한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제25권 제1호 (2012년 2월), 1–13

불확실성의 수학: 확률론과 개연론

Mathematics of Uncertainty: Probability and Possibility

고영미 Youngmee Koh 이상욱* Sangwook Ree

수학은 엄밀성을 강조하는 학문이다. 그러나 사회가 복잡해지고 정보가 많아지면서 수학이 엄밀하지 않은 정보를 다루어야 하는 요구가 발생하게 되었다. 최근 이러한 불확실성을 갖는 정보를 엄밀성을 갖춘 정보로 변환하는 수단으로서 개연론에 대한 연구가 진행되고 있다. 본 논문은 임의성(randomness)을 다루는 확률론(probability theory)과 비교하여 모호성(vagueness)을 다루는 개연론(possibility theory)을 개괄한다.

Possibility theory is a kind of mathematics of uncertainty for handling incomplete information. In this paper, we discuss vagueness and randomness as some causes of uncertainty and we introduce the possibility theory as a way of dealing with uncertainty, comparing it with the probability theory.

Keywords: 불확실성(uncertainty), 모호성(vagueness), 임의성(randomness), 퍼지집합(fuzzy sets), 개연성(possibility), 확률(probability)

1 서론

학문의 정의 또는 의미를 간단히 설명하기는 어렵지만, 학문을 인류의 삶에 도움이 되는 객관적 사실과 진리의 도출 과정 및 결과라고 말해도 좋을 것 같다. 학문은 인류의 역사와 함께 발전을 거듭해 왔다. 이러한 학문의 발전은 인류가 인지할 수 있어서 그로부터 의미 있는 구체적 결과를 도출할 수 있는 대상 및 영역의 확장을 가져왔다.

인류의 역사와 함께 발전한 학문 중 하나가 수학이고, 수학 역시 학문적 대상과 사용 논리에 있어 영역을 확장하여 왔다. 19세기에서 20세기를 거쳐 있었던 수학 기초론의 확립을 위한 노력은 수학의 영역 확장에 따른 엄밀성의 확보를 위한 노력으로 이해할 수 있다. 그럼에도 불구하고, 괴델의 불완전성 정리를 차치하더라도, 수학이 자연 언어에 의한 사고까지 영역을 넓히기에는 다소 제약적이었다.

『고전 논리는 모호하고 구체적이지 않은 용어가 포함된 자연 언어를 형식화하기에 잘

---

*교신저자
MSC: 00A71, 03B52 ZDM: A30
제출일: 1월 6일 수정일: 1월 30일 게재확정일: 2월 10일

들어맞지 않는다.』는 러셀[1)]의 말이나 『자연 언어가 표현하는 개념은 그 개념을 정의해주는 명확한 성질을 가지기보다는 오히려 불분명한 경계를 가지며, 어떤 집합은 중심에 위치한 원소뿐만 아니라 경계에 위치한 원소도 또한 포함한다.』는 비트겐슈타인[2)]의 말은 우리가 일상생활에서 사용하는 자연 언어가 고전 논리로 다루기에 부적합한 모호성(vagueness)을 담고 있음을 지적한다[6].

실제로, 자연 언어를 사용하는 우리의 일상생활에서는 명확한 구분의 기준이나 정확한 정의가 없는 대상이나 개념이 빈번이 사용된다. 예를 들어, 「어린이」 또는 「어른」의 개념이 그러하다. 우리나라 민법은 성인의 기준을 만 20세로 규정하고 있다.[3)] 이 기준에 따르면 우리나라 국민은 20세 생일을 전후하여 단 하루만에 미성년에서 성년이 된다. 그러나 일상생활에서 사용하는 성년 또는 어른이라는 말은 어린이가 자라 점차적으로 어른이 되는 상대적 개념으로 이해된다. 이와 같이 현실적으로 명확히 구분되거나 정의하기에 애매하거나 모호한 대상과 개념 및 주장은 수학에서의 집합과 논리를 직접 적용하기가 어렵다.

특히 의학적 진단과 같이 주어진 정보가 부족하거나 모호한 경우에 야기되는 불확실성은 의사결정 과정에서 발생하는 어려움의 중심 원인으로 자리한다. 사실, 의사결정에서의 불확실성의 처리 과정은 전통적으로 확률론에 의하여 모델링 되어왔다[13]. 확률론은 임의성(randomness)으로부터 발생하는 불확실성을 다루고 있지만 「특정 사건이 발생하거나 아니면 발생하지 않는다.」라는 2가(價) 논리가 사용되는데, 이러한 논리는 때때로 다양한 현실 세계의 문제를 해결하기에 충분하지 않다.

한편, 불확실성을 불확실한 정도에 따라 판단할 수 있는 새로운 방법론의 수학 논리가 20세기 후반부터 연구, 개발되고 있는데, 개연론(possibility theory)이 그러한 수학 논리이다. 개연론은 임의성과는 다른 성격의 불확실성, 즉 모호성(vagueness)을 다루는 논리로서, 특정 주장에 대한 믿음 수준을 측정한다. 이러한 수학 논리는 인간의 판단과 의사결정에 관한 심리와 잘 맞아 떨어진다는 평가를 받고 있다[13]. 본 논문에서는 개연론을 확률론과 비교하면서 그 역사와 기본 개념을 고찰한다.

