한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제25권 제1호 (2012년 2월), 29–43

집합론에 대한 공준

A Postulate for Set Theory

정세화 Se Hwa Chung

본 논문에서는 공리론적 집합론의 역사를 살펴보고 순서수, 노이만 영역, *ZR*공리계를 동시에 전개할 수 있는 공준을 소개한다.

In this paper, we survey the history of search for axiomatic set theory and show that $\exists U(0 \in U \wedge \forall x(x \in U \leftrightarrow \exists z(z \in U \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \subseteq z))) \rightarrow ZR$.

Keywords: 영역(Universe), Zeromelo 공리계, 노이만 영역(Neumann universe), 순서수(Ordinal number).

0 서론

물이 솜에 스며들듯이 19세기 말에 Cantor(1845–1918)에 의해 소개된 집합 개념은 현대수학의 구조 속에 스며들어 이제는 수학으로부터 분리해 내거나 제거해 낼 수 없는 존재가 되어 있다. 이런 관점에서 집합 개념은 인간의 정신에 의해 발명되어지는 것이든 아니면 우리의 의식과는 관계없이 플라톤적인 개념의 영역에 존재하고 있는 것으로 발견의 대상이든 분명한 것은 직관과 사고에 의해 올바르게 발견 또는 발명되어야할 수학적 대상임에는 틀림이 없다.

본고에서는 공리론적 집합론에 대한 역사적 사실들을 살펴보고 이를 통해 집합론에 대한 새로운 공준을 소개하고, *ZR*공리계에서 증명 가능한 명제는 그 공준에 의해 증명 가능함을 보인다. 여기서 *ZR*공리계는 Zermelo 공리계에 정칙공리(axiom of regularity)를 추가하고 선출공리(axiom of separation)와 선택공리(axiom of choice)는 제외시킨 공리계를 뜻한다. 결국 새로운 공준과 선택공리로 형성된 공리계는 Zermelo-Franekel 공리계를 함의함을 보인다.

1절에서 Zermelo-Franekel 공리계에 대하여 살펴본다. 특히 선출공리의 채용된 목적

보다 좋은 논문을 위해 조언을 해주신 심사위원님들께 고마운 마음을 전합니다.
MSC: 03E30
제출일: 12월 20일 수정일: 1월 27일 게재확정일: 2월 3일

과 변화과정 그리고 정칙공리와 치환공리가 채용된 목적과 과정을 역사적으로 조명하여 본다.

2절에서 집합의 특성을 결정짓는 공준을 소개하고 그에 대한 성질을 조사한다. 그 공준은 정칙공리를 함의함을 보인다. 그리고 선출공리와 치환공리의 필요성에 대하여 논한다. 결국 그 공준과 선택공리로 형성된 공리계는 Zermelo-Franekel 공리계를 함의함을 보인다.

1 19세기에 형성된 수학의 틀 *ZFC*.

Cantor는 1873년부터 1897년 사이에 발표된 일련의 논문에서 집합론의 기초가 되는 중요한 개념들을 창안하였다. Cantor의 이러한 업적은 수학적 진리와 수학의 기초를 이해하는 일에 혁명적 진전을 이루게 하는 계기가 되었으며 사상사의 획기적인 사건으로 평가되기도 하였다[3]. Cantor는 집합이란 “직관 또는 사고에 있어서의 명확하고 동시에 서로 잘 구별된 대상들을 하나의 전체로 통합한 것”이라고 정의하였다[10]. 즉, Cantor의 정의에 의하면 p가 x에 대한 어떤 성질이면 $\{x : p(x)\}$은 집합이다. 그러나 이 원리로부터 야기된 역설이 Cantor와 Burali-Forti(1861–-1931)에 의해 처음 발견되고 이어서 Russell(1872–-1970)에 의해 결정적인 역설이 발견되면서 집합론의 근간이 흔들리는 위기를 맞게 되었다. Russell의 역설은 1904년에 발행된 Frege(1848–-1925)가 저술한 책의 부록에서 소개되었다. 이 위기를 극복하고자 논리주의, 직관주의, 형식주의가 등장하였고[1], 논리주의 대표적 인물인 Russell은 그 역설을 회피하기 위해 “형의 이론”을 제창하였고[2], 동년에 형식주의의 대표적 인물인 Hilbert(1862–1943)의 영향을 받아서 Cantor의 집합론을 연구하기 시작한 Zermelo(1871–1953)는 집합론을 공리화한 논문 “집합의 기초에 대한 연구 I”를 발표하였다. 그는 Russell보다 2년 전에 Russell의 역설을 발견하여 Hilbert에게 알려주었으며 3년 후에는 이 사실을 수학자이자 철학자인 Husserl(1859-1938)과 함께 논의를 하였으나 발표는 하지 않았다[4]. 그리고 Zermelo는 Russell의 역설이 발표되던 해인 1904년에 선택공리를 발표하기도 하였다. Russell의 형의 이론은 모든 집합에 수준이라는 자연수를 부여한다. 이를 이용하면 $x \in x$와 같은 명제는 의미가 없게 되어 결국 형의 이론에서는 더 이상 Russell의 역설은 발견될 수 없다. 그러나 의미론적 역설을 피하기 위해 같은 수준에 있는 집합들이 순서에 의해 다시 구분되어져야 하는 복잡함 등의 이유로 수학자들 사이에서 널리 인정을 받지는 못하였다. 하지만 현재 프로그래밍 언어론(Programming language theory)에서 다시 주목을 받고 있다. 반면에 Zermelo의 공리론적 집합론은 Cantor 집합론의 결과를 보존하고 현대수학의 요구에 가장 적합하다는 점에서 수학자들의 관심을 받게 되었다[9]. 그러나 Zermelo의 집합론은 Fraenkel(1891–-1965)와 Skolem(1887–-1963)

