韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 26집 제 1호, 2012. 2. 85-108

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 26, No. 1, Feb. 2012. 85-108

수와 연산·도형 영역에서 초등 3학년 학생들의 수학적 정당화 유형에 관한 연구

서 지 수 (대구장성초등학교)
류 성 림 (대구교육대학교)†

본 연구의 목적은 도형 영역과 수와 연산 영역에서 나타나는 초등학교 3학년 학생들의 정당화 유형에 대한 반응과 오류 유형을 검사하여 학생들의 정당화 지도에 대한 시사점을 제공하는 것이다. 연구 결과는 다음과 같다. 첫째, 수와 연산 영역에서 학생들은 정당화 유형 검사지를 해결함에 있어서 경험적 정당화 유형과 분석적 정당화 유형을 고루 사용했다. 둘째, 도형 영역에서는 분석적 정당화에 비해 경험적 정당화 비율이 높게 나타났는데, 경험적 정당화와 분석적 정당화의 비율이 고루 나타난 수와 연산 영역과의 차이가 있었다. 셋째, 정당화 과정에서 발생한 학생들의 오류를 분석해 본 결과 풀이과정 생략의 오류, 개념 및 원리의 오류, 문항 이해의 오류, 기술적 오류의 순으로 나타났다. 따라서 특히 도형 영역에서는 학생들에게 경험적 정당화는 물론이고 분석적 정당화에 대한 경험을 많이 제공할 필요가 있다. 또한 학생들의 오개념 및 잘못 이해하고 있는 원리를 정확하게 파악하여 재지도할 필요가 있겠다.

Ⅰ. 서 론

현대 사회는 다량의 지식을 손쉽게 구할 수 있는 정보화 사회이다. 정보를 선택하거나 판단하는데 있어서 상황을 전체적으로 파악하고 본질을 통찰하기 위해서는 직관력이 필요하고, 정보를 정확히 처리하여 다른 사람들을 납득시키기 위해서는 논리적 사고력이 필요하다. 특히 논리적으로 사고하는 능력의 육성은 수학교육의 중요한 목표 중 하나이며, 이러한 목표를 달성하는데 있어서 증명이 중요한 역할을 하고 있다.

아직까지 학교 수학에서의 증명은 논리적이고 형식적인 증명을 따르고 있고 또한 현재의 증명은 초등학교 수학에서 거의 지도되지 않고 있다. 초등학교 수학과정에서 논리나 추론 지도가 소홀히 다루어지는 이유는 논증기하가 중학교 이상부터 지도되기 시작하고 증명지도는 매우 어렵다는 생각에서 기인한 것으로 볼 수 있다. NCTM(2000)은 '학교 수학을 위한 원리와 규준'에서 추론 규준을 추론과 증명 규준으로 바꾸면서 추론과 증명을 모든 내용 영역과 모든 학년 수준에서 다룰 것을 제안하고 있다.

연역적이고 형식적이며 엄밀한 증명을 강조하는 전통적인 증명관에서 벗어나 다양한 증명의 역할을 반영하고 수학교실 사회의 합의에 의해 증명의 타당성에 대한 기준과 엄밀성의 수준이 결정될 수 있는 포괄적인 '증명'의 개념을 받아들일 필요가 있다(조완영·권성룡, 2001). 신현용(2004)은 증명지도에 대한 대안으로 정당화 지도를 주장하였다. 박주희(2002)도 증명 이전의 인지발달 단계에 상응되는 정당화 과정을 인정해야 한다고 하였다. 따라서 논리적이고 형식적인 증명이 어려운 초등학교 수준에서 증명을 포함하는 포괄적인 의미의 정당화 활동을 지도해야 한다고 본다.

최근 증명지도에서 정당화의 의미와 유형을 분류한 연구가 이루어지고 있으며(Harel & Sowder, 2007; Simon & Blume, 1996; 민정현, 2010; 이지현, 2009; 전수진, 2005; 최남광, 2008), 특히 초등학교에서도 학생들의 정당화

* 접수일(2012년 1월 16일), 심사(수정)일(1차: 2012년 2월 1일, 2차: 2월 8일), 게재확정일자(2012년 2월 10일)
* ZDM분류 : E52
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 정당화, 수와 연산, 도형
† 교신저자

유형에 대한 연구가 많이 이루어져 왔다(권성룡, 2003; 김영숙·방정숙, 2009; 김정하, 2010; 김지영, 2010; 최수미, 2008). 이러한 연구들은 초등학교 학생들이 연역적 정당화를 할 수 있다고 밝히고 있는바, 초등학교에서의 다양한 정당화 경험은 중등학교에서 엄밀한 수학적 증명 학습을 위한 바탕이 될 것이다. 그러나 지금까지 초등학교에서의 정당화에 대한 연구들은 주로 고학년을 중심으로 이루어져 왔는데, 초등학교 저학년 학생들을 대상으로 한 연구는 부족한 상황이다. 정당화는 어느 학년의 특정 시점에서 길러지는 것이 아니므로 초등학교 저학년부터 어떤 형식으로든지 정당화의 경험을 많이 하도록 하여 수학적 힘을 길러줄 필요가 있다. 저학년에서도 정당화 유형을 조사하여 그들의 수학에 대한 이해 방법을 알 필요가 있고, 정당화 과정에서 나타나는 오류를 조사하여 지도 방법에 대한 시사점을 찾을 필요가 있다. 따라서 본 연구에서는 여러 학자들의 문헌과 연구 논문을 토대로 정당화 유형을 분류하고, 초등학교 3학년 수준에서 도형 영역과 수와 연산 영역의 검사 문항을 구성하여 영역별로 나타나는 학생들의 정당화 유형에 대한 반응과 오류 유형을 검사하여 학생들의 정당화 지도에 대한 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 정당화의 의미와 유형

정당화는 엄밀하게 전개되는 연역적이고 형식적인 증명이라는 좁은 의미에서가 아니라 심리학적인 의미에서 보다 포괄적인 관점에서 증명 개념을 지칭한다(Sowder & Harel, 1998). 본 연구에서의 수학적 정당화는 다양하고 포괄적인 의미의 증명을 의미한다. 즉, 학생이 스스로 근거를 갖고 자신의 추론을 통해 납득할 수 있는 다양한 방법의 증명을 수학적 정당화로 볼 수 있다. 전통적인 증명이 수학자 또는 수학교육자들의 관점에서 논의된 용어라면, 정당화의 의미는 학생들의 관점에서 학생들의 심리적인 측면을 고려한 확장된 개념으로 해석할 수 있다(조완영, 2000; 최남광, 2008).

Harel과 Sowder(2007)는 학생들이 사용하는 정당화를 외적 기반을 둔 증명 스키마, 경험적 증명 스키마, 연역적 증명 스키마의 3가지 유형을 제시하였다.

외적 기반을 둔 증명 스키마는 학생들이 확신하는 것과 남을 설득시키기 위한 근원이 외부에 있는 것이다. 예컨대, 이런 외적 증명에 의존하는 학생에게 왜 그것이 참인지를 물었을 때 “우리 엄마가 그렇게 말했어요.”, “교과서에 나와 있어요.”라고 답한다.

경험적 증명 스키마는 예에 기반을 둔 정당화 방법이다. 사람들은 일반적으로 개념을 형성하기 위해서 예에 의존한다. 연구자들은 경험적 증명 스키마의 두 가지 유형으로 지각적 경험 스키마와 예에 기반을 둔 귀납적 증명 스키마를 제시하였다. 지각적 증명은 하나의 예로부터 지각한 것을 바탕으로 주장의 옳고 그름을 판단하는 방법으로 일반적인 진술이나 구체적 사례에 모두 적용될 수 있는 증명 방법이다. 예컨대, 학생에게 3+4=7이 참인 것을 어떻게 알 수 있냐고 물었을 때 손을 이용하여 계산을 보여주는 경우이다. 예를 기반으로 하는 증명은 하나 혹은 더 많은 예제를 통해서 추측을 확인하는 방법을 통해서 자기 자신과 남을 확신시키는 것이다. 예컨대, 학생이 2로 수를 나누었을 때 시작한 수의 절반을 얻게 된다는 것을 보이기 위해 2, 4, 6을 적고 수를 각각 2로 나누어 1, 2, 3을 얻게 됨을 보이는 경우이다.

연역적 증명 스키마는 수학적 관계에 대한 추론을 통해서 일반적인 주장을 하는 방법으로 구체물을 이용하지 않는다. 일반적인 진술과 구체적인 사례에 모두 적용될 수 있는 증명 유형이다. 학생들이 셈 전략을 이용해서 9 + 5 = 14는 “9는 10이 되기 위해 1이 필요하므로 5에서 1을 빼서 9에 주면 10이 되고 4가 남으니까 14가 된다.”라고 설명하는 경우이다. 또 10 × 11 = 110이 되는 이유는 “10 × 10 = 100이고 거기에 10을 더하면 110이 된

다."라고 설명하는 경우이다. 이는 10 × (10 + 1) = 10 × 10 + 10 × 1을 암시적으로 사용한 것이다.

송상헌·허지연·임재훈(2006)은 Balacheff(1987)와 Simon과 Blume(1996)의 연구를 기반으로 하여 정당화 수준과 유형을 분류하는 틀을 개발하였다. 송상헌·허지연·임재훈이 만든 정당화의 수준과 유형을 정리하면 <표 Ⅱ-1>과 같다.