2 불확실성

불확실성(uncertainty)은 물리학, 철학, 통계학, 경제학, 심리학 등을 포함한 다양한 학문 분야에서 제각기 다른 방식으로 사용되는 용어이지만, 의사결정론과 통계학의 전문가들의 정의에 따르면 불확실성은 「지식의 부족으로 인해서 현 상태나 미래에 발생할 결과를 설명하지 못하는 상태」를 뜻한다[20]. 즉, 불확실성은 어떤 주장이 성립하는지에 대한 인지

1) Russell, Vagueness, *Austr. J. Philosophy* 1 (1923), 84–92.

2) Wittgenstein, *Philosophical Investigation*, MacMillan, New York, 1953.

3) 2011년 2월 18일 성년의 나이 기준을 만 20세에서 만 19세로 낮추는 민법 개정안이 국회를 통과하여 2013년 7월부터 시행된다.

내지는 판단 수준을 말하며, 애매하거나 모호한 정의와 정보 및 주장으로부터 발생한다[6].

불확실성은 원인에 따라 다양하게 구분된다[14]. 예를 들어, 부족한 정보의 전달이라던지, 부주의에 의한 그릇된 정보, 정보의 불확실한 전달 수단, 혹은 두 가지 이상의 해석이 가능하다든지, 의미하는 바가 너무 포괄적인 경우를 포함한 불확실성 등이 포함된다. 그러나 수학적 대상으로 다루어지는 불확실성은 크게 두 가지로 나뉜다. 어떤 현상 내지는 사건의 발생에 대한 예측 불가능성을 함의하는 임의성(randomness)과 명확한 의미 또는 경계의 부족을 의미하는 모호함(vagueness)이 그것이다.

임의성은, 예를 들어, 주사위를 던졌을 때 나오는 눈의 수, 주가지수, 전구의 수명 등과 같이 미래에 발생할 어떤 특정 현상의 예측 불가능성으로 인한 불확실성을 의미한다. 반면, 모호함은 주로 술어로 표현되는 개념이 갖는 성질로서 그 개념의 적용범위 또는 경계가 명확하지 않음을 뜻한다. 또한 특정 개념에 대하여 삼단논법역설[4)]이 적용될 때, 개념이 모호하다고 말할 수 있다[21]. 예를 들어, 젊은 사람을 지칭할 때「젊다」라는 서술어가 의미하는 연령 범위가 명확하지 않기 때문에 모호함이 발생한다. 마찬가지로, 높은 온도, 노란 색 셔츠, 큰 차, 가까운 거리 등에 사용된 서술어「높은」,「노란」,「큰」,「가까운」등은 모두 적용범위 또는 경계에 대한 모호함을 담고 있다.

현대 수학은 어떤 형태의 수학이든지 집합과 논리의 바탕 위에서 이론이 전개된다. 집합은 다루고자 하는 대상들의 모임을 의미하는데 이때의 대상은 포함 여부가 뚜렷이 구분되는 대상들을 말한다. 또한 수학에서 사용되는 논리는 참 또는 거짓으로 그 진리값을 결정함에 있어서 불확실성이 개입되지 않는 명제만을 대상으로 다룬다.

그러나 실생활에서도 수학에서처럼 2가 논리를 적용하려고 한다면 때로는 받아들이기 힘든 판단이나 결정을 해야 하는 일이 발생한다. 예를 들어, 언덕과 산을 구분하는 경계는 무엇일까? 어쩌면 높이가 일정한 높이 이상이면 산이고, 그 이하면 언덕이라고 해야 할지 모르겠다[11]. 마찬가지로, 음식을 맛있는 음식과 맛없는 음식으로 분류한다거나, 매일의 날들을 맑은 날과 맑지 않은 날로 분류하려 한다면, 그러한 분류는 현실과 동떨어져 매우 부자연스럽게 된다. 이와 같이 작은 수, 큰 수, 젊은 사람, 늙은 사람 등과 같이 그 경계가 분명하지 않아 모호함을 불러일으키는 대상과 개념을 빈번히 경험하고, 종종 모호한 정보를 기초로 추론을 하고 판단을 하는 것이 우리의 일상적 현실이다.

전통적인 집합론에서처럼 원소가 집합에 포함됨을 설명하는「소속상태(membership)」를 참과 거짓의 두 개의 진리값만으로 표현하기보다는, 이를 일반화시켜 집합에 대한 소

4) 삼단논법역설(Sorites paradox):『모래더미가 작다면, 이 모래더미에 한 알갱이의 모래를 보태도 여전히 작은 더미이다. 한 알갱이의 모래로 이루어진 모래더미는 작다. 그러므로 모든 모래더미는 작다.』그러나「모래더미가 작다.」는 주장의 참의 정도는 사실 모래더미가 커지면서 점차 줄어든다. 실제로 작지 않은, 즉, 큰 모래더미도 존재한다. 이와 같은 역설은「작다」라는 서술어의 진리값을 참과 거짓으로만 판단하기 때문에 발생한다. 그런데 sorites는 고대 그리스어로「무더기(heap)」를 의미하여, 이 역설을「무더기 역설」이라고 부르기도 한다.

속상태를 점진적인 상태로 표현한다면 현실을 좀 더 잘 반영하고 양적인 값과 질적인 값 사이에 자연스러운 연결 상태가 제공될 수 있다.

