대한수학교육학회지 <학교수학> 제 14 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.14, No.1 85-107. Mar. 2012

귀납적 추론의 과정 분석

이 성 근* · 류 희 수**

본 연구에서는 문제해결에서 귀납적 추론의 과정을 분석하여 귀납적 추론의 단계를 0단계 문제 이해, 1단계 규칙성 인식, 2단계 자료 수집 · 실험 · 관찰, 3단계 추측(3-1단계)과 검증(3-2단계), 4단계 발전의 총 5단계로, 귀납적 추론의 흐름은 0단계에서 4단계로의 순차적인 흐름을 포함하여 자신이 찾은 규칙이나 추측에 대하여 반례를 발견하였을 때 대처하는 방식에 따라 다양하게 설정하였다.

또한 초등학교 6학년 학생 4명에 대한 사례 연구를 통하여 연구자가 설정한 귀납적 추론 단계와 흐름의 적절성을 확인하였고 귀납적 추론의 지도를 위한 시사점을 도출하였다.

Ⅰ. 서론

NCTM(1989)은 "수학을 알고 행하는 근본은 추론이다." 라고 지적하고, 학생이 세상의 의미를 이해하는 강력한 수단으로 수학을 이해하고 접근하도록 하기 위해서는 수학적 활동의 기초가 되는 추론을 강조하는 것이 필수적이라고 보고 있으며, 추론과 증명을 수학의 기본적인 측면으로 인식하고 수학적 힘의 신장을 강조하였다. 우정호(2007)는 수학의 힘의 근원은 추론하는 능력이고 수학 교육의 주요 목적은 '합리성의 추구'이며 이러한 합리성은 수학적 추론을 통하여 길러질 수 있다고 하였다.

그렇다면 수학적 추론은 무엇일까? 추론이란 이미 알고 있는 판단으로부터 새로운 판단을 이끌어 내는 사유 작용이다(우정호, 2007). 수학적 추론은 연역적 추론과 귀납적 추론으로 나눌 수 있는데 고대 그리스 시대 이래로 수학의 연역적 추론에 의한 방법은 정신도야를 위한 교육 방안으로서 최선으로 생각되었으며 Polya나 Lakatos는 수학교육에서 귀납 추론 또는 귀납적 발견의 중요성을 강조하였다(서동엽, 2008). 근래 수학은 귀납적 추론에 의해 발견되고 연역적 추론에 의해 확립되어 간다는 점이 널리 받아들여지고 있기 때문에(Polya, 1986; 우정호, 2000; 서동엽, 2003에서 재인용), 지금까지 증명만을 강조하고 귀납적 추론의 과정을 아주 소홀히 다루었던 것은 수학적 사고의 반을 소홀히 한 것이다(우정호, 2007).

교육과정에서도 수학적 추론은 그동안 논리적 추론 또는 증명교육 중심으로 이루어지는 경향이 있었다. 그러나 수학을 깊이 있게 이해하고 활용할 수 있는 능력을 갖추기 위해서는, 먼저 귀납적 추론을 통해 학생 스스로 규칙성 또는 공통성을 발견하거나 유추를 통해 추측해 보는 경험이 필요하며, 이런 과정을 통해서 학생들은 수학적 지식을 자신의 것으로 내면화 할 수 있고, 다양한 상황에 자유롭게 활용할 수 있는

* 인천심곡초등학교 (goguryo17@naver.com), 제1저자
** 경인교육대학교 (hsryu@ginue.ac.kr), 교신저자
1) 본 논문은 제1저자의 석사학위논문 일부를 발췌하여 요약하고 재수정한 것임

능력을 가질 수 있다(교육과학기술부, 2007).

위와 같은 이유로 본 연구에서는 귀납적 추론에 관심을 가지고 '귀납적 추론은 어떤 의미를 지니고 있으며 또 수학 교육에서 구체적으로 어떤 가치가 있을까?'에 대해 알아보았다.

일반적으로 귀납적 추론이란 관찰된 특수한 사례의 공통성에 주목하여 그러한 사례 전체에 대하여 성립될 수 있는 숨겨져 있는 일반적인 법칙을 이끌어 내는 추론을 말한다(우정호, 2009). Polya는 수학을 실험적이고 귀납적인 과학으로 규정하고 귀납과 유추에 의하여 추측하는 교육을 중요시 하고 있으며(우정호, 2009) 초등학교 수준에서는 귀납적 추론을 사용하여 발견할 수 있는 수학적 대상들이 상당히 많이 있다(강문봉, 1996). 우리나라에서도 7차 교육과정 이래 귀납적 발견을 강조하고 있다. 하지만 초등학교에서 귀납적 추론 과정에 대한 구체적인 분석에 관한 연구는 그 중요성에 비해 부족 한 실정이다. 이에 본 연구에서는 첫째, '귀납적 추론'에서 귀납의 의미에 대해 역사적, 논리적인 면을 포함하여 다양한 측면에서 고찰해보고 현대적 발견술에 기초하는 Polya의 문제해결 과정과 그 외 학자들의 문제해결 과정에서 나타나는 연구를 통하여 귀납적 추론의 과정을 분석하였다. 둘째, 앞선 이론적 고찰을 토대로 귀납적 추론의 단계와 흐름을 설정하였으며 초등학생들이 귀납적 상황에서 문제를 해결하는 과정을 관찰하여 연구자가 설정한 귀납적 추론의 단계와 흐름에 대한 타당성을 확인해보고 그 결과를 분석하여 귀납적 추론의 지도를 위한 시사점을 도출하였다.

II. 이론적 배경

1. 귀납적 추론

'귀납'의 의미는 역사적 오랜 시간 동안 존재하였으며 시간에 따라서 그 의미와 중요성이 변화하였다. '귀납'이라는 용어는 Aristotle의 epagȏgę̆ 라틴어 번역에서 비롯되었지만 그 후 별 관심을 끌지 못하다가, 근대과학이 발전하면서 Bacon과 Mill에 의하여 과학적 사고방법의 전형으로 여겨져 왔다. Bacon은 여러 가지 사례를 모으고 그 사례로부터 본질적 속성이 아닌 것을 배제하면 본질적 성질이 남게 된다고 하여, 이러한 방법을 귀납적 방법이라고 생각하였다. Mill은 자연의 제일성의 원리(자연은 동일한 상황 아래에서는 동일한 현상을 일으키는 통일된 질서를 가지고 있다는 원리)를 바탕으로 귀납적 추론이 학문적 방법이라고 생각하였다. 그러나 Popper나 Lakatos는 이러한 논리를 비판하였으며 과학적 지식의 발견은 전형적인 보기로부터의 단일한 관찰과 실험을 통한 추측, 반례에 의한 반박, 개선된 추측에 의하여 성장한다는 주목할 만한 주장을 하였다(강문봉, 1995; 우정호, 2009).

Polya는 귀납을 고전적으로 정의하고 있는 것처럼 보이지만 개연적 추론을 '발견적인 추론' 또는 '귀납적인 추론'이라고 부르고 있으며(정은실, 1995) Polya가 제시하는 귀납적 사례들은 유사성을 인식하고, 유사성을 추측하고, 그것을 검사하는 과정에서 그 추측이 반박되어 새로운 추측을 하는 과정을 보여주고 있기 때문에 Polya의 방법은 Popper의 '추측과 반박의 방법'과 유사하다(강문봉, 1995).

귀납적 추론의 의미에 대하여 여러 가지 견해를 종합해 보면 다음과 같다.

첫째, 수학에서의 귀납은 연역의 반대 개념으로는 그 본질을 충분히 내포한다고 볼 수 없다. 개별적이고 특수한 사례의 관찰로부터 일반적인 사실을 도출해낸다는 일반적인 의미로는 수학적 사실을 발견해가는 역동적인 과정을 정확하고 명확하게 설명할 수 없기 때문이다.

둘째, 여러 학자들이 귀납을 바라보는 관점에

따라 귀납에 대한 생각의 차이를 발견할 수 있다. 그렇지만 새로운 수학적 사실이나 규칙 또는 법칙을 발견하는 과정에서 다양한 추측을 해보고 이를 확인해보는 일련의 과정을 통하여 새로운 수학적 지식을 발견해가는 과정을 중요하게 생각한다는 점은 공통임을 알 수 있다.

이에 본 연구에서는 귀납의 의미를 새로운 사실을 추측해보고 이것을 확인·검증해보는 과정을 포함하는 보다 확대된 의미로 보고, 특히 이러한 역동적인 과정에 의미를 부여하고 중요하게 다루어보았다.

Ⅲ. 귀납적 추론의 과정 분석

1. 문제해결에서 귀납적 추론의 과정

문제해결 과정에서 귀납적 추론에 대한 흐름은 다음과 같다. 귀납적 추론을 이용한 문제해결의 첫 번째 단계는 문제의 이해이다. 학생들에게 적절한 문제 상황이 제시 되면, 학생들은 그 문제에서 발견할 수 있는 일정한 규칙이나 패턴을 찾게 될 것이다. 문제에서 구하려는 것이 무엇인지와 또 어떤 조건이 있는지 또 쉽게 발견되는 공통성이나 규칙은 없는지에 대해서 생각하게 된다. 이때 학생에게 주어지는 문제 상황은 잘 다듬어지거나 단순히 개념의 확인을 위한 문제, 간단한 계산이나 너무 쉽게 해결방법이 떠올라 복잡한 사고 과정을 거칠 필요가 없는 문제를 제시하는 것보다는 학생 흥미를 느끼고 스스로 해결할 마음이 드는 문제를 선정하여 제시하는 것이 더 바람직할 것이다. 이것은 Polya의 최선의 동기 유발 원리에도 부합한다고 볼 수 있다. 그리고 난 후에 학생은 '뭔가 있을 것 같은 상황'을 발견하게 될 것이다. 이것은 매우 초보적인 추측으로 본격적인 탐구 이전 단계라고 볼 수 있을 것이다.

다음 단계에서 학생들은 '뭔가 있을 것 같은 상황'에서 어떤 규칙이나 공통점을 찾으려고 다양한 시도를 하게 될 것이다. 자신이 기존에 알고 있던 지식을 활용할 수도 있다. 이 때 교사의 적절한 지도는 매우 중요하며 다음과 같은 점에 유의해야 할 것이다. 첫째, 학생들이 충분히 사고하고 탐구할 수 있는 시간과 기회를 주어야 한다는 것이다. 이 시기는 문제해결 과정 중 Wallas의 '부란기'나 Hardamard의 '부화기'로 볼 수 있으며, 새로운 발견(Hardamard의 '아하-경험')을 위하여 특별히 정해진 시간도 없고 각 개인마다 지속 시간도 다르기 때문이다. 그래서 이 단계가 귀납에서 가장 중요하고 어렵고 힘들다고 볼 수 있다. 둘째, 귀납적 추론은 일반적으로 관찰할 대상들의 공통점을 찾는 과정을 통해서 추측을 얻게 되는데 이 때, 교사의 적절한 발문과 권고가 필요하다. 하지만 이 과정에서 성급하게 교사가 개입하여 학생들에게 스스로 발견할 수 있는 기회를 박탈하는 일을 하지 말아야 한다. 교사의 심리적인 조급함으로 인한 토파즈 효과(Topaze Effect)를 주의해야한다.

