. 3과 6에는 1이 3번과 6번, 3이 1번과 2번 나머지가 없이 포함된다. 그리고 이 수들은 공약수의 범위에서 얘기 한 바와 같이, 두 수 중 작은 정수의 약수 안에 포함되어 있다.

즉, 3과 6에 같은 수를 동시에 나머지가 없이 포함시킬 수 있게 하는 수(나머지가 0인, 나머지가 없게 만드는), 1과 3은 3과 6의 공약수가 된다.

ⓑ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 2와 ⓗ의 내용을 바탕으로 한, 공약수를 구하는 방법 2.

두 개 이상의 피제수를 나누어떨어지게(나머지가 0인, 나머지가 없게 만드는) 한다는 것은 '두 개 이상의 피제수에서 같은 제수를 한 번 또는 여러 번 뺄 때, 피제수의 나머지가 없는 상태'를 말한다. 그리고 이 때의 제수가 공약수이다. 예를 들면, 6과 10의 공약수는 6과 10에서 나머지가 없이 한 번 또는 여러 번, 뺄 수 있는 수를 말한다. 6과 10에서는 1을 6번과 10번, 2를 3번과 5번 뺄 수 있다. 그리고 이 수들은 공약수의 범위에서 얘기 한 바와 같이, 두 수중 작은 정수인 6의 약수 안에 포함되어 있다. 즉, 6과 10에서 같은 수를 나머지가 없이 뺄 수 있게 하는 수(나머지가 0인, 나머지가 없게 만드는), 1과 2는 6과 10의 공약수가 된다.

ⓓ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 3과 ⓘ의 내용을 바탕으로 한, 공약수를 구하는 방법 3.

두 개 이상의 피제수를 나누어떨어지게(나머지가 0인, 나머지가 없게 만드는) 한다는 것은 '두 개 이상의 피제수에 같은 제수를 한 번 또는 여러 번 더했을 때, 나머지가 없이 피제수가 나오는 상태'를 말한다. 그리고 이 때의 제수가 공약수이다. 예를 들면, 6과 36의 공약수는 1이 6번과 36번, 2가 3번과 18번, 3이 2번과 12번, 6이 1번과 6번 더해지면 6과 36이 나온다. 그리고 이 수들은 공약수의 범위에서 얘기 한 바와 같이, 두 수중 작은 정수인 6의 약수 안에 포함되어 있다. 그러므로 6의 약수 중에서 같은 수를 한 번 또는 여러 번 더했을 때, 피제수가 나오게 하는 수 1, 2, 3, 6은 6과 36의 공약수가 된다.

ⓔ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 4와 ⓙ의 내용을 바탕으로 한, 공약수를 구하는 방법 4.

두 개 이상의 피제수를 나누어떨어지게(나머지가 0인, 나머지가 없게 만드는)한다는 것은 '같은 제수에 어떤 수를 곱하였을 때, 두 개 이상의 피제수가 나오게 하는 제수',와 같은 뜻을 가진다. 그리고 이 때의 제수가 공약수이다. 예를 들면, 8과 12의 공약수는 1에 8과 12, 2에 4와 6, 4에 2와 3을 곱했을 때, 8과 12가 나온다. 이 수들 또한 공약수의 범위에서 얘기 한 바와 같이, 8의 약수 안에 포함되어 있고 곱셈은 같은 수의 덧셈을 간편하게 표현한 것이기 때문에 세 번째 방법에서 얘기한, '같은 제수의 덧셈으로 두 개 이상의 피제수가 나오게 하는 수'와 같은 뜻을 지니고 있다. 그러므로 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈은 서로 연결되어있고, 서로를 다른 방법으로 표현 할 수 있다. 그리고 같은 제수에 어떤 수를 곱하였을 때, 두 개 이상의 피제수가 나오게 하는 제수 1, 2, 4는 8과 12의 공약수가 된다.

2. 학생들이 스키마와 변형된 스키마를 이용하여 구성한 수학적 개념은 상위수준의 수학 내용에 어떠한 영향을 미치는가?

2) 상위 수준으로써의 공배수

① 연구 대상들과 연구자(교사)의 토의

다음의 【프로토콜 4】은 공배수의 개념을 설명하자마자 나온 연구자(교사)와 연구 대상들의 대화이다.

【프로토콜 4】
S1 : 이제는 뭔가 알 것 같아요.
S3 : 저두요~
S2 : 저두요~
T : 뭘 알았는데?
ⓐ S1 : 있잖아요~ 공배수도요~ 공약수처럼 하면 될 것 같아요. 두 개 이상의 수들을 나누었을 때, 나누어떨어지게 하는 수는요~ 공약수가 되 구요~ 두 개 이상의 수로 어떤 수를 나누었을 때, 나누어떨어지면요~ 그 수는 공배수가 돼요.
T : 다른 사람도 마찬가지니?

S2 S3 : 네~
T : 그럼, 한 번 얘기해 볼래?
S1, S2, S3 : 빵! 삐! 별!
T : 누가 먼저 했니?
S1, S2, S3 : 저요! 저요! 저요!
T : 하하하, 그래 그럼 어떻게 할까?
S1, S2, S3 : 가위, 바위, 보!
T : 그래~
S1, S2, S 3: 가위, 바위, 보! S1, S2, S3 가위, 바위, 보!
S1, S3 : 가위, 바위, 보! 가위, 바위, 보!
ⓑ S3 : 공배수도 배수처럼 작은 배수는 있어도 큰 배수는 알 수가 없어요.
T : 왜?
ⓒ S3 : 배수가 끝이 없이 많으니까, 공배수도 끝이 없이 많죠~
S1 : 빵!
T : 선영이~
ⓓ S1 : 공배수는 요~ 두 개 이상의 정수들의 공통인 배수니까요~ 공배수는 두 개 이상의 수중에서요~ 큰 수의 배수 안에 다 들어 있어요.
T : 작은 수에도 있지 않니?
ⓔ S1 : 그러니까요~ 작은 수에도 있지 만요~ 작은 수는 큰 수가 나오기 전까지 배수를 더 구해야 공배수를 구할 수 있잖아요.
T : 아하~ 공배수의 범위를 애기한 거구나~
S1 : 네~ 헤헤~