<표 Ⅱ-1> 송상헌·허지연·임재훈의 수학적 정당화 수준과 유형

수준	유형	설명	Balacheff의 정당화 유형	Simon과 Blume의 정당화 수준
1	외부적 정당화	외부의 권위(교사, 책, 이미 알고 있는 결과적 지식)을 빌려 자신의 생각이 옳음을 설명함	·	외부의 권위에 호소
2	귀납적 정당화	구체적인 사례들의 공통된 성질이나 규칙을 귀납하면서 추측, 확장하여 설명함(문자를 사용하지만 핵심 구조를 보지 못하는 경우를 포함)	활동적 증명	경험적 증거
3	포괄적 정당화	일반(포괄)적인 사례를 들어 연역적으로 설명함	지적 증명	일반적 예
4	형식적 정당화	특수한 사례는 보조 수단으로만 사용하며, 문제의 핵심 구조를 바탕으로 기호를 사용하여 논리적으로 설명함	지적 증명	연역적 정당화

2. 수학적 정당화에 관한 선행연구

수학적 정당화에 관한 여러 선행 연구를 살펴보았다. 선행 연구를 분석해 본 결과 우리나라 논문의 경우 5학년을 대상으로 한 권성룡(2003), 김영숙·방정숙(2009), 최수미(2008), 6학년을 대상으로 한 김정하(2010) 등의 연구가 있었고, 영재 학생들을 대상으로 한 김지영(2010), 송상헌·허지연·임재훈(2006) 등의 연구가 있었다. 그 밖에 중·고등학생들을 대상으로 하는 수학적 정당화 논문은 민정현(2010), 이지현(2009), 전수진(2005), 최남광(2008) 등 많은 연구가 있었다. 특히 권성룡(2003)이 5학년을 대상으로 한 교수실험에서 정당화 과제에 대한 아동들의 반응은 진술문의 참과 거짓에 대한 판단을 교사에게 의존하는 외적 증명으로부터 연역적 추론에 이르기까지 다양하게 정당화 활동을 할 수 있다고 밝히고 있다. 또 김정하(2010)는 6학년을 대상으로 한 연구에서 학생들은 수학적 정당화에 대한 개인적 필요성을 강하게 느끼고 있으며, 성취도가 상위 수준인 학생들은 포괄적 예에 의한 연역적 정당화와 단순 연역적 정당화를 선호하고, 중위 또는 하위의 학생들은 경험적·귀납적 정당화를 선호한다고 밝히고 있는데, 초등학생도 정당화를 할 수 있기 때문에 교사는 보다 적극적으로 활동 과제를 고안하여 학생들이 수학적 정당화를 할 수 있는 기회를 제공해야 한다고 하였다. 이외에도 초등학교 고학년을 대상으로 한 대부분의 연구들은 초등학교의 일반학생들이나 영재들도 어느 정도 연역적 정당화를 할 수 있다고 밝히고 있다. 그러나 지금까지의 선행 연구가 초등학교 고학년을 대상으로 한 것에 치중되어 있으므로 본 연구에서는 초등학교 3학년 일반 학생을 대상으로 실시하여 초등학교 중학년 수준에서 나타나는 수학적 정당화 유형을 분석하고자 한다.

지금까지 정당화 유형에 관한 선행연구를 고찰해 보면 정당화 유형의 분류가 상당히 비슷한 부분이 있다. Harel과 Sowder의 외적 기반을 둔 증명 스키마와 Simon과 Blume의 외부의 권위에 호소, 송상헌·허지연·임재훈의 외부적 정당화, 민정현의 교과서나 교사의 설명에 의존한 정당화는 명칭에 조금씩 차이가 있긴 하지만 그 성격이 모두 비슷하다. Harel과 Sowder의 경험적 증명 스키마와 Balacheff의 활동적 증명, Simon과 Blume의 경험적 증거, 송상헌·허지연·임재훈의 귀납적 정당화와 그 성격이 비슷하다. Harel과 Sowder의 연역적 증명

스키마와 Simon과 Blume의 일반적 예와 연역적 정당화, 송상헌·허지연·임재훈의 포괄적 정당화와 형식적 정당화가 그 성격이 비슷하다. 본 연구에서는 Sowder와 Harel(1998)의 정당화 유형과 Simon과 Blume(1996)의 정당화 수준을 참고하여 외적 정당화, 경험적 정당화, 분석적 정당화의 유형으로 분류하여 각 영역별로 학생들이 보이는 수학적 정당화 유형을 분석하였다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

검사지에서 요구하는 내용을 이미 학습한 3학년 학생들을 대상으로 하여 설문 조사 연구를 실시하여 수학적 정당화 유형을 분석하고자 하였다. 본 연구를 위한 예비 검사로 D시에 소재한 J초등학교 3학년 2개 반 40명을 대상으로 정하여 실시하였다. 본 검사에서는 D시에 소재한 J초등학교 3개 반 62명(남 38명, 여 24명)을 연구 대상으로 선정하였다. 연구 대상 학생들의 학업성취도는 D시에서 중간 정도에 속하고, 부모의 경제적 수준은 중산층에 속하고 있다.

2. 연구 절차

초등학교 3학년의 수학적 정당화의 유형을 조사하기 위한 연구는 <표 Ⅲ-1>과 같은 절차에 따라 진행되었다.

<표 Ⅲ-1> 연구 절차

수학적 정당화 유형에 관한 선행연구 분석: 2010. 3~2010. 6
⬇
수학적 정당화 유형의 틀 마련: 2010. 6
⬇
예비검사 실시: 2010. 7 초등학교 3학년 2개 반(40명)을 대상으로 실시
⬇
검사문항 수정 및 보완: 2010. 7~2010. 8
⬇
본 검사 실시: 2010. 8~2010. 9 초등학교 3학년 3개 반(62명)을 대상으로 실시
⬇
인터뷰 실시: 2010. 9~2010. 10
⬇
검사지 분석 및 논의: 2010. 10~2010. 11

2010년 7월 중 담임교사의 관리 하에 D시에 소재한 초등학교 3학년 2개 반을 대상으로 예비 검사를 실시하였다. 예비 검사는 수와 연산 영역과 도형 영역 검사로 나누어 2차례 실시하였으며 검사시간은 40분씩이 주어졌

다. 예비 검사를 통해 문항을 수정·보완하여 D시에 소재한 초등학교 3학년 3개 반을 대상으로 수와 연산 영역 검사(8월)와 도형 영역 검사(9월)로 나누어 2회 실시하였다. 본 검사는 담임교사의 관리 하에 각 학급 교실에서 40분씩 실시되었다.

학생들이 보이는 수학적 정당화 유형과 오류 경향을 알아보기 위해서는 설문조사 연구와 인터뷰의 방법을 사용하였다. 학생들이 보이는 수학적 정당화 유형을 분류하여 그 빈도를 비교해보는 양적 연구를 하였다. 검사 후 학생들의 정당화 과정에서 보이는 오류에 대한 구체적인 원인이나 불분명한 정당화 과정에 대한 구체적인 정보를 얻기 위해 인터뷰를 실시하였다.

3. 검사 도구

가. 예비 검사 문항

예비 검사는 2010년 7월에 실시했으며 D시의 3학년 2개 반(40명)을 대상으로 실시하였다. 초등학교 3학년 학생들의 수학적 정당화 유형을 알아보기 위해 수와 연산 영역과 도형 영역에서 문항을 추출하였다. 예비 검사는 본 검사를 실시하기 위해 학생이 응답하는데 소요되는 시간의 적절성과 난이도, 응답률 등을 알아보고 이를 조절하기 위해 실시하였으며 예비 검사지는 각 영역별로 선택형 2문항, 서술형 5~6문항으로 구성하였다. 선택형 문항 1, 2번에서는 학생들이 생각하는 적절한 수학적 정당화 유형에 대해 알아보고자 했다. 선택형 문항으로만 학생들의 수학적 정당화 유형을 파악하는데 한계가 있을 것이라 생각되어 제시한 서술형 문항 3~7번에서는 실제 학생들이 문제 해결 과정에서 보이는 수학적 정당화 유형에 대해 알아보고자 했다. 문항 내용이 타당한지를 알아보기 위해 지도교수와 동료교사로부터 검사를 받았다.

<예비 검사 문항>

다음 문제가 참인지 거짓인지 판단하고 그 이유를 설명하시오.

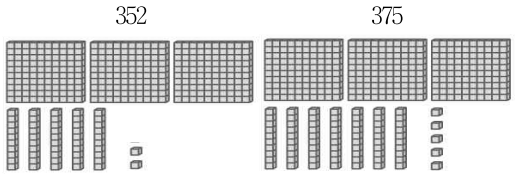
(문제) 17 > 13

<본 검사 문항>

※ '352 < 375'를 설명한 것입니다. 내가 생각한 설명과 가장 비슷한 것을 고르세요.

① 수학 시간에 선생님이 수를 앞자리 수부터 순서대로 비교해서 큰 수를 찾는 것이라고 설명했기 때문에 352보다 375가 크다.

② 두 수를 비교하기 위해서 수 모형을 이용할 수 있다. 수 모형으로 두 수를 나타내면 아래 그림과 같다.



그림으로 비교해보면 375가 더 큰 수임을 알 수 있다.

③ 세 자리 수의 크기 비교는 백의 자리 숫자부터 차례대로 비교하면 된다. 백의 자리 숫자는 같기 때문에 십의 자리 숫자를 비교하면 5와 7이고 5 < 7이므로 352 < 375이다.

<그림 III-1> 검사 문항 수정의 예

예비 검사 결과를 본 검사에 반영하였는데, 수와 연산 예비 검사를 실시한 결과, 분석적 정당화에만 치우친 결과가 나온 수의 크기 비교 문항은 학생들의 생각을 보다 자세하게 알아보기 위해 선택형 문항으로 바꾸고 영

역 간에 차이가 없도록 3학년 교육과정의 내용에 적절한 세 자리 수의 크기 비교 문항으로 수정하였다. 도형 예비 검사에서는 경험적 정당화에만 치우친 결과가 나온 도형의 이동 문제 역시 선택형 문항으로 수정하였다. <그림 Ⅲ-1>은 수정한 검사 문항의 예이다.