일련의 과정을 통하여 추측을 발견하였다고 할 때, 이것이 문제 해결의 의미가 있는 발견이 될 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. 그것이 비록 비논리적일지라도 학생들 스스로 발견하는 과정이 중요하다. 학생들은 그들 나름대로의 합리적인 생각을 하고 있기 때문이다. 인간은 "추론하는 성향을 타고나며 실험하고 검사하려는 욕구가 있다. 각 발달 단계에서의 사고에는 그 자신의 논리가 있다."라는 Dewey(1933; 강문봉, 1996에서 재인용)의 말에서 그 근거를 찾을 수 있다. 이런 발견의 경험들은 좀 더 세련된 추론을 하기 위한 토대가 될 것이다.

다음 단계는 학생들이 추측한 내용이 비슷한 상황의 다른 예에서도 성립할 수 있는지 또 성

립하는 예는 없는지 찾아보게 하는 것이다. 자신의 추측에 대한 검증을 하는 과정으로 정당화의 과정이다. 이때 자신이 추측한 내용에 대하여 수정할 필요가 있을 때 수정할 수 있는 '지적 용기'와 자신의 추측이 틀렸다는 것을 인정할 수 있는 '지적 정직성' 이라는 귀납적 태도를 필요로 한다. 만약 학생들이 추측한 내용이 틀렸거나 반례를 발견한다면 다시 새로운 추측을 통하여 같은 과정을 반복하게 한다.

2. 귀납적 추론의 단계와 흐름

문헌 연구와 앞선 내용을 바탕으로 연구자는 문제해결 과정에서 귀납적 추론의 과정을 0단계부터 4단계까지 총 5단계로 구분해보았다.

0단계는 귀납적 추론이 전혀 이루어지지 않은 상태로 학생이 해결해야 할 문제가 제시된 상태이거나 문제의 단순한 조건이나 상황을 이해한 상태이다. 학생들이 문제에 대한 흥미나 문제를 해결하고자 하는 의지가 생기며, 본격적인 탐구과정에 앞선 단계로 볼 수 있다. 이 때 교사는 학생 스스로 해결할 의지를 가질 수 있게 하는 흥미롭거나, 수학적으로 의미 있는 발견을 할 수 있게 하는 문제 또는 문제 상황을 제시하는 것이 필요하다. 강문봉(1996)은 이것을 귀납적 추론을 시작하기 위한 '문제'라고 표현하였으며 학생에게 발전적인 생각을 경험하게 해준다면 학생들은 다양한 '자신의 문제'를 가질 것이라고 하였다.

1단계는 주어진 문제 상황에서 '뭔가 있을 것 같은 상황', '어떤 규칙이나 공통성이 파악되는 단계'로 제시된 조건을 이해한 상태에서 문제의 상황과 같거나 유사한 사례에 대한 관찰이나 확인하는 활동을 통하여 문제해결의 실마리가 될 수 있는 일정한 패턴이나 규칙을 얻는 것이다. 문제해결 초기에 발견한 규칙은 본격적인 탐구를 하기 전에 발생한 생각이기 때문에 문제해결의 핵심적인 키(key)가 될 확률은 상대적으로 낮다고 볼 수 있지만 이런 추측들을 통하여 자신의 생각을 정리하고 좀 더 세련된 추측을 할 수 있는 토대가 될 수 있다는 점에서는 의미가 있다. 1단계에서 다음과 같은 상황을 예상할 수 있다. 첫 번째는 문제 상황이 너무 쉽거나 단순하여 대다수의 학생들이 많은 고민이나 노력을 하지 않고 매우 쉽게 문제가 해결되는 경우이다. 하지만 이런 문제는 학생에게 수학적으로 바람직하다고 볼 수 없다. 두 번째 상황은 문제의 구조를 한 번에 파악하여 규칙성을 인식하고 문제를 해결하는 것으로 영재나 우수아들에게서 발견할 수 있다. Krutetskii는 학생들이 문제를 풀어나갈 때의 추론 단계를 조사하였는데, 우수아들은 그렇지 못한 학생들에 비해 추론의 과정이 훨씬 단순하였고 심지어 추론의 단축 과정이 심해서 추론을 하지 않고 문제를 푸는 것처럼 보이는데(우정호, 2003) 두 번째 상황은 이 경우에 해당한다.

2단계는 주어진 문제 상황을 해결하기 위해서 학생들이 능동적으로 자료 수집 · 실험 · 관찰을 한다. 주어진 문제 상황을 수학적인 기호로 변환하여 탐구를 할 수 있고 비슷한 자료에 대한 수집(사례 탐구)을 하거나 또 다른 예에 적용을 해보는 과정을 통해서 규칙을 찾고 이러한 과정을 통해서 의미 있는 추측을 발견해 갈 것이다. 발견(문제풀이 방법)이 쉽게 일어나지 않을 수도 있다. 귀납적 추론의 방법을 통하여 문제를 해결하는 학생들이 어렵다고 느낄수록 많은 시행착오를 겪게 될 것이다. 자신이 찾은 규칙이 다른 사례에서 적용이 되지 않는 경우를 찾을 것이며, 오랜 시간동안 고민하여 자신이 옳다고 생각하는 추측에 새로운 반례를 발견하게 되었을 때, 이것을 어떻게 처리할지에 대해서 고민도 할 것이다. 하지만 이 모든 과정들

이 좀 더 세련되고 그럴듯한 추측을 얻기 위한 하나의 과정으로 보고 이 과정을 긍정적으로 받아들이는 태도를 갖도록 지도하는 것도 교사의 몫일 것이다. 그렇기 때문에 2단계는 학생들에게 힘들지만 그만큼 중요하다.

Poincaré, Bruner, Piaget의 수학적 발견에 대한 과정을 분석해보면 다음과 같은 점을 생각할 수 있다. 새로운 수학의 발견은 먼저 자신의 지식부터 활용하여 시작을 하고 선행지식이 없는 것에 대한 발견은 불가능하다. 수학적 발견에서 중요한 것은 기존 지식이다. 기존의 지식을 통하여 새로운 지식을 발견한다는 것을 모든 사례에서 찾을 수 있었다. 정보처리 관점에서도 같은 내용을 찾을 수 있다. 새로운 문제 상황이 제시되어 있을 때, 장기 기억 속에 있는 기존의 정보 구조와 직접적으로 관련이 있는지 탐색을 한 후에 과거에 해결했던 유사한 문제를 찾게 되는 경우에는 과거에 성공했던 방식을 사용하고자 노력하게 된다(강옥기 외, 1985). 수학의 학습을 하는 과정에서 얻게 되는 모든 원리, 지식, 규칙들이 잘 구조화되어 습득하지 못한다면 새로운 지식을 배우거나 새로운 수학적 사실을 발견하는 과정에서 효과적으로 사용되지 못하여 후속 학습에서 큰 어려움을 겪게 될 것이다. 이것은 단순히 어느 정도의 지식을 가지고 있는 양의 문제와 학생이 가지고 있는 지식의 질을 동시에 고려하여 생각해야 할 것이다. 따라서 잘 조직된 지식이 있어야 하고, 그렇기 때문에 처음에 수학에 대해서 배울 때 정확한 지식을 학습해야 한다.

위의 내용을 바탕으로 2단계에서 학생이 문제를 해결하는 과정에서 다음과 같은 경우를 생각해 볼 수 있다. 주어진 문제가 기존에 알고 있는 지식과 연관이 있는 문제이거나 비슷한 문제를 해결하였던 경험이 있어 그것을 활용하여 해결에 중요한 단서를 찾는 경우와 관련된 지식이 부족하거나 기존의 지식으로 문제를 해결하는 방법을 찾지 못한 경우다.

전자의 경우는 학생들은 자신이 가지고 있는 지식이나 기존에 경험했던 방법으로 문제를 해결하려고 할 것이며, 이런 성향은 문제 풀이에 대체적으로 도움이 되지만 때때로 방해가 될 수도 있다. Piaget의 이론을 적용해 보면, 수학 문제가 주어지면 먼저 현재 자신이 가지고 있는 문제 해결 경험(지식)을 바탕으로 해결하려할 것이다. 전에 봤던 비슷한 문제나 관련된 문제에 대하여 생각하고 만약 같거나 비슷한 문제를 해결했던 경험(지식)이 있다면 학생은 그것을 바탕으로 어렵지 않게 문제를 해결할 수 있는데 이 과정은 '동화'라고 볼 수 있다.

후자의 경우를 생각해 보면 문제와 관련된 지식이 부족하거나 잘 구조화 되지 못하였을 경우 또는 유사하거나 비슷한 문제 해결 경험이나 없다면 학생은 새로운 방법을 찾을 것이다. Piaget는 이 과정을 '조절'이라고 하였고(김동일 외, 1999), 이 때 창의적으로 문제를 해결하는 능력이 필요하다. 수학 창의성은 수학적 문제 상황에서 고정된 사고방식을 탈피하여 다양한 산출물을 내는 과정이자 능력(이강섭, 황동주, 2003; 박혜진, 권혁진, 2010에서 재인용)을 말하며, 창의적 문제해결력과 동일시되어 사용하는 경향이 많아졌다(조석희, 황동주, 2007).

이 단계에서 학생이 새로운 규칙이나 공통성, 문제 해결의 방법을 찾기 힘들어할 때, 교사는 정교한 발문과 적당한 개입이 필요하며 자유롭게 자신의 의견을 말할 수 있고 또 친구의 의견을 반박하거나 동의할 수 있게 하는 교실 문화도 만들어 줄 필요가 있다. 하지만 성급하게 접근하여 학생들 스스로 발견할 수 있는 기회를 박탈하는 것은 지양해야할 것이다. 교사는 학생이 해결할 수 있는 충분한 시간을 주어야

하고 도움자, 산파의 역할을 하는 것이 더 바람직하다. 이 단계는 Polya의 '탐구단계'에 해당한다고 볼 수 있다.