② 위 프로토콜의 내용을 바탕으로 토의된 내용을 분석

【프로토콜 4】에서 보여준 바(ⓐ)와 같이, 공배수는 두 개 이상의 정수들의 배수를 각각의 정수들로 동시에 나누었을 때, 나누어떨어지는 수는 두 개 이상의 정수 또는 다항식에 공통인 배수, 즉 두 개 이상의 정수의 배수에 공통적으로 포함되는 배수이므로 공배수는 두 개 이상의 정수들의 배수 안에 존재한다. 그리고 공배수는 큰 정수의 배수를 기준으로 했을 때, 더 빨리 구할 수 있으므로 큰 정수의 배수를 기준으로 범위를 좁히면, 공배수는 공약수와 다르게 큰 정수의 배수 안(ⓓ, ⓔ)에 존재하게 됨을 알 수 있고, 이 공배수들은 두 개 이상의 정수들의 공배수 중에서 가장 작은 공배수의 배수 안에 포함됨을 알 수 있다. 예를 들면, 2와 3의 배수를 동시에 나누었을 때, 나누어떨어지게 하는 수는 2의 배수인 6, 12, 18,……과 3의 배수인 6, 12, 18,……이다. 그러므로 공배수는 2과 3의 배수에 공통으로 포함되고 그 중에서 가장 작은 공배수인 6의 배수 안에 존재한다. 그러므로 가장 작은 공배수는 6이고 가장 큰 공배수는 알 수가 없다. 따라서 공배수는 가장 작은 공배수는 구할 수 있지만(ⓑ) 가장 큰 공배수는 구할 수가 없다(ⓒ).

③ 발견된 변형된 스키마 정리

ⓐ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 1.

두 개 이상의 정수들의 배수들을 각각의 정수들로 동시에 나누었을 때, 나누어떨어지는 수를 찾는 방법이다. 두 개 이상의 정수들의 배수를 각각의 정수들로 동시에 나누었을 때, 나누어떨어지는 수는 각각의 정수에 공통적으로 포함되는 배수를 뜻한다. 그러므로 두 개 이상의 정수들을 같은 수로 나누어 나머지가 없이 나누어떨어지는 피제수를 찾으면 된다.

예를 들어 5와 6의 배수들을 5와 6으로 동시에 나누어 보면,

5의 배수 : 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, ……
6의 배수 : 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, ……

30과 60은 5와 6으로 동시에 나누었을 때, 나머지가 없이 나누어떨어지는 피제수이다.

$30 \div 5 = 6,\ 30 \div 6 = 5,\ 60 \div 5 = 12,$
$60 \div 6 = 10,\ \cdots\cdots$

즉, 30는 5의 6배(5×6), 6의 5배(6×5), 그리고 60은 5의 12배(5×12), 6의 10배(6×10), ……, 즉 30과 60은 5과 6의 배수에 공통으로 포함되어 있는 배수를 나타내고 있다. 또한 가장 작은 공배수인 30의 배수는 5과 6으로 동시에 나누었을 때, 나누어떨어지는 수이므로 30의 모든 배수는 5과 6의 공배수가 된다.

① 연구 대상들과 연구자(교사)의 토의

다음의 【프로토콜 5】는 공배수의 개념과 스키마에 대하여 학습한 후, 연구자(교사)와 연구 대상들이

서로 대화를 나누는 장면에서 발췌한 것이다.

【프로토콜 5】

ⓐ S2 : 어떤 수들을 각각 여러 번 더했을 때, 똑같은 수가 나오면 이 수가 공배수 예요.

T : 예를 들어볼래?

ⓑ S2 : 3을 네 번 더하면 12이 나오고, 4를 세 번 더하면 12이 나오니까, 12는 3의 배수도 되고 4의 배수도 돼요. 그래서 12는 3과 4의 공배수가 돼요.

S1 : 빵!

T : 하하하~ 역시! 선영이~

ⓒ S1 : 어떤 수에 여러 수들이 여러 번 포함될 때요, 포함을 당하는 수가 나머지가 없으면요, 포함을 당하는 수가 배수가 돼요.

T : 음... 선영이도 예를 들어 볼래?

ⓓ S1 : 24에는 요~ 6이 4번 포함 되 구요~ 8이 3번 포함 되구요~ 나머지가 없으니까요~ 24는 6과 8의 공배수가 돼요.

T : 음... 그래~ 이번엔 선하가 해봐라~

ⓔ S3: 어떤 수에서 여러 개의 수를 뺄 때요, 빼짐을 당하는 수에 나머지가 없게 되면 빼짐을 당하는 수가 공배수가 돼요.

T : 선하도 예를 들어 봐라~

ⓕ S3 : 음... 12에서 2를 6번 뺄 수 있고, 3를 4번 뺄 수 있잖아요~ 그리고 나머지가 없으니까, 12는 3과 4의 공배수가 돼요.

T : 혹시 선영이?

S1 : 하하하, 뭐가요?

T : 하하하, 선영이가 발표하려고 하는 줄 알았지~

S1 : 빵!

T : 하하하, 그래 선영이~

ⓖ S1 : 여러 개의 수를 더해서 공배수를 구한 것을요~ 곱셈으로 바꿔서 요~ 곱해서 나온 수 중 에서요~ 같은 수를 찾으면 돼요.