나. 본 검사 문항

<부록 1>에 제시된 본 검사지는 수와 연산 영역과 도형 영역으로 나누어져 있으며 연산 8문항, 도형 7문항으로 구성되어 있다. 각 영역별로 선택형 2문항과 서술형 5~6문항으로 구성되어 있고 3-1, 3-2(일부 단원)의 내용을 추출하여 구성하였으며 본 연구자에 의해 개발되고 지도 교수와 동료 교사에게 내용의 타당도를 검사받았다. 각 문항의 특성은 <표 Ⅲ-2>와 같다.

<표 Ⅲ-2> 문항의 특성

영역	유형	문항 주제
수와 연산(Ⅰ)	선택형	Ⅰ-1. 세 수의 크기 비교하기
		Ⅰ-2. (세 자리 수)×(한 자리 수) 계산하기
	서술형	Ⅰ-3. 등분제 상황 이해하기
		Ⅰ-4. 이산량으로서의 분수 나타내기
		Ⅰ-5. 세 수의 뺄셈식 계산 순서 알아보기
		Ⅰ-6. 세 자리 수의 뺄셈식 해결하기
		Ⅰ-7. 연속하는 세 자리 숫자로 곱셈식 만들기
		Ⅰ-8. (두 자리 수)÷(한 자리 수) 계산하기
도형(Ⅱ)	선택형	Ⅱ-1. 평면 도형의 회전 이해하기
		Ⅱ-2. 반지름의 성질 이해하기
	서술형	Ⅱ-3. 사각형의 포함관계 나타내기
		Ⅱ-4. 지름의 성질 설명하기
		Ⅱ-5. 정사각형의 성질 설명하기
		Ⅱ-6. 직각삼각형 식별하기
		Ⅱ-7. 원의 중심과 반지름의 관계 이해하기

검사 문항은 학생들이 영역별로 나타내는 수학적 정당화 유형 분석 자료에 토대가 되는 기초 자료이므로 검사 도구를 실시하기 전에 학생들에게 머릿속에서 행해지는 사고의 과정을 눈에 보이듯이 드러나게 자세하고 논리적으로 다른 사람이 이해할 수 있게 작성해야 함을 강조하였다.

4. 자료 분석

가. 자료 분석의 틀

정당화 유형을 분석하기 위해 선행 연구의 정당화 유형의 공통적인 요소를 추출하여 권위적 정당화, 경험적 정당화, 분석적 정당화로 분류하고 <표 Ⅲ-3>으로 정리하였다. <표 Ⅲ-3>에서 정리한 분석틀을 기준으로 하여 각 영역별로 학생들이 보이는 수학적 정당화 유형을 분석하고자 한다.

<표 Ⅲ-3> 수학적 정당화 유형 분석의 틀

Harel & Sowder	Simon & Blume	수학적 정당화 유형 분석의 틀
외적 기반을 둔 증명 스키마	외부의 권위에 호소	권위적 정당화: 옳고 그름을 교과서, 부모, 교사 등의 권위를 의존해 설명
경험적 증명 스키마	경험적 증거	경험적 정당화: 구체적 활동이나 예를 증거로 자신의 주장이 옳다고 설명
연역적 증명 스키마	일반적 예	분석적 정당화: 수학적 추론을 통해 설명하거나 일반성과 논리성을 포함
	연역적 정당화	

오류 유형은 학생들의 정당화 과정에서 발생하는 오류들을 종류별로 분류하여 그에 맞는 명칭을 붙인 것이다. 본 연구에서는 허성희(2008)의 오류 유형을 참고하여 <표 Ⅲ-4>와 같이 정리하였다. <표 Ⅲ-4>에서 정리한 오류 유형을 기준으로 각 영역별로 학생들의 정당화 과정에서 나타나는 오류를 분석하고자 한다.

<표 Ⅲ-4> 오류 유형 분석의 틀

오류 유형	내 용
문항 이해의 오류	·문제에서 요구하는 내용을 잘못 이해하거나 해석하는데서 발생하는 오류
개념 원리의 오류	·기본 개념을 잘못 파악하거나 기본 정보가 부적절하게 이끌어져 발생하는 오류
기술적인 오류	·기호를 잘못 표기하거나 빠뜨리는 경우 또는 문자를 잘못 옮겨 적는 경우에 발생하는 오류 ·부주의 또는 실수에 의해 발생하는 오류
풀이과정 생략의 오류	·충분한 설명이 결여되어 있거나 풀이 과정을 생략하고 답만을 언급하는 오류

나. 자료 분석 방법

선택형 문항은 학생들의 정당화 유형별로 빈도를 구한 후 백분율을 나타내었다. 문항 Ⅰ-3~8, Ⅱ-3~7은 서술형 문항으로 학생들이 보인 수학적 정당화 유형을 분류하기 위해 <표 Ⅲ-5>와 같은 채점기준으로 점수를 부여했다.

<표 Ⅲ-5> 채점기준표

점수	채점기준
0	· 정당화를 시도하지 못함. · 주어진 문제를 정확하게 이해하지 못하고 상관없는 내용을 설명함.
1	· 정당화하려고 시도했으나 문제에서 주어진 정보 이외의 내용이 없음. · 정당화 과정 중에 사용한 용어나 기호가 적절하지 못함.
2	· 정당화 과정 중에 부정확한 내용이 조금 있으나 전체적으로 정당화에 도달함. · 부분적인 정당화 과정이 이루어짐.
3	· 설명하는 내용에 오류가 없고 다른 사람이 보고 이해할 수 있도록 정당화 함.

서술형 문항은 채점기준에 따라 정당화 과정에서 2~3점을 받은 학생의 반응은 수학적 정당화 유형을 분류하고 백분율을 나타내어 비교하였으며, 0~1점을 받은 학생들의 반응은 수학적 정당화 유형에 포함하지 않고 오류 경향을 분석하는 데에 이용하였다. 오류의 범주별로 학생들이 나타내는 오류를 각 문항별로 빈도와 백분율을 이용하여 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 수와 연산 영역 선택형 문항에서 보이는 학생들의 수학적 정당화 유형 분석

수와 연산 선택형 문항에 대한 학생들의 수학적 정당화 유형 분포는 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 수와 연산 선택형 문항에서 나타난 학생들의 수학적 정당화 유형 분포

수학적 정당화 유형			권위적	경험적	분석적	합계
자신의 설명과 비슷한 것	문항 Ⅰ-1	학생수(%)	8(13%)	18(29%)	36(58%)	62(100%)
	문항 Ⅰ-2	학생수(%)	23(37%)	16(26%)	23(37%)	62(100%)
설명이 잘 되었다고 생각한 것	문항 Ⅰ-1	학생수(%)	·	19(31%)	43(69%)	62(100%)
	문항 Ⅰ-2	학생수(%)	15(24%)	12(19%)	35(57%)	62(100%)

문항 Ⅰ-1에서 자신의 설명과 비슷한 수학적 정당화 유형과 가장 설명이 잘 되었다고 생각한 수학적 정당화 유형에는 큰 차이가 없었다. 학생들은 직접 수모형을 이용해 정당화하는 것보다는 수 체계를 이용해 정당화하는 것이 자신의 설명과 비슷하다고 생각하거나(58%) 잘 된 설명이라고 대답(69%)한 학생의 비율이 매우 높았다. 설명이 잘 되었다고 생각한 수학적 정당화 유형에서는 권위적 정당화의 비율이 줄어들고 분석적 정당화의 비율이 늘어나는 것을 볼 수 있다.

문항 Ⅰ-2는 곱셈의 결과를 정당화하는 것으로 권위적 정당화를 선택한 학생이 23명(37%)이나 되었다. 이는 학생들이 곱셈의 개념을 이해하는데 있어 자신의 생각을 가졌다기보다는 책에서 본대로, 배운대로 문제를 해결하려는 태도를 가졌다고 볼 수 있다. 또 학생들이 설명이 가장 잘 되었다고 생각한 수학적 정당화 유형은 자신의 설명과 비슷한 수학적 정당화 유형과 비교해 볼 때 분석적 정당화의 빈도가 매우 높아지는 것을 볼 수 있다. 이는 곱셈 문제에 있어서 자신이 생각하는 수학적 정당화 유형과 설명이 잘 되었다고 생각하는 수학적 정당화 유형에는 차이가 있음을 알 수 있다.

2. 수와 연산 영역 서술형 문항에서 보이는 학생들의 수학적 정당화 유형 분석

<표 Ⅳ-2> 수와 연산 서술형 문항에서 나타난 수학적 정당화 유형 빈도분석

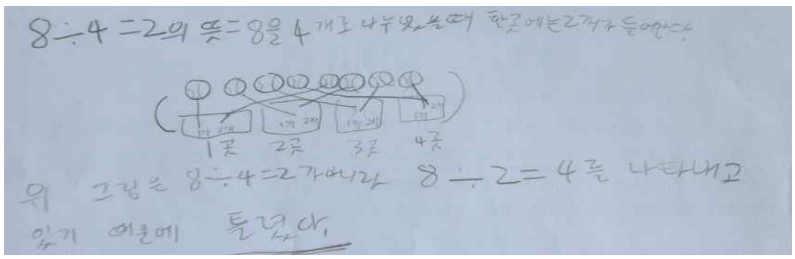
N=62

수학적 정당화 유형 / 문항	정당화 유형을 분류할 수 없음(0점, 1점)	권위적 정당화	경험적 정당화	분석적 정당화
Ⅰ-3	43(69%)	·	15(24%)	4(7%)
Ⅰ-4	23(37%)	4(7%)	13(21%)	22(35%)
Ⅰ-5	45(73%)	2(3%)	15(24%)	·
Ⅰ-6	14(23%)	·	4(7%)	44(70%)
Ⅰ-7	30(48%)	·	32(52%)	·
Ⅰ-8	8(13%)	·	23(37%)	31(50%)
계	163(44%)	6(2%)	102(27%)	101(27%)

초등학교 3학년 학생들의 정확한 수학적 정당화 유형을 알아보기 위해 구성한 서술형 문항인 Ⅰ-3~Ⅰ-8을

분석하였고, 0점과 1점을 받은 경우는 정당화 분류에서 제외하였다. 수와 연산 영역 서술형 문항에서 나타난 수학적 정당화의 유형은 <표 Ⅳ-2>와 같으며 문항별로 분석하였다.