사람들이 의사 결정을 하는데 필요한 정보를 얻기 위하여 컴퓨터를 이용하는 이 시대에 지식을 표현하고 자동으로 추론하는 이론과 기술의 개발이 중요한 문제가 되었다. 특히 객관적이고 정확한 자료가 별로 없는 영역에서도 인간의 지식을 저장하거나 검색해서 사용하는 기술의 개발이 중요해졌다[6]. 의사결정, 인공 지능, 전문가 시스템 등을 포함하는 인공두뇌학(cybernetics) 분야에서는 인간의 경험을 컴퓨터가 이해할 수 있는 형태로 변환시키는 기술 개발에 관심을 둔다. 인간과 같은 방식으로 추론하고 판단하는 컴퓨터 기술이 개발되고 실제적인 응용이 확대되면서 그 기초를 제공하는 수학이론의 정립이 점차로 중요해지고 있다. 이에 따라 대상마다 단계별로 집합에 속하는 정도를 나타냄으로써 전통적인 수학에서의 집합의 개념이 일반화되고, 주장마다 참, 거짓의 정도를 단계별로 표현함으로써 2가 논리가 아닌 다양한 논리가 개발되고 응용되고 있다. 즉, 불확실성을 수학 안에서 양적으로 처리하는 것이 가능해졌다.

3 불확실성의 수학적 모델링

불확실성의 원인으로 지목되는 임의성과 모호함을 포함하는 개념들을 수학적으로 다루기 위해서는 이들 개념을 수학화할 필요가 있다. 수학이 질적 개념을 양적 개념으로 변환하여 수치로 표현하고 연산이 가능하게 함과 같이 임의성과 모호함을 담고 있는 주장이라고 해도 그 주장에 관한 믿음의 정도를 정량화함으로써 불확실성을 수학화할 수 있다.

확률론은 반복된 동일 실험에서 동일한 결과가 발생하지 않는 데서 오는 결과의 불확실성에 대한 모델링이다. 이때 발생 가능한 결과들이 임의적으로 발생한다고 가정함으로써 발생 가능한 결과에 대한 불확실성 정도를 판단할 수 있는 수학적 모델의 제시가 가능해진다. 어떤 사건이 발생한다는 명제의 진리값은 결국 참 또는 거짓이어야 하지만, 어떠한 결과가 발생할지를 알 수 없기 때문에 불확실성이 생긴다. 확률론에서는 그러한 명제가 참인지에 대한 믿음의 정도를 $[0, 1]$ 구간에 속한 값으로 나타낸다.

「오늘의 아침 기온은 낮다.」라는 기술은 분명 어떤 의미를 전달하고 있지만 참과 거짓으로 판단할 수는 없는 일종의 모호함을 갖는다. 여기서의 모호함은 주사위를 던질 때 발생되는 결과가 임의적인 것(임의성)과는 달리, 기온은 결정된 값이지만 「낮은 기온」이 뜻하는 바가 분명하지 않음을 의미한다. 미국 버클리 소재의 캘리포니아 주립대학교 전기공학과 교수였던 자데(Zadeh)는 1965년에 모호함을 다루는 수단으로 퍼지 집합을 소개하고[15], 1978년에 퍼지 집합을 기초로 한 개연론(蓋然論, possibility theory)[5]을 소개하였다[16].

5) 「개연론(蓋然論)」이라는 용어는 철학과 신학에서도 사용되는데, 본 논문에서의 개연론(possibility theory)과는 다른 의미이다. 철학에서의 개연론은 probablism으로 인간은 절대로 확실한 지식(진리)에 도달할 수

자데는『자연 언어에 내재되어 있는 부정확함(imprecision)은 본질적으로 확률론보다는 개연론을 바탕으로 다루어져야 한다.』고 주장하면서, 개연론을 이용하여 자연 언어에 담긴 의미를 양적으로 표현하고자 하였다. 자데는 자연 언어가 의미하는 미묘한 차이를 표현하는 점진적인 논리인 퍼지 논리를 만들어 주관적이거나 모호한 개념으로 표현된 자료들을 조작할 수 있게 함으로써 인간의 추론 과정을 흉내내고자 하였다. 즉, 확률론과는 그 목표에서부터 차이가 있는 퍼지 집합과 개연론은 불확실성의 점진적 이론의 기초를 제공함으로써 자연 언어에 수학적인 의미를 부여할 수 있게 하였다.

4 퍼지 집합

퍼지 이론은 1930년대에 루카지비츠[6)]가 이끄는 폴란드 논리학파에 의해 개발된 다가논리로부터 시작되었다고 알려져 있다. 서론에서 밝혔듯이, 비슷한 시기에 고전 논리가 자연 언어의 형식화에 부적절함을 지적한 러셀이나 자연 언어 자체가 모호함을 지니고 있음을 강조한 비트겐슈타인 외에도, 미국의 철학자 퍼스[7)]는『모호함이 수학적 사고에 중요한 역할을 할 수도 있다는 의심을 하지 않은 채 논리학자들은 모호함에 대한 연구를 너무 등한시 한다.』며 자연 언어가 갖는 모호함의 수학화의 가능성을 강조하였다.

미국의 철학자 블랙[8)]은 모호한 기호들의 특성을 기술하기 위한 도구로서 퍼지 소속함수(membership function)의 전신으로 여겨지는 개념(consistency profile)을 최초로 제안하였고, 바일[9)]은 전통적인 특성함수(characteristic function)를 일반화하여 연속인 특성함수를 제안하였다. 또한, 카플란과 숏[10)]은 모호한 서술어에 대한 일반화된 특성함수를 제안하였고 기초적인 퍼지 논리 연산자를 다루었다.