T : 다들 너무 잘했다~ 그럼, 이 번 에도 공배수를 구하는 방법을 애기해 볼까?

S1, S2, S3 : 네~

T : 누가 먼저 해볼까?

S1 : 빵!

T : 역시! 선영이!

ⓗ S1 : 어떤 수에 여러 수들이 여러 번 포함될 때요, 나머지가 없게 되는 포함을 당하는 수를 찾으면 돼요.

S3 : 별!

T : 선하도 목소리가 많이 커졌구나~ 선하!

ⓘ S3 : 어떤 수에서 여러 개의 수를 여러 번 뺄 때요, 나머지가 없게 되는 빼짐을 당하는 수를 찾으면 돼요.

S2 : 삐~

T : 진원아? 왜 이렇게 힘이 없어졌어?

S2 : 배고파요~

T : 이런~

S1, S3 : 저도 배고파요~

T : 그래? 그럼, 이 번 에도 잘하면 선생님이 컵 라면 사 줄게~

S1, S2, S3 : 정말이죠?

T : 그럼~

S1, S2, S3 : 약속해요~ 도장 찍고요~ 복사요~

T : 하하하, 알았어~ 그럼 이제 남아 있는 방법을 애기 해 볼래?

S1, S2, S3: 빵! 삐, 별!

T : 하하하, 힘이 나는 구나~ 아까 진원이가 발표하려다가 애기 한 거니까, 진원이가 애기 해봐~

ⓙ S2 : 어떤 수들을 각각 여러 번 더했을 때, 나오는 수가 서로 같게 되는 수를 찾으면 돼요.

T : 이번 엔 선생님이 해 봐도 되겠니?

S1, S2, S3 : 네!

T : 왠일이니? 혹시 컵 라면 때문에?

S1, S2, S3 : 하하하~

T : 그럼 선생님이 마무리하고 우리 컵 라면 먹자~

S1, S2, S3 : 네~

ⓚ T : 여러 개의 수를 한 번 또는 여러 번 각각 더해서 나온 똑같은 수로 공배수를 구한 것을 바탕으로 그것을 곱셈으로 만든 다음, 계산한 값 중에서 같은 수를 찾는 것도 공배수를 구하는 방법이 된단다.

② 위 프로토콜의 내용을 바탕으로 토의된 내용을 분석

【프로토콜 5】에서는 이미 학습했던 사칙연산(덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈)의 스키마와 변형된 스키마를 바탕으로 공배수의 개념에 대하여 관계적 이해를 했을

뿐만 아니라, 나눗셈의 변형된 스키마와 약수의 변형된 스키마 그리고 공약수의 변형된 스키마와 배수의 변형된 스키마를 공배수의 개념 안에 포함시켜 공배수의 범위와 공배수의 4가지의 변형된 스키마(ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ, ⓔ, ⓕ. ⓖ) 그리고 공배수를 구하는 방법(ⓗ, ⓘ, ⓙ, ⓚ)을 스스로 형성하였다. 위에서 발견된 변형된 스키마와 공배수를 구하는 방법을 정리를 해 보면, 다음과 같다.

③ 발견된 변형된 스키마 정리

ⓐ, ⓑ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 1과 ⓙ의 내용을 바탕으로 한, 공배수를 구하는 방법 1.

어떤 정수들의 공배수는 두 개 이상의 본래 정수를 각각 한 번 또는 여러 번 더했을 때, 공통적으로 나오는 수들을 말한다. 예를 들면, 3과 4의 공배수는 3과 4을 한 번 또는 여러 번 더했을 때, 나오는 공통된 수들이다. 예를 들면,

3의 배수는

$3,\ 3+3=6,\ 3+3+3=9,\ 3+3+3+3=12,\ \cdots,\ 3+3+3+3+3+3+3+3=24,\ \cdots\cdots$

4의 배수는 $4,\ 4+4=8,\ 4+4+4=12,\ \cdots,\ 4+4+4+4+4+4=24,\ \cdots\cdots$

이고 여기에서 공통적으로 나온 수인 12, 24, ……가 3과 4의 공배수가 된다.

ⓔ, ⓕ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 2와 ⓘ의 내용을 바탕으로 한, 공배수를 구하는 방법 2.

어떤 정수들의 공배수는 두 개 이상의 본래 정수를 한 번 또는 여러 번 뺐을 때, 나머지가 없게 되는 수들이다. 예를 들면,

2의 배수는 $\cdots\cdots,\ 12-2-2-2-2-2-2=0,\ \cdots,\ 6-2-2-2=0,\ \cdots,\ 2-2=0$

3의 배수는 $\cdots\cdots,\ 12-3-3-3-3=0,\ 9-3-3-3=0,\ 6-3-3=0,\ 3-3=0$

이고 여기에서 공통적으로 나온 수인 ……, 12, 6이 2와 3의 공배수가 된다.

ⓒ, ⓓ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 3과 ⓗ의 내용을 바탕으로 한, 공배수를 구하는 방법 3.

어떤 정수들의 공배수는 두 개 이상의 본래 정수를 한 번 또는 여러 번 나머지가 없이 포함한다. 예를 들면,

6의 배수

……, 24는 6을 4번, 18은 6을 3번, 12는 6을 2번, 6은 6을 1번 포함한다.

8의 배수

……, 32는 8을 4번, 24는 8을 3번, 16은 8을 2번, 8은 8을 1번 포함한다.

이고 여기에서 공통적으로 나온 수인 24는 6과 12의 공배수가 된다.

ⓖ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 4와 ⓚ의 내용을 바탕으로 한, 공배수를 구하는 방법 4.

