韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 26집 제 1호, 2012. 2. 137-154

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 26, No. 1, Feb. 2012. 137-154

근사개념 지도를 위한 관련 지식의 교수학적 고찰

정 영 우 (부산대학교)
이 목 화 (해운대고등학교)
김 부 윤 (부산대학교)†

미적분학에서 '근사(approximation)'는 핵심 개념 가운데 하나인데, 이를 설명하기 위한 기본 개념은 '접선(tangent)'이며, 접선은 특별한 조건을 가지는 '직선(line)'이다. 본 연구에서는 미적분학의 이론적 기초가 되는 이들 수학적 지식에 대해 중등학교 기하지도 관점에 기초하여 교수학적 고찰을 하고, 이와 관련하여 개연성 있는 지도를 위한 주안점과 지도 방안을 제안한다. 이를 위해 유클리드 기하학에서의 점, 선, 원, 직선, 접선, 근사에 대해 알아보고, 이를 해석 기하학으로 번역하는 과정을 통해 대수적 조작을 위한 수학적 지식들을 유의미하게 유도한다. 그리고 현대수학의 관점으로 이를 발전시켜 근사를 위한 수학적 지식들의 유선(流線, stream line)을 구성한다. 또한 이를 바탕으로 직선, 접선 그리고 근사에 관한 학교수학의 내용을 고찰하여 지도의 주안점과 지도 방안을 모색한다. 이러한 연구는 교사들에게 교수학적 내용지식을 주며, 이들 수학적 지식을 개연성 있게 지도할 수 있는 수업모델 개발에 대한 기초를 제공한다. 나아가 학생들에게 수학이 계통적 학문이라는 것과 학교수학이 뚜렷한 목적성 아래 구성된 활동이라는 것을 인식하게 한다.

Ⅰ. 연구의 필요성 및 의의

'근사(approximation)' 개념의 본질적 의의 중 하나는 국소적 범위에서 곡선을 직선으로, 곡면을 평면으로 근사하여 다루기 힘든 곡선이나 곡면에 대한 정보를 얻고 이들을 조작할 수 있게 하는 것이다. 이때, 이러한 목적에 맞는 최적의 직선과 평면이 접선과 접평면이다. 또한 접평면은 곡면 위의 한 점에 대한 두 접선 벡터와 그 외적으로 다룰 수 있으므로, 접선은 근사를 위한 가장 기본적이고도 중요한 수학적 지식이다. 따라서 접선에 대한 이해는 미적분학 학습에서 필수적인 요소가 된다. 김영록・이영이・한종민(2009)도 '현대수학의 관점에서 고려해 볼 때 접선은 주어진 곡선의 한 점에서 국소적 성질을 파악하는데 중요한 정보를 제공해 준다. 비선형으로 주어지는 어떠한 양을 직접 파악하기 어렵기 때문에 이를 선형화시켜서 근사시키는 방법은 현대수학의 도처에서 이용되고 있는데, 이는 현대수학의 중요한 연구 방법 중의 한 가지이다.'라고 접선과 근사의 의의와 중요성을 밝히고 있다.

접선 이해의 출발점은 중학교에서 다루는 유클리드 기하학(Euclidean geometry) - 종합 기하학(Synthetic geometry) - 관점에서의 직선이며, 이는 고등학교에서 해석 기하학(Analytic geometry)의 관점으로 재조명된다. 이후 수학Ⅱ(또는 미적분과 통계기본)에서 미분계수를 이용하여 접선을 구하는 방법과 이러한 접선의 존재성 정리인 평균값의 정리(Mean Value Theorem)를 다루게 된다. 그리고 접선의 의의를 부피, 곡선의 길이, 곡면의 겉넓이, 한 일의 총량 등 예를 통해서 다루게 되는데, 이때 근사 개념이 설명적으로 다루어지게 된다.

그러나 현행 교육과정의 내용들을 살펴보면, 직선 → 접선 → 근사에 이르는 지도 흐름이 이러한 관점의 전

* 접수일(2012년 1월 30일), 심사(수정)일(2012년 2월 8일), 게재확정일자(2011년 2월 11일)
* ZDM분류 : D43, D44
* MSC2000분류 : 97D30, 97D40
* 주제어 : 유클리드 기하학, 해석 기하학, 직선, 접선, 근사
† 교신저자

환과정이나 본질 및 의의에 있어 개연성 있게 구성되어 있지 않고 개별 주제로 분리되어 각각 지도되고 있다. 도종훈(2008)은 현행 교과서 내용이 직선의 대수적 표현으로서의 직선의 방정식과 직선의 특성으로서의 곧음, 즉, 직선성으로서의 기울기 개념을 명료하게 드러내지 못하고 있다고 지적하였다. 또한 김정희(2004)는 미분계수, 접선의 방정식, 도함수를 구하는 알고리즘은 기계적으로 잘 해결하고 있지만, 미분계수, 접선, 미분가능성, 도함수의 의미 등을 개념적으로 이해하지 못하는 학생들이 많다고 보고하고 있다(조완영, 2006 재인용). 이러한 현상은 현행 교과서의 내용 전개와 교수학적 상황에 그 원인이 있다고 할 수 있다. 즉, 개연성 없이 주제별로 단절된 채 지도되고 있다거나, 개념들을 먼저 지도하고 그 배경적 사실들을 읽을거리로 다루는 것이 원인이라 생각된다. 조완영(2006)은 미분계수의 경우 평균변화율 개념에서 순간변화율과 미분계수로 이어지는 수업의 진행에 문제가 있으며, 미분계수의 역사적 근원 중의 하나인 접선 문제를 미분계수의 정의 다음에 다루는 것도 문제가 있다고 지적하였다.

학습을 위한 정제된 매체인 교과서에서는 이러한 내용의 계통성이나 내적 연결성을 강조하여 다루는데 한계가 있을 수 있으나, 교사는 자신의 수업에서 교과서에 담지 못한 맥락을 부여함으로써 이러한 지식의 내적 연결성과 의의를 충분히 학생들에게 지도할 필요가 있다. 따라서 교사는 이러한 지식의 이론적 이해와 교수학적 분석을 통해 개연성 있는 수업을 구성하여 교과서의 한계를 보완해야 할 것이다.

직선, 접선, 평균값의 정리, 근사 또는 미적분학의 지도에 관한 선행연구들로는 다음과 같은 것이 있다. 이목화(2010)는 유클리드 기하학에 기초하여 직선의 방정식을 지도하는 방법에 대한 연구를 하였으며, 도종훈(2008)은 직선의 특성에 기인하여 그 개념을 정확히 전달하기 위한 교수학적 방법에 대해 연구하였다. 임재훈 · 박교식(2004)은 접선 개념을 중등교육과정과 Lakatos이론을 적용하여 분류하고, 접선 개념을 지도하는 교수 방안을 제안하였다. 김영록 · 이영이 · 한종민(2009)은 선형 근사로서의 접선 개념의 의미를 밝히고, 이를 교수학적으로 변환한 $\sqrt{2}$의 근삿값을 구하는 내용을 소개하였다. 또한 조영미(1999)는 접선 개념의 역사적 접근을 통해 접선을 구하는 문제가 바뀜에 따라 접선을 구하는 방식이 달라지고, 또한 접선을 구하려면 고려하지 않을 수 없는 곡선의 성격 혹은 개념이 달라짐을 보이고 있다. 한편, 유미경(2007)은 평균값의 정리에 대해 역사 발생적 분석, 수학적 분석, 선행연구의 분석을 통하여 본질적 요소를 추출하고 지도의 개선 방안을 탐색하고 있다. 또한 조완영(2006)은 Freudenthal의 수학화 교수 · 학습론을 토대로 미분계수 개념의 수학화 교수 · 학습 자료를 개발하였다. 여기서 그는 접선 문제는 기하학의 문제이고 순간속도 문제는 역학 문제이지만, 서로 다른 분야의 이 문제들이 수학적인 미분개념의 근원문제이므로 이들을 먼저 다룬 후 그 맥락의 수학화 결과로 미분계수를 다룰 것을 주장하였다.

이들 연구들은 직선과 접선에 대한 교수학적 고찰이나 미적분학 내용 지도에 있어서의 문제제기와 개선 방안 그리고 미적분학 지도 모델을 각각 논하고 있다. 본 연구에서는 교사의 교수학적 내용지식의 신장을 위해 이들 연구 결과 – 특히, 이목화(2010), 조영미(1999), 김영록 · 이영이 · 한종민(2009), 조완영(2006) – 들을 근사의 관점에서 통합하고, 교육과정 내용편성의 이론적 정당성을 밝힘으로써 수업설계를 위한 지도의 주안점과 지도 방안을 제안한다. 이를 위해 다음과 같은 주제를 다룬다.