문항 Ⅰ-3에서는 등분제인 그림 상황에서 포함제인 나눗셈 식을 제시하고 맞는지 틀린지를 결정하고 이유를 쓰도록 한 문항으로 등분제와 포함제의 의미를 상황으로 바르게 이해하고 있는가를 판단하기 위해 제시한 문항이었다. 이 문항에서 0점과 1점을 받은 학생, 즉 정당화 유형을 분류할 수 없는 응답을 한 학생들은 43명(69%)으로 문제 상황에는 관심을 갖지 않고 주어진 숫자에만 관심을 가졌기 때문이다. 즉, 학생들은 상황을 고려하여 문제를 분석하는 것보다는 주어진 숫자만을 이용해 문제를 해결하는 것에 익숙하기 때문이라고 볼 수 있다. 주어진 등분제 상황을 정확하게 설명하며 이유를 제시한 학생은 4명(7%)이었으며 8÷4의 상황을 그림으로 나타내어 주어진 <그림 Ⅳ-1>과 같이 식이 틀렸다고 설명하는 경우도 있었다.



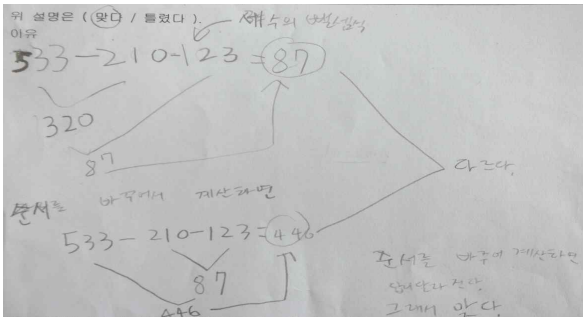
<그림 Ⅳ-1> 문항 Ⅰ-3의 분석적 정당화의 예

문항 Ⅰ-4는 이산량의 등분할을 통해 분수를 이해하는가를 판단하기 위해 제시한 문항이다. 문항 Ⅰ-4에서는 분석적 정당화를 보인 학생이 22명(35%)으로 가장 높게 나타났다. 이 문항은 다른 문항에 비해 권위적 정당화를 보인 학생의 비율이 높았다. 다음은 권위적 정당화를 보인 A 학생에 대한 문항 Ⅰ-4의 인터뷰 발췌문이다.

<발췌문: 권위적 정당화의 예>
A: 8 나누기 4는 2이고 2 곱하기 3은 6이기 때문에 이 설명은 맞습니다.
T(교사): 8에서 4는 왜 나눕니까?
A: …….
T: 설명을 못 하겠어요?
A: 네.
T: 그럼 이렇게 계산하는 방법은 어떻게 알았나요?
A: 어머니랑 공부하면서 알게 됐어요.(인터뷰 녹취, 8/27)

문항 Ⅰ-5는 세 수의 뺄셈식의 계산 순서를 묻는 내용으로 수와 연산 영역 서술형 문항 중 0점과 1점을 받은 학생, 즉 정당화 유형을 분류할 수 없는 응답을 한 학생이 45명(73%)으로 가장 많았다. 이는 학생들이 '세 수의 뺄셈식'이라는 문제의 조건을 제대로 파악하지 않고 문제를 해결한 문항 이해의 오류가 많이 발생했기 때문이다.

이 문항에서 15명(24%)의 학생들은 <그림 Ⅳ-2>와 같이 하나의 식으로 예를 들어 설명하는 경험적 정당화를 보였다. 아래 응답에서 533-210=323이고, 다시 323-123=200인데, 뒤에서부터 계산하면 210-123=87이고, 다시 533-87=446이 나오게 되어 결과가 다르다는 것을 이용하여 설명하였으므로 경험적 정당화에 해당한다고 볼 수 있다. 그러나 이 학생은 예는 잘 들었으나 계산상의 오류를 보이는 것으로 나타났다.

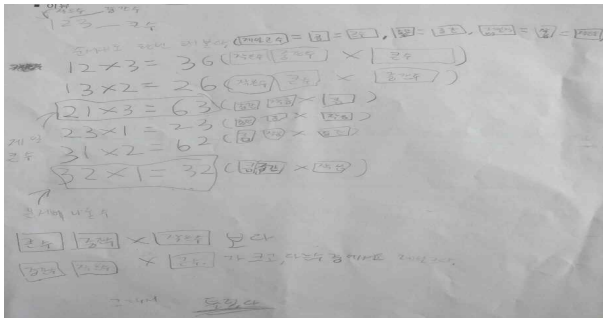


<그림 Ⅳ-2> 문항Ⅰ-5의 경험적 정당화의 예

문항 Ⅰ-6은 세 자리 수의 뺄셈 결과가 참인지 거짓인지를 묻는 단순 연산 문항으로 전체 문항에서 나타난 분석적 정당화의 비율 중 가장 높게 나타났다. 44명(70%)의 학생이 수 가르기와 모으기를 통하거나 받아내림 과정을 통해 계산 결과가 참 또는 거짓임을 보이는 분석적 정당화 과정을 보였다. 다음은 분석적 정당화 과정을 보인 B 학생의 인터뷰 발췌문이다.

<발췌문: 분석적 정당화의 예>
T(교사): 이유를 다시 설명해 볼래요?
B: 7에서 9를 빼야 하는데 9에서 7을 빼서 잘못됐어요.
T: 바르게 계산하려면 어떻게 하면 되는지 설명해 볼래요?
B: 567을 400과 150과 17로 나눌 수 있어요. 그래서 400에서 300을 빼고 150에서 70을 빼고 17에서 9를 빼면 100과 80과 8이 남아요. 그래서 바르게 계산하면 188이 되어야 해요.
T: (그림으로 나타낸 설명을 제시하며)이 설명도 맞나요?
B: 네.
T: 그럼 두 가지 방법 중에 어느 방법이 더 좋다고 생각하나요?
B: 제가 푼 방법이 더 나은 것 같아요. 왜냐하면 그렇게 그림으로 그리기도 힘들고 시간도 오래 걸려요.(인터뷰 녹취, 8/30)

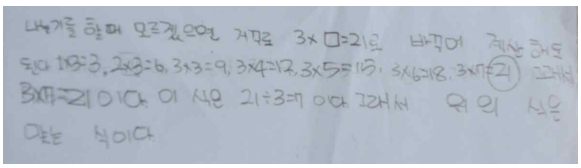
문항 Ⅰ-7에서는 연속하는 세 수를 이용하여 가장 큰 (두 자리 수)×(한 자리 수)를 만드는 방법에 대한 것으로 정당화 유형으로 분류한 응답을 한 학생들은 모두 경험적 정당화의 유형을 나타냈는데, 이 문항은 연속하는 세 수의 범위에 따라 가장 큰 수가 나오는 경우가 달라지므로 3학년 학생들이 분석적 정당화를 보이기 어려운 문제였다.



<그림 Ⅳ-3> 문항 Ⅰ-7의 경험적 정당화의 예

2점과 3점을 받은 학생 32명(52%)은 모두 <그림 Ⅳ-3>과 같이 연속하는 세 수를 정하여 가장 큰 값이 나오는 경우를 따져보며 문제가 틀렸음을 보이는 경험적 정당화를 보였다. 학생의 응답을 보면 세 수 1, 2, 3을 예로 들어 '(제일 큰 수)(중간 수)×(제일 작은 수)'는 32×1=32로서 21×3=63보다 작다는 것을 예로 들어 설명하였음을 볼 수 있다.

문항 Ⅰ-8은 상황이 주어지지 않은 단순한 나눗셈 문항으로 <그림 Ⅳ-4>와 같이 분석적 정당화의 유형을 나타낸 학생이 31명(50%)으로 매우 높게 나타났는데 2학년에서 곱셈을 이미 학습했기 때문에 곱셈의 역연산으로서의 단순한 나눗셈 계산은 3학년 학생들에게 설명하기 어렵지 않은 문항이었다고 보인다. 경험적 정당화의 유형을 보인 학생도 23명(37%)으로 높게 나타났는데, 문항에서 제시하는 수만큼 그림을 그려놓고 등분제 혹은 포함제 상황의 그림으로 나타내며 정당화하는 경우가 많았다.