어떤 정수들의 공배수는 두 개 이상의 본래 정수를 한 번 또는 여러 번 더한 개수만큼 곱한 것과 같다. 예를 들면,

3의 배수는

$3,\ \cdots,\ 3+3+3+3+3=15,\ \cdots,\ 3+3+3+3+3+3+3+3+3+3=30,\ \cdots\cdots$

$\Rightarrow 3\times1=3,\ \cdots,\ 3\times5=15,\ \cdots,\ 3\times10=30,\ \cdots\cdots$

5의 배수는

$5,\ 5+5=10,\ 5+5+5=15,\ \cdots,\ 5+5+5+5+5+5=30,\ \cdots\cdots$

$\Rightarrow 5\times1=5,\ 5\times2=10,\ 5\times3=15,\ \cdots\cdots,\ 5\times6=30,\ \cdots\cdots$

이고 여기에서 공통적으로 나온 수인 15, 30, ……이 3과 5의 공배수가 된다.

3) 상위 수준으로써의 최소공배수

① 연구 대상들과 연구자(교사)의 토의

다음의 【프로토콜 6】은 최소공배수의 개념을 설명하자마자 나온 연구자(교사)와 연구 대상들의 대화이다.

【프로토콜 6】

ⓐ S2 : 최소공배수는 이름에 답이 써 있네~

S1, S3 : 하하, 정말~

T : 왜 그런 생각을 했지?

ⓑ S2 : 최소공배수니까요~ 공배수 중에서 가장 작은 공배수를 말하는 거잖아요.

S3 : 선생님~

T : 왜?

ⓒ S3 : 최소공배수도 범위를 좁혀 보면, 공배수처럼 두 개 이상의 수중에서 큰 수의 배수를 기준으로 해서 찾는 것이 더 빨라요.

T : 그래, 자세히 살펴 봤구나~

ⓓ S3 : 공약수는 최대공약수만 있고, 공배수는 최소공배수만 있네요~ 약수와 배수는 서로 반대 같은데 반대가 아니 예요~

T : 응~ 잘 봤다, 선하야~

② 위 프로토콜의 내용을 바탕으로 토의된 내용을 분석

【프로토콜 6】에서 보여준 바(ⓐ, ⓑ)와 같이, 최소공배수는 두 개 이상의 정수들의 배수들을 각각의 정수로 동시에 나누었을 때, 나누어떨어지는 배수 중에서 가장 작은 배수, 즉 두 개 이상의 정수들의 배수에 공통적으로 포함되는 배수 중에서 가장 작은 배수를 뜻하므로 공배수 안에 포함되는 배수 중의 하나이다.

최소 공배수는 공배수 중의 가장 작은 공배수를 말하며, 작은 정수와 큰 정수의 공배수 안에 포함되지만, 좀 더 범위를 좁혀보면, 공배수와 같이 큰 정수의 배수 안(ⓒ)에서 더 빨리 찾을 수 있다. 예를 들면, 2와 3의 배수들을 각각의 정수 2와 3으로 동시에 나누었을 때, 나누어떨어지는 수는 6, 12, 18, 24, 30, …이고, 이 수 들은 2와 3의 배수 안에 포함되지만 좀 더 범위를 좁혀보면, 2와 3의 배수 중 더 큰 정수인 3의 배수 안에 존재한다. 그리고 가장 작은 공배수(최소공배수)는 2와 3의 공배수 중에서 가장 작은 공배수인 6임을 알 수가 있지만(ⓓ), 가장 큰 공배수는 알 수 없기 때문에 최대 공배수는 존재하지 않는다.

③ 발견된 변형된 스키마 정리

ⓐ, ⓑ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 1.

두 개 이상의 정수들의 배수들 중에서 최소인 것(가장 작은 공배수)이 최소 공배수를 뜻하므로 먼저 각각의 정수들의 배수들을 구하고 각각의 배수에 공통적으로 포함되어있는 공배수들을 찾은 다음 그 공배수들 중에서 가장 작은 공배수를 찾는다. 그 공배수가 바로 최소공배수이다.

예를 들어 6과 12의 최소공배수를 구해 보면,

6의 배수 : 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ……
12의 배수 : 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, ……
6과 12의 공배수 : 12, 24, 36, 48, ……
6과 12의 공배수 중에서 가장 작은 공배수 : 12
6과 12의 최소공배수 : 12

그러므로 6과 12의 최소공배수는 12이다.

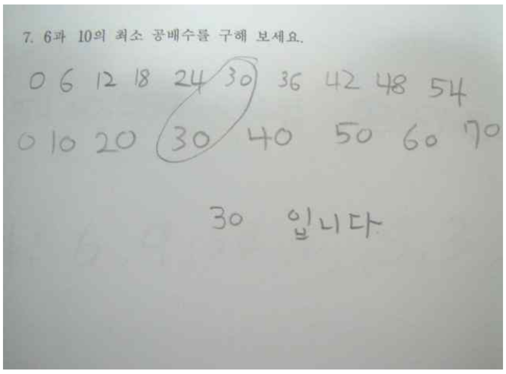

그림 1. 최소공배수를 구하는 방법

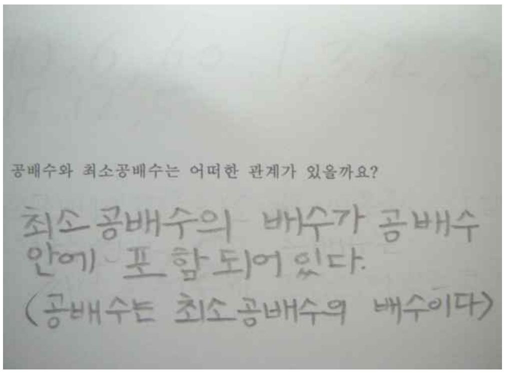

그림 2. 최소공배수의 스키마

① 연구 대상들과 연구자(교사)의 토의

다음의 【프로토콜 7】은 최소공배수의 개념과 스키마에 대하여 학습한 후, 연구자(교사)와 연구 대상들이 서로 대화를 나누는 장면에서 발췌한 것이다.