이러한 이론들은 자데(Lofti Zadeh)에 의하여 종합되어 1965년에 미묘한 차이를 표현하는 점진적인 논리인 퍼지 논리가 소개되었는데, 가능한 한 자연 언어를 사용하는 인간의 자연적 논리를 담고자 하였다. 자데는 전통적인 컴퓨터 논리로는 주관적이거나 모호한 개념으로 표현된 자료들을 조작할 수 없으므로, 퍼지 논리를 이용하여 인간의 추론 과정과 유사하게 회색 영역을 갖는 자료들도 구별가능하게 하였다[6, 18].

불확실성을 수학화하는데 이용된 퍼지 집합과 퍼지 논리의 수학사적 의의와 자데에 대한

없으므로 개연적인 지식에 만족해야 한다는 이론을 의미한다.

6) Lukasiewicz, J. Philisophical remarks on many-valued systems of propositional logic (1930), Reprinted in *Selected Works*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, Amsterdam, 1970, 153–179.

7) Peirce, C. S., *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, C. Hartshorne and P. Weiss, eds., Harvard University Press, Cambridge, MA., 1931.

8) Black, M. Vagueness, *Phil. of Sciences* 4 (1937), 427–255.

9) Weyl, H., The ghost of modality, *Philosophical essays in memory of Edmund Husserl*, Cambridge, MA, 1940, 278–303.

10) Kaplan, A. and Schott, H. F., A calculus for empirical classes, *Mehtods* III (1951), 165–188.

국내의 연구는 박창균[1, 2, 3, 4], 이승온[5] 등을 참고할 수 있다.

어떤 개념이 모호하다는 것은 앞서 언급했듯이 그 의미가 분명한 경계에 의해 규정되어 지지 않음을 뜻한다. 모호한 개념이 적용되는 상황과 적용되지 않는 상황 사이에는 모호한 개념이 부분적으로 적용되는 점진적인 경계가 존재한다. 이러한 모호함을 담고 있는 상황의 예를 집합으로 설명해보기로 하자. 우주에 존재하는 모든 분자들의 집합을 전체집합으로 잡고, 하나의 물체, 예를 들어, 컵 안에 담긴 물을 구성하는 분자들의 집합을 A라고 하자. 그러면 물의 표면을 떠돌고 있는 물 분자들은 집합 A에 포함될까? 아니면 A의 여집합 $\bar{A}$에 포함될까? 사실 물은 증발을 하기 때문에 물의 표면을 떠도는 물의 분자는 A에 속한다고 말할 수도 있고, 이미 물을 떠났기 때문에 $\bar{A}$에 속한다고 말을 할 수도 있다.

이런 종류의 모호함을 해결하는 이론적인 방법으로서 고안된 개념이 퍼지 집합이다. 퍼지 집합(fuzzy set)은 각 대상에 대하여 그 집합에 속한 정도를 제시함으로써 정의되는데, 소속 정도를 나타내는 방법이 바로 그 집합의 소속함수(membership function)이다.

어떤 대상의 소속 여부가 분명한 보통의 집합(crisp set)의 경우, 소속함수는 그 집합의 특성함수로 주어지고, 치역을 $\{0,1\}$로 갖는다. 이에 반해서 퍼지 집합의 소속함수는 치역을 실수 구간 $[0,1]$로 갖는다. 그러므로 퍼지 집합은 (A,m)으로 표현되고, 이때 $m : A \to [0,1]$은 집합 A의 소속함수로서, 각 대상 x에 대하여 $m(x)$가 x가 퍼지 집합 A에 속한 정도를 나타낸다.

「어린 사람」이라는 말에서 모호함을 담고 있는 서술어 「어리다」를 퍼지 집합으로 모델링하는 예를 살펴보자. 「어리다」를 퍼지 집합으로 이해함은 x세의 나이가 「어리다」라는 개념에 적합한(compatible) 정도를 $m(x)$로 주는 소속함수 $m : [0,\infty) \to [0,1]$의 존재를 의미한다. 예를 들어, $m(15) = 1$임은 15세인 사람이 어린 사람임을 의심없이 인정한다는 뜻이고, $m(30) = 0.4$는 30세의 사람은 어느 정도(0.4)는 어린 사람이고, 어느 정도(0.6)는 어리지 않은 사람임을 의미한다. 이처럼, 어떤 대상은 어느 정도는 퍼지 집합 A에 속하고 어느 정도는 그 여집합 $\bar{A}$에 속하기도 한다. 즉, 퍼지집합 A에 대하여 $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$이 성립하는데, 이는 보통의 집합과 논리에서 성립하는 모순률이 퍼지 집합과 퍼지 논리에서는 성립하지 않음을 의미한다. 실제로, 이 성질이 퍼지 집합을 결정짓는 중요한 특징이다.

5 개연론의 역사

자연 언어로 된 불완전한 정보를 표현하고 추론하는데 이용할 수 있도록 퍼지 집합을 기초로 하여 불확실성을 모델링한 개연론이 1978년에 자데에 의해서 소개되고, 드부와와 프라데 등[7]이 점진적 양상으로써 개연성(possibility) 외에 필연성(necessity)을 다루면서 개연론을 더욱 체계적으로 다루고 발전시켰다. 자데가 처음 고안한 개연성 분포함수는

자연 언어에 단계적인 의미를 부여하기 위한 것이었지만, 개연성과 필연성은 확률과 나란한 방법으로서 주장에 대한 믿음의 정도를 나타내는 기초 도구로 활용되기에 이르렀다. 개연론이라는 이름은 자데에 의해서 만들어졌지만 개연론에서 사용하는 기본 개념인 개연성의 단계적인 표현은 자데보다 수십년 전으로 거슬러 올라가서 찾아볼 수 있다.