<그림 Ⅳ-4> 문항 Ⅰ-8의 분석적 정당화의 예

3. 도형 영역 선택형 문항에서 보이는 학생들의 수학적 정당화 유형 분석

도형 선택형 문항에 대한 학생들의 수학적 정당화 유형 분포는 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3> 도형 선택형 문항에서 나타난 학생들의 수학적 정당화 유형 분포

수학적 정당화 유형			권위적	경험적	분석적	합계
자신의 설명과 비슷한 것	문항 Ⅱ-1	학생수(%)	16(26%)	39(63%)	7(11%)	62(100%)
	문항 Ⅱ-2	학생수(%)	4(7%)	38(61%)	20(32%)	62(100%)
설명이 잘 되었다고 생각한 것	문항 Ⅱ-1	학생수(%)	6(10%)	34(55%)	22(35%)	62(100%)
	문항 Ⅱ-2	학생수(%)	5(8%)	25(40%)	32(52%)	62(100%)

문항 Ⅱ-1에서 자신의 설명과 비슷한 수학적 정당화 유형으로 경험적 정당화를 선택한 학생의 비율이 63%로 매우 높은 이유는 구체적 조작기에 해당하는 3학년 학생들의 특성상 도형의 이동을 학습할 때 직접 도형을 뒤집거나 돌리면서 그려보는 활동이 대부분을 차지하고 많은 활동을 통해 접했기 때문에 익숙하게 느끼기 때문이다. 설명이 잘 되었다고 생각한 수학적 정당화 유형에서는 수와 연산 영역과 마찬가지로 권위적 정당화의 비율이 줄어들고 분석적 정당화의 비율이 늘어났으나 경험적 정당화의 비율은 큰 차이가 없는 것을 볼 수 있다.

문항 Ⅱ-2에서 경험적 정당화 유형을 선택한 학생의 비율이 61%로 가장 높았으며 차이는 크지 않지만 문항 Ⅱ-1과 같이 설명이 잘 되었다고 생각한 수학적 정당화 유형에서는 경험적 정당화의 비율이 줄어들고 분석적 정당화의 비율이 늘어나는 것을 볼 수 있다. 이 결과는 아마 어린 학생들이다보니 설명이 다른 것보다 길게 되어 있고, 원의 중심과 반지름의 개념을 이용하여 설명하였기 때문이 아닌가 하는 생각이 든다.

4. 도형 영역 서술형 문항에서 보이는 학생들의 수학적 정당화 유형 분석

도형 영역 서술형 문항에서 보이는 학생들의 수학적 정당화 유형 분포는 <표 Ⅳ-4>와 같다.

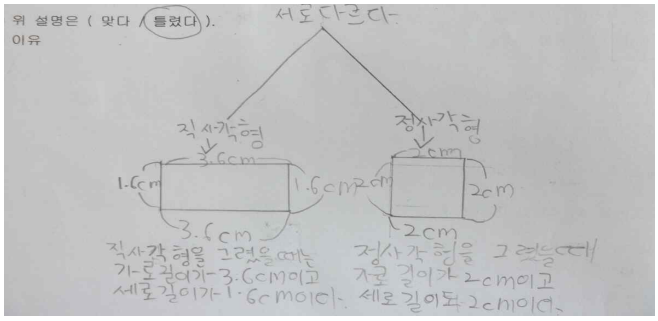
문항 Ⅱ-3에서는 직사각형과 정사각형에 대한 이해를 토대로 사각형의 포함관계를 정당화하도록 한 문항으로 학생들은 직사각형과 정사각형을 한 예로 제시하거나 실제로 각 변의 길이를 재어 나타내면서 직사각형은 정사각형과 다르므로 틀렸음을 보이는 경험적 정당화 유형을 보인 학생이 22명(35.5%)으로 많았다. 직사각형의 성질과 정사각형의 성질을 나열하며 직사각형은 네 변의 길이가 모두 같지 않다는 조건을 따져 포함관계가 성립하지 않음을 보이는 분석적 정당화를 보인 학생들이 18명(29%)으로 나타났으며, 분석적 정당화를 보인 학생들은 직사각형은 정사각형이 될 수 없음을 보이기 위해 시각적 표현을 보조적으로 사용한 학생들도 있었다.

<표 Ⅳ-4> 도형 서술형 문항에서 나타난 수학적 정당화 유형 빈도분석

N=62

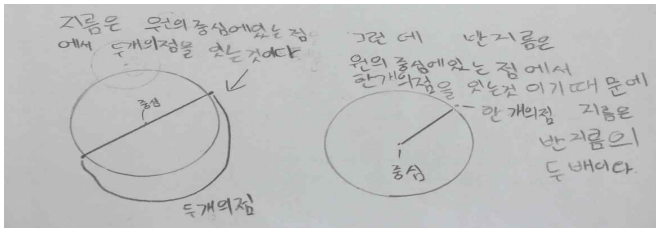
수학적 정당화 유형 / 문항	정당화 유형을 분류할 수 없음(0점 또는 1점)	권위적 정당화	경험적 정당화	분석적 정당화
Ⅱ-3	22(35.5%)	·	22(35.5%)	18(29%)
Ⅱ-4	4(6%)	·	49(79%)	9(15%)
Ⅱ-5	40(65%)	·	22(35%)	·
Ⅱ-6	18(29%)	·	44(71%)	·
Ⅱ-7	30(48%)	·	19(31%)	13(21%)
계	114(35%)	0	156(50%)	40(15%)

<그림 Ⅳ-5>는 경험적 정당화의 예를 든 것인데, 직사각형과 정사각형의 각 변을 구체적인 수치로 나타내어 그림을 이용하여 직사각형이 정사각형이 될 수 없음을 예로 든 것이다. 따라서 이 학생의 응답은 경험적 정당화에 해당한다.



<그림 Ⅳ-5> Ⅱ-3의 경험적 정당화의 예

문항 Ⅱ-4는 원의 지름과 반지름을 알고 '지름은 반지름의 2배'라는 관계를 정당화하도록 한 문항으로 0점과 1점을 받은 학생, 즉 정당화 유형을 분류할 수 없음으로 분류된 학생이 4명(6%)으로 매우 낮게 나타났는데, 이는 검사를 실시하기 2주 전에 학습한 단원이므로 학습 시기와 관련된 것으로 보인다. 이 문항에서 학생들은 실제 하나의 원을 그려 반지름의 길이와 지름의 길이를 재었을 때 그 길이가 2배가 됨을 보이는 경험적 정당화의 유형이 49명(79%)으로 매우 높게 나타났다.



<그림 Ⅳ-6> 문항 Ⅱ-4의 분석적 정당화의 예

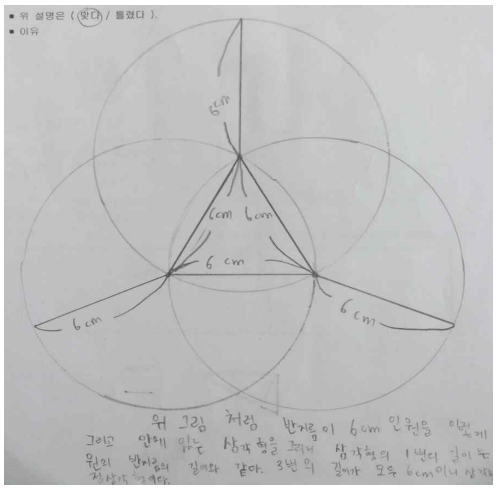
<그림 Ⅳ-6>과 같이 원의 중심과 관련하여 지름과 반지름의 의미를 설명하며 지름이 반지름의 2배가 됨을 설명하는 분석적 정당화를 보인 학생도 9명(15%)이 있었다. 분석적 정당화를 보인 학생들은 모두 설명에 대한 보조적인 자료로 시각적 표현을 사용하였다. 학생들은 도형의 성질이나 개념을 이용하여 설명할 수 있지만 자신의 설명을 더 상세히 하기 위해서 시각적 자료를 보이는 것으로 미루어 볼 때, 그림이나 구체물과 같은 예시 자료에 의존하는 경향이 높다고 볼 수 있다. <그림 Ⅳ-6>은 지름과 반지름의 관계를 그림을 이용하긴 했지만 중심으로부터 연결된 선분을 이용하여 지름과 반지름의 관계를 분석하여 나타냈기 때문에 분석적 정당화의 예가 된다.

문항 Ⅱ-5는 직사각형 모양의 종이를 이용하여 네 변의 길이가 같은 정사각형이 만들어짐을 정당화하도록 한 문항으로 0점과 1점을 받은 학생, 즉 정당화 유형을 분류할 수 없음을 보인 학생이 40명(65%)으로 가장 높게 나타났는데, 이는 학생들이 도형의 여러 요소를 따져 네 변의 길이가 같고 네 각의 크기가 같아짐을 보이기에 어려운 문항이었기 때문이라고 볼 수 있다. 경험적 정당화의 유형을 보인 학생이 22명(35%)으로 높게 나타났는데 경험적 정당화를 보인 학생은 대부분 실제 직사각형 종이를 접고 자르는 활동을 한 결과 정사각형이 만들어짐을 보이는 예가 있었다.

문항 Ⅱ-6에서는 직각에 대한 개념을 토대로 직각삼각형을 구별해 낼 수 있는가를 알아보기 위한 문항이었다. 이 문항에서 주어진 삼각형에서 직각을 찾아내는 것을 통한 경험적 정당화를 보인 학생들이 44명(71%)으로 매우 높게 나타났다.

문항 Ⅱ-7에서는 원의 중심과 반지름의 관계를 이용해 만들어진 도형을 정당화하도록 구성하였다. <그림 Ⅳ-7>은 실제 주어진 조건대로 그림을 그린 후 삼각형의 세 변의 길이를 직접 재어서 세 변의 길이가 모두 같으므로 정삼각형이라고 설명한 경험적 정당화 유형의 예인데, 이러한 반응을 한 학생이 19명(31%)으로 가장 높게 나타났다.

만들어지는 삼각형 변의 길이가 원의 중심과 중심이 연결된 반지름이 됨을 설명하는 분석적 정당화 유형을 보인 학생은 13명(21%)이 있었다. 분석적 정당화를 보인 학생 중에서 4명(6%)은 문항에서 시각적 자료가 제시되어 있는데도 정당화 과정에서 시각적 표현을 보조적으로 이용하였다. 즉 세 원의 반지름을 그려서 반지름이 모두 같다는 것을 이해하기 쉽게 하기 위한 것으로 볼 수 있다.