【프로토콜 7】

S2 : 선생님~ 이것도 저희들이 해볼께요.

T : 그래~

ⓐ S2 : 어떤 수들을 각각 여러 번 더했을 때, 나오

는 똑같은 수 중에서 가장 작은 수가 최소공배수예요.

T : 그래~ 좋아~

S1 : 빵!

T : 선영이~

ⓑ S1 : 어떤 수에 여러 수들이 여러 번 포함될 때요~ 나머지가 없이 포함을 당하는 수중에서요~ 가장 작은 수가 최소공배수예요.

S3 : 별!

T : 선하~

ⓒ S3 : 어떤 수에서 여러 개의 수를 뺄 때요, 나머지가 없이 빼짐을 당하는 수 중 에서 가장 작은 수가 최소공배수예요.

T : 하하하, 갈수록 너희들에게 선생님이 말할 시간이 줄어드는 구나~

S1 : 선생님 그러시면서, 한 개 남은 거 말하시려고 그러죠?

T : 하하하~ 어떻게 알았지~

S2 : 삐!

S1 : 어~ 한발 늦었다.

ⓓ S2 : 하하하! 여러 개의 수를 서로 곱했을 때, 나온 똑같은 수 중 에서 가장 작은 수가 최소 공배수예요.

T : 선생님이 예를 들어 보라고 하지 않아도 되겠지?

S1, S2, S3 : 네~

T : 그래~ 그럼, 최소 공배수를 구하는 방법에 대해서도 들어볼까?

S3 : 별!

T : 어! 선하가 제일먼저 했네~ 그래, 선하가 발표해 볼래~

ⓔ S3 : 어떤 수에서 여러 개의 수를 뺄 때요, 나머지가 없이 빼짐을 당하는 수 중 에서 가장 작은 수를 찾으면 돼요.

S1 : 빵!

T : 하하하~ 선영이~

ⓕ S1 : 어떤 수에 여러 수들이 여러 번 포함될 때요~ 나머지가 없이 포함을 당하는 수중에서요~ 가장 작은 수를 찾으면 돼요~

S2 : 삐!

T : 진원~

ⓖ S2 : 어떤 수들을 각각 여러 번 더했을 때, 나오는 똑같은 수에서 가장 작은 수를 찾으면 돼요~

S1 : 빵!

T : 선영이~

ⓗ S1 : 여러 개의 수를 서로 곱했을 때요~ 나온 똑같은 수 중 에서요~ 가장 작은 수를 찾으면 돼요~

T : 너무, 너무 잘했고, 선생님이 하나 더 물어봐도 되겠니?

S1, S2, S3 : 뭔데요?

T : 공배수나 최소공배수를 구하는 방법을 얘기할 때, 어떻게 하길래 그렇게 잘 얘기하니?

ⓘ S1 : 아까, 배수랑, 공배수에 대해서 얘기할 때요~ 사용했던 것을 요~ 약간만 바꿔서 얘기한 거예요.

T : 다른 사람도 그랬니?

S1, S2, S3 : 네~

T : 이해를 하면서 얘기한 거니?

S1, S2, S3 : 그럼요~ 선생님은 우릴 못 믿으세요?

T : 하하하, 아니야~ 믿지! 당연히 믿지~

② 위 프로토콜의 내용을 바탕으로 토의된 내용을 분석

【프로토콜 7】에서는 이미 학습했던 사칙연산(덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈)의 스키마와 변형된 스키마를 바탕으로 최소공배수의 개념에 대하여 관계적 이해를 했을 뿐만 아니라, 나눗셈의 변형된 스키마와 배수의 변형된 스키마 그리고 최대공약수의 변형된 스키마와 공배수의 변형된 스키마를 최소공배수의 개념 안에 포함(ⓘ)시켜 최소공배수의 범위와 최소공배수의 4가지의 변형된 스키마(ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ) 그리고 최소공배수를 구하는 방법(ⓔ, ⓕ, ⓖ, ⓗ)을 스스로 형성하였다. 위에서 발견된 변형된 스키마와 최소공배수를 구하는 방법을 정리를 해 보면, 다음과 같다.

③ 발견된 변형된 스키마 정리

ⓐ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 1과 ⓖ의 내용을 바탕으로 한, 최소공배수 구하는 방법 1.

어떤 정수들의 최소공배수는 두 개 이상의 본래 정수를 각각 한 번 또는 여러 번 더했을 때, 공통적으로 나오는 수중에서 가장 작은 수를 말한다. 예를 들면, 4와 5의 공배수는 4와 5를 한 번 또는 여러 번 더했을 때, 나오는 공통된 수들이다. 예를 들면,

4의 배수는 4, …, $4+4+4+4+4=20$, … ,

$4+4+4+4+4+4+4+4+4+4$, ……

5의 배수는 5, $5+5+5+5=20$, …, $5+5+5+5+5+5+5+5=40$, ……

이고 여기에서 공통적으로 나온 수인 20, 40, ……이 4와 5의 공배수가 되고, 가장 작은 수인 20이 최소공배수가 된다.

ⓒ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 2와 ⓔ의 내용을 바탕으로 한, 최소공배수 구하는 방법 2.

어떤 정수들의 최소공배수는 두 개 이상의 본래 정수를 한 번 또는 여러 번 뺐을 때, 나머지가 없게 되는 수 중 에서 가장 작은 수를 말한다. 예를 들면,

7의 배수는 ……, $28-7-7-7-7=0$, …, $14-7-7=0$, $7-7=0$

14의 배수는 ……, $28-14-14=0$, $14-14=0$

이고 여기에서 공통적으로 나온 수인 ……, 28, 14가 7과 14의 공배수가 되고, 가장 작은 수인 14가 최고공배수가 된다.