첫째, 종합 기하학에서의 직선과 원, 접선에 관해 알아본다.

둘째, 이들 내용을 해석 기하학의 관점으로 번역하여 대수적 조작을 위한 식들을 유도하는 맥락을 구성한다.

셋째, 변화의 개념을 도입한 현대수학적 개념으로 접선 개념을 발전시키고, 근사를 위한 접선의 의의를 맥락화 한다.

넷째, 이들 관점에서 관련 지식에 대한 현행 교육과정과 교과서 내용을 고찰한다.

다섯째, 이를 바탕으로 관련된 지식들의 내적 연결성을 구축하고, 지도의 주안점과 지도 방안에 대해 살펴본다.

2. 종합 기하학에서의 직선, 원, 접선

인간은 자연현상 속에서 직선과 원, 접선이란 현상을 알게 되고, 이를 수학적으로 구명하려 노력하였을 것이다. 직선과 원, 접선에 대한 수학적 접근은 유클리드의 『원론』에서 찾아볼 수 있다. 이를 바탕으로 한 유클리드 기하학을 종합 기하학이라고도 하는데, 중학교 기하 영역의 지도관점인 동시에 지도내용이다. 유클리드 기하학에서 가장 기본적인 도형인 점, 선, 원에 대한 「원론」의 내용은 다음과 같다(이무현, 1997).

① 점은 쪼갤 수 없는 것이다.
② 선은 폭이 없이 길이만 있는 것이다.
③ 선의 양 끝은 점들이다.
④ 직선은 점들이 쭉 곧게 있는 것이다.
⑮ 어떤 선으로 둘러싼 도형이 있어서, 한 점에서 직선들을 그었을 때 그 도형에 놓이는 부분이 모두 서로 같으면 그 도형을 원(동그라미)이라 부른다.
⑯ 이 때 그 한 점을 원의 중심이라 부른다.
⑰ 원의 지름은 중점을 지나고 양쪽 다 원둘레에서 끝나는 직선을 말한다. 지름은 원을 이등분한다.

이와 같이 점, 선, 원의 정의는 존재하는 현상에 대한 설명적 성격이 강하다. 또한 유클리드는 「원론」에서 다섯 개의 공리를 사용하여 논리를 전개하고 있는데, 그 중 직선과 원[1]에 관련한 내용은 다음과 같다(이무현, 1997).

공리 1 모든 점에서 다른 모든 점으로 직선을 그을 수 있다.
공리 2 유한한 직선이 있으면 그것을 얼마든지 길게 늘일 수 있다.
공리 3 모든 점에서 모든 거리를 반지름으로 해서 원을 그릴 수 있다.

공리 1은 '직선의 존재성'과 '직선의 결정조건'을, 공리 3은 '원의 존재성'과 '원의 결정조건'을 의미한다. 즉, 주어진 두 점을 잇는 직선의 존재, 중심과 반지름을 갖는 원의 존재를 가정하고 있다. 그리고 공리 1과 공리 2는 이후의 연구에서 두 점을 잇는 선분과 선분의 연장이 유일하다는 사실을 함의하는 것으로 해석된다(허민 외, 2005). 또한 이러한 '직선의 존재성과 유일성'은 이후 Hilbert의 공리에 의해 더욱 명확하게 주어진다(Hilbert, 1971).

① For every point A and for every point B not equal to A, there exists a line that passes through A and B. (존재성)
② For every point A and for every point B not equal to A, there exists no more than one line that passes through A and B. (유일성)

점, 선, 원 각각에 대한 논의에 이어 두 대상 – 직선과 직선, 직선과 원, 원과 원 – 의 위치관계를 논하게 된다. 여기서 한 직선에 평행한 직선의 존재성에 대한 것이 공리 5이다.

공리 5 두 개의 직선이 있고, 다른 한 직선이 이 두 개의 직선과 만나는데, 어느 한 쪽의 두 내각을 더한 것이 두 개의 직각보다 작다고 하자. 그러면 두 직선을 얼마든지 길게 늘였을 때, 두 직선은 내각을 더한 것이 두 개의 직각보다 작은 쪽에서 만난다(이무현, 1997).

---

1) 원은 접선 개념을 논하기 위해 필요하다.

공리 5는 '평행선 공리'로 불리는데, 동치 표현[2]으로 '주어진 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나서 주어진 직선에 평행한 직선을 단 하나 그릴 수 있다[3].', '한 평면에는 모든 곳에서 서로 같은 거리를 유지하는 한 쌍의 직선이 존재한다.', '합동은 아니지만 닮은꼴인 한 쌍의 삼각형이 존재한다.', '사변형에서 한 쌍의 대변이 서로 같고 제3의 변에 대한 이웃각들이 각각 직각이면, 다른 두 각도 또한 직각이다.', '사변형에서 세 각이 직각이면, 넷째 각도 또한 직각이다.', '세 내각의 합이 평각이 되는 삼각형이 적어도 하나 존재한다.', '같은 직선 위에 있지 않은 임의의 세 점을 통과하는 원이 존재한다.', '삼각형의 넓이에 대한 상한이 존재하지 않는다.', '60° 미만의 각 내부의 임의의 점을 지나며 각의 양변과 교차하는 직선을 항상 그을 수 있다.' 등이 있다.

그리고 원과 직선, 원과 원의 관계에 있어서는「원론」제4권에서 다음과 같이 상황을 설명하는 형태로 '접한다'를 정의하고, 법칙 17에서 접선의 존재성을 작도문제로 다루고 있다(이무현, 1997).

② 어떤 직선이 원과 만나지만 그 직선을 아무리 길게 늘여도 원을 자르고 지나가지 않으면, 그 직선은 원에 접한다고 말한다.
③ 원들이 서로 만나지만 자르고 지나가지 않으면, 그 원들이 접한다고 말한다.

법칙 17 어떤 점과 원을 주었을 때, 원에 접하도록 그 점에서 직선을 그으시오.[4]

이처럼 종합 기하학에서는 점, 직선, 원을 설명적 정의와 공리로 논하고 있으며, 주어진 직선에 평행인 직선과 원의 접선의 존재성을 작도를 통해 논하고 있다. 그리고 직선은 '두 점'이, 원은 '중심과 반지름'이 결정조건이 되고 있으며, 접선은 '접한다'에 관한 상황적 설명과 작도로 존재성과 유일성이 주어지고 있다.

3. 해석 기하학으로의 번역

17세기 중엽 Fermat와 Descartes에 의해 좌표평면이 고안된 이후, 그 이전까지 종합적인 방법으로 다루어져 오던 기하학적 대상들과 그들의 성질이 좌표평면을 통해 대수적으로 다루어지게 되었다(Stillwelll, 2005, 도종훈, 2008 재인용). 즉, 좌표라는 개념에 의해 기하학적인 대상과 성질이 수와 식의 대상으로 규정 지워지게 된다. 고등학교 2007 개정 교육과정 해설(2009)에서는 '고등학교 1학년에서 다루는 기하는 대수적인 방법으로 접근하는 해석 기하로 중학교에서 학습한 도형에 관하여 여러 성질과 관계를 대수적인 방법으로 새롭게 조명해 볼 수 있는 기회를 제공한다.'고 밝히고 있어, 이와 맥락을 같이 하고 있다. 이처럼 해석 기하학은 유클리드 기하학을 대수적 조작의 대상으로 번역하는 것을 가능하게 함으로써 곡선과 곡면 이론의 발달에 영향을 끼쳤고, 미적분학을 위한 도구를 제공하였다.

이제 종합 기하학의 점, 직선, 원, 접선을 해석 기하학의 관점에서 번역하여 좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식, 접선의 방정식을 유도하자.

① 점의 번역

평면 위의 임의의 점이 주어지고, 수직선 또는 좌표축을 설정하면 점은 수직선 위의 좌표나 좌표평면 위의

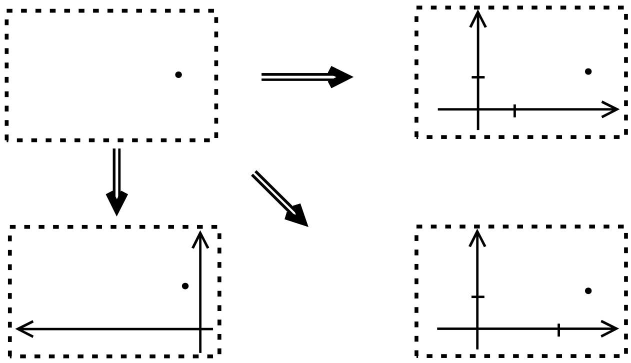
---

2) 허민 외(2005), 이우영 외(2005)

3) 이것은 유클리드「원론」제1권 법칙 31 '한 점과 직선을 주었을 때, 그 점을 지나고 주어진 직선과 평행한 직선을 그으시오.'에서 보이고 있다(이무현, 1997).