3단계는 앞선 과정을 통하여 일정한 패턴이나 규칙을 바탕으로 한 잠정적인 추측을 얻고(3-1단계) 그것을 검증하는 과정(3-2단계)이다. 3-1단계에서 학생은 '아하 경험(Ah-experience')과 함께 자신이 새로운 사실을 발견한 것에 대한 기쁨을 느끼게 될 것이다. 1단계에서도 '뭔가 있을 것 같은 상황' 도 일종의 '아하 경험'이라고 볼 수 있다. 하지만 1단계의 경험은 본격적인 탐구를 하기 전으로 순간적으로 발생한 느낌이기 때문에 문제해결로 갈 확률은 상대적으로 낮다고 볼 수 있다. '아하 경험'을 통하여 일정한 규칙을 발견하였다 할지라도 귀납적 추론을 통한 지식은 반드시 옳다고 볼 수 없다. 일반적으로 귀납적 일반화는 '신뢰롭다(truthful)'라고 생각하기 때문이다(박성택, 2003). 그래서 새롭게 얻는 추측을 다시 새로운 상황에 적용을 해보고 그것이 옳은지에 대해서 검증을 해보는 과정(3-2단계)이 필요하다. 이것은 정당화의 과정으로도 볼 수 있을 것이다. 자신의 추측이 옳은 것인지, 자신의 추측이 성립하지 않는 예는 없는지 살펴봐야 하며 교사는 학생의 추측에 대해서 검증을 해보려는 태도를 길러주는 것이 필요하다. 만약에 자신의 추측이 틀렸거나 수정이 필요할 때는 다시 새로운 추측을 찾거나 자신의 추측을 수정을 하기 위한 시도를 하게 된다.

3-2단계에서 중요한 문제 중 하나는 검증하는 절차에서, 초등학교 수학에서 과연 어느 정도까지 논증을 인정하느냐에 대한 것이다. 물론 문자나 수식을 이용하여 논리적으로 엄밀한 연역적인 방법을 통하여 설명하는 것이 바람직할 것이다. 하지만 초등학생이 삼각형의 세 내각의 합이 180° 라는 사실을 다양한 삼각형의 예를 통해서 추측하였다고 하자. 이것은 분명히 옳은 추측이다. 하지만 일반적인 초등학생을 대상으로 하였을 때, 교육과정을 고려하면 연역적인 방법으로 증명을 기대하기는 어렵다. 또 전문가적인 세련된 방법을 사용하는 것도 중요하지만 현재 학생의 발달수준과 학업수준을 넘어서는 것을 요구할 수 없고 학생 나름의 논리로 정당화를 하는 경험도 의미가 있다고 볼 수 있다.

박교식(1998)은 초등학교 수학은 학문 수학과는 동일하지 않은 그 나름대로의 위상이 주어져야 한다고 하고 있다. 그는 Freudenthal의 정확하고 엄밀하고 연역적인 기성수학과 대비되는 실행 수학이라는 개념을 가지고 정확하지도 않고 엄밀하지 않을 수 있고, 연역적으로 제시되지 않는 수학으로 초등학교 수학만의 고유한 위치가 있다고 설명하고 있다. 같은 맥락으로 귀납적 추론을 할 때에도 추측에 대한 검증을 할 때 초등학교 학생의 수준에 맞게 덜 형식적이고 덜 엄밀하더라도 그 나름대로의 논리성을 인정하는 것이 바람직하고 생각한다.

김정하(2010)는 초등학생들도 정당화를 할 수 있다고 보고 '정당화 없음'(0단계), '외적 확신에 의한 정당화'(1단계), '경험적 · 귀납적 정당화'(2단계), '포괄적 예에 의한 연역적 정당화'(3단계), '단순 연역적 정당화'(4단계), '형식적 · 이론적 정당화'(5단계)의 다섯 단계로 범주화하여 초등학교 6학년 학생들의 수학적 정당화의 단계를 조사하였다. 그 결과 수학 성취도가 높은 학생들은 연역적 정당화를 선호하고, 중위 수준의 학생들은 경험적 · 귀납적 정당화를 선호하는 것으로 나타났다.

본 논문에서는 김정하(2010)의 정당화의 단계를 수정(0～5단계를 0～2단계로)하였다. 3-2a단계는 정당화가 나타나지 않는 단계이며, 3-2b단

계는 경험적·귀납적 정당화로 예를 이용하여 그들 사이의 일반적인 속성을 찾아내거나 활동적으로 직접 해 봄으로써 정당화를 시도하는 것이다. 3-2c단계는 포괄적 예에 의한 정당화로 하나의 예를 일반적인 예로 사용하여 설명을 할 수 있는 경우이다.

<표 Ⅲ-1> 귀납적 추론 3-2 단계 분류

단계	분 류 기 준
3-2a	정당화 없음
3-2b	경험적·귀납적 정당화
3-2c	포괄적 예에 의한 정당화

<표 Ⅲ-2> 귀납적 추론의 단계별 주요 활동

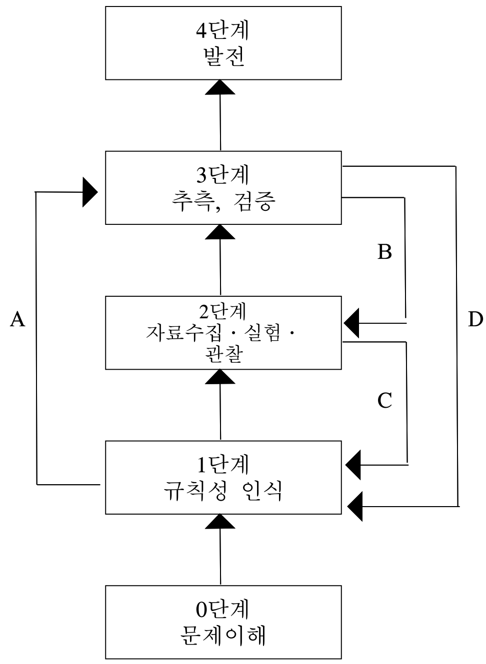
<table>
<tr><th colspan="2">단계</th><th>내용</th><th>주요활동</th></tr>
<tr><td colspan="2">0단계</td><td>문제 이해</td><td>문제 상황·조건 이해
문제해결 의지</td></tr>
<tr><td colspan="2">1단계</td><td>규칙성 인식</td><td>유사사례에 적용
공통성, 규칙성 발견
추측 발견</td></tr>
<tr><td colspan="2">2단계</td><td>자료수집·실험·관찰</td><td>사례 탐구
추측을 다른 사례 적용
관련 지식 및 경험 찾기
창의적 문제해결</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3단계</td><td>3-1</td><td>추 측</td><td>“아하” 경험</td></tr>
<tr><td>3-2a</td><td rowspan="3">검 증</td><td rowspan="3">추측의 반례 찾기
정당화</td></tr>
<tr><td>3-2b</td></tr>
<tr><td>3-2c</td></tr>
<tr><td colspan="2">4단계</td><td>발 전</td><td>결과 점검 및 반성
발전</td></tr>
</table>

4단계는 문제가 명확하게 해결된 단계이다. 하지만 이 단계는 좀 더 우아한 해결 방법은 없는지, 좀 더 효과적으로 추측을 할 수 있게 하는 방식은 없는지에 대한 고민과 더불어 교사는 학생이 스스로 발견한 원리나 개념 또는 문제풀이 방법을 더욱 더 발전시킬 수 있도록 더 도전적이고 곤란한 문제 상황을 제시하여야 한다. 자신의 추측을 다른 사례에 적용하는 문제나 문제 상황, 또는 새로운 개념을 배움으로써 자신이 가지고 있던 지식을 변경해야 하는 과정을 겪도록 해야 한다. 이 단계는 Polya의 ‘동화단계’로 볼 수 있을 것이다. 보다 새로운 수학적 지식이나 발견에 도움을 주는 구조화 된 지식을 조직하기 위해서 4단계는 강조되어야 한다. 귀납적 추론을 활용한 문제해결 과정에서 나타나는 단계별 주요 활동을 정리하면 <표 Ⅲ-2>와 같다.

귀납적 추론의 과정은 0단계에서 4단계로 일방향으로만 흐르지 않을 것이다. 자신이 찾은 추측을 발견하였을 경우 새로운 추측을 찾기 위한 다양한 상황을 예상할 수 있기 때문이다. 자신의 추측에 대한 반례에 대해 어떻게 대응하는지에 따라 귀납적 추론의 다양한 흐름이 존재할 것이다. [그림 Ⅲ-1]은 연구자가 설정한 귀납적 추론의 단계에 따른 귀납적 추론의 흐름이다.

- A과정: 자료수집·실험·관찰 과정을 생략하고 추측을 발견하여 검증하려는 과정.

자료수집·실험·관찰과정이 생략된 A과정을 통한 귀납적 추론으로 볼 수 없다는 견해도 있을 것이다. 하지만 앞선 논의에서 언급을 하였듯이 문제가 너무 단순하여 사례탐구가 필요 없는 것과 수학적 추론 과정이 단순하거나 단축이 심한 수학 우수아에서 발견할 수 있을 것이며, A에서 다시 B, C, D과정을 거쳐 문제를 해결하는 과정을 예상할 수 있기 때문에 A를 귀납적 추론의 흐름 중 하나로 제시하였다.



[그림 Ⅲ-1] 귀납적 추론의 단계와 흐름.

- B과정: 검증과정에서 반례를 발견하였을 경우, 자신의 추측을 기각하지 않고 수정하기 위하여 사례를 다시 수집하거나 수집했던 사례에 대해서 재검토를 하는 과정(괴물배제법, 예외배제법).
- C과정: 문제해결자가 발견한 일정한 규칙이나 패턴을 탐구하는 과정에서 전면적 반례가 등장하여 자신의 추측을 기각하는 과정(기각법).

2단계에서 문제해결 초기에 발견한 일정한 규칙이나 패턴을 기각하는 것은 C과정이며, 초기에 발견한 규칙이나 패턴을 수정하는 것은 2단계에서 이동하지 않는 것으로 본다.

- D과정: 검증과정에서 자신의 추측에 대해 전면적 반례가 등장하여 발견한 추측에 대해 기각을 하는 과정(기각법).

Ⅳ. 연구 방법

1. 연구 대상

연구대상 4명의 학생은 성별과 수학 성적(2011 국가수준 학업성취도 평가 결과) 및 연구자가 담임을 하고 있는지를 고려하여 선정하였다. 연구자가 담임을 맡고 있지 않은 학생 2명은 선생님들에게 연구주제와 절차에 대해서 자세히 설명을 한 후에 추천을 받아 선정하였다.