ⓑ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 3과 ⓕ의 내용을 바탕으로 한, 최소공배수 구하는 방법 3.

어떤 정수들의 최소공배수는 두 개 이상의 본래 정수를 한 번 또는 여러 번 나머지가 없이 포함하는 수 중 에서 가장 작은 수를 말한다. 예를 들면,

8의 배수는

……, 48은 8을 6번, …, 32는 8을 4번, …, 16은 8을 2번, …… 포함한다.

16의 배수는

……, 48은 16을 3번, 32는 16을 2번, 16은 16을 1번 포함한다.

이고 여기에서 공통적으로 나온 수인 ……, 48, 32, 16은 8과 16의 공배수가 되고, 가장 작은 수인 16이 최소공배수가 된다.

ⓓ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 4와 ⓗ의 내용을 바탕으로 한, 최소공배수 구하는 방법 4.

어떤 정수들의 최소공배수는 두 개 이상의 본래 정수를 한 번 또는 여러 번 더한 개수만큼 곱해서 나온 똑같은 수 중 에서 가장 작은 수를 말한다. 예를 들면,

4의 배수는

4, $4+4=8$, $4+4+4=12$, $4+4+4+4=16$, ……

⇒

$4\times1=4$, $4\times2=8$, $4\times3=12$, $4\times4=16$, ……

8의 배수는

8, $8+8=16$, $8+8+8=24$, $8+8+8+8=32$, ……

⇒

$8\times1=8$, $8\times2=16$, $8\times3=24$, $8\times4=32$, ……

이고 여기에서 공통적으로 나온 수인 8, 16, ……가 4와 8의 공배수가 되고, 가장 작은 수인 8이 최소공배수가 된다.

Ⅴ. 결론

수학은 추상적인 학문이고 많은 개념들이 여러 가지 모양으로 모여서 만들어진 개념의 덩어리이다. 그러므로 수학자가 추상을 통하여 이름을 붙인 수학적 개념들을 학생들에게 자세하게 이해를 시킬 필요가 있다. 그러기 위해서는 “수학자가 했던 것처럼 해 보는 것이 가장 좋은 방법이다”, 라고 구광조, 라병소(2000)는 언급했다. 수학자가 했던 방법이란 바로 생활 속에서 부딪히는 문제들을 자신이 알고 있는 개념과 스키마를 바탕으로 해결해 가면서 그곳에서 패턴[7]을 발견하고 더욱더 고차원적인 개념들을 구성해 나가는 스키마(Schema) 과정을 거치는 것을 말한다(김성숙, 김화수, 2001, pp. 397-409). 이러한 스키마(Schema) 과정은 공식 암기위주의 수학에서는 일어나기가 힘들다. 생활 속에서 일어나는 현상들을 수학적 개념이나 구조, 아이디어를 가지고 조직해 나감으로써 우리는 스키마(Schema) 과정을 경험하게 되는 것이다. 하지만 너무나 많은 학생들이 이러한 개념을 이해하고 또 자기 나름대로 하나, 둘씩 개념들을 모아 구성하면서 문제를 해결하기보다는 단순히 암기한 공식에 따라 의미가 거의 없는 기호의 조작만을 연습하기 때문에 수학에 대한 흥미와 수학의 필요성을 느끼지 못하고 있을 뿐만 아니라, 수학의 힘 또한 느끼지 못하고 있다. 그 결과, 새로운 단원으로 넘어갈 때, 학생들은 더욱 더 힘들어하고 수학을 포기하는 사례까지 나타나게 되었다. 이

7) 김성준(2003)에 의하면, 패턴을 파악한다는 것은 주어진 패턴에 내재해있는 관계를 파악하는 것으로, 패턴과 일반화를 통한 대수 도입은 이러한 관계에서 규칙성을 이끌어 내는 것을 목적으로 한다.

러한 결과는 수학을 관계적으로 이해하지 않고 단순히 교과서의 문제를 풀기 위해 배우는 도구적 이해의 수학을 하고 있기 때문에 일어나는 현상이 아닌가 생각한다.

여러 사설교육기관이나 국립기관 그리고 개인 교습 등을 통한 선행학습으로 인하여 초등학생들은 많은 양의 문제 해결 방법이나 공식 등은 잘 알고 있으나, 그러한 공식과 방법이 어떻게 해서 유도가 되는지를 아는 학생은 거의 없었다. 또한 그들은 개념을 이름과 동일시하게 생각하거나 공식 자체를 개념으로 생각하여, 공식에 근거한 설명이나 이해를 할 뿐이었고, 수학에 대한 관계적 이해가 이루어지지 않았다 하더라도 문제의 정답만 맞추면 이해를 했다는 생각을 몇 몇 학생들은 강하게 가지고 있었다. 그러나 대부분의 초등학교 학생들은 수학을 관계적으로 이해하기를 원했고 자신이 가지고 있는 개념과, 개념의 구조인 스키마(Schema)에 연결하여 문제를 해결하기 원했다.