이 선출공리를 수정하고 1922년에 치환공리(axiom of replacement)를 추가하였으며, 1925년 Neumann(1903–1957)이 정칙공리를 추가로 채용하여 현재 알려진 Zermelo-Franekel의 공리론적 집합론(*ZFC*)이 확립되었다[6]. Zermelo 공리계의 수정된 형태는 많이 알려져 있으나 대표적인 것은 Bernays-Gödel 공리론적 집합론이다[6, 7, 8, 11]. 이제 본 논문의 결과를 보다 잘 이해하기 위해 좀 더 구체적으로 선출공리의 변화과정 그리고 정칙공리와 치환공리가 채용된 목적과 과정을 역사적으로 조명하여 본다.

1.1 선출공리에 관하여

Zermelo는 러셀 집합 $R = \{x : x \notin x\}$과 같이 큰 모임을 집합에서 배제하기 위해 1908년에 발표한 집합론 체계에서 다음 명제를 공리의 하나로 채용하였다.

> 집합 X의 모든 원소 x에 대해 p가 의미 있는 성질이면 $\{x \in X : p(x)\}$는 집합이다.

Zermelo는 이 공리를 "선출의 공리"라 부른다. 그 이유는 이 공리가 어떤 집합 안에 있는 원소를 선출하는 역할을 한다는 데 있다. 그러나 이 공리로 Zermelo는 R과 같은 큰 대상을 배제함으로써 Russell의 역설을 피할 수 있다고 생각하였다. 한편 Berry(1906)는 이 선출공리를 이용하여 다음과 같이 크지 않은 집합을 구성하여 러셀이 발견한 논리적 역설과는 또 다른 형태의 의미론적 역설을 발견하였다.

$$B = \{x \in N : p(x)\}.$$

여기서 N은 자연수 전체의 집합이고, $p(x)$는 "x는 10개 미만의 단어로 설명할 수 있다."라는 문장이다. 실제로 10개 미만의 단어로 설명할 수 없는 최소자연수 x가 존재한다. 이 때 B의 정의에 의해 $x \in B$이고 x는 10개 미만의 단어로 설명할 수 없기 때문에 의미상 $x \in B$이다. 그러므로 집합 B는 선출공리에 의해 구성되었음에도 불구하고 집합이라 할 수 없다. 이 역설로부터 집합의 크기뿐만 아니라 문장 $p(x)$가 가지고 있는 의미에 의해 역설이 발견될 수 있음을 알게 되었다. Skolem과 Franekel이 1922년에 그 문제에 대한 해를 다음과 같이 제시하였다.

> 제1계 술어 논리 체계에서의 명제만이 의미가 있다.

즉, 명제는 $\in$과 논리적 연결사 및 한정기호만을 써서 나타낼 수 있을 때 그리고 그 때에만 의미가 있는 것이다. Skolem과 Franekel은 이와 같이 선출공리의 성질에 대한 개념을 수정함으로써 Berry의 역설을 극복하였다. 이 시기에 많은 수학자들이 Russell의 역설을 피할 목적으로 선출공리에 집착한 이유는 개개의 집합들은 그 집합들 각각에 부

여된 어떤 고유한 성질에 의해 결정 되는 것으로 생각이 고착되어 있었기 때문이라고 생각된다. 2장에서 집합은 개별적으로 결정되는 것이 아니라 집합적으로 그리고 단계별로 결정됨을 보이고 그에 따른 선출공리의 역할에 대해 간단히 논하기로 한다.

1.2 치환공리에 관하여

Mirimanoff(1861–1945)는 어떤 대상이 집합일 필요충분조건은 무엇인가? 하는 물음에 대한 답을 구하기 위해 먼저 보통집합에 관한 계(rank)라는 개념을 다음과 같이 정의하였다.

1. 공집합의 계는 0이다.
2. 보통 집합(ordinary set)의 계는 그 집합의 모든 원소의 계들보다 더 큰 순서수들 중에서 가장 작은 순서수이다.

그는 이 개념을 이용하여 집합을 다음과 같이 정의하였다.

> 보통 집합들의 모임 B가 집합이기 위한 필요충분조건은 B에 속한 모든 집합들의 계들 보다 더 큰 순서수가 존재하는 것이다.

그렇지만 그 큰 순서수의 크기에 대한 특별한 언급은 없었다. 그리고 이 정의로부터 1917년 “보통집합들의 모임 B가 어떤 집합과 등치(equipollent)이면 역시 보통집합이다.” 라고 치환공리를 형식화 하였다. 이유는 분명하지는 않지만 그의 훌륭한 결과들이 Zermelo 공리계의 변화에 직접적으로 반영이 안 된 것으로 보이고 그 또한 Zermelo의 공리계를 언급하지 않고 이런 결과들을 발표하였다. 이와는 다르게 Fraenkel 과 Skolem은 각자 독립적으로 같은 해인 1922년에 Zermelo공리계에서 다음 유들이 집합임을 증명할 수 없음을 인지하였다[9].

$$\Omega = \{N, P(N), P(P(N)), \cdots\}, \quad \omega 2, \quad [0] = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \cdots\}$$

이어서 Ω, $\omega 2$, $[0]$를 집합으로 인정할 목적으로 Skolem과 Fraenkel은 다음과 같이 치환공리를 채용하였다[9].