1940년부터 1970년대에 영국의 경제학자인 섀클(Shackle)이 경제학 분야에서의 불확실성을 좀 더 나은 방법으로 모델링하기 위하여 확률론을 새로운 개념으로 대체할 것을 제안하였다. 그는 불확실성과 의사결정에 대한 본격적인 접근 방법으로서 개연성에 대한 단계적인 개념으로 「잠재적인 놀라움의 정도」(degree of potential surprise)를 도입하여 특정 사건의 발생 불가능한 정도, 또는 그 여사건의 발생이 확실한 정도를 나타내었다. 그가 이용한 잠재적 놀라움 곡선은 자데의 개연성 분포함수에 해당한다고 볼 수 있다.

1973년에 철학자 코헨(Cohen)은 순전히 통계적인 주장만으로 법정에서 어떤 사람이 죄가 있는지를 증명하기는 어렵다는 법적인 추론 문제를 고려하였다. 가정과 그 역은 동시에 증명 가능할 수 없다는 것을 주된 특징으로 하는 그의 개념인 「증명 가능한 정도」(degree of provability)는 아래에 소개될 개연성의 쌍대 개념인 필연성과 일치한다.

자데[16]는 퍼지 집합의 멤버쉽 함수를 자연 언어로 주어진 진술이 갖는 모호한 상태를 수치화하는 개연성 분포함수로 설명하며 개연론의 주요 공리인 최대값 공리(maxitivity)를 강조하였다. [6, 9]

6 개연론과 확률론

확률론과 개연론은 모두 어떤 주장에 대한 믿음 정도의 양적 표현이다. 확률론은 알지 못함에 대한 수학적 모델링으로서, 어떤 현상의 발생 가능성에 대한 믿음을 정량화한다. 반면에 개연론은 실제 세계를 표현하는 언어의 부정확함으로 인해 생기는 모호한 주장에 대한 신뢰성을 다룬다.

먼저, 『It is possible but not probable that you will win the next lottery.』라는 주장에서 보듯이 개연성이 확률보다 큰 값을 가지게 됨을 쉽게 짐작할 수 있다. 자데[17]는 『개연성은 어떤 일을 쉽게 달성할 수 있는 정도(feasibility)나 어떤 개념이 의미하는 정도(plausibility)에 대한 우리의 직관적 인식을 추상화한 것인 반면, 확률은 있음직함(likelihood), 빈도(frequency), 비율(proportion)에 기초한다.』라는 말로 개연성과 확률의 개념을 비교하여 설명한다.

6.1 확률론

확률론에서는 어떤 대상 x의 상태를 집합 A로 서술한 「$x \in A$」에 대한 믿음의 정도를 A에 대한 확률 $P(A) = \int_A f(x)dx$로 나타낸다. 이때 $f : \mathbf{R} \to [0, \infty)$는 확률밀도함수

로서 $\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = 1$을 만족시킨다.[11)] 이로부터 확률의 성질인 $P(A) \geq 0$, $P(\mathbf{R}) = 1$과 $A \cap B = \emptyset$일 때 확률의 가산성(additivity)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

이 유도된다.

6.2 개연론

개연론은 모호한 주장에 대한 신뢰 정도를 정량화하는 방법으로서 주장에 대한 낙관적 입장을 대변하는 개연성(possibility)과 보수적인 입장을 고수하는 필연성(neccessity)에 의하여 표현된다. 이러한 개연성과 필연성은 개연성 분포함수를 이용하여 정의된다[8, 9, 10, 12, 13, 16].

「x는 A이다.」 혹은 「$x \in A$」라는 주장에서 x를 설명하는 상태들로 구성된 집합을 S로 나타내고, S의 원소 s가 x의 의미를 가질 개연성을 $\pi(s) \in [0,1]$로 나타낸다. 이렇게 정의된 함수 $\pi : S \to [0,1]$를 x에 대한 **개연성분포함수**(possibility distribution)라고 한다. 이때 주장 「$x \in A$」에 대한 낙관적 믿음의 정도를 표현하는, S의 부분집합 A의 **개연성** $\Pi(A)$는

$$\Pi(A) = \sup_{s \in A} \pi(s)$$

로 정의된다.

그러면 정의에 따라서 $\Pi(\emptyset) = 0$과 최대값 공리(maxitivity)

$$\Pi(A \cup B) = \max\{\Pi(A), \Pi(B)\}$$

가 성립한다. 그런데 실질적으로 개연론을 응용하는 대부분의 경우, $\pi(s) = 1$을 만족시키는 원소 $s \in S$의 존재를 전제한다. 그러면 $\Pi(S) = 1$이 되고, 또한

$$\Pi(A) + \Pi(\bar{A}) \geq \max\{\Pi(A), \Pi(\bar{A})\} = \Pi(S) = 1$$

이 성립한다.

$\Pi(\{s\}) = \pi(s)$는 s가 x를 의미하는 개연성을 표현하므로, $\pi(s) = 0$은 s가 x를 설명하기에 불가능한 상태를 나타내고, $\pi(s) = 1$은 s가 x를 설명하기에 완전히 가능한 상태, 즉 충분히 그럴듯한 상태임을 의미한다. 그래서, 예를 들어, 개연성 분포함수가 적당한 $s_0 \in S$에 대해서만 $\pi(s_0) = 1$이고 그 외의 $s \in S$에 대하여 $\pi(s) = 0$이라면, 결국 x는 s_0에

11) 이산확률의 경우, 적당한 가산 집합에 속한 x에 대해서만 $f(x) > 0$이고, $\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = 1$은 $\sum f(x) = 1$을 의미한다.