본 연구에서 연구 대상들은 사칙연산 각각의 1차적 개념을 학습한 뒤 1차적 개념의 연결로 형성된 스키마(Schema)뿐만이 아니라 오스벨(Ausubel)의 실사성의 원리처럼 1차적 개념 안에서 새로운 1차적 개념(변형된 스키마)을 만들어 내는 것을 볼 수 있었다. 이렇게 형성된 새로운 일차적 개념(변형된 스키마)은 기존의 1차적 개념보다 더 다양하고 강력한 힘을 가진 스키마(Schema)를 형성하게 되고 더 나아가 아직 배우지 않은 5학년 과정의 수업 내용인 공약수와 공배수 그리고 최소공배수라는 2차적 개념 또한 기존의 1차적 개념(덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 1차적 개념)과 그로 인해 스스로 형성한 스키마(schema)와 변형된 스키마(schema)(덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 변형된 schema)로 관계적 이해를 하는 것을 볼 수 있었다. 즉, 연구 대상들은 기존에 학습한 개념 또는 스키마(schema)를 사용하여 새로운 과제를 해결하고, 해결한 내용에 대해서 자세하게 설명 할 수 있으므로 수학의 필요성 뿐만이 아니라 수학의 실용성까지도 알게 되는 것을 볼 수 있었다.

대부분의 학생들은 공약수와 공배수를 서로 별개의 것으로 생각하거나 공약수와 공배수는 서로 반대의 관계가 있다고 생각한다. 그러나 위의 연구에서 보는 바와 같이, 연구 대상자들의 답변은 공약수와 공배수 그리고 최소공배수의 개념에 대한 정확한 이해뿐만이 아니라 연결성까지도 논리 정연하게 설명하고 있다. 이 과정에서 일차적 개념으로써의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에 대한 이해와 이들의 연결로 형성된 스키마(schema)와 변형된 스키마(schema)를 공약수와 공배수 그리고 최소공배수의 개념 안에 포함시켜 공약수와 공배수 그리고 최소공배수의 관계를 여러 가지 방향으로 설명하고 있는 것 또한 볼 수 있었다.

Peirce는 유추를 특수한 것(개별자)에서 특수한 것(개별자)으로의 추론으로 설명하고 있으며, 귀납과 가설 또는 연역과 귀납 또는 연역과 가설에 의해 분석할 수 있다고 보았다 (Hoopes, 2008: 118, 재인용). 또한 Peirce는 유추적 사고를 개별자와 개별자사이의 연결로 설명하고, 이 연결을 가능하게 하는 것은 귀납과 가설에 의한 과감한 추론이라고 보았다. 수학적 추론은 연역만으로 이루어지지 않으며, 서로 멀리 떨어져 있는 개별자 사이의 연결성을 파악하여 유추하는 창조적 접근을 필요로 한다(Hoopes, 2008: 117-120, 재인용). 이와 같이 1차적 개념은 학습자 자신의 추론 뿐만이 아니라 다른 학습자와의 의사소통을 통한 추론으로 인하여 더 다양한 형태의 스키마(Schema)를 형성하여 문제 해결에 접근 할 수 있는 힘을 가지고 있다. 무엇보다도 1차적 개념의 학습은 학생들에게 수학문제 해결에 있어서 더 쉽고 더 재미있게 접근 할 수 있게 할 뿐만 아니라 수학적 의사소통과 서술형 문제해결에 더욱더 자신감을 가지게 할 수 있다.

Boekaerts(1994)는 문제해결 동안 학생이 취하는 결정은 수학적 능력에 대한 자신감, 어떤 문제를 시작하도록 스스로에게 동기를 유발하는 능력, 개인의 목적을 자시 조절활동과 연결 짓는 정신적 과정과 같은 정서적 요소의 영향을 받을 수 있다고 하였다(허혜자, Jenifer, S., & Patricia, S. M, 2004, pp. 207-219, 재인용). 그리고 NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)의 Standards(2000)에서도 일상생활이나 직업 생활에서 수학적 지식을 자신 있게 사용할 수 있도록 하는 수학적 문제해결력 증명과 추론 능력 의사소통 능력 수학적 연결성과 표현력의 신장을 위한 다양한 교수학습 방법을 강조하고 있다(허난, 강옥기, 2009, pp. 166). 이와 같이 1차적 개념이 바탕이 된 스키마 학습은 학생들의 다양한 스키마(schema) 형성과 수학에 대한 관계적 이해에 도움을 줄 뿐 만 아니라, 수학에 대한 흥미와 자신감, 수학적 문제해결 능력, 증

명과 추론 능력, 의사소통 능력, 수학적 연결성과 표현력 그리고 생활 속에서의 수학의 필요성에 대하여 알게 하는데 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있다. 그러므로 교사는 학생들에게 일차적 개념에 대한 중요성을 인식시켜주고, 이차적 개념과 같은 상위 단계의 개념을 형성 할 때, 필요한 연결고리인 각각의 개념이나 스키마(schema) 그리고 변형된 스키마(schema)를 학생들에게 많이 제공해 주어야 한다.

참 고 문 헌

강신포・김판수・유화전(2003). 초등학교 수학영재 및 일반아동의 정의적 특성 비교연구. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 5(4), 441-457.

고정일외 백과사전 편찬부(2003). 파스칼 세계대백과사전. 서울: 동서문화사.

구광조・라병소(2000). 생각하는 수학산책. 서울: 대교출판.

김성숙・김화수(2001). 생활 속의 수학문제가 대학교 1학년 수학학습 부진학생의 수학화 과정에 미치는 영향. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 12(3), 397-409.

김성준(2003). 패턴과 일반화를 강조한 대수접근법 고찰. 학교수학, 5(3), 343-360.

이상덕・김성숙・김화수(2003). 소수의 관계적 이해를 위한 스키마식 수업이 학습자에게 미치는 영향. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 16(1), 165-173.

이상덕・김화수(2004). 약수의 관계적 이해에 관한 내용연구-스키마 중심으로-. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 18(1), 111-121.

최정임(1997). 상황학습 이론에 따른 학습내용의 구성・교사의 역할・평가원리에 대한고찰. 수학교육학연구, 35(3). 213-239.

허난・강옥기(2009). 수학과 문제중심학습 문제 분석을 위한 기준표 개발 및 적용. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 11(1), 166.