4) 이 문제 상황은 원 밖의 점이지만 작도의 결과로 접선의 존재성을 보여준다. 그리고 하나의 접점이 결정되면 두 점을 지나는 직선의 유일성에 의해 이러한 접선이 유일하다는 것도 보장된다.

순서쌍(좌표)으로 표현된다. 이때 '기준'이라는 개념과 상대적 위치(또는 크기) - 양과 음 - 개념이 자연스럽게 다루어질 수 있다. 또한 평면 위의 점을 나타내는 좌표가 기준(축)과 단위 크기의 설정에 따라 달라짐은 자연스러운 현상이 된다. 이러한 활동에 의하여 표준적인 기준설정의 필요성과 함수 학습에서 좌표평면 위의 그래프의 비절대성도 인식할 수 있다.



<그림 1> 평면 위의 점에 좌표 설정하기

순서적으로는 정수에 의한 양수와 0 그리고 음수의 개념이 실수까지 확장되는 과정이 필요하다. 이렇게 해서 평면 위의 점은 수의 순서쌍과 일대일 대응 관계를 가지게 된다.

이렇게 점을 직선 위에 나타내면 두 점을 이은 선분을 볼 수 있고, 선분의 길이 또는 거리라는 개념이 얻어진다. 또, 좌표평면 위에 두 점을 주면 피타고라스의 정리와 직선 위에서의 거리 개념을 이용하여 임의의 선분의 길이도 구할 수 있다.

정의 1 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 이다.

이렇게 두 점의 좌표를 정의함으로써 측정에 의한 것이 아닌 '두 점 사이의 거리를 구하는 대수적 방법'을 얻게 된다.

② 직선의 번역

유클리드 「원론」에서는 공리 1과 공리 2에 의해 선분의 양 끝점인 두 점이 직선의 결정조건임을 알 수 있다. 따라서 좌표평면 위에 두 점을 주고 이 두 점을 지나는 유일한 직선이라는 상황에서 직선의 방정식을 구하려는 노력을 하게 된다. 그러나 이 경우 두 점만으로 직선의 방정식을 구할 수는 없다. 즉, 두 점에 관한 정보만으로는 직선을 대수적으로 다루기 위한 식을 얻을 수 없다. 따라서 직선을 특징지을 새로운 개념이 필요해진다. 이것이 '기울기(slope)' 개념으로, 기울기는 '직선의 곧음성'에 대한 해석 기하학적 필요성에 의한 개념이다. 그리고 이 기울어짐은 삼각비 - 탄젠트 - 를 이용하여 수량화할 수 있다. 즉, 기울기란 x축이 양인 방향에서 직선까지 이르는 각 α의 탄젠트값을 말한다. 이에 대해 도종훈(2008)도 '도형으로서의 직선이 좌표평면에서 대수적으로 표현하는 과정에서 곧음이라는 직선의 고유한 성질은 삼각형의 닮음에 의해 x값의 변화량에 대한 y값의 변화량의 비가 일정하다는 성질로 구체화되었다.'고 밝히고 있다.

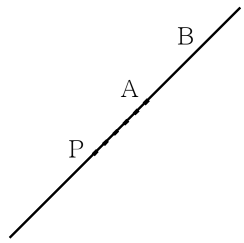
정의 2 두 점을 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$라 하면, 두 점을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이다.

이렇게 곧음에 대한 수학적 개념으로 기울기를 정의하고 나면, 비로소 직선의 방정식을 구할 수 있게 된다. 즉, 주어진 두 점에 의해 결정되는 직선 위의 임의의 한 점을 기지(旣知)의 것으로 두면 얻어지는 두 선분의 곧음성이 같음을 이용하여 직선의 방정식을 얻을 수 있다.

정의 3 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선 위의 임의의 한 점 $P(x, y)$에 대하여 AB의 기울기와 AP의 기울기는 같다. 그러므로

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y}{x_1-x}$$
$$(y_2-y_1)(x_1-x)=(y_1-y)(x_2-x_1)$$
$$(y_2-y_1)x_1-(y_2-y_1)x=y_1(x_2-x_1)-y(x_2-x_1)$$
$$(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+(y_2-y_1)x_1+(x_1-x_2)y_1=0$$
$$(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+y_2x_1-x_2y_1=0$$

을 얻는다. 이로써 종합 기하학에서 '두 점'만이 결정조건이었던 직선은 해석 기하학으로의 번역과정에서 직선 위의 한 점이라는 추가적 요소를 필요로 하게 된다. 즉, 직선의 존재성을 기초로 그 직선 위의 또 다른 점을 필요로 하게 된다. 이와 같은 논의는 점의 좌표가 유리수, 실수인 경우에도 마찬가지로 전개할 수 있다.



이렇게 직선의 방정식이 형식화되고 나면, 두 점이 주어졌을 때의 구체적인 직선의 방정식을 결정할 수 있게 되는데, 이것이 학교수학에서 다루어지고 있는 직선의 방정식 지도 내용이다. 결과적으로 종합 기하학에서는 두 점이 직선의 결정조건이지만, 해석 기하학에서는 두 점 외에 기울기라는 직선성과 미지(未知)의 것을 기지의 것으로 보는 사고가 추가되어 직선을 정의하게 된다.

③ 원의 번역

원은 직선보다 간단하게 그리고 자연스럽게 거리 개념과 미지의 것을 기지의 것으로 보는 사고에 의해 유도된다. 먼저, 원의 중심을 (x_1, y_1)이라 하고, 반지름을 r이라 하자. 원 위의 임의의 점을 (x, y)라 두면, 앞의 거리 개념에 의해

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=r,\ (r\neq 0)$$
$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2,\ (r\neq 0)$$

을 얻을 수 있다. 이를 전개하면 $x^2-2x_1x+y^2-2y_1y+(x_1^2+y_1^2-r^2)=0$을 얻는다.

직선의 방정식이나 원의 방정식을 유도하는 이러한 과정은 결과인 형식적인 식을 부여할 때와 달리, 주어진 점들이 식을 구성하는 관계성까지도 보여줄 수 있으며, 형식적인 식이 필요에 의해 어떻게 만들어져 가는지 그

발생적 측면까지도 보여준다. 또한 이러한 직선과 원의 존재성은 두 방정식의 연립방정식 해법에 의해 대수적으로 보일 수 있다. 이후 평면 위의 임의의 곡선은 방정식 $f(x,\ y)=0$로 표현된다.

이제 두 대상 사이의 관계를 살펴보자.

④ 주어진 한 점을 지나고 주어진 직선에 평행한 직선의 번역

'평행'은 두 직선의 곧음 정도가 같다는 것으로 두 직선이 같은 기울기를 가진다는 것이다. 이를 직선의 방정식으로 해석하면 다음과 같다. 앞에서 유도한 직선의 방정식에서 상수값인 y_1-y_2, x_2-x_1, $y_2x_1-x_2y_1$를 각각 문자 a, b, c로 두면

$$ax+by+c=0 \qquad \text{----------①}$$

가 얻어진다. 또한 이 식은 다음과 같이 재표현된다.

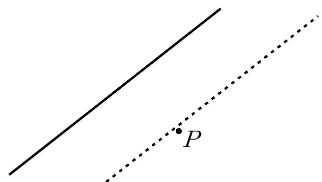
$$y=mx+n \qquad \text{----------②}$$

이때, m은 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$으로 기울기를 나타낸다. 이 사실들을 바탕으로 주어진 한 점을 지나고 주어진 직선에 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있다.

주어진 한 점을 $P(x_1,\ y_1)$, 주어진 직선의 기울기를 m이라 하고, 구할 직선 위의 임의의 한 점을 $(x,\ y)$라 하면, 두 직선은 평행이므로 기울기가 같다. 따라서

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$$
$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-y_1=mx-mx_1$$
$$y-mx-y_1+mx_1=0$$

로 주어진 직선과 같은 기울기를 가지며 한 점을 지나는 직선의 방정식이 결정된다. 이때, 구하는 직선의 존재성은 유클리드 『원론』의 공리 5에 의해 보장된다.