의하여 충분히 설명된다는 뜻이다. 또, 모든 $s \in S$에 대하여 $\pi(s) = 1$이라면, 어떤 특정한 s가 x를 의미한다고 말할 수 없기 때문에 x를 의미하는 상태 s의 추정이 완전히 불확실함을 말한다.

한편, $\Pi(A) = 1$이라 하더라도 $\Pi(\bar{A}) = 1$도 여전히 가능해서, $A \subset S$의 개연성이 1이라는 것이 A가 x를 설명하는 모든 상태를 포함한다는 사실을 의미하지 않기 때문에, 개연성을 보완할 수단의 도입이 필요하다. 그 수단이 바로 개연성과 쌍대적인 개념인 필연성(necessity)이다.

S의 부분집합 A의 **필연성** $N(A)$는

$$N(A) = 1 - \Pi(\bar{A})$$

로 정의한다. 그러면 정의로부터

$$N(A \cap B) = \min\{N(A), N(B)\}$$

이 성립함을 쉽게 알 수 있다. $N(A) + \Pi(\bar{A}) = 1$이므로 $N(A)$의 값이 크다는 것은 $\Pi(\bar{A})$의 값이 작다는 것을 의미하고, 이는 $s \in \bar{A}$가 x를 의미하는 개연성이 작음을 말한다. 즉, x에 대한 개연성이 큰 s는 A에 포함됨을 의미하여 $N(A)$는 「$x \in A$」에 대한 확실한 믿음의 정도를 나타낸다.

필연성은 개연성보다 클 수 없다. 다시 말하면, 어떤 주장이 어느 정도의 확실한 의미를 갖기 위해서는 그보다 큰 개연성을 가지고 있어야 함을 뜻한다. 이것을 식으로 표현하면 $\Pi(A) \geq N(A)$가 되고, 이는 $\Pi(A) + \Pi(\bar{A}) \geq 1 = N(A) + \Pi(\bar{A})$로부터 유도된다.

$\max\{\Pi(A), \Pi(\bar{A})\} = 1$과 필연성의 정의로부터 $N(A) > 0$이면 $\Pi(\bar{A}) < 1$이므로 $\Pi(A) = 1$이고, 또 $\Pi(A) < 1$이면 $\Pi(\bar{A}) = 1$이므로 $N(A) = 0$이다. 이 사실을 종합하면 $N(A) > 0$이기 위한 필요충분조건은 $\Pi(A) > \Pi(\bar{A})$임을 알 수 있다.

또한 $\Pi(B \cap C) \leq \min\{\Pi(B), \Pi(C)\}$과 $N(A \cup B) \geq \max\{N(A), N(B)\}$이 성립함도 쉽게 확인할 수 있다.

6.3 개연론과 확률론의 비교

확률론과 개연론의 중요한 차이점으로 두 가지를 들 수 있다. 첫 번째로 확률은 가산성 공리를, 개연성은 최대값 공리를 만족시킨다. 즉, $A \cap B = \emptyset$인 경우에 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$가 성립하는 반면에, $\Pi(A \cup B) = \max\{\Pi(A), \Pi(B)\}$가 성립한다. 따라서 확률론에서는 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$이, 개연론에서는 $\Pi(A) + \Pi(\bar{A}) \geq \Pi(A \cup \bar{A}) = 1$이 성립한다. 즉, 확률론에서는 「$x \in A$」에 대한 믿음의 정도가 $P(A)$로 정해지면 $P(\bar{A})$도 동시에 결정되는데, 이는 사람들의 주관적인 판단과 일치하지 않을 수 있다. 반면에, 개연

론에서는 $\Pi(A)$ 와 $\Pi(\bar{A})$ 가 독립적으로 결정되는데, 이는 「$x \in A$」의 가능성에 관계없이 「$x \in \bar{A}$」도 충분히 가능할 수 있음을 표현해준다. 개연론에서의 A 와 $\bar{A}$ 에 대한 개연성의 합이 1 이상이라는 성질은 인간의 판단에 관한 심리와 잘 맞는다고 밝혀졌고[13], 또한 이 성질은 가산성에 제약을 받지 않기 때문에 불확실성에 대한 인식이나 믿음을 양적으로 표현할 때 매우 유용하고 알려졌다[10]. 또한, $\Pi(A) + \Pi(\bar{A}) \geq 1$ 과 $N(A) + N(\bar{A}) \leq 1$ 은 고전 논리에서 성립하는 모순율과 배중률이 개연론에서는 성립하지 않음을 의미한다.