허혜자, Jenifer, S., & Patricia, S. M.(2004). 수학에 대한 자신감 증진 : 가상학습교구를 통한 분수개념 이해의결과. 수학교육학연구, 14(2), 207-219.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18(1), 32-42.

Fishbein, M. & Ajaen, I.(1975). *Belief, attitude, intention, and behavior : A introduction to theory and research.* Reading. MA: Addison-Wesley.

Hoopes, J. (2008). (Ed.). 퍼스의 기호학 (김동식, 이유선 역). 서울: 나남 (영어 원작은 1992년 출판).

Kamii C., & Lewis, B. A.(1990). Constructivism and first-grade arithmetic. *Arithmetic Teacher*(Sep.), 36-38.

Kuhs, T. M., & Ball, D. L.(1986). *Approaches to teaching mathematics : Mapping the domains of knowledge, skills, and dispositions*. Center on Teacher Education, Michigan State University.

NCTM(1991). *Professional standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author. National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

NCTM(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.

Raymond, A. M.(1997). Inconsistency between a begging elementary teacher' mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 550-576.

Skemp, R. R.(1987). *The Psychology of Learning Mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc. New Jersey. 황우형역(1998). 수학학습심리학. 서울: 민음사.

A case study on the impact of the concept of the common divisor on relational understanding of the common multiple and least common multiple

Kim, Hwa Soo
Sehan University, Korea
E-mail : hskim@sehan.ac.kr

In this study, the following topics were investigated targeting elementary school students: Schema formed through precise notion of cognitive and the connection of the concepts when studying common divisor, common multiple, and the lowest common multiple, configuration ability and problem solving of the students when learning using a modified schema, how the schema of the student to advance to a higher level, and how the deformation of the schema is carried out student's configuration of concept and problem solving ability.
As a result, it was found out that cognition about precise concept, schema and the modified schema are important factors when a primary concept was developed into a secondary concept, and play important roles when the connection and the formation of the modified schema created by cognition about the precise primary concept rather than by the formation of the secondary concept (formation of the secondary schema) created by the connection between the primary concept.

* ZDM Classification : D42
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : Schema, precise notion, modified schema

<부록>

스키마 수학

약수

1. 약수란 무엇일까요?
2. 약수는 어떠한 범위를 가지고 있을까요?
3. 약수와 나눗셈은 어떠한 관계가 있을까요?
4. 약수를 구하는 방법을 이야기 해 보세요.
5. 약수와 덧셈의 관계를 이야기해 보세요.
6. 약수와 뺄셈의 관계를 이야기해 보세요.
7. 약수와 곱셈의 관계를 이야기해 보세요.
9. 6의 약수를 여러 가지 방법으로 구해 보세요.
10. 16의 약수를 여러 가지 방법으로 구해 보세요.

스키마 수학

공약수

1. 공약수란 무엇일까요?
2. 공약수와 나눗셈은 어떠한 관계가 있을까요?
3. 공약수는 어떠한 범위를 가지고 있을까요?
4. 공약수를 구하는 방법을 이야기 해 보세요.
5. 공약수와 덧셈의 관계를 이야기해 보세요.
6. 공약수와 뺄셈의 관계를 이야기해 보세요.
7. 공약수와 곱셈의 관계를 이야기해 보세요.
8. 공약수는 몇 개의 수가 있어야 구할 수 있을까요?
9. 공약수를 구하는 순서를 이야기해 보세요.
10. 10과 12의 공약수를 구해 보세요.
11. 12와 16의 공약수를 구해 보세요.
12. 6과 8과 12의 공약수를 구해 보세요.
13. 최대 공약수란 무엇일까요?
14. 26과 36의 최대 공약수를 구해 보세요.

스키마 수학

배수

1. 배수란 무엇일까요?
2. 배수는 어떠한 범위를 가지고 있을까요?
3. 배수와 덧셈은 어떠한 관계가 있을까요?
4. 배수와 뺄셈은 어떠한 관계가 있을까요?
5. 배수와 곱셈은 어떠한 관계가 있을까요?
6. 배수와 나눗셈은 어떠한 관계가 있을까요?

스키마 수학

공배수와 최소공배수

1. 공배수란 무엇일까요?
2. 공배수는 어떠한 범위를 가지고 있을까요?
3. 공배수와 덧셈은 어떠한 관계가 있을까요?
4. 공배수와 뺄셈은 어떠한 관계가 있을까요?
5. 공배수와 곱셈은 어떠한 관계가 있을까요?
6. 공배수와 나눗셈은 어떠한 관계가 있을까요?
7. 최소 공배수란 무엇일까요?
8. 최소 공배수를 구하는 순서를 이야기 해 보세요.
9. 16과 28의 최소 공배수를 여러 가지 방법으로 구해보세요.
10. 최소공배수와 소인수 분해는 어떠한 관계가 있을 까요?

스키마 수학

약수와 배수의 관계

1. 12는 어떠한 수들의 배수일까요?
2. 16은 어떠한 수들의 배수일까요?
3. 35는 어떠한 수들의 배수일까요?
4. 50은 어떠한 수들의 배수일까요?
5. 어떤 수들의 배수는 그 어떤 수들로 배수를 나누었을 때, 어떤 결과가 나올까요?
6. 어떤 수들의 배수는 그 어떤 수들은 한 번 또는 여러 번 더했을 때, 어떠한 결과가 나올 까요?
7. 어떤 수들의 배수는 그 어떤 수들은 한 번 또는 여러 번 뺏을 때, 어떠한 결과가 나올 까요?
8. 어떤 수들의 배수는 그 어떤 수들에 자연수를 차례로 곱했을 때, 어떠한 결과가 나올 까요?
9. 약수와 배수는 어떠한 관계가 있을까요?