<그림 Ⅳ-7> 문항 Ⅱ-7의 경험적 정당화의 예

5. 정당화 과정에서 학생들이 보이는 정답과 오답 비율 분석

서술형 문항에서 학생들이 보인 수학적 정당화 유형 중 정당화 유형을 분류할 수 없음(0점, 1점)과 권위적 정당화는 학생들이 가진 지식으로 스스로 정당화 과정을 구성하지 못하였으므로 오답으로 분류하고, 경험적 정당화와 분석적 정당화는 학생 나름의 정당화 과정을 보였으므로 정답으로 분류하여 영역별 정답과 오답 비율을 나타내었다. 오답으로 분류한 권위적 정당화는 수학적 정당화 유형에 속하므로 오류로 분류하지 않았다. 영역별 정답과 오답 비율은 <표 Ⅳ-5>와 같다.

<표 Ⅳ-5> 영역별 정답과 오답 비율

수학적 정당화 유형 / 영역	오 답		정 답	
	정당화 유형을 분류할 수 없음	권위적 정당화	경험적 정당화	분석적 정당화
수와 연산(Ⅰ)	44%	2%	27%	27%
	46%		54%	
도형(Ⅱ)	35%	·	50%	15%
	35%		65%	

6. 학생들이 정당화 과정에서 보이는 오류 분석

서술형 문항에서 학생들이 정당화 하는 과정에서 발생하는 오류들을 유형별로 분류하였다. 학생들이 서술형 문항에서 정답(분석적 정당화, 경험적 정당화 중에서 2점과 3점을 받은 경우)을 제시한 경우는 오류 분석 대상에서 제외하고 정당화 유형을 분류할 수 없음을 보인 응답(0점과 1점)은 문항 이해의 오류, 개념 원리의 오류, 기술적인 오류, 풀이과정 생략의 오류로 분류하였다. 각 문항별 오류 유형은 <표 Ⅳ-6>과 같다.

<표 Ⅳ-6> 문항별 오류 유형 빈도분석

N=277

오류 유형 / 문항	문항 이해의 오류	개념 및 원리의 오류	기술적인 오류	풀이과정 생략의 오류	계
Ⅰ-3	·	41(14.8%)	1(0.4%)	1(0.4%)	43(15.5%)
Ⅰ-4	2(0.7%)	12(4.3%)	2(0.7%)	7(2.5%)	23(8.3%)
Ⅰ-5	23(8.3%)	14(5.1%)	·	8(2.9%)	45(16.2%)
Ⅰ-6	·	·	7(2.5%)	7(2.5%)	14(5.1%)
Ⅰ-7	15(5.4%)	·	3(1.1%)	12(4.3%)	30(10.9%)
Ⅰ-8	1(0.4%)	·	2(0.7%)	5(1.8%)	8(2.9%)
Ⅱ-3	3(1.1%)	5(1.8%)	9(3.2%)	5(1.8%)	22(7.9%)
Ⅱ-4	·	·	2(0.7%)	2(0.7%)	4(1.4%)
Ⅱ-5	9(3.2%)	·	11(4%)	20(7.3%)	40(14.4%)
Ⅱ-6	5(1.8%)	6(2.2%)	·	7(2.5%)	18(6.5%)
Ⅱ-7	14(5.1%)	2(0.7%)	6(2.2%)	8(2.9%)	30(10.9%)
계	72(26%)	80(28.9%)	43(15.5%)	82(29.6%)	277(100%)

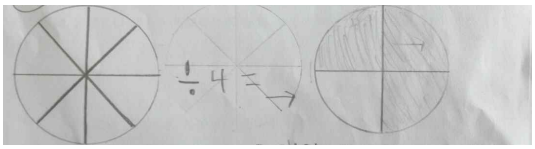
오류 유형별로 특징적인 문항에 대해 알아보도록 한다.

가. 문항 이해의 오류

문항 Ⅰ-5는 문항 이해의 오류가 가장 많이 나타났다. 세 수의 뺄셈식이라고 문항에서 제시하고 있음에도 불구하고 많은 학생들은 세 자리 수의 뺄셈식으로 생각해 받아내림을 해야 해서 뒤에서부터 계산해야 한다고 설명했다. 이는 세 수의 뺄셈식을 세 자리 수의 뺄셈식으로 문항을 잘못 이해하거나 '세 수'를 '세 자리 수'로 단어를 잘못 인식하여 생긴 오류라고 볼 수 있다. 문항 Ⅰ-7은 문제에서 요구하는 연속하는 세 자리 수를 이용해서 해결해야 하는 문항임에도 불구하고 연속하는 세 수라는 조건은 무시하고 제일 큰 수를 9, 중간수를 5, 제일 작은 수를 1로 두고 설명해 오류가 발생하였다. 문항 Ⅱ-3에서는 '직사각형은 정사각형이다.'를 정당화하도록 한 문항에서 직(각)삼각형과 정삼각형을 제시하며 정당화를 하는 오류가 발생하였다. 이는 문항에서 제시하는 도형의 이름을 잘못 파악하여 생긴 오류라고 볼 수 있다.

나. 개념 및 원리의 오류

문항 Ⅰ-3은 등분제 상황을 제시하고 등분제 식을 바르게 나타낼 수 있는가를 알아보기 위한 문항으로 개념 및 원리의 오류를 보인 학생이 41명으로 전체 문항 중 가장 높게 나타났다. 학생들이 오답을 한 이유를 살펴보면 문항에서 제시되는 외적으로 보이는 숫자에만 관심을 가지고 그림으로 제시된 상황에 대한 이해가 부족했고 문제에서 주어진 상황이 등분제의 상황인지 알지 못하고 곱셈의 역연산으로서의 나눗셈을 생각하여 2×4=8이기 때문에 이를 나눗셈 식으로 나타내면 '8÷4=2'와 '8÷2=4' 두 가지 모두 가능하다고 대답한 경우도 있었다. 문항 Ⅰ-4에서 학생들이 보인 오답 유형에는 <그림 Ⅳ-8>과 같이 8을 이산량으로 보지 않고 연속량의 등분할을 이용해 분수를 나타내는 학생들이 많이 있었다. 하나를 8등분하여 그 중의 분수량을 찾아내어 답이 맞다고 제시하였다. 그림에서 원을 8등분한 다음 $\frac{3}{4}$만큼 색칠한 개수에 해당하는 개수 6을 답으로 생각한 것이다. 하지만 실제 나타내는 값은 분할한 것 중의 6개이므로 6이 아니라 $\frac{6}{8}$을 나타내는 것이므로 오답이다. 이는 이산량과 연속량의 분수에 대한 개념이 혼돈되어 사용되기 때문임을 알 수 있다.



<그림 Ⅳ-8> 연속량으로서의 분수로 설명한 오류

다음은 문항 Ⅰ-4에서 오답을 보인 학생 C의 인터뷰 내용이다.

<발췌문: 개념 및 원리의 오류 예>

C: 4(분모)가 8이 되려면 2인데(2를 곱해야 되는데) 3(분자)이 남아있기 때문에 2와 3을 곱하면 6이 되기 때문에 설명이 맞습니다.

T(교사): 왜 4가 8이 되어야 하지?

C: 4단에서 6이 되는 수는 없고 4에서 8이 되는 수는 2이기 때문입니다.

T: ('10의 $\frac{2}{5}$는(　　)이다'라는 문제를 제시하며) 이 문제 설명해줄래요?

C: 5(분모)단에서 10이 되는 수는 2이고 2(분자)에 2를 곱하면 4이기 때문에 답은 4입니다.

T: $\frac{2}{5}$가 무엇을 의미하는지 설명해줄래요?
C: 음... 5(분모)개 중에 2(분자)개.
T: 그러면 5개가 아니라 10개가 있다면?
C: 음... 10(분모)개 중에...음... 5(분자)개?
T: 왜 10개 중에 5개가 되는 거야?
C: 5(분모)랑 2를 곱하면 10인데 2(분모)에서 5를 곱해야 10이 되니까 5입니다.(인터뷰 녹취, 9/14)

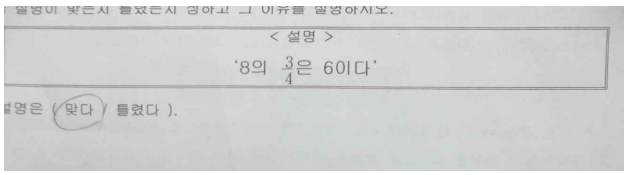
C 학생은 주어진 분수를 전체와 부분의 의미로 바르게 이해하고 있으나 이산량의 등분할을 통한 분수의 개념은 형성되어 있지 않았다. 단순히 문제가 주어질 때 분자와 분모로서 나타내는 의미는 생각하지 않고 분자와 분모 중에서 주어진 이산량이 되는 수를 찾아 몇 배가 되는지를 구한 다음 나머지 값에 몇 배 한 값으로 계산하는 모습을 보였다. 학생들은 주어진 수 내에서 연산을 통해 문제를 해결하려고 한다는 것을 예상해볼 수 있다. 학생들에게 이산량의 분수 개념에 대한 좀 더 깊이 있는 지도가 필요하겠다.

문항 Ⅱ-3에서 도형의 개념에 대한 오류를 보인 학생 D의 인터뷰 발췌문이다.