두 번째로 확률론과 개연론은 불완전한 정보가 주어진 상황에서 「모르는」 정도를 표현하는 데에서 차이가 있다[10]. 확률론에서는 어떤 사건이 발생할지 전혀 알 수 없는 경우를 표현하기 위해서 모든 가능한 값에 동일한 확률 $1/n$ 을 부여한다. 그런데 발생가능성이 동일하다는 사실을 알고 있는 사건의 확률도 $1/n$ 로 표현되므로 「전혀 모름」이 올바르게 표현되지 않는다. 실제로 「전혀 모르는」 정보를 표현하는 함수를 개발하기는 논리적으로 불가능하다. 개연론에서는 개연성과 필연성을 이용하여 「완전히 불확실함」을 표현할 수 있다.

$$\Pi(A) = 1, N(A) = 0 \ (\Pi(\bar{A}) = 1)\text{이면 } A\text{에 대하여 완전히 불확실함,}$$
$$\Pi(A) = 1, N(A) = 1 \ (\Pi(\bar{A}) = 0)\text{이면 } A\text{에 대하여 완전히 확실함,}$$
$$\Pi(A) = 0, N(A) = 0 \ (\Pi(\bar{A}) = 1)\text{이면 } \bar{A}\text{에 대하여 완전히 확실함}$$

을 표현한다. 실제로 $\Pi(A) - N(A)$ 는 $x \in A$ 에 대하여 모르는 정도, 즉, 불확실한 정도를 나타낸다.

7 개연론의 활용

개연론을 활용한 간단한 예로, 「철수는 어리다.」라는 문장을 생각해보자. 이 진술로부터 우리는 철수의 나이에 대하여 어떤 판단을 할 수 있을까? 실제 철수의 나이를 알지 못하는 데서 오는 불확실성뿐만 아니라 서술어 「어리다」가 자체적인 의미상의 모호함을 담고 있어, 참과 거짓을 판단하기 어렵다. 그래서 이와 같이 모호함을 담고 있는 주장의 참의 정도 또는 믿음의 수준을 정량화하는 방법으로 개연성을 이용하자.

철수의 나이를 x 라 하고 x 의 가능한 상태들을 포함하는 전체집합으로 $[0, \infty)$ 를 생각하자. 「어리다」를 퍼지 집합으로 보고 이를 정의하는 소속함수 $m : [0, \infty) \to [0, 1]$ 에 대하여 $m(u)$ 를 「철수가 어리다는 사실을 전제로 하여 실제로 철수의 나이 x 가 u 세일 개연성」을 나타내는 개연성분포함수 $\pi(u)$ 로 해석하자. 예를 들어, $\pi(20) = m(20)$ 은 20 세의 나이가 「어리다」라는 개념에 어울리는 정도인 $m(20)$ 를 「철수는 어리다」라는 부정확하고 불완전한 정보만 주어진 상태에서 철수의 실제 나이가 20 세일 수 있는 개연성 $\pi(20)$ 으로 해석하겠다는 의미이다. 여기서 $\pi(u)$ 는 그럴듯한(plausible) 정도, 즉 u 가 어린 철수의 나이라는

가정이 「어리다」에 대한 사람들의 인식과 어울리는 정도를 나타낸 것이다.

보다 구체적으로 퍼지 집합 「어리다」의 소속함수 m이 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$m(u) = \begin{cases} 1, & 0 \le u \le 20 \\ 2 - \frac{u}{20}, & 20 < u < 40 \\ 0, & u \ge 40 \end{cases}$$

개연성분포함수$\pi(u) = m(u)$를 이용하여 개연성과 필연성을 계산해보자. 어린 철수의 나이 x가 실수의 부분 집합 $[0, 40)$에 속할 개연성은 $x \in [0, 40)$에 대한 낙관적인 입장에서의 믿음의 정도를 나타내는 것으로 $\Pi([0, 40)) = \sup_{u \in [0,40)} \pi(u) = 1$이다. 보수적인 입장에서 $x \in [0, 40)$ 에 대한 확실한 믿음의 정도를 나타내는 필연성은 $N([0, 40)) = 1 - \Pi([40, \infty)) = 1 - 0 = 1$이다. $\Pi([0, 40)) = N([0.40)) = 1$이라는 것은 어린 철수의 나이가 $[0, 40)$에 속한다는 사실을 확신할 수 있음을 의미한다.

한편, $\Pi([10, 30)) = 1$이고 $N([10, 30)) = 0$이라는 것은 완전히 불확실함, 즉, 철수의 나이가 $[10, 30)$에 속하는 지에 대하여 전혀 알 수 없음을 의미한다. 또, $\Pi([0, 30)) = 1$과 $N([0, 30)) = 0.5$는 철수의 나이가 $[0, 30)$에 속할 개연성은 충분하지만 확실히 믿을 수 있지는 않음을 나타낸다.

실제생활에서 발생되는 문제의 해결에 개연론을 적용하는 것과 관련한 많은 연구가 진행되어 오고 있다. 특히, 의사결정과 인공지능에 응용이 많이 되고 있는데, 예를 들면, 대상인식 문제나 교통분석 문제[10]를 비롯하여 스케줄링과 관련된 의사결정, 제한 조건이 명확하게 주어지지 않은 선형계획법과 비선형계획법, 데이터분석, 진단 등이 포함된다[9].

8 결론

학문이 진리를 탐구하는 활동이라고 한다면, 학문은 진리를 탐구하기 위한 인간의 능력에 기초한다고 말할 수 있다. 시대가 변하면서 인간의 인식 능력과 인식 도구와 방법은 꾸준히 발전되어 왔다. 이에 따라 학문의 대상이 확장되거나 일반화되고, 이전에 진리로 여겨지던 것이 더 이상 진리가 아님이 판명되기도 하고, 이전에 알지 못했던 것들이 새롭게 인식되기도 하였다. 불확실성이 수학에서 다루어지게 되었다는 사실은 불확실성 자체가 확실성의 수학에서의 한 주제가 되었음을 의미하고, 이 또한 시대의 변화와 인간의 능력의 발달에 따른 산물이라고 말할 수 있다.