> Skolem 치환공리: $A(x,y)$가 의미 있는 성질(definit property)이고 임의의 x에 대해 $A(x,y)$가 성립하는 y가 많아야 하나 존재한다면 각 집합 M에 대해 $y \in M_A$인 집합 M_A가 존재할 필요충분조건은 $A(x,y)$가 참인 $x \in M$가 존재하는 것이다.
>
> Fraenkel 치환공리: 만약 M이 집합이고 M'이 M의 각 원소를 영역의 대상으로 치환하여 얻어졌다면 M'도 집합이다.

분명 Skolem의 치환공리와 Fraenkel의 치환공리는 차이가 있음을 볼 수 있다. 그리고 이 공리들은 분명 Mirimanoff의 것과 매우 유사함을 알 수 있다. 치환공리는 Zermelo의 공리계를 제외한 모든 공리계에서 공리로 삼고는 있지만 무엇보다 공리로 삼은 목적이 특정 순서수들에 국한 되어 있다는 점에서 이 공리의 필요성에 대한 논의의 여지는 있다. 또한 치환공리에 의해 집합의 지위를 부여 받은 집합의 합이 과연 집합일 것인가 하는 것도 의문스럽기도 하다. 즉 집합 자체의 크기는 크지 않지만 그 집합의 합은 Russell 집합만큼 클 수도 있다는 것이다. 결국 치환공리는 Ω, $\omega 2$, $[0]$, ω^{ω}가 집합이 되도록 하기위한 목적 공리라 할 수 있다. 그리고 이 공리는 형의 이론과 Grothendieck(1928–)이 소개한 topos 이론에서는 사용되지 않고 있다는 점도 주목할 필요가 있다. Grothendieck은 일종의 *ZF*공리계의 모델인 Grothendieck 영역을 소개하기도 하였다. 2장에서 치환공리의 필요성에 대해 간단히 논하기로 한다.

1.3 정칙공리에 관하여

다음 명제를 정칙공리라 한다.

모든 집합은 어떤 노이만 부분 영역의 원소이다.

이 공리는 Neumann이 처음으로 채용하였지만 그에 대한 착상은 1.2에서 언급한 Mirimanoff의 정의로부터 얻은 것으로 알려져 있다. 한편 정칙공리는 집합에 대한 정의로 생각할 수 있다. 즉 "어떤 대상이 집합인 것은 그 것이 어떤 노이만 부분 영역의 원소인 것이다."라고 생각할 수 있다. 정칙공리는 무한공리와 치환공리를 가정하면 다음 명제와 동치이다[11].

모든 공집합이 아닌 집합은 $\in$-극소원을 가진다.

그리고 정칙공리는 선택공리와 무한공리를 가정하면 다음 명제와 동치이기도 하다[11].

무한 $\in$-수열 $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots$ 는 존재하지 않는다.

Mirimanoff는 이 수열에 대해 처음으로 언급하였지만 그 존재를 부정하지는 않았다[9]. 정칙공리로부터 다음의 중요한 정리를 얻는다[11].

x가 집합이면 $x \notin x$이다.

이 정리를 Shoenfield(1927–2000)는 모든 대상 A와 B에 대하여 '$A \in B$'와 '$B \in A$'가 동시에 성립할 수 없다고 공준을 함으로서 얻었다[9]. 하지만 이 공리에 의해 Russell의 역설이 해소되는 것은 아니다. 정칙 공리는 Neumann에 의해 정립되어 1925년에 발

표되었지만 치환공리와 마찬가지로 Mirimanoff의 업적에 이미 숨겨져 있었음은 주목할 만한 사실이다. 또한 *ZFC*가 무모순이면 정칙공리는 *ZFC*의 다른 공리들로부터 증명될 수 없다는 것은 잘 알려진 사실이고, 게다가 Neumann은 정칙공리가 *ZFC*의 다른 공리와 양립함을 증명하였다[6].

1.4 무모순성에 관하여

사실 Zermelo는 공리계 구성에 관한 연구를 1904년에 시작하여 1908년에 그 결과를 발표하면서 공리계의 무모순성에 대해 밝힐 수 없음을 언급하였다. 그러나 지금까지도 공리론적 집합론의 무모순성에 관해 증명된 바가 없다. 하지만 Gödel과 Neumann은 각각 constructible 영역과 Neumann 영역을 소개하여 *ZFC*가 상대적 무모순임을 보였다.

2 영역

본 절에서는 영역의 개념을 소개하고 그 영역의 존재에 대한 공준은 Zermelo 공리계의 공리 중 치환공리와 선택공리를 제외한 모든 공리를 함의함을 보인다. 그리고 선출공리와 치환공리는 공리로서 지위를 계속 유지할 필요가 없음도 보인다.

용어 ‘유’ 와 술어 ‘$\cdots$ 는 $\cdots$ 의 원소이다’ 는 정의 없이 사용한다. 그리고 “유 x는 유 c의 원소이다.”라는 관계를 기호 “$\in$”을 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$x \in c.$$

수학적 추론의 유효성은 공준을 서술하는 데 사용된 낱말이 지닌 의미와 전혀 관계가 없다. 단지 결론으로 추정된 것이 최초의 가설에서 필연으로 도출되는 논리적 결론인가를 따지는 것이다[1].