2. 연구 절차

본 연구자가 설정한 귀납적 추론의 단계와 흐름이 실제 학생들에게서 나타나는지에 대한 확인을 해보기 위해서 질적 연구 방법(사례 연구)을 선택하였다. 초등학교 6학년 학생들이 귀납적 추론을 이용하여 문제를 해결하는 과정을 관찰하였는데 서로 다른 두 개의 문제에 대해 각각 두 명 학생의 사례를 분석하였고 매일 한 명씩의 학생에 대해 문제 해결과 면담을 실시하였다. 학생들이 문제를 해결하는 과정을 내용과 수업의 개괄적인 흐름에 대해서는 미리 구상을 하였지만 학생의 문제를 해결해가는 과정과 면담의 상황에 따라 탄력적으로 대응하였다. 수업 중 학생이 작성한 활동지를 문서자료로 수집하였으며 학생들이 편안한 상태에서 자신의 활동을 적을 수 있도록 별도의 학습지 없이 A4용지에 작성하게 하였고 학생들의 사고 과정을 면밀하게 관찰하기 위해서 지울 수 없는 네임펜을 사용하였다. 자신이 생각한 것을 솔직하고 자세히 작성할 것을 강조하였다.

본 연구자는 수업을 하는 동안 관찰자와 수업 진행자로서 함께 참여하였고, 연구자의 발문과 그에 대한 학생의 반응을 관찰하기 위해서

<표 Ⅳ-1> 연구대상 학생들의 특성

문제	ID	성별	수학 실력	성격적 행동적 특성	담임 여부
P1	G1	여	우수 학력	활발한 성격으로 단위학교 영재 프로그램을 수강하는 등 수학 성취 수준이 높은 학생이며, 자신의 생각을 말과 글로 정확하게 표현함	
	B1	남	보통 학력	수업 시간에 항상 발표를 하려고 하는 적극적인 태도를 가지고 있으며, 장래 희망이 수학 교사로 수학에 대한 흥미를 가지고 있음	○
P2	G2	여	우수 학력	수학을 포함한 전 교과에서 우수한 성취도를 보이고 있으며 자신의 생각을 솔직하게 잘 표현하고 적극적인 성격임	○
	B2	남	보통 학력	교과 및 교과 외 부분에서 호기심이 많은 편이며, 자신이 좋아하는 과목과 좋아하지 않는 과목에 대한 학업 성취도의 차이가 큰 편임	

수업 과정에 대한 녹음을 하였다. 면담 진행 중 생각나는 부분과 의문이 나는 점은 기록을 해 두어 면담이 끝난 후 분석을 하거나 사후 면담이 필요한 경우 활용하였으며 교사와 학생의 프로토콜을 작성하여 분석하였다.

면담은 반구조화된 면담을 실시하였다. 내용과 수업의 개괄적인 흐름에 대해서는 미리 구상을 하였지만 학생의 문제를 해결해가는 과정과 면담의 상황에 따라서 탄력적으로 대응하였다. 학생들의 행동이나 학습지에 특이한 사항이나 의문점이 생겼을 경우 수업을 마친 후 연구자는 학생과 면담을 개별적으로 실시하였다. 학생들의 해결과제(P1, P2)는 강문봉(1996), 片桐重男(1992b)을 참고하여 선정하였다

P1은 두 자리의 수에서 서로 자리수를 바꾸어 빼면 그 차이는 9의 배수가 됨을 귀납적으로 발견하게 하는 문제이다. 강문봉(1996)의 연구에서는 2~6학년 학생들을 대상으로 문제를 해결하게 하였으며, 그 결과 학생들은 단순히 뺄셈 계산을 하고 공통점을 찾고 일반화를 하는데 관심을 두지 않았다. 이번 실험에서는 공통점을 찾고 그것을 어떻게 정당화하는지도 관찰을 하였다.

P2는 다섯 자리의 수를 거꾸로 하여 뺀 수의 결과에 다시 그 수를 거꾸로 한 수를 더하는 문제이다. 이것은 초기에 다섯 자리의 수가 무엇이든지 답은 일정한 규칙성을 갖는다. 다섯 자리의 수를 ABCDE라고 하였을 때(단, A>B+1), B>D면 109890, B=D면 109989. B<D면 99099이다. 여러 사례를 탐구하는 과정에서 학생의 다양한 추측을 확인해보고 반례가 나타났을 때, 어떻게 대응할지와 자신이 찾은 추측을 어떤 식으로 설명(정당화)하는 것에도 관심을 가지고 관찰하였다.

3. 자료 수집

가. 자료 수집의 방법

1) 문서 자료

수업 중 학생이 작성하게 되는 활동지를 문서 자료로 수집하였다. 자신이 생각한 것을 솔직하고 자세히 작성할 것을 강조하였다.

2) 관찰 자료

본 연구자는 수업을 하는 동안 관찰자와 수업 진행자로서 함께 참여하였고, 연구자의 발문과 그에 대한 학생의 반응을 관찰하기 위해

서 수업 과정에 대한 녹음을 하였다. 면담 진행 중 생각나는 부분과 의문이 나는 점은 기록을 해두어 면담이 끝난 후 분석을 하거나 사후 면담이 필요한 경우 활용하였으며 교사와 학생의 프로토콜을 작성하여 분석하였다.

나. 자료 분석의 관점

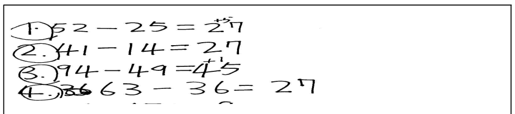
Creswell은 사례 연구는 사례 내 자료 분석과 사례 간 자료 분석 방법으로 구분하였다. (우정호 외, 2006). 먼저, 관찰 대상 4명에 대한 개별 분석인 사례 내 자료 분석은 학생들이 문제를 해결하는 과정에 대해서 정확히 묘사를 하는 기술적 분석의 기법을 사용하였으며, 그 분석을 토대로 문제를 해결하는 과정에서 귀납적 추론 과정이 실제로 [그림 Ⅲ-1]과 같은 흐름으로 전개가 되는지와 학생들이 자신의 추측에 대한 반례를 발견하였을 때, 어떻게 그 반례에 대응하는지에 대해 Lakatos의 방법으로 분류하고 자신이 생각한 추측에 대해서 어떤 방식으로 정당화를 할지에 대해서 수집・정리된 자료를 표를 이용하여 체계적으로 정리를 하였다.

사례 간 자료 분석은 앞선 사례 내 자료 분석 결과를 종합하여 본 연구자가 문헌연구를 통해서 설정한 귀납적 추론의 단계와 흐름이 특수한 경우에만 한정되지 않고 일반화를 할 수 있는가에 대한 타당성을 확인하고 귀납적 추론의 지도를 위한 시사점을 도출하였다.

4. 자료 분석

가. 학생 G1의 문제해결 과정

P1과 연관된 문제 4문제를 해결한 후에 "주어진 문제는 어떤 두 자리 수 정수에서 십의 자리와 일의 자리의 수를 바꾼 수를 빼는 것이라는 것을 알았고 그 답은 27이 나온다."고 추측 (G1-C1)을 하였다.



G1: 아... 생각이 났어요. 거꾸로 하면 무조건 27이 나와요..(G1-C1)
T: 거꾸로 한다는 것이 무엇을 의미하지?
G1: 52를 거꾸로 한 수 25 빼면 27이 나오는 것 같아요. 41 빼기 14는 27, 63 빼기 36은 27이 나와요.

[그림 Ⅳ-1] 학생 G1의 첫 번째 추측(G1-C1).

하지만 처음에 했던 추측(G1-C1)에 대한 반례(3번 문항, 94-49=45)를 발견하게 되었다. 그리고 그 반례에 대해서 자신의 추측 (G1-C1)을 버리지 않고 다음과 같은 생각을 하였다.

G1: 그것은 100이 넘어서 그래요.
T: 100이 넘었다는 말은 무슨 뜻이지?
G1: 숫자가.. 아닌데,.. 숫자가 커서?
T: 숫자가 크다는 말은 무엇을 의미하는 거야?
G1: 음... 이거를요, (잠시 생각한 후) 1, 2, 4번 문제의 숫자를 더하면 100을 넘지 않는데, 3번째 문제는 백이 넘어요.(G1-C2)

[그림Ⅳ-2] 학생 G1의 두 번째 추측(G1-C2)

"뺄셈을 하는 두 수의 합이 100보다 작은 경우에만 뺄셈의 차가 27이 나온다."는 추측(G1-C2)을 하였다. 문제에서 주어진 수의 합을 100을 기준으로 나누고 100이 넘는 것에 대해서는 예외를 두고 자신이 처음 생각했던 추측(G1-C1)을 수정(예외배제법)하였다. 그리고 큰 수를 가지고 뺄셈을 시작하였다. 76-67의 뺄셈을 한 결과가 9가 나왔을 때, 자신의 추측(G1-C2)을 틀렸다고 인정(기각법)하였다.

5.76-67= 9

T: 은선이 말대로 두 수의 합이 100이 넘는 수를 적었는데 9가 나왔어. 그럼 이제 어떻게 하지?
G1: 틀린 건가요?

[그림 Ⅳ-3] 학생 G1의 추측(G1-C2) 기각.

~~십의 7 한 수~~ 한 두자리 숫자의 십의 자리와 다른 두자리 숫자의 십의 자리를 뺀 것에 9를 곱하면 답이 나온다.