<발췌문: 개념 및 원리의 오류 예>
D: 직사각형은 꼭짓점이 4개이고 변이 4개인데 정사각형은 꼭짓점이 네 개이고 변이 4개이고 변의 길이가 같아야 하기 때문에 직사각형은 정사각형이 될 수 없어요.
T(교사): 직사각형의 성질은 무엇이 있어요?
D: 네 변의 길이가 같지 않아요
T: 네 변의 길이가 같지 않고 꼭짓점이 4개이고 변이 4개이면 직사각형입니까?
D: 아니요. 가로 길이와 세로 길이가 같아야 되요.
T: 아, 가로 길이가 같고, 세로 길이가 같으면서 꼭짓점이 4개이고 변이 4개인 도형이 직사각형입니까?
D: 네.
T: (평행사변형 모양을 제시하며)이건 직사각형입니까?
D: (고개를 갸우뚱하며) …….
T: 직사각형이 아닙니까?
D: 모르겠어요.(인터뷰 녹취, 9/14)

다. 기술적 오류

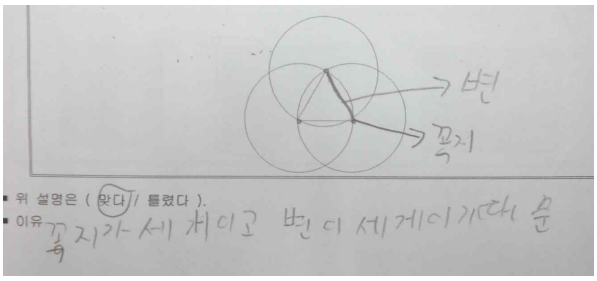
수와 연산 문항에서 많이 나타난 기술적 오류는 등식을 잘못 써서 발생한 경우가 많았다. <그림 Ⅳ-9>의 경우에서 보면 8 ÷ 4 = 2이고 2 × 3 = 6이라는 식을 등식으로 연결하여 8 ÷ 4 = 6이라는 잘못된 식이 만들어졌다. 도형 문항에서는 도형의 구성요소나 도형의 이름을 잘못 써서 오류가 많이 발생하였다. 직사각형을 마주보는 변의 길이가 같도록 그림으로 정확하게 제시해놓고 설명으로 쓸 때에는 '직사각형은 모든 사각형이다'라고 말하는 오류를 범하였다.



<그림 Ⅳ-9> 등식 사용의 오류

라. 풀이과정 생략의 오류

문항 Ⅱ-5에서는 직사각형을 주어진 조건대로 접고 잘랐을 때, 정사각형이 만들어지는지를 정당화하도록 요구하고 있는데, 정사각형이 되는 이유에 대한 설명이 없이 정사각형이 만들어지기 때문에 설명이 맞다고 하는 오류를 범하고 있다. 문항 Ⅱ-7에서는 정삼각형인지를 정당화하도록 요구하고 있는데, <그림 Ⅳ-10>에서는 꼭짓점이 3개이고 변이 3개여서 정삼각형이라고 설명하고 있다. 정삼각형이 되기 위해서는 세 변의 길이가 같아야 함을 보여야 하지만 변의 길이에 대한 설명은 언급되어 있지 않다.



<그림 Ⅳ-10> 불충분한 설명의 오류

0점과 1점을 받은 학생들은 인터뷰하는 과정에서 학생들은 '문항에서 제시된 그림이 정사각형처럼 보여서', '그냥 정사각형이 나올 것 같아서'와 같이 정당화가 부족하거나 없는 설명을 보인 경우도 있었다. 인터뷰를 통해 학생들에게 좀 더 자세한 설명을 하도록 했을 때 잘 모르겠다는 반응을 보였다. 이를 통해 보았을 때 학생들은 도형 문제를 해결할 때에 주어진 시각적 자료에 많이 의존하여 옳고 그름을 판단하는 경우가 많음을 알 수 있었다.

Ⅴ. 결 론

본 연구에서는 초등학교 3학년 학생들을 대상으로 하여 수와 연산, 도형 영역에서 학생들에게 나타나는 정당화 유형을 알아보고 정당화 과정에서 나타나는 오류를 분석하여 제시하고자 했다. 연구 문제를 해결하기 위해 초등학교 3학년 학생들을 대상으로 예비 검사를 실시하였고 문제를 수정·보완하여 D시에 초등학교 3학년 학생 62명을 대상으로 하여 정당화 검사지를 실시하여 정당화 유형을 분석하였다. 결과 분석에 의해 얻어진 교육적 시사점은 다음과 같이 요약할 수 있다.

첫째, 수와 연산 영역에서 학생들은 정당화 유형 검사지를 해결함에 있어서 경험적 정당화 유형과 분석적 정당화 유형을 고루 사용했으며, 이전 학년의 학습을 통해 익숙한 연산 문제에서는 분석적 정당화의 유형이 높게 나타났고 그렇지 않은 문제에서는 예를 이용한 경험적 정당화 유형이 높게 나타났다. 학생들은 수와 연산 영역의 기초 개념을 처음 접할 때에는 경험적 정당화 유형을 많이 사용하며 점차 분석적 정당화 유형을 사용하게 된다고 볼 수 있다. 따라서 수와 연산 영역에서 새로운 개념이나 원리를 도입할 때에는 경험적 정당화의 방법을 통해 점차 분석적 정당화가 이루어지도록 유도해야 하겠다.

둘째, 도형 영역에서는 분석적 정당화에 비해 경험적 정당화 비율이 높게 나타났는데, 경험적 정당화와 분석적 정당화의 비율이 고루 나타난 수와 연산 영역과의 차이가 있었다. 또 분석적 정당화를 이용한 학생들 역시 그림과 같은 시각적 자료를 보조 자료로 사용하였는데 이는 분석적 정당화를 나타내는 학생들도 구체적 조작기에 해당하는 아동의 특성을 나타내 보이는 것이라고 할 수 있다. 학생들이 도형 영역을 학습할 때에 시각적 자

료를 이용한 경험적 정당화의 방법을 이용하여 도형의 개념을 도입하는 것이 학습 이해에 도움이 될 것이다.

셋째, 정당화 과정에서 발생한 학생들의 오류를 분석해 본 결과 풀이과정 생략의 오류, 개념 및 원리의 오류, 문항 이해의 오류, 기술적 오류의 순으로 나타났다. 학생들은 평소 수학학습에 있어 자신이 가진 수학 지식에 대해 설명하도록 요구받는 경험이 부족하기 때문에 자신이 가진 지식을 충분히 다른 사람에게 이해시킬 수 있도록 설명하는 능력이 부족하게 나타났다. 또 학생들이 가진 오개념 및 잘못된 원리는 한 번 익숙해진 내용으로 받아들여지면 다시 고치기가 힘들다. 따라서 학생들의 오개념 및 잘못 이해하고 있는 원리를 정확하게 파악하여 재지도할 필요가 있겠다.

본 연구로부터 얻은 연구 결과와 연구 과정에서 나타난 제한점을 보완하여 보다 좋은 후속 연구를 위해 다음과 같이 제언하고자 한다.

첫째, 수와 연산, 도형 영역에서 나타나는 학생들의 수학적 정당화 유형에 차이가 있으므로 학생들이 주로 사용하는 수학적 정당화 유형에 맞춘 효과적인 교수·학습 방법으로 개선해야 할 것이다.

둘째, 본 연구에서는 수와 연산, 도형 영역에 한정하였으므로 다른 영역에서 나타나는 수학적 정당화에 대한 연구도 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

권성룡 (2003). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 7(2), 85-99.

김영숙·방정숙 (2009). 수리논술형 문제에 대한 초등학교 5학년 학생들의 문제해결력과 수학적 정당화 과정 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 48(2), 149-167.

김정하 (2010). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. 이화여자대학교 교육대학원 박사학위논문.

김지영 (2010). 초등수학 영재교육 대상 학생의 작도 정당화 과정 분석. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

민정현 (2010). 수학적 정당화 유형 분석-중학교 1학년의 수학 문제변형 활동 중심으로-. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

박주희 (2002). 점진적 구성의 증명지도를 위한 학습자료 개발 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

송상헌·허지연·임재훈 (2006). 도형의 최대 분할 과제에서 초등학교 수학 영재들이 보여주는 정당화의 유형 분석. 수학교육학연구, 16(1), 79-94. 대한수학교육학회.

신현용 (2004). 학교수학에서의 정당화 지도의 필요성 및 가능성에 관한 연구. 대한수학회논문집, 19(4), 585-599.

이지현 (2009). 학교 수학에서 증명 지도에 관한 연구. 서강대학교 교육대학원 석사학위논문.

전수진 (2005). 중·고등학생들에게 나타나는 정당화 유형 분석. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

조완영 (2000). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

조완영·권성룡 (2001). 학생들의 정당화 유형과 탐구형 소프트웨어의 활용에 관한 연구. 수학교육학연구, 9(1), 245-261. 대한수학교육학회.

최남광 (2008). 중등수학영재아들이 공간기하과제 해결과정에서 보여주는 정당화 유형과 수학적 표현에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

최수미 (2008). 패턴의 일반화 과정에서 나타나는 수학적 정당화 수준 분석. 경인교육대학교 교육대학원 석사학

위논문.

허성희 (2008). 수학 학습 지도에 있어서의 오류 진단 및 지도-9-가 수와 연산 영역을 중심으로-. 제주대학교 교육대학원 석사학위논문.

Balacheff, N. (1987). Processes of proof and situation of validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). *Toward Comprehensive on the Learning and teaching of proof.* Second handbook of research on mathematics teaching and learning. National Council of teachers of mathematics.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author. 류희찬 외 5인 역 (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teacher. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 3-31.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of student's justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.

A Study on the Types of Mathematical Justification Shown in Elementary School Students in Number and Operations, and Geometry

Seo, Ji Su
Daegu Jangsung Elementary School, 48, Janggi-dong,
Dalseo-gu, Daegu, 704-180, Korea.
E-mail : white0216@edunavi.k

Ryu, Sung Rim
Department of Mathematics, Daegu National University of Education,
1797-6, Daemyung 2-Dong, Nam-gu, Daegu, 705-715, Korea.
E-mail : srryu@dnue.ac.kr

The comprehensive implication in justification activity that includes the proof in the elementary school level where the logical and formative verification is hard to come has to be instructed. Therefore, this study has set the following issues. First, what is the mathematical justification type shown in the Number and Operations, and Geometry? Second, what are the errors shown by students in the justification process?