정의 2.1: x와 y는 유이다.

1. $x = y$는 x와 y의 원소가 같을 때 그리고 그때만이다.
2. $y \subseteq x$는 y의 모든 원소가 x의 원소일 때 그리고 그때만이다. 이때 y를 x의 부분유라 한다.
3. $y \subseteq x$는 $y \subseteq x$이고 $x \neq y$일 때 그리고 그때만이다. 이때 y를 x의 진부분유라 한다.

정의 2.1-1로부터 다음을 얻는다.

정리 2.1: 유 x에 대하여 $x = x$이다.

2.1 영역의 정의와 기본적 성질

본 절에서는 영역의 개념을 소개하고 그에 대한 기본적인 성질을 조사한다.

정의 2.2: 다음을 만족하는 유 U를 영역이라 한다.

존재공리 : 모든 y에 대해서, $y \notin 0$인 유 0이 U의 원소이다.

상계공리 : x가 유 일 때, $x \in U$인 것은 $y \in x$이면 $y \subseteq z$인 $z \in U$가 존재할 때 그리고 그때뿐이다.

존재공리에서의 0을 공집합이라 한다. 그리고 공집합은 2.1에 의해 유일하다. 또한 모든 유 x에 대해 $0 \subseteq x$임은 공진(vacuously true)이다.

정리 2.2: $x \in U$이면 $\{x\} \in U$이다.

증명. 상계공리에 의해 분명하다. □

주: 영역의 정의와 위 정리로부터 다음은 분명하다.

1. $x \in U$이면 $\{x\}$, $\{\{x\}\}$, $\cdots$, 는 U의 원소이다.
2. 0, $\{0\}$, $\{0, \{0\}\}$, $\{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \{0, \{0\}\}\}$, $\cdots$, 는 U의 원소이다.

영역이 존재함을 증명할 수 없는 점을 고려하여 다음과 같은 공준을 채용한다.

공준: 영역이 존재한다.

정리 2.3: $x \in U$이고 $y \subseteq x$이면 $y \in U$이다.

증명. $x \in U$이므로 상계공리에 의해 모든 $y \in x$에 대해 $y \subseteq z$인 $z \in U$가 존재한다. 따라서 $s \in y$이면 $s \in x$이므로 모든 $s \in y$에 대해 $s \subseteq z$이다. 그러므로 상계공리에 의해 $y \in U$이다. □

정의 2.3: 두 유 x, y의 공통부분은 x와 y에 동시에 속하는 원소들 전체를 뜻한다. 기호로 $x \cap y$로 나타낸다.

정리 2.4: $x \in U$이고 y는 임의의 유이면 $x \cap y \in U$이다.

증명. $x \in U$이고 $x \cap y \subseteq x$이므로 2.3에 의해 $x \cap y \in U$이다. □

정의 2.4: 유 x의 공통부분은 x의 모든 원소에 동시에 속하는 원소들 전체를 뜻한다. 기호로 $\cap x$로 나타낸다.

정리 2.5: $x \subseteq U$이면 $\cap x \in U$이다.

증명. 2.3에 의하여 분명하다. □

정의 2.5: 유 x의 합은 x에 속하는 적어도 하나의 원소에 속하는 원소들 전체를 뜻한다. 기호로는 $\cup x$로 나타낸다.

정리 2.6: $x \in U$이면 $\cup x \in U$이다.

증명. $x \in U$이므로 모든 $y \in x$에 대해 $y \subseteq z$인 $z \in U$가 존재한다. 그러므로 $\cup x \subseteq z$이다. 따라서 $z \in U$이므로 2.3에 의해 $\cup x \in U$이다. □

정의 2.6: 유 x의 멱이란 x의 모든 부분유의 유를 뜻한다. x의 멱을 $p(x)$로 나타낸다.

정리 2.7: $x \in U$이면 $P(x) \in U$이다.

증명. $y \in P(x)$이면 $y \subseteq x$이다. 그런데 $x \in U$이므로 상계공리에 의해 $P(x) \in U$이다. □

주: 위 따름정리에 의해 x가 유이면 다음이 성립한다.

1. $x \in U$이면 $x \in z$인 $z \in U$가 존재한다.
2. $x \in U$이면 $x \subseteq z$인 $z \in U$가 존재한다.

정의 2.7: 다음 두 조건을 만족하는 유 i는 귀납적이라 한다.

1. $0 \in i$이다.
2. $x \in i$이면 $x \cup \{x\} \in i$이다.

정의 2.8: 유 x가 다음을 만족하면 전이유라 한다.

$$s \in x\text{이면} \quad s \subset x\text{이다}$$

예를 들면, 0, $\{0\}$, $\{0, \{0\}\}$, $\{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}$는 모두 전이유이다.

다음 정리에서 U에 속하는 전이유들의 유는 귀납적 유임을 보인다.

정리 2.8: $A = \{x \in U : s \in x \to s \subset x\}$는 귀납적이다.