유클리드 기하학에서 직선은 두 점이 결정 요소이지만, 이 문제 상황은 직선을 결정하기 위한 나머지 한 점에 대한 정보가 없으며, 대신 평행이라는 특성을 가진 다른 직선의 정보가 주어진 것이다. 따라서 그러한 직선이 존재한다고 가정하고 직선의 방정식을 구하고 있으며, 한 직선 위의 두 점이라는 맥락은 삭제되었다. 이로써 '두 점'이라는 직선의 결정조건은 '한 점과 기울기'라는 또 다른 결정조건을 이끌게 된다. 이 개념은 직선의 번역 과정에서 대두된 기울기 개념의 확장이다.

결과적으로 '두 점'이라는 유클리드 기하학에서의 직선의 결정조건은 '두 점과 직선 위의 임의의 한 점 그리고 기울기'라는 개념으로 나아가며, 직선 간의 위치관계에서 두 점의 맥락이 생략되고 '직선 위의 한 점과 평행한 직선의 기울기'라는 맥락으로 이동하여 결과적으로 '한 점과 기울기'라는 직선의 결정조건을 얻게 된다. 이로써

직선의 방정식을 구하는 세 가지 현상 – 두 점이 주어졌을 때의 직선의 방정식, 기울기와 한 점이 주어졌을 때의 직선의 방정식, 평행한 직선과 한 점이 주어졌을 때의 직선의 방정식 – 을 가지게 되었다.

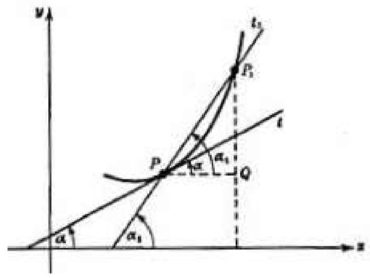
⑤ 접선의 번역

원과 직선의 방정식을 알면 유클리드 기하학의 원의 접선 상황은 두 도형의 방정식이 같아지는 점(접점)을 찾는 상황으로 바뀐다. 이때 구성된 식은 이차방정식이며, 따라서 점은 중근이어야 한다. 그러므로 판별식을 이용하게 된다. 즉, 이 문제 상황을 극복하기 위하여 방정식에서의 개념들이 결합되게 된다. 이 상황에서는 두 방정식이 주어져 접점을 결정하는 경우와 원의 방정식과 접점이 주어지고 접선의 방정식을 결정하는 경우를 다룰 수 있다. 후자의 경우는 그러한 직선이 존재한다는 가정 아래 문제해결이 이루어진다. 이 경우 접선의 존재성은 유클리드의 「원론」에 의해 보장된다. 그리고 이차곡선으로 접선의 개념이 확대되어 이러한 곡선에 대하여도 접선의 방정식을 구할 수 있게 된다.

해석 기하학은 종합 기하학의 존재성과 유일성을 바탕으로 전개가 이루어지고 있다. 따라서 단순한 일대일 변환이 아닌 종합 기하학의 개념에 기초한 대수적 조작 활동이며, 이때 방정식에서 중요한 사고인 '미지의 것을 기지의 것으로 본다.'는 사고 작용도 중요한 역할을 하고 있다. 즉, 종합 기하학에서 존재가 보장된 직선과 원에 대해 그 존재하는 대상을 대수적으로 번역한 것이 해석 기하학이다.

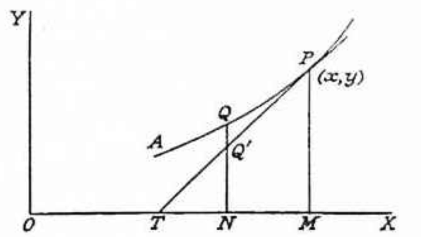
3. 현대수학적 개념으로의 발전

이차곡선까지 접선을 확장하였으나 일반적인 곡선에 대해서는 판별식을 이용하는 이러한 방법을 적용할 수 없었으며, 현대수학의 발전에 힘입어 다양한 접선의 개념들이 나오게 된다. 종합 기하학의 근사로부터 새로운 접선의 개념이 나오게 되는데, 근사 개념의 기하학적 접근은 고대에서 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하려는 사고나 Archimedes의 포물선의 넓이나 원주율을 구하려는 실진법에서 찾아볼 수 있다. 이러한 Archimedes의 사고는 접선으로 발전되고, 접선에 대한 생각은 후에 극한에 대한 연구를 토대로 하여 할선의 극한으로 일반화된다. 여기서 접선의 기울기가 할선의 기울기의 극한임을 살펴보자.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(x,\ y)$에서의 기울기는 한 점 P에서 곡선만을 생각하여 구할 수는 없고 곡선의 아래에 있는 넓이를 계산하는 것과 같이 극한 과정을 생각하여야 한다. 이러한 극한의 과정이 미분학의 기초가 된다. P의 근방에 있는 곡선 상의 다른 점 P_1을 생각하여 그 점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하자. 그리고 P와 P_1을 잇는 직선을 t_1이라고 부르자. 그러면 t_1은 곡선의 할선으로서 P_1이 P에 가까울 때 P에서의 접선과 개략적으로 같아지는 선이다. x축에서 t_1으로의 각을 α_1이라고 하자. 이제 x_1이 x에 한없이 가까워지면 P_1은 곡선을 따라 P에 한없이 가까워지고, 할선 t_1은 점 P에서 곡선의 접선 t를 극한 위치로 가지면서 한없이 가까워진다. α가 x축에서 t까지의 각이라고 한다면 $x_1 \to x$일 때 각각 $y_1 \to y$, $P_1 \to P$, $t_1 \to t$, $\alpha_1 \to \alpha$가 된다. 따라서 접선은 할선의 극한이다. 그리고 접선의 기울기는 할선의 기울기의 극한이다(박평우, 2003).

종합 기하학의 근사 개념에 극한의 개념이 적용되어 '할선의 극한'으로 접선 개념이 나타나지만, 일차원 그래프에 대한 접선 개념은 고차원 공간의 그래프에 대한 접평면 개념으로 확장되면 할선의 극한이라는 맥락은 더 이상 적용하기 어려워진다(김영록 외, 2009). 그래서 접선에 변화와 움직임의 개념을 적용하면 이전의 '기울기'라는 개념은 함수의 '변화율'이라는 개념으로 이동하고, 여기에 극한 개념이 투입되어 '미분계수'라는 개념으로 전환되게 된다. 위의 내용을 현대수학의 관점에서 재해석하면 접선 t의 기울기가 직접적으로 주어지지는 않지만 할선 t_1의 기울기는 평균변화율로 주어지고, t_1의 기울기의 극한이 t의 기울기로 정의되며, 이것이 순간변화율이다. 이러한 변화율의 개념은 변화하는 양과 변화 상태에 대한 수치적 계산 연구를 거쳐 Newton과 Leibniz 시대의 극한 개념 도입과 더불어 형식화되었다. 수학사적으로 볼 때, 변화율에 대한 기하학적 직관은 변화문제를 논의하던 초기 시도와 형식화 사이의 중간 지점에 있었으며, 극한 개념은 미적분의 개념을 연구하는 과정에서 발생된 것이다. 이 개념에 의해 순간속도가 정의된다(조완영, 2006). 그렇다면 접선의 기울기와 함수의 변화율은 같은 것일까? 다음을 살펴보자.