[그림Ⅳ-4] 학생 G1의 네 번째 추측(G1-C4)

잠시 후에 G1은 다음과 같은 새로운 추측(G1-C3, "뺄셈의 결과는 9의 배수이다.")을 하였고 그것을 다른 사례에 적용하여 실제로 성립하는지 확인하였다. 몇 개의 사례를 더 찾아보고 자신의 추측(G1-C3)에 확신을 갖게 되었다. 그 때, 연구자는 새로운 문제(십의 자리와 일의 자리가 같은 수의 뺄셈)를 제시하였다. 초등학교에서 배수는 자연수의 범위에서만 지도를 하기 때문에 G1은 0도 9의 배수라는 사실을 알지 못하였다. 하지만 본 연구자는 십의 자리와 일의 자리의 수가 같은 두 자리 수를 제외한 새로운 추측을 기대(예외배제법)를 하고 G1에게 9의 배수에 대해서 다시 생각을 하게 하였고, 예상대로 G1은 0을 9의 배수라고 생각하지 않았

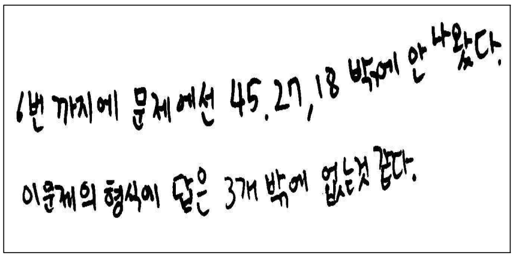
<표 Ⅳ-2> 학생 G1의 P1 해결과정

프로토콜(중요 부분)	귀납적 추론 단계	추측/반례 정당화	비고
T: 뭔가 드는 생각이 없나요? G1: 아... 생각이 났어요. 거꾸로 하면 무조건 27이 나와요.	0단계, 1단계	G1-C1	
G1: 아. 이거요. 94빼기 49는 45가 나와요.	2단계	반례발견	
G1: 음... 이거를요, (잠시 생각한 후) 1, 2, 4번 문제의 숫자를 더하면 100을 넘지 않는데, 3번째 문제는 백이 넘어요.	2단계	G1-C2 (예외배제법)	
T: 인선이 말대로 두 수의 합이 100이 넘는 수를 적었는데 9가 나왔어. 그럼 이제 어떻게 하지?	2단계	반례발견	
G1: 9의 배수요... T: 9의 배수?	1단계	G1-C3 (기각법)	C
G1: 한 번 더해 볼께요. (83-38=45라는 계산을 적는다.) 어... 45가 나왔어요. G1: 1번부터 6번까지 전부 9의 배수가 나왔어요. (중략) T: 확신할 수 있어? G1: (자신있게 이야기 하며)예, 확신할 수 있어요.	2단계, 3-1단계		
T: 77-77을 계산해봐. G1: (77-77=0 이라고 적으면서) 아...	2단계	반례발견	B
T: 0은 9의 배수인 것 같아? 아닌 것 같아? G1: 아닌 것 같아요. (중략) G1: (한 두 자리 숫자의 십의 자리와 다른 두자리 숫자의 십의 자리를 뺀 것에 9를 곱하면 답이 나온다. 라고 적는다.)	3-1단계	G1-C4	
T: 그래? 인선이가 찾은 훌륭한 결론이 것 같아. 그런데 친구들한테 어떻게 설명을 할 거야? 왜 이렇게 되는지? G1: 어..... (생각을 한다.) 설명을 하라면요. 음....(생각한다.) 생각이 안나요.	3-2a단계		검증

다. 잠시 생각을 한 후에 G1은 "한 두 자리 숫자의 십의 자리와 다른 두자리 숫자의 십의 자리를 뺀 것에 9를 곱하면 답이 나온다." 라는 새로운 추측(G1-C4)을 하였다. 이 추측으로 이 문제에 대한 완성된 규칙을 찾았다고 생각을 하고 왜 그런지에 대해서 이유를 설명하게 하였다. 이 부분에서 G1은 많은 어려움을 느꼈고 명확한 설명을 하지 못했다.

나. 학생 B1의 문제해결 과정

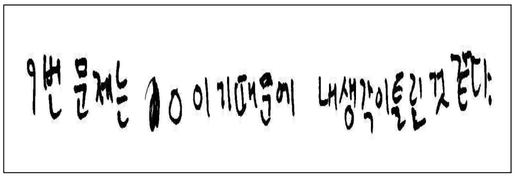
학생과 문제를 해결하는 과정은 흥미로워하였지만 명확한 규칙을 찾아내는 것은 어려워하였다. 네 번째 문제를 제시하였을 때 십의 자리와 일의 자리가 바뀐 뺄셈을 하는 것이라는 것을 이해하였다. 연구자는 문제에서 어떤 점을 발견할 수 있는지 발문을 하였고 뺄셈의 차가 45, 27, 18 밖에 나오지 않았다는 것을 발견하고 "십의 자릿수와 일의 자릿수를 바꾼 뺄셈의 답은 45, 27, 18이다."라는 추측(B1-C1)을 하였다.



[그림Ⅳ-5] 학생 B1의 추측(B1-C1)

좀 더 생각을 한 후에 새로운 추측(B1-C2, "뺄셈을 한 결과는 3의 배수이다.")을 하게 되었다. 비슷한 예를 찾아서 계산을 해본 후 3의 배수라는 사실에 대해서 확신을 갖게 되었다.

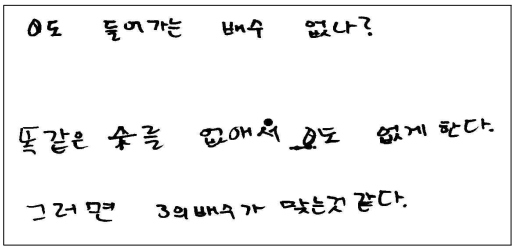
연구자는 십의 자리와 일의 자리가 같은 수의 뺄셈을 하는 새로운 문제를 제시하였다. G1과 같이 0이 3의 배수라는 사실을 학습하지 않았기 때문에 0이라는 수를 어떻게 처리할지에 대해서 유심히 지켜보았다. B1은 문제를 해결하는 도중에 약수와 배수의 개념에 대해서 혼란을 겪었으며 그로 인하여 상당시간 문제 해결에 어려움을 겪었다.



[그림Ⅳ-6] 학생 B1의 추측에 대한 반례발견

연구자에 질문에 의해서 약수와 배수의 의미를 명확히 한 후에 4번과 7번 문제의 첫 번째 수가 1이 차이가 나는 것과 뺄셈의 결과가 9가 차이가 난다는 새로운 추측(B1-C3)을 하였다. 그렇지만 여전히 0으로 인하여 자신의 추측이 틀렸다는 생각을 버리지 못하였다.

한동안 고민을 하던 중, 연구자의 '계속 해결이 안되면 어떻게 할까?'라는 질문에 B1은 '똑같은 숫자를 없애요.'라는 대답을 하였다. 즉 자신의 추측을 버리지 않고 십의 자리와 일의 자리수가 같은 수를 제외하여 생각을 하는 괴물배제법을 생각한 것이다. 그리고 '0도 들어가는 배수 없나?'라는 글을 적고 '똑같은 수를 없애서 0도 없게 한다. 그러면 3의 배수가 맞는 것 같다.'라는 글을 적었다. B1은 배수와 약수의 개념에 대해 확실한 이해를 하지 못했기 때문에 9의



[그림Ⅳ-7] 학생 B1의 추측과 반례의 반응

<표 Ⅳ-3> 학생 B1의 P1 해결과정

프로토콜(중요 부분)	귀납적 추론 단계	추측/반례 정당화	비고
B1: 첫 번째하고 두 번째 문제의 답이 27이니까 세 번째 답은 제가 계산하지 않고 27을 적을 것 같아서 풀어보라고 한 것 같아요.(중략) B1: (31-13=18라고 쓰면서)아. 알겠어요. 빼는 숫자가 31인데 13으로 바뀌었어요.	0단계		
T: 5개의 뺄셈에서 하면서 보이는 게 없어? B1: (64-46=18이라고 적으면서) 맞나.. (6번까지 문제에서 45, 27, 18밖에 안나왔다. 이 문제의 형식에 답은 3개 밖에 없는 것 같다. 라고 적는다.)	1단계	B1-C1	
B1: 아니요. 한번 더 해 봐야할 것 같아요. (32-23=9라고 적으면서) 어. 이게 아닌데	2단계	반례발견 (기각법)	
T: 현이가 생각한 것이랑 다른데, 어떻게 하지? B1: 이것만 봤을 때는 3의 배수 같아요. (이 전 문제를 보면서) 아. 3의 배수다.	1단계	B1-C2	C
B1: 조금 더 해볼래요. (84-48=36이라고 적는다.) 맞는 것 같아요.	2단계, 3-1단계		
T: 그럼 선생님이 문제를 내볼게. 77을 적어봐. 그럼 선생님이 앞에 냈던 문제와 같은 문제야 다른 문제야? B1: (77-77=0이라고 적으면서) 0이 나와요. T: 그럼 0은 3의 배수야? B1: 3의 배수가 아니예요. 3의 배수는 3부터 곱해서 나가는 거예요. (9번 문제는 0이기 때문에 내 생각이 틀린 것 같다. 라고 적는다.)	2단계	반례발견	B
B1: 아. 생각이 났어요.(숫자 1을 하나씩 더해갈 때 0, 9, 18, 27, 36, 45. 라 적는다.) B1: (95-59=36이라고 적는다.)(96-69=27이라고 적는다.)	2단계		
B1: 아. 알겠어요. (94-49=45이고 1를 더해서 95-59=36이고 1를 더해서 96-69=27이고 이렇게 하나씩 더해가면 규칙적으로 반복될 것 같다.라고 적는다.) 답이요, 45에서 9를 빼면 36이 나오고요, 또 36에서 9를 27이 나오고요, 27에서 9를 빼면 18이 나오고요 18에서 9를 빼면 9가 나와요. 또 9에서 9를 빼면 0이 나와요.	2단계	B1-C3	
T: 맞아. 그래 0이 문제야. 조금만 더 생각해볼까? B1: (0도 들어가는 배수 없나? 라 적는다.) T: 그래 현이가 생각한 걸 적어보세요. B1: (똑같은 수를 없애서 0도 없게 한다. 그러면 3의 배수가 맞는 것 같다. 라고 적는다.)	3-1단계	B1-C4 (괴물배제법)	추측
T: 그럼 현이는 왜 그렇게 생각하는지 설명해 볼 수 있을까? 왜 그럴까? B1: 지금까지 나온게요, 9, 18, 27, 36, 45 밖에 안나와서요. 그렇게 생각했어요. (지금까지 나온 답이 9, 18, 27, 36, 45밖에 없어서 3의 배수인 것 같다. 라고 적는다.)	3-2b단계	귀납적 정당화	정당화

배수는 3의 배수라는 생각을 하지 못하고 문제 해결과정에서 3의 배수, 9의 배수를 사용하였다.