증명. 존재공리에 의해 $0 \in U$이고 $0 \in A$다. 이제 $x \in A$라 하고 $s \in x \cup \{x\}$라 하자. 이 때 $s \in x$이거나 $s = x$이다. $s \in x$이면 $x \in A$이므로 $s \subset x \cup \{x\}$이다. $s = x$이면 $x \subseteq x \cup \{x\}$이다. 만약 $x = x \cup \{x\}$이면 $x \in x$이고 $x \in A$이므로 $x \subset x$이다. 이것은 2.1에 의해 불가능하다. 그러므로 $s \subset x \cup \{x\}$이다. 이제 $x \cup \{x\} \in U$임을 보이자. $x \in U$이므로 2.7에 의해 $P(x) \in U$이다. 그리고 $x \in A$이므로 $y \in x$이면 $y \in P(x)$이다. 즉, $x \subset P(x)$이다. 또한 $x \in P(x)$이므로 $\{x\} \subseteq P(x)$이다. $P(x) \in U$이므로 상계공리에 의해 $\{x, \{x\}\} \in U$이고 2.6에 의해 $x \cup \{x\} \in U$이다. 따라서 $x \cup \{x\} \in A$이다. 그러므로 A는 귀납적이다. □

정리 2.9: $A \notin U$ 이다.

증명. $A \in U$ 이면 $B = \{x \in A : x \subset A\}$ 는 2.3에 의해 $B \in U$ 이다. 이제 $B \in B$ 임을 보이자. 먼저 B 가 전이유임을 보이자. $s \in t \in B$ 이면 $t \in A$ 이고 $t \subset A$ 이므로 $s \subset t$ 이고 $s \subset A$ 이다. 또한 $s \in A$ 이다. 그러므로 $s \in B$ 이다. 따라서 $t \subseteq B$ 이다. 만약 $t = B$ 이면 $B \subset B$ 이다. 이것은 2.1에 의해 불가능하다. 결국 $t \subset B$ 이다. $B \in U$ 이므로 A 의 정의에 의해 $B \in A$ 이다. 또한 $P(P(\{0\})) \in A$ 이지만 $P(P(\{0\})) \notin B$ 이므로 $B \subset A$ 이다. 결국 $B \in B$ 이다. 따라서 $B \subset B$ 이다. 이것은 2.1에 의해 불가능하다. 따라서 $A \notin U$ 이다. □

따름정리 2.10: $U \notin U$ 이다.

증명. 위 정리와 2.3에 의해 분명하다. □

따름정리 2.11: $x \in U$ 이면 $x \subset U$ 이다.

증명. $x \in U$ 라 하자. 상계공리에 의해 모든 $y \in x$ 에 대해 $y \subseteq z$ 인 $z \in U$ 가 존재한다. 따라서 $z \in U$ 이므로 2.3에 의해 $y \in U$ 이다. 즉 $x \subseteq U$ 이다. 그러나 위 따름정리에 의해 $x \subset U$ 이다. □

정의 2.9: 최소의 귀납적 유를 ω 로 나타낸다.

주: $\omega \subseteq A \subseteq U$ 이고 $P(P(\{0\})) \in U$ 이지만 $P(P(\{0\})) \notin \omega$ 이므로 $\omega \subset U$ 이다. 그리고 ω 의 최소성에 의해 $\omega = \{x \in \omega : x \subset \omega\}$ 이므로 2.1에 의해 $\omega \notin \omega$ 이다. 그러나 "$\omega \in U$ 이다."는 증명할 수 없다.

정리 2.12 (수학적 귀납법): $\beta \subseteq \omega$ 이고 β 가 귀납적이면 $\beta = \omega$ 이다.

주: ω 는 정렬집합이다. 자세한 내용은 문헌[6]에 있다.

2.2 0-영역

정리 2.13: 모든 영역의 공통부분 Z_0 는 영역이다.

증명. 분명히 $0 \in Z_0$ 이다. $x \in Z_0$ 라 하자. x 는 모든 영역 U 의 원소이다. 그러므로 각 $y \in x$ 에 대하여 $y \subseteq z_U$ 인 $z_U \in U$ 가 존재한다. 이제 모든 z_U 의 공통부분을 z 라 하면 2.5에 의해 $z \in Z_0$ 이고 $y \in x$ 이면 $y \subseteq z$ 이다. 만약 $y \in x$ 이면 $y \subseteq z$ 인 $z \in Z_0$ 가 존재한다고 하자. 이때 z 는 모든 영역 U 의 원소이다. 그러므로 x 는 모든 영역 U 의 원소이다. 따라서 $x \in Z_0$ 이다. □

따라서 다음 정의가 유도된다.

정의 2.10: Z_0을 0에 의해 결정된 0-영역이라 하고, Z_0의 원소들을 0-집합이라 한다.

이제 ω를 사용해 귀납적으로 노이만 영역을 소개하고 영역과의 관계를 조사한다. 모든 $n \in \omega$에 대해, 집합 V_n을 다음과 같이 귀납적으로 정의한다[5].

$V_0 = 0,$

$V_{n+1} = P(V_n)$, 단 $n+1 = n \cup \{n\}$이다.

$V_\omega = \cup_{n\in\omega} V_n.$

다음 정의는 문헌 [6]과 [11]에 있다.

정의 2.11: V_n를 노이만 부분 영역(von Neumann partial universe)이라 한다.

다음은 문헌 [11]에 증명되어 있다.

정리 2.14: 1. 모든 V_n은 전이집합이다.

2. $x \subseteq y \in V_\omega$ 이면 $x \in V_\omega$이다.
3. $x \in y \in V_\omega$이면 $x \in V_\omega$이다.
4. 모든 $y \in x$, $y \in V_\omega$이면 $x \in V_\omega$이다.

따름정리 2.15: 모든 $n \in \omega$에 대하여 $V_n \subset V_{n+1}$이다.