하이젠버그의 불확정성 원리나 괴델의 불완전성 원리는 각각 어떤 종류의 불확실성을 표현하고 있다. 우물 안의 개구리가 세상을 인식하는 수준과 인식 방법에 대한 한계를 가진 상태에서 진실이라고 믿었던 내용이 개구리가 우물 밖에 나가 더 넓은 세상을 인식하게 된 후에 갖게 된 인식 도구나 인식 능력으로는 더 이상 진실이 아닐 수 있다. 인간의 인식 능력

이 확장되고 인식의 도구가 발달되면서 참이라고 확실하게 믿었던 현상에 대한 해석이나 내용의 진위 여부도 더 이상 확신할 수 없는 대상이 될 수도 있다. 그런 면에서 이전의 믿음에 금이 가게 한 하이젠버그의 불확정성 원리나 괴델의 불완전성 원리가 등장하는 것은 자연스러운 인간의 인식 능력과 방법의 발전을 보여주는 한 예를 제시하는 것이다.

최근에 컴퓨터 기술이 발달되면서 자연언어가 갖는 불확실성을 수학적으로 다루어야 할 필요성이 인식되었고 이로부터 생기는 실제적인 응용이 많아지면서 불확실성의 이해와 처리가 중요한 과제가 되었다. 이에 따라 불확실한 내용을 인식하고 이해할 수 있는 논리 등의 도구가 요구되었다.

1965년에 자데에 의해서 개발된 퍼지 집합과 1978년에 소개된 개연론은 불확실하고 부정확하거나 질적인 의사결정 문제를 다룰 수 있는 도구로서 출현하여, 기계도 인간처럼 모호한 방식으로 추론할 수 있게 해주었다. 사람들이 자연 언어를 이용할 때처럼 불완전하거나 점진적인 정보를 퍼지 집합의 소속함수의 개념을 이용하여 형식적으로 다룰 수 있게 고안된 수학적 개념이 개연론이다.

퍼지 집합과 개연론은 시대적인 요구에서 출현한 것으로, 의사결정 (decision making) 과 퍼지 제어 (fuzzy control) 등을 포함한 인공지능 (artificial intelligence) 의 기본 논리를 제공하고 실용적인 문제를 해결하는데 많은 응용을 제공하고 있다.

참고 문헌

1. 박창균, 「퍼지이론의 배경과 수학사적 의의」, 한국수학사학회지 7 (1992), no. 1, pp. 61–70.
2. 박창균, 「수학에서의 포스트모던 경향—퍼지논리를 중심으로」, 한국수학사학회지 12 (1992), no. 2, pp. 135–141.
3. 박창균, 「비트겐슈타인의 철학과 퍼지논리—언어 사용을 중심으로」, 한국수학사학회지 13 (2000), no. 2, pp. 145–150.
4. 박창균, 「수학적 대상으로서 '애매모호' 에 대한 고찰」, 한국수학사학회지, 14 (2001), no. 2, pp. 93–100.
5. 이승온, 김진태, 「퍼지 논리의 시조 Zadeh」, 한국수학사학회지 21 (2008), no. 1, pp. 29–44.
6. Dubois, D., Ostasiewicz, W., & Prade, H., Fuzzy sets: History and basic notions, *The handbook of fuzzy set series* (7 volumes), Kluwer Academic Pub., 2000.
7. Dubois, D., Prade, H., *Possibility Theory*, Plenum Press, New York, 1988.
8. Dubois, D., Prade, H., Fuzzy sets and probability: Misunderstandings, bridges and gaps, *Proceedings of IEEE conference*, 1993.
9. Dubois, D., Prade, H., Possibility theory and its applications: Where do we stand? `http://www.irit.fr/~Didier.Dubois/Papers1208/possibility-EUSFLAT-Mag.pdf`, 2011.
10. Kikuchi S., Chakroborty, P., "Place of possibility theory in transportation analysis", *Transfortation Research Part B* 40 (2006), pp. 595–615.
11. Kosko, B., "Fuzziness vs. Probability", *Int. J. general systems* 17 (1990), pp. 211–240.

12. Nguyen, H. & Walker, E., *A first course in Fuzzy logic*, Chapman & Hall, 2000.
13. Raufaste, E., Neves, R. & Marine, C., “Testing the descriptive validity of possibility theory in human judgements of uncertainty”, *Artificial Intelligence* 148 (2003), pp. 197–218.
14. Wierman, M., *An introduction to the mathematics of uncertainty*, Center for the mathematics of uncertainty, Creighton University. 2010.
15. Zadeh, L. A., “Fuzzy sets”, *Information Control* 8 (1965), pp. 338–353.
16. Zadeh, L. A., “Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility”, *Fuzzy sets and systems*, 1, pp. 3–28, 1978.
17. Zadeh, L. A., “Possibility theory and soft data analysis”, from Selected papers by Lofti A. Zadeh, 1981.
18. Zalila, Z., Cuquemelle, J., Penet, C., Chikh, A., Lorentz, B., Deschamps, D., & Assemat, C., *Fuzzy logic and fuzzy inference systems*, v1.2-02/2007, intellitech, 2007.
19. `http://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy_logic`
20. `http://en.wikipedia.org/wiki/Uncertainty`
21. `http://en.wikipedia.org/wiki/Vagueness`

고영미 수원대학교 수학과
Department of Mathematics, The University of Suwon
E-mail: ymkoh@suwon.ac.kr

이상욱 수원대학교 수학과
Department of Mathematics, The University of Suwon
E-mail: swree@suwon.ac.kr