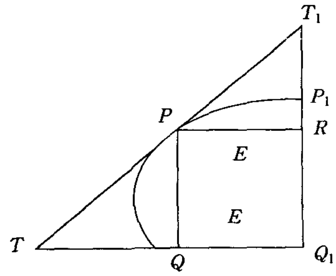


AQP를 임의의 곡선이라 하고, PT를 점 P에서의 곡선의 접선이라 하자. OX와 OY는 두 좌표축이다. 그리고 $y=f(x)$는 곡선의 식으로서, $OM=x$이고 $PM=y$가 된다. Q는 곡선상을 움직이는 임의의 동점으로서, 좌푯값 x_1과 y_1을 갖는다고 하자. 그러면 $y_1=f(x_1)$이 된다. 그리고 Q'는 Q와 동일한 가로축의 값 x_1을 갖는 접선상의 점이다. Q'의 좌표는 x_1과 y'라 해두자. 여기에서 N이 OX축을 따라 왼쪽에서 오른쪽으로 일정한 속도로 움직인다고 생각하자. 그러면 접선 PT상에 있는 점 Q'의 세로축 값인 y'도 역시 Q'가 접선을 따르는 움직임에 상응하여 일정하게 증가한다는 것을 쉽게 확인할 수 있다. ON의 증가량에 대한 $Q'N$의 증가량의 비가 곧 직선상의 모든 점에서 항상 동일하며, TN에 대한 $Q'N$의 비와 동일함을 확인하기란 실로 쉽다. 그러나 QN의 증가율, 즉 $f(x_1)$의 증가율은 $f(x)$가 직선이 아닌 이상 곡선상의 모든 점에서 달리 나타난다. Q가 점 P를 통과할 때(즉 x_1이 x와 순간적으로 일치할 때), $f(x_1)$의 증가율이 P에서의 접선상에 있는 y'의 증가율과 동일해진다. 따라서 우리가 변수가 x인 함수 $f(x)$의 증가율을 결정하는 일반적 방식을 소유하고 있다면, 곡선상의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기를 결정할 수 있고, 그로부터 접선을 그려낼 수 있다. 결국 곡선에 대한 접선을 그리는 문제와 함수의 증가율을 결정하는 문제는 진정으로 동일한 문제이다.

이때, 움직임 또는 변화를 담은 자취 개념으로서의 곡선의 접선의 기울기는 무한소 삼각형(infinitesimal triangle)을 이용하여 구할 수 있다. 이것이 미분계수이며, 이 과정에 근사의 사고가 작용한다. 즉, 국소적 구간에서 점 P와 점 P_1을 잇는 직선과 곡선이 근사적으로 같아지는 최적의 직선이 점 P에서의 접선이며, 접선의 기울기가 그 점에서의 미분계수이다. 미분계수의 기하학적 의미는 미분소 삼각형(differential triangle)을 사용하여 접선의 기울기와 접점에서의 미분계수가 같다는 사실을 보여주는 것이다.

삼각형 PRT_1은 삼각형 TQP과 닮았다. 따라서 접선의 기울기는 $\dfrac{PQ}{TQ}$와 같다. 그런데, 여기서 호 PP_1은 $\dfrac{T_1R}{PR}$이 충분히 작으면, 점 P에서의 접선인 선분 PT_1과 같다고 놓을 수 있다. 여기서 PRP_1을 미분소 삼각형

이라 한다. 이 방법은 이후 운동의 개념을 포함하는 '무한소 방법'으로 이어진다(조영미, 1999).



일차원 그래프의 한 점에서 접선은 그 점에서의 최적 선형 근사를 제공해 준다. 즉, 그래프 위의 한 점을 지나는 모든 직선 중에서 그 점 근처에서 그래프에 가장 근사한 직선은 접선이 된다. 이것은 한 점에서 접선이 그 점 근방에서 곡선에 대한 최적 선형 근사임을 보여준다(김영록 외, 2009).

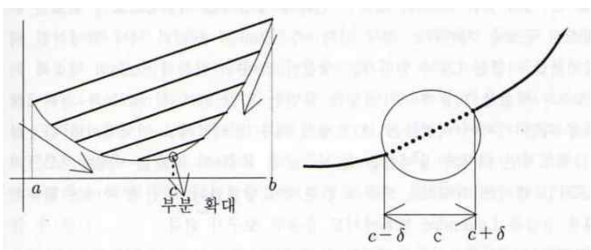
이러한 일련의 과정은 이차곡선과 접점을 주고 접선의 방정식을 구하던 상황에서, 일반적인 곡선에 대해 더 이상 '판별식을 이용하는 방법'을 사용할 수 없는 한계 상황을 극복하여 '곡선 위의 한 점에서의 미분계수에 의해 기울기의 정보를 얻는 방법'으로 발전한다. 따라서 접선은 미분계수와 같은 기울기를 가지는 직선이라는 개념으로 진화한다. 이때 근사의 사고가 중요한 역할을 한다. 이로써 $y=f(x)$로 표현되는 대부분의 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 되었다. 이러한 논의는 현대수학에서 변화를 다루고 극한의 개념을 형식화함으로써 가능해진다.

그렇다면 현대수학의 관점에서 이러한 접선의 존재성 및 유일성은 어떻게 보장할 수 있을까? 이미 유클리드 기하학이나 해석 기하학의 접선 맥락과는 상당히 이질적이므로 이에 대한 보장이 필요해진다. 이에 대한 답이 평균값의 정리이다. 평균값의 정리는 미적분학의 네 개의 존재성 정리 중 하나로 접선의 존재성 정리이다. 그리고 평균값의 정리의 특수한 경우가 롤의 정리(Roll's law)이다. 교육과정에서는 롤의 정리를 이용하여 평균값의 정리를 증명하므로 롤의 정리의 일반화로 평균값의 정리를 도입하고 있다. 평균값의 정리에 대하여 기하학적 의미가 교육과정에서 강조되고 있지만, 이 기하학적 의미가 가지는 맥락과 의의는 강조되고 있지 않다. 따라서 접선과 관련하여 그 의의를 보다 의식적으로 강조하여 지도할 필요가 있다.

유미경(2007)은 '함수 $f(x)$가 연속이고 $[a, b]$에서 미분가능하다는 의미는 $f'(x)$가 단순불연속성을 가지지 않음을 말한다. 따라서 $f(x)$의 그래프는 대체로 매끄러울 것이다. 구간 $[a, b]$에서의 할선은 $(a, f(a))$와 $(b, f(b))$를 잇는 선분이다. 양 끝점을 구간 $[a, b]$의 함숫값에 따라 $(a, f(a))$와 $(b, f(b))$를 잇는 할선에 평행하게 이동시키면 f가 미분가능하므로 한 점 c로 매끄럽게 당겨질 것이다. 이 한 점 $(c, f(c))$를 확대하여 보면 <그림 2>처럼 이 점은 이 현의 속성을 그대로 보존하여 마치 $(c-\delta, c+\delta)$구간에서 처음의 할선과 같은 기울기를 가지는 현으로 보일 것이다. 이 $(c-\delta, c+\delta)$구간에서의 $f(x)$의 변화량은 바로 $f'(c)$이다. 따라서 이 연속이고 미분가능한 곡선을 따라 그래프 위의 양 끝점을 잇는 현을 현의 기울기와 평행하게 당기면 이는 이 기울기를 보존하는 한 점 c로 다가가게 된다. 이것은 직관적으로 다음을 의미한다.

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

이것은 미분계수를 그 점에서의 접선의 기울기로 정의하고 곡선 위의 점들의 근방은 그 점을 지나는 선분들로 볼 수 있다는 국소적 선형성을 가진 미분의 개념과 매우 유사하다. 함수 f가 미분가능하므로 이 점 근방을 확대하면 아주 작은 구간에서의 선분으로 보일 것이고, 이 기울기는 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$가 된다. 따라서 미분과 평균값의 정리는 직관적으로 매우 유사한 의미를 가짐을 알 수 있다.'고 하였다.



<그림 2> 평균값의 정리와 근사

따라서 곡선 위의 두 점을 어떻게 잡든 간에 같은 기울기를 가지는 접선이 존재하고, 그 접선의 기울기가 접점에서의 미분계수라는 것이다. 이처럼 각 점에서의 미분계수를 접선의 기울기로 본다는 것은 주어진 한 점의 근방을 그 점에서의 접선으로 근사시키는 것과 본질적으로 같다.

이처럼 곡선에 대한 접선은 할선의 극한으로 확장되고, 변화율과 미분계수의 개념으로 발전한다. 이때 생각해야할 세 가지 문제가 첫째, 접선의 기울기와 할선의 기울기의 극한이 같다는 것이고, 둘째, 접선의 기울기와 미분계수가 같다는 것이며, 셋째, 그러한 접선의 존재성이 보장되는가 하는 것이다.

근사로서의 접선 개념에 대한 교수학적 의미는 현대수학적인 관점에서의 접선의 의미에 대한 이해를 준다는 것이다. 이것은 미적분학의 내용을 이해하는 기초가 된다. 그러나 이것은 독립적 내용이 아닌 종합 기하학에서의 직선과 접선의 이해에 기초하고 있으며, 이는 해석 기하학의 관점에서 정량화된 직선의 곧음성 즉, 기울기에 대한 이해와 미분계수와의 관계를 필요로 한다. 이러한 관계성 또한 평균값의 정리에 의해 뒷받침된다. 따라서 발견적 원리에 따른 이러한 수학 내적 연결성 구축은 중등수학의 관련 내용에 대한 본질적인 이해를 가능하게 해 줄 뿐만 아니라, 형식적 지도에 의한 학생들의 오개념을 해소시킬 수 있는 유의미한 학습을 제공할 수 있다.