수학적 귀납법을 이용하여 다음 정리가 성립함을 보인다.

따름정리 2.16: $\forall n \in \omega$, $V_n \in A$이다.

증명. 위 2.14-1과 2.7에 의해 분명하다. □

정의 2.12: $x \in Z_0$일 때, $x \subseteq V_0$이고 $x \notin V_n$인 $n \in \omega$을 x의 계수(rank)라 하고 $r(x)$로 나타낸다.

다음 정리의 증명은 [7]에 있다.

정리 2.17: 만약 $y \in x$이면 $r(y) < r(x)$이다.

정리 2.18: V_ω는 영역이다.

증명. 분명히 $0 \in V_\omega$이다. 이제 V_ω가 상계공리를 만족함을 보인다. 먼저 $x \neq 0$이고 $x \in V_\omega$라 하자. 이 때 $x \subseteq V_{r(x)}$이므로 $y \in x$이면 $y \in V_{r(x)}$이고 $y \subseteq V_{r(x)}$이다. 역으로 모든 $y \in x$에 대해 $y \subseteq z$인 $z \in V_\omega$가 존재한다고 하자. 이 때 2.14-2에 의해 모든 $y \in x$에 대해 $y \in V_\omega$이다. 따라서 2.14-4에 의해 $x \in V_\omega$이다. □

정리 2.19: $Z_0 = V_\omega$이다.

증명. $A \subseteq Z_0$ 이므로 모든 $n \in \omega$ 에 대해 $V_n \in Z_0$ 이다. $x \in V_\omega$ 라 하자. $x \in V_n$ 인 $n \in \omega$ 가 존재한다. 따라서 $x \subset V_n$ 이다. $V_n \in Z_0$ 이므로 2.7에 의해 $x \in Z_0$ 이다. 즉 $V_\omega \subseteq Z_0$ 이다. 위 정리와 Z_0 의 최소성에 의해 $Z_0 = V_\omega$ 이다. □

정리 2.20: $x \in Z_0$ 이면 $y \cap x = 0$ 인 $y \in x$ 가 있다.

증명. $\{r(y) : y \in x\}$ 는 최소원 $r(y)$ 를 가진다. 따라서 $y \cap x = 0$ 이다. □

따름정리 2.21: $x, y \in Z_0$ 이면 $\{x, y\} \in Z_0$ 이다.

증명. $x, y \in Z_0$ 이므로 $x \in V_s$ 이고 $y \in V_y$ 인 순서수 s 와 t 가 있다. $s \leq t$ 라 하면 $V_s \subseteq V_t$ 이므로 $x, y \in V_t$ 이다. 따라서 상계공리에 의해 $\{x, y\} \in Z_0$ 이다. □

따름정리 2.22: Z_0 는 귀납적이다.

증명. 존재공리에 의해 $0 \in Z_0$ 이다. 이제 $x \cup \{x\} \in Z_0$ 임을 보이자. $x \in Z_0$ 이므로 상계공리에 의해 $\{x\} \in Z_0$ 이다. 2.21와 2.6에 의해 $x \cup \{x\} \in Z_0$ 이다. □

따름정리 2.23: $x \in Z_0$ 이면 $Z_0 - \{x\}$ 는 0-집합이 아니다.

증명. 만약 $Z_0 - \{x\}$ 가 집합이면 상계공리에 의해 모든 $y \in Z_0 - \{x\}$ 에 대해 $y \subseteq z$ 인 $z \in Z_0$ 가 있다. 이 때 분명히 $z \neq 0$ 이고 $z = x$ 이거나 $z \neq x$ 이다. $z = x$ 일 때 $s \in Z_0$ 이면 $s \subseteq z$ 이다. 그러므로 2.10에 의해 '$z = x$' 는 불가능하다. $z \neq x$ 일 때에는 2.21에 의하여 $\{x, z\} \in Z_0$ 이므로 상계공리에 의해 $x \subseteq u$ 이고 $z \subseteq u$ 인 $u \in Z_0$ 가 존재한다. 즉 $s \in Z_0$ 이면 $s \subseteq u$ 이다. 그러므로 2.10에 의해 '$x \neq z$' 는 불가능하다. □

따름정리 2.24: $x \in Z_0$ 이면 $Z_0 - x$ 는 0-집합이 아니다.

증명. $x \in Z_0$ 이므로 $s \in x$ 이면 $s \subseteq t$ 인 $t \in Z_0$ 가 존재한다. 만약 $Z_0 - x$ 가 집합이면 상계공리에 의해 모든 $y \in Z_0 - x$ 에 대해 $y \subseteq z$ 인 $z \in Z_0$ 가 있다. 이 때 $x \subset Z_0$ 이므로 분명히 $z \neq 0$ 이고 $z \in x$ 이거나 $z \notin x$ 이다. $z \in x$ 이면 $z \subseteq t$ 이다. 따라서 $s \in Z_0$ 이면 $s \subseteq t$ 이므로 위 2.16에 의해 '$z \in x$' 는 불가능하다. $z \notin x$ 일 때에는 2.21에 의하여 $\{t, z\} \in Z_0$ 이므로 상계공리에 $t \subseteq u$ 의해 이고 $z \subseteq u$ 인 $u \in Z_0$ 가 존재한다. 즉 $s \in Z_0$ 이면 $s \subseteq u$ 이다. 그러므로 위 2.10에 의해 '$z \notin x$' 도 불가능하다. □

주: 위 정리와 전이정리에 의해 $Z_0 \subset p(Z_0)$ 이다.