다. 학생 G2의 문제해결 과정

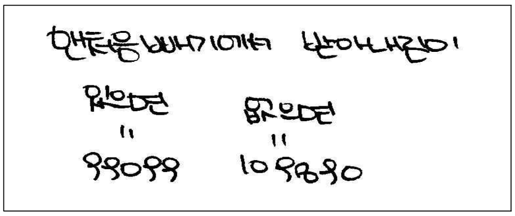
문제를 해결하는 과정을 다소 어려워하였지만 스스로 발견한 규칙을 찾는 것을 매우 흥미로워 하였으며 결정적인 규칙을 찾은 후에는 많이 기뻐하는 모습을 보였다. 하지만 정당화를 과정을 많이 어려워하고 왜해야만 하는지에 대한 질문도 하였다. 문제를 명확히 이해를 한 후에, 본격적인 문제 해결을 시작하였다. 5문제(1, 2, 4, 5, 6번 문제)를 해결한 후에 학생 G2는 문제에서

<표 Ⅳ-4> 학생 G2의 P2 해결과정

프로토콜(중요 부분)	귀납적 추론 단계	추측/반례 정당화	비고
G2 : 아 큰수.. 마지막 숫자(일의 자리)가 앞에 수(일의 자리 숫자)보다 커야해요. (중략) G2 : (50914를 적고 계산을 하여 18018이 나온다.)	0단계		
G2 : 어 나오네. 이상해. 뭐지? 미스테리야. 숫자가 2개 밖에 안나오네. 근데 얘는 이게 나오고. 얘는 이게 나오지? G2 : 90786-68709를 적고 계산하면서 7에는 받아내림이 없으니까 7-7=0 그러면 앞뒤가 같아지니까 99099 라고 적는다.)	1단계	G2-C1 추측	
G2 : 6번 문제 때문에 안되요. 0이 여기 있잖아요.(백의 자리에 0을 가르치면서)	2단계	반례발견 (기각법)	
G2 : 잘 생각이 나지 않아요.. (한참을 생각한 후) 어 맞는 것 같아요. T : 그것을 적어보세요. G2 : (천의 자리에 받아 내림이 있는 것=99099, 없는 것=109890이라고 적는다.)	1단계	G2-C2	C
T : 그럼 109989은 어떻게 할까? G2 : (한참을 생각한 후) 이것은 똑같은 거예요. T : 무슨 의미지? G2 : (천의자리, 백의자리, 십의자리가 반복될 때 = 109989라고 적는다.)	2단계	G2-C3	추측의 보완
T : 그럼 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리 반복된다는 것은 무슨 의미야? G2 : 맨 처음 빼기할 때 받아내림이 있으면 99099, 없으면 109890이지만 만약에 천의자리랑 십의자리가 똑같은 경우엔 받아내림이 있어도 109989	3-1단계	G2-C4	추측
T : 그럼 왜 그럴까? G2 : (한참을 생각하고) 저도 궁금해요. 근데 잘 모르겠어요. T : 어렵게 생각하지 말고 희주가 대답할 수 있을 정도만 대답을 해도 되는데. G2 : 뭐지? (한참을 생각한 후) 잘 모르겠어요.	3-2a단계		

보이는 규칙성을 찾기 시작하였다. 여러 문제를 해결하는 과정에서 일정한 규칙성을 인식한 후 다른 문제를 통하여 새로운 예를 발견하였다. 처음에는 새로운 예에 대해서 당황하였지만, 1번 문제의 60822, 4번 문제의 90786에서 천의 자리에 0이 있는 것을 발견하고 추측(G2-C1, 90786에서 7이 받아내림이 없으니까 0이 나오니까 똑같이 나오는 것)을 하였으나, 6번 문제(반례)를 확인한 후 추측 C1을 기각(기각법)하였다.

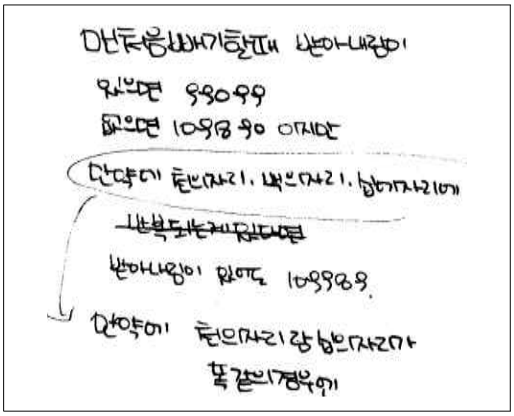
추측을 기각한 후 문제의 규칙성을 찾기 위해 한참을 고민을 하였고, 연구자는 같은 종류의 답이 나오는 것에 동그라미, 세모, 네모를 표시하게 한 후에 그것들 사이의 차이점에 대해서 더 관찰하도록 권고하였다. 그리고 얼마 지나지 않아, "천의 자리에 받아 내림이 있는 것=99099, 없는 것=109890" 라는 추측(G2-C2)을 하였다. 학생 G2는 자신의 두 번째 추측을 몇 가지 사례(8, 9번 문제)에 적용해보면서 자신의 추측에 대한 일정한 확신을 갖게 되었다.



[그림 Ⅳ-8] 학생 G2의 추측(G2-C2).

연구자가 계산의 결과가 109988이 나오는 것에 대해서 질문을 하였을 때, 자신의 추측(C2)을 보완하여 새로운 추측(C3)을 완성하였고, 그 내용은

"맨 처음 빼기에서 받아내림이 있으면 99099, 없으면 109890. 그리고 천의 자리, 십의 자리, 백의 자리에 똑같은 숫자가 반복되면 109989라고 적는다" 이다. 비교적 정확한 규칙을 찾았음에도 불구하고 학생 G2는 자신의 추측에 대한 확신을 갖지 못하고 다른 사례(10, 11, 12, 13번 문제)에 적용해 보았다. 그 후에 자신이 찾은 규칙에 대해서 확신을 갖게 되었다. 그리고 연구자는 추측 C3에 대한 발문을 하였고, 학생 G2는 발문에 따라 자신의 추측을 수정하면서 자신의 추측을 보다 더 정교화하여 최종 추측(G2-C4)을 하게 되었다.

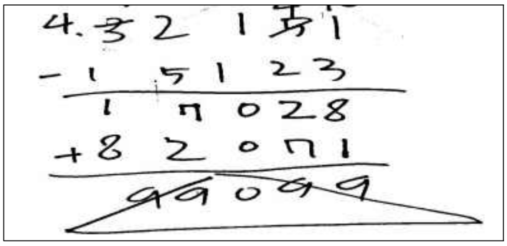


[그림 Ⅳ-9] 학생 G2의 추측의 보완.

최종 추측을 한 후에 자신의 추측에 대해서 왜 그렇게 생각하는 지에 대해서 질문을 하였을 때, 많이 어려워하면서 자신이 해결한 문제 이상의 설명을 하지 못하였다. 초등학생들에게 정당화는 어려운 과정이지만 이것은 학생의 발달 단계의 문제이기도 하지만 "왜?"이지만질문에 대한 고민 없이 수학을 지도한 결과라고도 생각할 수 있을 것이다.

라. 학생 B2의 문제해결 과정

학업성취도 평가 결과는 보통이지만 평소에 수학에 대한 홍미가 있고 호기심이 많은 학생이다. 문제풀이 초기에는 계산을 반복하는 것에 지루함을 느끼거나 힘들어하였지만 문제풀이 과정이 지속될수록 해결의 의지를 보였다. 문제를 해결하는 과정에서 많은 추측을 하였고 그것을 다시 수정하는 모습을 보였다. 3문제를 해결하는 과정에서 학생 B2는 "어떤 수로 해도 다 109890이 나온다."라는 최초의 추측(B2-C1)을 하게 되었다. 3개의 계산을 한 후에 자신이 생각한 규칙에 비교적 확신을 가진 B2는 더 이상 확인을 해보려고 하지 않아 연구자는 새로운 문제를 제시하였고 반례를 발견한 학생 B2는 자신의 추측이 틀렸다는 것을 발견하였다.



[그림Ⅳ-10] 학생 B2의 추측에 대한 반례.

자신의 추측에 대한 반례를 발견한 후 다른 사례를 찾기 시작하고 두 번째 추측(B2-C2)을 생각하였다. 두 번째 추측에 대해서도 확신을 하였지만 첫 번째 추측과 같은 강한 자신감은 보이지 않았다. 다른 사례에 적용하여 확인을 하려는 도중 문제의 조건(만의 자릿수가 일의 자릿수보다 2이상 커야 한다는 것)을 확인하던 중에 만의 자릿수와 일의 자릿수의 관계를 가지고 다른 추측(B2-C3, "만의 자리와 1의 자리가 홀수면 99099가 나온다.")을 생각하고 곧 바로 반례를 찾아서 추측(B2-C3)을 기각하였다.

자신의 세 번째 추측이 틀렸다는 것을 발견하고 한참을 고민을 하였다. 그리고 연구자는 답이 109890, 99099가 나온 것을 구별하기 위해서 동그라미와 세모로 표기를 해볼 것을 권고하