4. 학교수학의 고찰

앞에서 논의된 수학적 지식인 직선과 접선 그리고 근사에 대한 학교수학의 고찰을 바탕으로, 이들 지도의 주안점과 지도 방안에 대해 생각해 보자[5].

가. 점과 좌표의 지도

종합 기하학의 기본 도형인 점의 해석 기하학적 개념인 좌표는 중학교 1학년 <함수> 영역에서 다루어지고 있다. 이는 기하학적 대상으로서가 아닌 함수의 그래프 지도를 위한 수단으로 좌표평면과 좌표를 도입하고 있기 때문이다. 해석 기하학의 지도에 앞서 함수의 그래프를 도입하는 것은 현행 수학과 교육과정 구성 상 불가피한 현상이겠지만, 좌표축과 단위 설정이 획일적으로 주어지고 있어 이러한 개념들의 의의나 동기는 약화되어 지도될 수밖에 없다.

또한 함수의 그래프 지도에 있어서도 교과서는 두 축의 단위 크기를 같은 것으로 고정하고 있어 함수 그래프의 비절대성은 강조되지 않고 있다[6]. 이것은 그래핑 계산기의 edit mode를 통해 보완 지도할 수 있다. 이후 고

5) 본 내용은 주로 중·고등학교 2007 개정 교육과정 해설(2008, 2009)을 참고로 하였으며, 필요에 따라 교과서를 참고하였다.

6) 그래프의 비절대성이란 좌표평면의 설정에 의해 그래프는 다양하게 그려지지만 함수의 변화 양상 즉, 증가나 감소, 극대나 극소 같은 변화의 경향성은 불변이라는 것이다.

등학교 1학년 <기하> 영역에서 수직선 위의 점과 실수 사이에 일대일 대응 관계가 있음과 수직선에서의 거리를 지도한 후, 좌표평면 위의 점과 실수의 순서쌍 사이에 일대일 대응 관계가 있음과 피타고라스의 정리와 수직선에서의 두 점 사이의 거리를 이용하여 두 점 사이의 거리를 구하고 있다. 이것은 이들 개념의 기하학에서의 발생적 맥락을 고려한 내용 구성임을 알 수 있다.

나. 직선의 지도

중학교 1학년 <기하> 영역에서 '서로 다른 두 점을 지나는 직선은 하나 밖에 없다는 것을 여러 현상을 통해 직관적으로 지도하고 있다. 그리고 중학교 2학년 <함수> 영역에서 기울기와 직선의 방정식을 도입하고 있다. 이에 대해 중학교 2007 개정 교육과정 해설(2008)에서는 다음과 같이 지도하도록 명시하고 있다.

> 미지수가 2개인 일차방정식 $ax+by+c=0$ (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)의 해를 좌표평면 위에 나타내어 보게 하는 활동을 통하여 그 결과가 직선이 됨을 이해하게 한다. 또 이 직선은 방정식을 변형하여 얻은 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 그래프인 직선과 같음을 알도록 한다. 그리고 일차방정식 $x=p$, $y=q$를 미지수가 2개인 일차방정식 $ax+by+c=0$ 꼴로 나타내어 그 그래프의 모양을 관찰하게 함으로써 각각이 좌표축에 평행한 직선이 됨을 알고, 직선의 방정식의 뜻을 이해하게 한다.

이를 바탕으로 교과서(정상권 외, 2010)에서는 다음과 같이 구체화하고 있다.

> 일반적으로, x, y의 값의 범위가 수 전체의 집합인 일차방정식 $ax+by+c=0$ (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)의 해는 무수히 많고, 그 해의 순서쌍 (x, y)를 좌표평면 위에 나타내면 직선이 된다. 이 직선을 일차방정식 $ax+by+c=0$의 그래프라 하고, 일차방정식 $ax+by+c=0$을 직선의 방정식이라 한다.

그리고 이어서

> 일차방정식 $ax+by+c=0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$)의 그래프는 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 그래프와 같은 직선이다.

를 지도한다. 그 후, 기울기와 y절편이 주어지는 경우, 한 점과 직선의 기울기가 주어지는 경우, 두 점이 주어지는 경우, 일차함수의 그래프와 평행하고 한 점을 지나는 직선의 경우에 대해 직선의 방정식을 구하는 문제들을 다루고 있다.

그러나 이러한 도입은 결과적 형태인 직선의 방정식을 방정식이나 함수의 개념을 빌어 교수학적으로 변환한 모델일 뿐 본질은 아니다. 또한 일차함수의 맥락에서 다루는 것은 학생들이 직선의 방정식과 일차함수를 동일하게 생각하는 오류를 불러일으킬 수 있다. 수학적으로 일차함수는 모두 직선의 방정식이 될 수 있지만, $x=3$과 같은 직선의 방정식은 결코 일차함수가 될 수 없다. 따라서 원래 직선의 방정식에는 없던 조건인 $a \neq 0$, $b \neq 0$을 가지게 된다. 사실 수학과 교육과정에서는 직선의 방정식을 대수방정식과 함수의 개념을 빌려 두 유형을 따로따로 제시한 후 '그래프로 그려보았을 때 두 결과가 직선과 같다.'고 언급하고 있어 이들이 서로 다른 개념이며, 그래프의 형태로 나타내었을 때 직선이라는 도형과 같아짐을 밝히고 있다. 그러나 이러한 내용을 간과하고 식의 모양만으로 이들이 같다는 오개념을 가지게 되는 것이다.

또한 이를 통해 직선의 방정식의 뜻을 안다고 하였으나, 이것이 직선의 방정식의 뜻인지는 의문스럽다. 직선을 결정하는 가장 기본적인 요소는 '두 점'이지만, 직선의 방정식을 정하기 위해서 해석 기하학적 관점에서는 두

점의 직접적인 조작이 아닌 '점과 기울기'라는 추가적 조건이 필요하다. 그러나 교육과정에서 밝히고 있듯이, 해석 기하학은 고등학교에서 다루게 되며, 따라서 직선의 방정식을 도입하는 것은 중학교에서 무리가 있다. 그럼에도 불구하고 일차함수의 그래프를 다루기 위해 식의 모양은 방정식을, 직선이라는 기하학적 모양은 일차함수를 차용하여 도입함으로써 기하 지도와 다른 접근을 하고 있어 같은 대상을 다면적으로 해석하고 있다. 이로 인해 직선의 방정식이 왜 그런 형태의 식으로 나타나는지가 지도되지 못하고 있을 뿐 아니라, $x=3$과 같은 형태의 직선이 일차함수가 아님에 대한 인지적 장애를 초래하고 있다. 그리고 기울기라는 개념이 직선성을 나타내기 위한 해석 기하학의 개념이라는 것도 지도되지 않게 된다. 그러므로 현재의 지도 흐름은 Skemp가 말한 도구적 이해에 지나지 않는다.

직선의 방정식은 고등학교 수학에서 다시 다루어지는데, 이때는 접선의 방정식을 다루기 위한 선행지식으로 중학교에서 다룬 유형별 직선의 방정식을 구하는 공식이 주를 이루고 있다. 이후 관련된 고등학교 2007 개정 교육과정 해설(2009)의 내용은 다음과 같다.

◦ 기울기가 m이고 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
  주어진 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 위의 점 $(x,\ y)$ 사이에 $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=m(x\neq x_1)$의 관계를 이용하여 직선의 방정식 $y-y_1=m(x-x_1)$이 성립함을 이해하고 구할 수 있게 한다.
◦ 좌표평면의 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
  서로 다른 두 점 $(x_1,\ y_1)$과 $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 기울기 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$을 이용하여 직선의 방정식 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$이 성립함을 이해하고 구할 수 있게 한다. 만약, 기울기가 정의되지 않는 직선인 경우, $x=a$의 꼴로 나타남을 이해하고 구할 수 있게 한다.
◦ 직선의 방정식을 나타내는 표현을 이해한다.
  좌표평면에서 직선의 방정식 $f(x,\ y)=0$은 $ax+by+c=0$임을 이해하게 한다.