선출공리에 관하여: 선출공리는 존재하는 집합에서 어떻게 새로운 집합을 형성할 수 있는가? 하는 물음에 대한 답으로 채용되었다. 그러나 0-집합이란 영역 Z_0 의 원소일 때 그때뿐이다. 즉 0-집합은 결정되어 있는 존재이지 새롭게 형성되어지는 존재가 아니라는

것이다. 이러한 관점에서 보면 선출공리는 더 이상 공리로 채용할 필요가 없다. “성질 p가 의미 있다.”를 다음과 같이 정의할 수 있다.

정의 2.13: 성질 p는 $\{x : p(x)\} \in Z_0$일 때 그리고 그때에만 의미가 있다.

주: 1. 성질 p가 의미 있다면 $y = \{x : p(x)\} \subseteq z$인 $z \in Z_0$가 있고 $y \notin y$이다.
2. 영역 Z_0는 선출공리를 제외한 *ZFC*의 모든 공리를 함의한다.

2.3 극한 순서수에 의해 결정된 영역

이제 0-영역을 다음과 같은 방법으로 확장하여 무한집합의 존재를 보장하는 영역을 소개한다.

정의 2.14: Z_0을 원소로 가지는 최소 영역을 ω에 의해 결정된 ω-영역이라 하고 Z_ω로 나타낸다. 그리고 Z_ω의 원소들을 ω-집합이라 한다.

주: 모든 0-집합은 ω-집합이다.

정리 2.25 (무한공리): $\omega \in Z_\omega$ 이다.

증명. $\omega \subset Z_0$이므로 $\omega \in P(Z_0) \subseteq Z_\omega$이다. □

이제 모든 $n \in \omega$에 대해서 X_n을 다음과 같이 귀납적으로 정의하자.

$X_0 = Z_0$

$X_{n+1} = P(X_n)$

주: 모든 $n \in \omega$에 대해 $X_n = V_{\omega+n}$이다.

정리 2.26: 모든 $n \in \omega$에 대해, $X_n \in Z_\omega$이다.

증명. 2.7과 수학적 귀납법에 의해 분명하다. □

정리 2.27: 모든 $n \in \omega$에 대해, $x \in X_n$이면 $x \subseteq X_n$이다.

증명. 2.11에 의해 X_0는 전이집합이다. 이제 X_n은 전이 ω-집합이라 하고 $x \in X_{n+1}$이라 하자. 이 때 $x \subseteq X_n$이므로 모든 $t \in x$에 대해 $t \subset X_n$이다. 그러므로 $t \in X_{n+1}$이고 $x \subseteq X_{n+1}$이다. □

정리 2.28: $Z_\omega = V_{\omega 2}$이다. 단 $V_{\omega 2} = \cup\{X_n : n \in \omega\}$.

증명. $x \in V_{\omega 2}$라 하자. $x \in X_n$인 $n \in \omega$가 존재한다. 따라서 2.27에 의해 $x \subseteq X_n$이다.

2.26에 의해 $X_n \in Z_\omega$ 이므로 2.3에 의해 $x \in Z_\omega$ 이다. 즉 $V_{\omega 2} \subseteq Z_\omega$ 이다. 분명히 $V_{\omega 2}$ 는 상계공리를 만족한다. 그러므로 Z_ω 의 최소성에 의해 $Z_\omega = V_{\omega 2}$ 이다. □

이제 모든 $n \in \omega$ 에 대해서 γ_n 을 다음과 같이 귀납적으로 정의하자.

1. $\gamma = \omega$.
2. $\gamma_{n+1} = \gamma_n \cup \{\gamma_n\}$.

주: 모든 $n \in \omega$ 에 대해 $\gamma_n \in \omega + n$ 이다.

정리 2.29: 모든 $n \in \omega$ 에 대하여, $\gamma_n \in X_{n+1}$ 이다.

증명. 분명히 $\gamma_0 \in X_1$ 이다. $\gamma_n \in X_{n+1}$ 이라 하자. $\{\gamma_n\} \subseteq X_{n+1}$ 이다. 그리고 X_{n+1} 은 전이집합이므로 $\gamma_n \subseteq X_{n+1}$ 이다. 따라서 $\gamma_n \cup \{\gamma_n\} \subseteq X_{n+1}$ 이다. 그러므로 $\gamma_{n+1} \in X_{n+1+1}$ 이다. □

Z_ω 가 영역이므로 위 정리와 2.26에 의해 다음은 성립한다.

따름정리 2.30: $\{\gamma_n : n \in \omega\} \subseteq Z_\omega$ 이다.

정의 2.15: $\omega 2 = \omega \cup \{\gamma_n : n \in \omega\}$.

주: $\omega 2$ 는 정렬집합이다. 자세한 내용은 문헌 [6]에 있다.

정리 2.31: $x \in Z_\omega$ 이면 $y \cap x = 0$ 인 $y \in x$ 가 있다.

증명. $\{r(y) : y \in x\}$ 는 최소원 $r(y)$ 을 가진다. 따라서 $y \cap x = 0$ 이다. □

2.27와 2.31에 의해 다음은 성립한다.

따름정리 2.32: 모든 $n \in \omega$ 에 대해, $x \in X_n$ 이면 $x \subset X_n$ 이다.