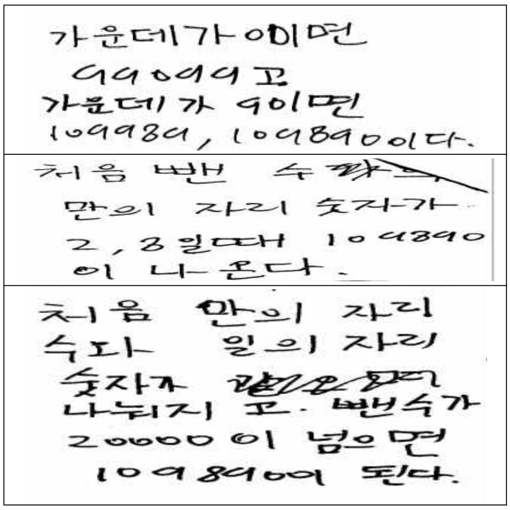
<표 Ⅳ-5> 학생 B2의 P2 해결과정

프로토콜(중요 부분)	귀납적 추론 단계	추측/반례 정당화	비고
T : 그럼 이 수는 지금 뺄셈을 할 수 있어? B2 : 아니요. T : 그럼 어떻게 되어야지? B2 : 일의 자리의 숫자가 만의 자리의 숫자보다 작아야해요.	0단계		
B2 : 생각이 났어요. (어떤 수로 해도 다 109890이 나온다. 라고 적는다.) T : 다른 수는 안 나올 것 같아? B2 : 그럴 것 같아요	1단계 → 3-1단계	B2-C1	A
T : 그럼 선생님이 문제를 내볼게. 32151을 적고 계산해보세요 B2 : (계산 규칙에 따라 계산을 해서 99099를 적는다.) 아니예요. T : 어떻게 생각해? B2 : 잘 모르겠어요.	3-1단계	반례발견 (기각법)	D
B2 : (34561을 적고 계산 규칙에 따라 계산을 해서 99099을 적는다.) 뭔지 알 것 같아요. 감이 왔어요. T : 적어보세요. B2 : (만의 숫자가 4이상일 때 109890이 나오고 만의 숫자가 3이하일 때 99099가 나온다. 라고 적는다.) 맞아요?	1단계	B2-C2	
T : 이번 문제는 만의 자리 숫자가 일의 자리의 숫자보다 2이상 커야 해요. B2 : 아 또 다른 생각이 났어요. B2 : (만의 자리와 1의 자리가 홀수면 99099가 나온다. 라고 적는다.) 근데 3번을 보니까 아닌 것 같아요.	2단계 → 1단계	B2-C3와 반례발견	C
B2 : 해보니까요.(처음 뺀 수가 20000 넘으면 109890이고 20000이 안되면 99099 라고 적는다.) T : 확신에 찬 것 같은데. 그럼 선생님이 문제를 내겠어요. 97267을 계산해 보세요. B2 : (97267을 적고 계산 규칙에 따라 계산을 해서 109890을 적는다.) T : 동현이가 생각한대로 109890이 나왔네 B2 : 이제 알았다. 알겠어요. 맞아요? 확실해요.	2, 3-1단계	B2-C4	
T : 선생님이 문제를 한 번 더 내볼께요. 95254를 계산해보세요. B2 : (95254를 적고 계산 규칙에 따라 계산을 해서 109989을 적는다.)	3-1단계	반례발견 (기각법)	
B2 : (가운데가 0이면 99099가 나오고 가운데가 9이면 109989, 109890이다. 라고 적는다.) B2 : (처음 뺀 수의 만의 자리 숫자가 2, 8일 때 109890이 나온다. 라고 적는다.) B2 : (처음 만의 자리 수와 일의 자리 숫자가 나눠지고 뺀 수가 20000이 넘으면 109890이 된다.)	1단계	B2-C5 B2-C6 B2-C7	B
T : 그럼 동그라미 표시, 세모 표시, 네모 표시를 한 첫 번째 수를 정리해보자. B2 : 아 이제 확실히 알 것 같아요. 찾았어요. (10000의 자리가 십의 자리보다 크면 109890이고 더 작으면 99099고 똑같으면 109989이다. 라고 적는다)	2,3-1단계	B2-C8	

였고 두 모양 사이에 공통점과 차이점을 찾아보라는 발문을 하였다. 그리고 조금 지나서 매우 확신에 찬 모습으로 네 번째 추측(B2-C3, “처음 뺀 수가 20000 넘으면 109890이고 20000이 안되면 99099”)을 학습지에 적었다. 그리고 자신이 생각한 추측이 다른 예에도 적용이 되는 것을 확인하였다.

그 때, 연구자는 천의 자리와 십의 자리가 같은 수의 예를 제시하고 그 예를 네모로 표시하도록 하였다. 다시 자신의 추측과 맞지 않는 예를 발견하자 다소 실망한 기색을 보였다. 그리고 동그라미, 세모, 네모를 표시한 수에 공통성과 차이

점에 대해서 찾아보도록 권고하였다. 조금 지나지 않아 다시 새로운 추측(B2-C5, B2-C6, B2-C7)을 하였지만 모두 성립이 되지 않음을 알고 한참을 또 고민하였다.



[그림Ⅳ-11] 학생 B2의 새로운 추측과 반례

연구자는 동그라미, 세모, 네모 모양의 수를 잘 정리를 해보라고 하였고, 학생 B2는 정리를 하면서 이 문제에 대한 확실한 규칙을 찾을 수 있었다. 하지만 여전히 "왜?"라는 정당화의 과정에는 잘 모르겠다는 이야기만 하였다. 연구자는 학생 B2가 정당화를 하지 않았다는 생각보다는 자신이 푼 문제들의 예를 비추어 자신의 추측이 올바르다는 경험적 정당화의 수준에 머물러 있다는 것을 느낄 수 있었다.

Ⅴ. 연구 결과

1. 귀납적 추론의 단계와 흐름 확인

본 연구자는 선행연구를 통해서 귀납적 추론의 단계와 흐름을 설정하였다. 학생 4명에 대한 문제해결 과정을 관찰한 결과 연구자가 정한 귀납적 추론의 단계와 흐름은 타당성이 있었다. 실제 문제를 해결하는 과정에서 자신의 추측을 찾고, 그것에 대해서 검증을 해보고, 추측을 수정하거나 새로운 추측으로 만드는 일련의 과정을 관찰할 수 있었다. 다시 말하면, 귀납적 추론이 일방향성(0단계→1단계→2단계→3단계→4단계)으로 흐르지 않고 귀납적 추론의 단계가 역동적으로 이동하는 흐름을 관찰할 수 있었다. <표 Ⅴ-1>은 연구대상자가 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 귀납적 추론의 단계의 흐름을 정리한 것이다.

<표Ⅴ-1> 연구대상자의 귀납적 추론의 흐름

구분		귀납적 추론의 흐름(단계)
문제P1	G1	0→1→2→2→2→1→2→3-1→2→3-1→3-2a
	B1	0→1→2→1→2→3-1→2→2→2→3-1→3-2b
문제P2	G2	0→1→2→1→2→3-1→3-2a
	B2	0→1→3-1→3-1→1→2→1→2→3-1→3-1→1→2→3-1→3-2b

2. 귀납적 추론 지도의 시사점

사례연구를 통하여 귀납적 추론을 지도하는데 있어 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있었다.

가. 반례의 지도

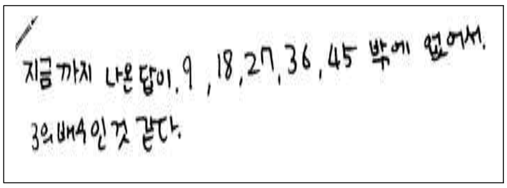
강문봉(2004)은 괴물배제법과 예외배제법을 Lakatos의 발견적 양식에 포함시켜 초등학교 수학에도 적용할 수 있다는 점을 밝혔는데 학생 G1과 B1의 문제해결 과정에서 그것을 찾을 수 있었다. 하지만 그 발견을 하기까지 많은 시간이 필요했고 어려움도 겪었다.

나. 정당화의 과정

현대 사회에서 강조하는 수학적 능력의 하나가 수학적 의사소통 능력이며 개정 교육과정에서도 수학적 의사소통을 강조하고 있다. 학생들은 수학 수업을 통하여 다양한 상황을 수학적 언어로 표현하고, 타인의 수학적 언어를 이해하며, 수학적 언어를 사용하여 토론하는 능력을 기르는 것이 필요하기 때문이다(교육과학기술부, 2007).

구성주의 관점에서도 학습은 사회적 과정이 반영되어 있으며, 관찰한 바를 공유하고, 관계를 기술하고, 절차를 설명하고, 학생 자신들이 수행한 수학적 사고 과정을 설명하여 정당화하는 활동에 적극적으로 참여할 필요가 있다(교육과학기술부, 2011a). 구성주의적 입장을 받아들이지 않더라도 최근에 수학적 의사소통이 강조되면서 정당화 과정의 중요성은 커지고 있다. Stylianides(2007; 김정하, 2010에서 재인용)은 정당화 과정은 수학적 이해와 수학적 지식을 의사소통하고 확립하고 발전시키기 위해 필수적이기 때문에 수학을 알고 행하는 것의 기초가 된다고 주장하였다.

학생 B1은 지금까지 계산한 결과가 3의 배수밖에 없어서 3의 배수라는 최종 추측을 하였다고 자신의 추측(B1-C4)에 대한 이유를 설명하였다. 귀납적 정당화를 한 것이다.



[그림 Ⅴ-1] 학생 B1의 추측에 대한 정당화.

다른 학생들도 정당화의 과정을 상당히 힘들어하였으며 이것은 수학 성적이 우수한 학생 G1, G2도 같았다. 심지어 정당화 과정이 필요하다는 것조차도 알지 못하였다. 문제의 마지막 부분에서 자신의 추측을 왜 그렇게 생각하는지에 대해 물어보았을 때, 학생들은 자신이 해결했던 사례를 바탕으로 한 경험적·귀납적 정당화의 수준에서 더 이상 나아가지 못하였다. 4명의 연구대상자 모두, 귀납적 추론 과정에서 Lakatos가 제시한 “소박한 추측”에서 멈추었다. “연역적 추측”은 문제로부터 연역적 증명을 통해 추측에 이르는 상태인데 문제를 해결하는 과정에서 자신의 생각에 대하여 논리적이거나 구체적인 증명 또는 정당화의 과정을 보여주지 못하였기 때문이다.

다. 발견의 매커니즘(mechanism)

P2의 문제해결 과정을 지켜보면서 발견의 매커니즘에 대해서 생각을 하게 되었다. 학생 G2, B2 모두 천의 자리와 십의 자리의 크기 비교에 따른 규칙에 대해서 전혀 생각을 하지 못하였다. G2는 받아내림으로, B2는 계산 과정에서만 규칙을 찾으려는 모습을 보였다. 여기서 연구자는 2가지의 생각을 할 수 있었다. 첫 번째는 학생들이 왜 천의 자리와 십의 자리의 대소 관계에 따른 규칙을 찾지 못하는 것에 대한 의문이었다. 초등학교에서는 부등식을 단순히 계산 결과의 비교로만 사용하고 문제를 해결하기 위한 조건(예를 들어, 중학교에서는 절대값을 지도할 때, 절대값 안에 있는 문자 또는 수의 부호에 따라 조건을 나누어 해결한다.)으로 사용을 하지 않는다. 초등학생들은 부등호를 문제의 조건으로 해결한 경험이 없거나 또는 매우 부족하기 때문에 천의 자리와 십의 자리의 크기를 비교하여 규칙을 찾는 것을 상당히 어려워 할 것이라는 생각을 하였다. 여기서 연구자는 자신이 가지고 있는 지식들의 연결 고리가 생기면서 새로운 발견이 이루어진다는 발견의 메커니즘과 잘 구조화된 사전 지식의 중요성에 대해서 다시 한 번 생각할 수 있었다.

두 번째는 새로운 사실을 발견(또는 추측) 할 때, 문제를 해결하려는 방향이 정해지면 한동안

그 방법으로만 문제를 해결하려는 태도를 관찰할 수 있었다. 즉, 자신이 처음에 정한 방향을 고수하는 경향이 크다는 것이다. 학생 G2와 B2는 자신이 초기에 선택한 방법으로만 문제를 해결하려고 노력하였다. 이것은 조두경, 박만구(2008)와 같은 결과였다. 다시 말하면, 인지 기능의 유연성이 부족한 것이다. 연구자가 적당한 발문과 권고로 방향을 바꿔주지 않았다면 자신이 처음에 생각했던 더하고 빼는 과정에서만 규칙을 찾으려고 했을 것이다. 이것은 새로운 발견을 할 때의 의식적 노력과 관계가 있을 것이다.