이처럼 점과 직선은 중학교에서 기하와는 다른 관점에서 다루어지고 있기 때문에, 종합 기하학에서 해석 기하학으로 변환해 가는 과정적 이해가 담겨 있지 않으며, 이로 인해 기울기와 직선의 결정 요소들의 발생적 의의도 지도되지 못하고 있다. 따라서 고등학교에서 중학교의 종합 기하학적 내용들을 재해석하는 수단으로 해석 기하학을 갑작스럽게 도입하게 되고, 알고리즘적으로 다루게 된다. 그리고 직선의 방정식 구하기에서 '두 점'이 아닌 '한 점과 기울기'의 맥락이 중·고등학교 모두 먼저 다루어지고 있는데, 이는 접선의 수단적 의미로 직선을 지도하고 있음을 알 수 있다.

다. 원의 지도

원은 초등학교에서 정의가 나오며, 중학교 <기하> 영역에서는 직선과의 위치 관계를 통해 접선을 정의할 때 정의 없이 사용된다. 원의 방정식은 고등학교 수학에서 다루는데 한 점으로부터 일정한 거리에 있는 점의 집합이라는 원의 정의로부터 원의 방정식을 유도하고 있다.

라. 평행한 직선

유클리드 『원론』의 공리 5는 주어진 직선에 평행하면서 한 점을 지나는 직선의 존재성과 유일성을 보장하는

데, 학교수학에서는 이 내용을 가장 잘 나타내는 동치 표현인 ‘주어진 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나서 주어진 직선에 평행한 직선을 단 하나 그릴 수 있다.’를 선택하여, 교수학적으로 변환하여 지도하고 있다. 또한 중학교 1학년 <기하> 영역에서 두 직선과 만나는 다른 한 직선을 설정함으로써 평행선의 성질을 다루고 있다(황선욱 외, 2009). 이후 고등학교에서 두 직선의 평행 조건을 해석 기하학적 입장에서 정리한다. 공리 5는 중등교육과정에서 명시적으로 사용되지는 않지만 직선의 방정식을 구하는 방법을 제공하며, 평균값의 정리와 관련되어 근사의 사고를 명료화하는 기초가 된다.

마. 접선의 지도

접선에 대한 지도는 중학교 1학년 <기하> 영역에서 원과 직선의 위치관계를 통해 할선과 함께 다루어진다. 이후 고등학교 1학년에서 이를 해석 기하학 관점에서 다시 다루고 있는데, 원과 직선의 위치관계는 원의 방정식, 직선의 방정식 그리고 판별식에 의해 형식화된다. 그리고 원의 접선의 방정식을 유도하여 공식으로 제시하고 있는데, 이것은 해석 기하학적 관점에서의 발생적 맥락을 따르고 있음을 알 수 있다.

그리고 수학 Ⅱ에서 새로운 접선의 개념과 접선의 방정식을 구하게 된다. 고등학교 2007 개정 교육과정 해설(2009)에서는 다음과 같이 제시하고 있다.

① 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
◦ 평균변화율의 뜻을 알게 하고, 함수의 평균변화율을 구할 수 있게 한다.
x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비의 값으로 평균변화율을 정의함을 알게 한다. x의 값이 a에서 b까지 변할 때 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $A(a,\ f(a))$, $B(b,\ f(b))$를 지나는 직선 AB의 기울기와 같음을 알게 하고, 평균변화율을 구할 수 있게 한다.
◦ 평균변화율의 극한값으로써 미분계수를 이해하고 그 값을 구할 수 있게 한다.
평균변화율에서 x의 증분을 0에 가깝게 하였을 때의 극한값을 미분계수 또는 순간변화율이라 함을 이해하게 하고, 정의를 사용하여 미분계수를 구할 수 있게 한다. $x=a$에서의 함수 $y=f(x)$의 미분계수를 기호 $f'(a)$로 나타냄을 알게 한다.
② 미분계수의 기하학적 의미를 안다.
◦ 미분계수의 기하학적인 의미를 이해하게 하고, 이를 통해 접선의 기울기를 구할 수 있게 한다.
미분계수의 정의를 통해 미분계수 $f'(a)$가 기하학적으로는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기를 나타냄을 알게 한다. 또한, 미분계수의 기하학적 의미를 이용하여 곡선 위의 점에서 접선의 기울기를 구할 수 있게 한다.

그리고 도함수의 활용에서 함수에 대한 평균값의 정리의 기하학적인 의미를 이해하게 한다고 설명하고 있다. 이를 구체화한 교과서(유희찬, 2009)에서는 미분계수의 의의 및 접선의 기울기와의 관계를 다음과 같이 설명하고 있다.

일반적으로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $P(a,\ f(a))$, $Q(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$에 대하여 평균변화율 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$는 직선 PQ의 기울기를 뜻한다. 여기서, 점 P를 고정하고 Δx를 0에 한없이 가까워지게 하면 점 Q는 그래프 위를 움직이면서 점 A에 가까워지고, 직선 PQ는 점 P를 지나는 직선 PT에 한없이 가까워짐을 알 수 있다. 이 직선 PT를 점 P에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선이라 하며, 점 P를 접점이라 한다. 따라서 $\Delta x \to 0$일 때, 직선 PQ의 기울기의 극한값, 즉 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선 PT의 기울기와 같음을 알 수 있다.

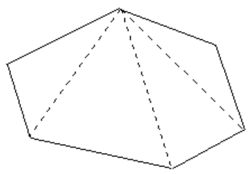
설명을 위해 도식도 함께 제시하고 있는데 할선의 극한 개념이 함의되어 있다. 실제로, 평면 곡선에서는 이것들이 동일한 개념이다. 중요한 것은 이 교과서의 경우 '함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 점 $(a,\, f(a))$를 포함하는 부분을 아주 확대하면 거의 직선처럼 보인다.'는 설명을 주고 있는데, 이것이 근사의 개념이며 접선의 의의이기도 하다.

그리고 미분계수를 이용하여 접선의 방정식을 공식화하는 것을 도함수를 다룬 후 지도하고 있다. 이것은 정의에 의한 미분계수 구하기를 도함수를 이용하여 보다 편리하게 구할 수 있는 방법으로 지도하려는 것이다. 그리고 평균값의 정리를 지도하는데 증명과 함께 기하학적 의미로 '접선이 적어도 하나 존재함'을 다루고 있다.

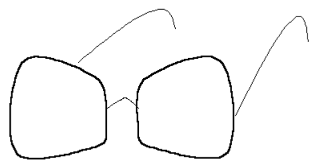
바. 근사

근사 개념은 중등 교육과정에 명시적으로 서술되어 있지는 않다. 그러나 종합 기하학적인 관점에서의 근사인 실진법에 관한 내용이 <그림 3>처럼 수리논술 예시문제[7]로 다루어졌으며, 적분과 통계에서 다루는 구분구적법에서 곡선으로 둘러싸인 국소적 영역을 직사각형의 영역으로 보아 근사적으로 처리하는 것도 근사의 사고이다. 또한 근사는 곡선의 길이, 입체의 부피를 구할 때, 그리고 대학 미적분학에서 다루는 겉넓이 등 정적분의 활용과 관련한 개념이나 공식을 유도할 때 근원적인 개념이다.

고대 그리스인들은 다각형의 넓이를 구하기 위하여 다음과 같이 다각형을 삼각형으로 나누어서 이들 삼각형의 넓이를 합하였다.



안경을 만드는 주식회사 아르키메데스는 다음과 같은 형태의 안경을 만들기 위하여 필요한 재료들을 구입하여야 한다. 고대 그리스인들의 방법을 응용하여 다음 그림에 나타난 안경알의 넓이를 구하는 방법에 대하여 논술하여라.



<그림 3> 실진법을 다룬 예

5. 결론 및 제언

현행 수학과 교육과정은 중학교에서는 유클리드 기하학을, 고등학교에서는 해석 기하학을 지도 내용으로 하고 있다. 그러나 유클리드 기하학의 기본 도형인 직선을 해석 기하학으로 번역한 직선의 방정식은 <함수> 영역에서 도입되고 있다. 이러한 도입은 직선의 방정식이 접선 지도를 위한 수단이며, 접선은 현대수학의 중요한 사고 중 하나인 근사 개념의 수단이라는 본질적 의의를 약화시킨다. 즉, 직선의 방정식을 본질적이고 발생적인 과정을 거치지 않고 형식적으로 교수학적 변환을 하여 지도하게 됨으로써 직선 → 접선 → 근사라는 개념이 통합되지 못하고 있으며, 관련 지식들의 내적 연결성 역시 잘 인식되지 못하고 있다. 따라서 이러한 내용들의 내적 연결성을 구축하고 관련 수학적 지식들의 본질적 이해를 위하여 다음을 고려할 필요가 있다.