$n \in \omega$ 에 대해, 집합 W_n 을 다음과 같이 귀납적으로 정의한다.

$$W_0 = \omega,$$
$$W_{n+1} = P(W_n)$$

정리 2.33: 모든 $n \in \omega$ 에 대하여, $W_n \in P(X_n)$ 이다.

증명. 분명히 $W_0 = \omega \in P(X_0)$ 이다. 이제 $W_n \in P(X_n)$ 라 하면 $P(W_n) \subseteq P(X_n)$ 이다. 그러므로 $W_{n+1} \in P(X_{n+1})$ 이다. □

2.26과 위 정리에 의해 다음은 성립한다.

따름정리 2.34: $\Omega = \{W_n : n \in \omega\} \subseteq Z_\omega$ 이다.

다음 정리의 증명은 문헌 [6]에 있다.

정리 2.35: 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$, 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$, 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$은 모두 $V_{\omega 2}$의 원소이다.

주: 영역 Z_ω는 ZR의 모든 공리를 함의한다.

또 다시 같은 방법으로 영역을 확장하여 Ω, $\omega 2$ 그리고 $[0]$이 집합임을 보인다.

정의 2.16: Z_ω를 원소로 가지는 최소 영역을 $\omega 2$에 의해 결정된 영역을 $\omega 2$-영역이라 하고 $Z_{\omega 2}$로 나타낸다. 그리고 원소들을 $\omega 2$-집합이라 한다.

주: 모든 ω-집합은 $\omega 2$-집합이다.

위 정리들로부터 다음을 얻는다.

정리 2.36: Ω, $\omega 2$ 그리고 $[0]$은 $\omega 2$-집합이다.

주: 1. 영역 $Z_{\omega 2}$는 ZR의 모든 공리를 함의한다. 그리고 치환공리와 무관하게 Ω, $\omega 2$ 그리고 $[0]$은 $\omega 2$-집합이다.
2. 0에 의해 0-영역 Z_0을 형성하고 이어서 0-집합들인 순서수들의 유 ω가 형성된다. 다시 Z_0에 의해 ω-영역 Z_ω을 형성하고 이어서 ω-집합들인 순서수들의 유 $\omega 2$가 형성된다. 즉 다음과 같이 전 단계 영역에 의해 다음 단계 영역이 형성되고 이어서 극한 순서수가 형성된다.

$$0 \in Z_0 \supset \omega \in Z_\omega \supset \omega 2 \in Z_{\omega 2} \supset, \cdots, \supset \omega^\omega \in Z_{\omega^\omega} \supset \cdots$$

이 영역들은 모두 노이만 영역이다.

주: 1. $\omega^\omega \in Z_{\omega^\omega}$이므로 2.2에서 논한 바에 의하면 ZF공리계에서 증명 가능한 명제는 ω^ω-영역에서 증명 가능함을 의미한다. 여기서 ZF공리계는 Zermelo 공리계에서 정칙공리와 치환공리를 추가하고 선택공리를 제외시킨 공리계를 의미한다.
2. 모든 영역의 합을 G라 하자. G가 영역임은 쉽게 보일 수 있다. 또한 G에 의해서 결정된 영역 H를 형성할 수 있다. 이 때 $G \in H \subseteq G$이므로 $G \subset H \subseteq G$이다. 따라서 $G \subset G$이다. 그러나 이것은 정리2에 의해 불가능 하다. 따라서 그런 G는 존재하지 않는다.

정의 2.17:
1. 극한 순서수 α에 의해 결정된 α-영역이라 하고 Z_α로 나타낸다. α-영역의 원소를 α-집합이라 한다.
2. $x \in Z_\alpha$인 극한 순서수 α가 존재할 때 유 x를 집합이라 한다.

정리 2.37: x가 집합이면 $y \cap x = 0$인 $y \in x$가 있다.

증명. $\{r(y) : y \in x\}$는 최소원 $r(y)$을 가진다. 따라서 $y \cap x = 0$이다. □

다음 정리의 증명은 문헌 [8]에 있다.

정리 2.38: u가 집합들의 유이면 u는 집합이다.

증명. $v = \{r(y) : y \in u\}$라 하자. 그리고 $\beta = \cup v$라 하면 $u \subseteq V_\beta$이고 $u \in V_{\beta+1}$이다. 따라서 는 u집합이다. □

참고 문헌

1. 박창균, 「직관주의」, 한국수학사학회지, 10(1997), No. 2, pp. 82–88.
2. 吉永良正/임승원 옮김, 『불완전성 정리』, 전파과학사, 2000.
3. 현우식, 「칸토르의 수학 속의 신학」, 한국수학사학회지, 24(2011) No. 3, pp. 13–21.
4. 홍성사, 「선택공리와 19세기 수학」, 한국수학사학회지 9(1996), No. 2, pp. 1–11.
5. K. Hrbacek and T. Jech, *Introduction to Set Theory*, Marcel Pekker, Inc., 1984.
6. T. Jech, *Set Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
7. J. L. Kelley, *General Toplogy*, Van Nostrand, Princeton, 1955.
8. E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, 2nd ed. D. Van Nostrand, 1979.
9. G. H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice: Its origins*, *Development*, *and Influence*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982.
10. C. C. Pinter, *Set Theory*, Addison-Wesley, 1971.
11. R. L. Vaught, *Set Theory*, Birkhäuser, 1926.

정세화 가천대학교 수학정보학과
Department of Mathematics and Information, Gachon University
E-mail: sehwa@kyungwon.ac.kr