In order to solve these research issues, the test was implemented on 62 third grade elementary school students in D City and analyzed the mathematical justification type.

The research result could be summarized as follows. First, in solving the justification type test for the number and operations, students evenly used the empirical justification type and the analytical justification type.

Second, in the geometry, the ratio of the empirical justification was shown to be higher than the analytical justification, and it had a difference from the number and operations that evenly disclosed the ratio of the empirical justification and the analytical justification. And third, as a result of analyzing the errors of students occurring during the justification process, it was shown to show in the order of the error of omitting the problem solving process, error of concept and principle, error in understanding the questions, and technical error. Therefore, it is prudent to provide substantial justification experiences to students. And, since it is difficult to correct the erroneous concept and mistaken principle once it is accepted as familiar content that it is required to find out the principle accepted in error or mistake and re-instruct to correct it.

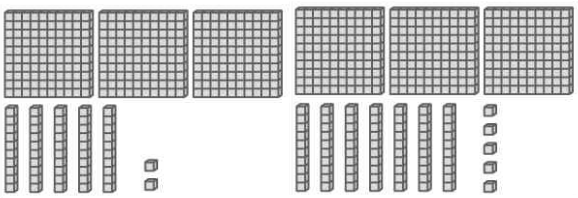
* ZDM Classification : E52
* 2000 Mathematics Subjects Classification : 97C30
* Key Words : justification, number and operations, geometry

<부록 1> 수학적 정당화 검사지

Ⅰ-1. '352 < 375'를 설명한 것입니다.

① 수학 시간에 선생님이 수를 순서대로 비교해서 큰 수를 찾는 것이라고 설명했기 때문에 352보다 375가 크다.
② 두 수를 비교하기 위해서 수모형을 이용할 수 있다. 수모형으로 두 수를 나타내면 아래 그림과 같다.

352 375

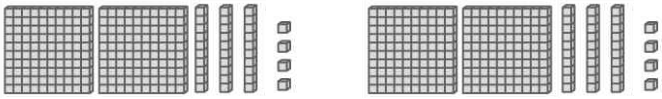


그림으로 비교해보면 375가 더 큰 수임을 알 수 있다.
③ 세 자리 수의 크기 비교는 백의 자리 숫자부터 차례대로 비교하면 된다. 백의 자리 숫자는 같기 때문에 십의 자리 숫자를 비교하면 5와 7이고 5 < 7이므로 352 < 375이다.

1. 내가 생각한 설명과 가장 비슷한 것을 고르세요. (　　)
2. 가장 설명을 잘했다고 생각한 것을 고르세요. (　　)

Ⅰ-2. '234×2=468'을 설명한 것입니다.

① 234×2는 234 두 묶음과 같으므로 수 모형으로 나타내면 아래 그림과 같다.



수 모형 값을 세어보면 100이 4개, 10이 6개, 1이 8개이므로 468이므로 맞는 설명이다.
② 수학책에서 공부할 때 곱셈 문제는 세로식으로 써서 숫자를 차례대로 곱해서 그 값을 쓰면 된다고 공부했다. 세로식으로 써서 계산해보면 468이 나오므로 맞는 설명이다.

	2	3	4
×			2
	4	6	8

③ 234=200+30+4이므로 각 자리 숫자를 나누어서 계산하면 된다.

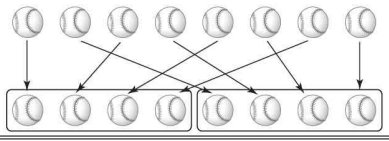
234×2 — 200×2=400 / 30×2=60 / 4×2=8 — 468

계산해보면 468이 나오므로 맞는 설명이다.

1. 내가 생각한 설명과 가장 비슷한 것을 고르세요. (　　)
2. 가장 설명을 잘했다고 생각한 것을 고르세요. (　　)

Ⅰ-3. 다음 설명이 맞는지 틀렸는지 정하고 그 이유를 설명하시오.

< 설명 >



그림을 식으로 나타내면

'8÷4=2'이다.

- 위 설명은 (맞다 / 틀렸다).
- 이유

Ⅰ-4. 다음 설명이 맞는지 틀렸는지 정하고 그 이유를 설명하시오.

< 설명 >

'8의 $\frac{3}{4}$은 6이다'

- 위 설명은 (맞다 / 틀렸다).
- 이유

Ⅰ-5. 다음 설명이 맞는지 틀렸는지 정하고 그 이유를 설명하시오.

< 설명 >

'세 수의 뺄셈식은 앞에서부터 순서대로 계산해야 한다.'

- 위 설명은 (맞다 / 틀렸다).
- 이유

Ⅰ-6. 오른쪽 계산이 맞는지 틀렸는지 정하고 그 이유를 설명하시오.

$$\begin{array}{r} 567 \\ -\ 379 \\ \hline 212 \end{array}$$

- 오른쪽 설명은 (맞다 / 틀렸다).
- 이유

Ⅰ-7. 다음 설명이 맞는지 틀렸는지 정하고 그 이유를 설명하시오.

< 설명 >

연속하는 세 수(제일 작은 수, 중간 수, 제일 큰 수)를 사용하여

(두 자리 수)×(한 자리 수)의 곱셈식을 만들 때

값이 가장 큰 식은 '[제일 큰 수][중간 수]×[제일 작은 수]' 이다.

- 위 설명은 (맞다 / 틀렸다).
- 이유

Ⅰ-8. 다음 계산식이 맞는지 틀렸는지 정하고 그 이유를 설명하시오.

21 ÷ 3 = 7

- 오른쪽 설명은 (맞다 / 틀렸다).
- 이유

Ⅱ-1. ‘도형을 방향으로 돌린 모양과 방향으로 돌린 모양은 항상 같다.’를 설명한 것입니다.

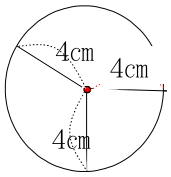
① 수학 시간에 공부했을 때 방향으로 돌린 모양과 방향으로 돌린 모양이 같게 나왔기 때문에 항상 같다.

② 을 방향으로 돌리면 모양이 되고 을 방향으로 돌리면 모양이 된다. 두 모양이 같기 때문에 항상 같다고 할 수 있다.

③ 도형을 4직각만큼 돌리면 원래 모양이 된다. 방향으로 돌리면 4직각에서 1직각만큼 덜 돌린 것이므로 3직각만큼 돌린 모양이 된다. 방향으로 돌리면 3직각만큼 돌린 모양이 된다. 그래서 모양은 항상 같다.

1. 내가 생각한 설명과 가장 비슷한 것을 고르세요. ( )
2. 가장 설명을 잘했다고 생각한 것을 고르세요. ( )

Ⅱ-2. ‘한 원에서 반지름의 길이는 모두 같다.’를 설명한 것입니다.

① 

원에서 반지름의 길이를 재어보면 전부 똑같이 4㎝가 나왔다. 따라서 한 원에서 반지름의 길이는 모두 같다.

② 교과서에서 한 원에서 반지름의 길이는 모두 같다는 것을 봤기 때문에 당연히 맞는 말이기 때문에 따로 설명할 필요가 없다.

③ 원의 중심에서 같은 거리에 떨어진 점을 연결해서 만들어진 도형이 원이고 한 원에서 원의 중심은 1개이다. 반지름은 원의 중심에서 원 위의 한 점을 이은 거리이므로 한 원에서 반지름은 모두 같다.

1. 내가 생각한 설명과 가장 비슷한 것을 고르세요. ( )
2. 가장 설명을 잘했다고 생각한 것을 고르세요. ( )

Ⅱ-3. 다음 설명이 맞는지 틀렸는지 정하고 그 이유를 설명하시오.

< 설명 >
직사각형은 정사각형이다.

- 위 설명은 (맞다 / 틀렸다).
- 이유

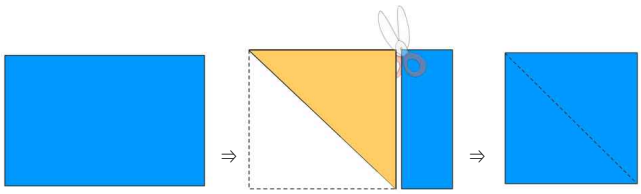
Ⅱ-4. 다음 설명이 맞는지 틀렸는지 정하고 그 이유를 설명하시오.

< 설명 >
지름은 반지름의 2배이다.

- 위 설명은 (맞다 / 틀렸다).
- 이유

Ⅱ-5. 다음 설명이 맞는지 틀렸는지 정하고 그 이유를 설명하시오.

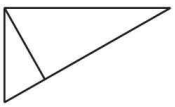
< 설명 >
직사각형 종이를 아래 그림과 같이 접고 자르고 펼치면 정사각형이 만들어진다.



- 위 설명은 (맞다 / 틀렸다).
- 이유

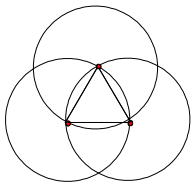
Ⅱ-6. 다음 설명이 맞는지 틀렸는지 정하고 그 이유를 설명하시오.

< 설명 >
아래 도형에는 크고 작은 직각삼각형은 2개이다.



- 위 설명은 (맞다 / 틀렸다).
- 이유

Ⅱ-7. 오른쪽 설명이 맞는지 틀렸는지 정하고 그 이유를 설명하시오.

- 위 설명은 (맞다 / 틀렸다).
- 이유

< 설명 >
반지름이 6cm인 3개의 원에서 아래 모양과 같이 만들어진 삼각형은 정삼각형이다.