7) http://cafe.naver.com/coolview/335

① 중학교 기하의 지도 관점인 종합 기하학과 고등학교 기하의 지도 관점인 해석 기하학 사이의 개연성 있는 지도 내용 구성이 필요하다. 이를 위하여 역사적, 교수학적, 인식론적 분석이 필요하다.

② 평면 위의 점에 대해 좌표를 설정하는 활동을 하게 하여, '기준'과 각 축의 '단위 크기' 설정의 유연성을 알게 하며, 이로 인해 그래프의 비절대성도 더불어 인식할 수 있게 한다. 즉, 축을 먼저 주어 모든 것이 고정적·결정적이 되어버리는 상황이 아니라, 평면 위의 점에 좌표를 설정하는 경험으로부터 출발하여 의사소통 활동을 통해 이러한 변화가능성을 기준설정 조작활동으로 합의하게 하는 경험을 하게 한다. 지금의 학교수학처럼 평면좌표를 주고 점을 나타내게 하는 것은 발생적 측면에서는 자연스럽지 못하다. 이러한 지도는 함수의 그래프가 단위의 설정에 따라 다른 모양으로 나타날 수 있음을 간과하여 개념의 고착화를 가져온다. 이를 해소하기 위해 그래핑 계산기 등을 이용하여 좌표축의 변경이나 x, y축의 단위를 다르게 하면, 같은 식의 그래프라도 다르게 나타남을 관찰하게 할 필요가 있다. 이러한 학습은 고등학교에서 함수의 증가나 감소, 극대나 극소와 같이 변화양상에 초점을 두는 이유를 이해하게 한다. 이러한 활동을 통해 해석 기하학의 핵심 아이디어인 좌표평면과 좌표의 본질적 이해를 돕고, 해석 기하학의 의의에 대한 내용 전개의 기초를 줄 수 있다.

③ 중학교에서 직선의 방정식을 도입하는 맥락을 고려할 필요가 있다. 그렇지 못하더라도 직선의 방정식을 구하는 문제에서는 '두 점'의 경우가 먼저 제시되어야 하며, 교사는 이때 교과서의 직선 지도 내용(유클리드 기하학)과 연계하여 지도할 필요가 있다. 그리고 고등학교에서 기울기의 발생적 의의와 '기울기와 한 점'을 결정조건으로 하는 직선의 방정식을 도입하여야 한다. 사실, 직선을 함수의 그래프로 다루는 현행 중학교 내용에서 반드시 기울기를 다루어야 하는 중요한 상황은 발견되지 않는다. 가장 바람직한 것은 직선의 방정식을 주어지는 것이 아닌 또는 결과적 형태인 일차방정식이나 일차함수 개념을 빌리지 않고, 고등학교에서 기울기 개념의 필요성과 함께 지도하는 것이다. 이것은 본질인 수학적 지식의 현상으로부터 지도해야 한다는 Freudenthal의 수학화의 관점이기도 하다.

④ 교사는 평균값의 정리의 의의가 접선의 존재성 정리라는 것을 기하학적 의미와 함께 보다 강조하고, 평행선 공리와 같은 내용임을 이해하도록 지도해야 한다. 즉, 주어진 점을 지나면서 주어진 직선에 평행한 직선은 유일하게 존재한다는 것과 평균값의 정리의 임의의 두 점과 같은 기울기를 가지는 접선이 존재한다는 것이 유사한 문제 상황임을 이해한다. 이와 같이 학교수학의 많은 내용들이 서로 연결된 개념이며, 관점의 변화에 따른 다른 목적성의 산물이라는 것을 이해할 수 있어야 한다.

⑤ 중등수학에서 근사의 개념이 명시적으로 다루어지지는 않지만, 교사는 정적분과 관련한 개념들의 기저에 '근사'의 사고가 있으며, 직선 → 접선 → 근사로 이어지는 흐름 속에서 접선과 직선 지도의 의의를 이해하고, 이를 학생들이 이해할 수 있도록 각 단계에서 선행 지식과 연계하여 맥락을 부여할 필요가 있다. 특히나 고등학교 과정에서는 중학교에서부터 배워왔던 지식들이 번역되고 발전하는 과정을 경험하게 하여 목적성과 다양한 관점에서의 이해를 높일 수 있어야 한다.

본 연구에서는 근사개념의 관련 지식들에 대한 이론적 논의를 통해 지도의 주안점과 지도방안에 대해 제언하였다. 이러한 관점에서 이들 내용을 학교수학에 접목시키기 위한 교육과정 편성 및 구체적인 지도방안에 대한 후속연구가 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2009). 고등학교 교육과정 해설⑤ 수학. 서울 : (주)미래엔컬처그룹.

교육과학기술부 (2008). 중학교 교육과정 해설(Ⅲ) 수학, 과학, 기술・가정. 서울 : 대한교과서주식회사.

김영록・이영이・한종민 (2009). 선형 근사로서의 접선 개념의 교육학적 고찰. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 23(3), 625-642.

도종훈 (2008). 직선의 대수적 표현과 직선성(直線性)으로서의 기울기. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 22(3), 337-347.

박평우・김운규・정광택 옮김 (2003). R. Courant & H. Robbins(1996). 수학이란 무엇인가. 서울 : 경문사

오채환 옮김 (2009). A. N. Whitehead. 수학이란 무엇인가. 서울 : 궁리.

유미경 (2007). 평균값정리에 대한 교수학적 분석. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

유희찬・조완영・조정묵・임미선・유익승・한명주・박원균・남선주・정성윤 (2009). 고등학교 수학. 서울 : 대한교과서(주).

유희찬・조완영・손홍찬・조정묵・이병만・김용식・임미선・선미향・유익승・한명주・박원균・남선주・정성윤 (2009). 고등학교 수학Ⅱ. 서울 : (주)미래엔 컬처그룹.

이목화 (2010). 중등학교에서 직선의 방정식의 지도 방법에 대한 연구. 부산대학교 대학원 석사학위 논문.

이무현 옮김 (1997). Euclid. 기하학 원론 : 평면기하. 서울 : 교우사.

이우영・신항균 옮김 (2005). H. Eves (1992). 수학사. 서울 : 경문사.

임재훈・박교식 (2004). 학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구. 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>. 14(2). 171-185.

정상권・이재학・박혜숙・홍진곤・서혜숙・박부성・강은주 (2010). 중학교 수학 2. 서울 : (주)금성출판사.

조영미 (1999). 접선 개념의 교육적 연구, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>. 9(1), 229-237.

조완영 (2006). 고등학교 미적분에서의 수학화 교수・학습에 관한 연구. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 8(4), 417-439.

황선욱・강병개・김수영・박정아 (2009). 중학교 수학 1. 서울 : (주)좋은책신사고.

허민・오혜영 옮김(1997). H. Eves (1990). 수학의 기초와 기본 개념. 서울 : 경문사.

D. Hilbert(1971). *Foundations of Geometry.* IL : Open Court Publishing Co.

http://cafe.naver.com/coolview/335

A study on the pedagogical consideration of the related knowledge for teaching 'Approximation' conception

Chung Young Woo
Department of Mathematics Education, Pusan National University, Busan 609-735, Korea
E-mail : nahime1130@hanmail.net

Lee Mok Hwa
Haeundae High School, Busan 612-818, Korea
E-mail : rhtpdnf@hanmail.net

Kim Boo Yoon†
Department of Mathematics Education, Pusan National University, Busan 609-735, Korea
E-mail : kimby@pusan.ac.kr

'Approximation' is one of central conceptions in calculus. A basic conception for explaining 'approximation' is 'tangent', and 'tangent' is a 'line' with special condition. In this study, we will study pedagogically these mathematical knowledge on the ground of a viewpoint on the teaching of secondary geometry, and in connection with these we will suggest the teaching program and the chief end for the probable teaching. For this, we will examine point, line, circle, straight line, tangent line, approximation, and drive meaningfully mathematical knowledge for algebraic operation through the process translating from the above into analytic geometry. And we will construct the stream line of mathematical knowledge for approximation from a view of modern mathematics. This study help mathematics teachers to promote the pedagogical content knowledge, and to provide the basis for development of teaching model guiding the mathematical knowledge. Moreover, this study help students to recognize that mathematics is a systematic discipline and school mathematics are activities constructed under a fixed purpose.

* ZDM Classification : D43, D44
* 2000 Mathematics Subject Classification n : 97D30, 97D40
* Key Words : Eucldean Geometry, Analytic Geometry, Line, Tangent, Approximation
† Corresponding author