라. 학생중심 교실문화

미국이 문제해결 과정에 대해서 강조하였음에도 성취도가 낮고 창의적인 수학적 사고력의 부족이라는 문제점이 지적되었으며 그것은 결국 교사 중심의 수업 방식에서 비롯된 것이다(정동권 외, 2010). 학생의 수준에 따라 편차는 있지만 학생들은 주어진 과제를 해결하는데 비교적 많은 시간이 필요하였다. 하지만 시간이 지나면서 자신의 추측과 그것에 대한 반례를 발견하는 과정을 흥미 있어 하였으며 문제를 해결하려는 의지를 강하게 보이기도 하였다.

Ⅴ. 결론 및 시사점

본 연구의 결론 및 시사점은 다음과 같다.

첫째, 학생들에게 교사는 수학적 발달에 영향을 미치는 중심적인 역할을 하며 교사의 행동은 학생들 활동에 질적인 차이를 가져오기 때문에(전평국, 정인수, 2003), 문제해결 교육에서 문제를 제시하고 그것에 가장 효과적인 방법을 소개하는 지금까지의 교사의 역할이 변해야 한다. 교사는 다양한 문제해결 전략과 학생들의 사고를 촉진하고 스스로 탐색할 수 있는 기회를 적극적으로 제공해줘야 하며, 학생이 문제를 이해하는 수준과 문제해결 과정에서의 사고의 이동을 비롯한 학생의 개별적인 반응에 따라 지도를 하는 세심한 노력도 필요할 것이다. 더불어 학생이 흥미를 가질 수 있는 수학적인 소재를 적극적으로 발굴하여 학생의 수준에 맞게 제시하여 스스로 탐구할 수 있도록 도와주어야 한다. 학생들이 문제해결 과정에서 반례를 찾아내고 활용하는 데에 어려움을 느꼈는데 이것은 학생 G1과 B1만의 문제가 아닌 전체 학생의 문제일 것이다. 그 이유는 현재 학교에서 행해지고 있는 수학교육에 있다고 생각한다. 학생들이 평소에 문제를 해결하는 모습을 관찰해보면, 대다수의 학생들은 귀납적 추론의 방법으로 해결하는 문제에서 어떤 공통점과 규칙성을 발견하면 그것이 왜 그런지 확인해보지 않고 바로 정답을 확인한다. 귀납적 추론 상황의 문제가 아닌 경우에도 방법보다는 결과에 몰두하고 있다. 자신의 풀이가 정답과 일치할 경우에는 왜 그런지 생각하지 않고 그 문제를 해결하였다고 생각을 하고 틀렸을 경우에는 해설을 보면서 문제를 해결한다. '왜 틀렸을까?'라는 생각을 하지 않는다. 이러한 현상은 수학이 수학 본래의 의미를 잃어버리고 입시 위주의 교육으로 변질되었기 때문이다.

"증명하기를 가르치자. 그러나 추측하는 것도 가르치자." 라는 Polya의 말과 같이 교육과정에서 귀납적 추론(추측과 반박을 통한)에 적합한 소재를 선정하여 그 내용에 대해서 잘 정리된 지식을 가르치기보다는 잘 다듬어지지 않는 내용 그래서 학생들이 스스로 정련해가는 과정이 필요한 문제를 지도해야한다. 즉, 추측을 하고 그것에 대해 반례를 찾아보는 활동을 구성해보면서 학생 스스로 수학적 지식을 만들어가는 활동을 지도내용에 추가하거나 강화할 필요가 있다고 생각한다.

둘째, 귀납적 추론을 하는 과정에서 보여준 학생들의 정당화 수준은 Lannin(2005)과 김정하

(2010)의 결과와 일치하였다. 2009 개정교육과정 수학과에서는 수학적 추론 능력을 신장시키는 것을 교수·학습 방법의 한 과제로 제시하고 있으며, 그 방법으로 귀납을 통하여 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고 정당화할 수 있도록 하고 있다(교육과학기술부, 2011b).

연구자가 귀납적 추론에 관한 선행 연구 결과를 살펴보았을 때도 이전 연구들은 귀납적 추론을 통하여 어떤 규칙을 찾는 과정에 집중을 하였고 그것에 대한 구체적인 검증, 즉 정당화의 과정은 부족하였다. 그것은 초등학생에게 증명이나 연역적인 정당화 과정을 기대하기 어렵기 때문일 수 있다.

초등학교 수학에서 다루고 있는 내용은 매우 한정적이고 수학적 개념과 지식은 학생의 수준에 맞게 교수학적 변환의 과정을 거쳤다. 특히, 초등학생의 교수학적 변환의 정도는 중·고등학교보다 크기 때문에 엄밀하게 수학을 다룰 수 없다는 한계를 지니고 있다. 하지만 여러 연구들에서 초등학교 학생들도 연역적 정당화를 할 수 있다는 점을 밝히고 있으며(김정하, 2010), 강문봉(1996)은 어린이들이 타당한 추론을 하지 못하는 것을 어린이들이 사용하는 언어의 의미와 어른이 사용하는 언어의 차이로 기인한다고 생각하였고 Piaget의 발달 이론과 van Hiele의 수준이론, 함수 개념, 다면체의 개념 발달사를 통하여 확인할 수 있다고 하였다. 즉, 성인의 시각에서 보았을 때는 학생들의 추론이 논리적이지 않더라도 학생의 수준에서는 논리적이라고 볼 수 있다는 것이다. 그렇다면 초등학교 학생 수준에서 적합한 정당화를 지도하는 것이 좋다고 생각한다.

우리나라 중학생의 연역 추론 능력은 매우 낮고 귀납적 정당화과 연역 추론을 모두 정당한 추론으로 받아들이며 경험적 정당화로부터 더욱 강한 확신감을 갖는다. 그 이유는 하나의 예로부터 일반 원리를 지도하는 초등학교 교과서의 정당화 방법 때문이다(라병소 외, 2002). 연구대상자들이 문제를 해결하는 과정을 보면서 정당화 과정에 대한 현재의 지도 방법을 수정할 필요가 있다고 생각하였다. 미국 중서부에 거주하는 6학년 25명 학생에게 일반적인 규칙을 만들고 그것을 정당화하는 대수적 추론의 도입에 관한 실험을 실시하였던 Lannin(2005)의 연구에서 학생들은 경험적 정당화와 포괄적 예에 의한 정당화를 하는 모습을 보여주었다. 이에 본 연구자는 라병소 외(2002)의 의견과 같이 경험적 정당화와 연역 추론의 중간 단계의 정당화를 도입하는 것이 바람직하다고 생각하고 포괄적 예에 의한 정당화(3-2c단계)가 한 방법이며 초등학교 수학교과에서도 적극적으로 지도할 필요가 있다고 생각한다. 단순히 문제를 풀고 그것에 대한 답만 확인하는 수학이 아닌 학생들에게 '왜 그렇게 되는지' 또는 '왜 그렇게 성립하는지'에 대해서 다시 한 번 생각하게 하는 교육을 강조해야 한다.

셋째, 귀납적 추론을 새로운 관점에서 바라보는 인식의 변화가 필요하다. 지금까지 수학교육에서 귀납적 추론은 몇 개의 사례를 통하여 일반적인 규칙을 찾는 방법으로 많이 사용되어왔다. 물론 이것만으로도 귀납적 추론의 교육적 가치는 충분할 것이다. 하지만 본 연구에서 설정한 귀납적 추론의 2단계와 학생들의 실제 반응에서 살펴보았듯이 앞으로 이러한 관점에 귀납적 추론을 통하여 새로운 수학적인 사실을 발견해가는 방법으로서의 의미를 추가해도 좋을 것이다. 다시 말하면, 귀납적 추론을 수학적 창의력을 신장시킬 수 있는 구체화된 도구로서 바라보는 관점의 변화가 필요하다.

새로운 발견은 연구에 몰두하는 과정에서도 이루어지지만 책을 보거나 음악을 듣거나, 다른 사람들과 대화를 하는 등 그것과 다른 일을 할 때 갑작스럽게(아하 경험)일어나기도 한다. 이

러한 발견의 사례(뉴턴의 만유인력의 법칙, 아르키메데스의 부력의 원리 등)는 어렵지 않게 찾을 수 있다. 위대한 발견을 한 수학자들도 자신이 발견하고자 것을 위해서 끊임없이 고민하고 많은 노력을 하였을 것이다. 하지만 자신이 처음에 생각했던 방향, 기존의 자신이 해왔던 방법(새로운 발견을 하지 못했던)으로 몰두를 하는 시기에는 새로운 발견은 이뤄지지 않는다. 처음에 자신이 정했던 방법으로 대상을 바라보려 하기 때문에 발견을 하지 못하는 것이다. 하지만 무엇인가 다른 것을 하는 도중에 이전에 했던 방식과 다른 관점에서 대상을 바라보게 되거나 새로 학습한 지식을 통하여 발견에 이르는 결정적인 방법을 찾게 되고 이것이 새로운 발견에 이르게 되는 것이다. 따라서 학생들의 사고가 한 방향으로 고착화되지 않고 유연성을 가질 수 있게 하는 교육이 필요하다.

귀납적 추론의 2단계에서 나타난 새로운 수학적 발견의 과정과 인지 구조와의 구체적인 관련성 및 새로운 발견을 촉진하기 위한 방법, 인지구조의 유연성과 수학적 창의성과의 관계, 초등학생에게 수학적 정당화를 지도하는 효과적인 방법은 후속 연구과제로 남겨둔다.

참고문헌

강문봉(1995). 귀납적인 교수 방법의 재고. **대한수학교육학회 논문집**, 5(1), 65-72.

강문봉(1996). 초등학교에서 수학적 추론의 지도에 관하여(1) -추론 지도의 가능성과 귀납적 추론 지도를 중심으로-. **대한수학교육학회 논문집**, 6(1), 71-85.

강문봉(2004). Lakatos 방법론을 초등수학에 적용하기 위한 연구. **대한수학교육학회지**, 14(2), 142-156.

강옥기・신성균・강 완・류희찬・정은실・박교식(1985). **수학과 문제해결력 신장을 위한 수업 방법 개선 연구**. 서울: 한국교육개발원.

교육과학기술부(2007). **초등학교 교육과정 해설(Ⅳ) -수학, 과학, 실과-**. 서울: 저자.

교육과학기술부(2011a). **수학 지도서 6-2**. 서울: 저자.

교육과학기술부(2011b). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제 2011-361 호 [별책 8]. 서울: 저자.

김동일・김신호・이근재・정일호・정종진(1999). **아동발달과 학습**. 서울: 교육출판사.

김정하(2010). **초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구**. 박사학위논문, 이화여자대학교, 서울.

라병소・신경자・신준식・서동엽(2002). 초등학생들의 형식적 추론 능력에 관한 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 A <학교수학>** 41(3), 291-283.

박교식(1998). 우리 나라 초등학교 수학의 정체성에 관한 연구. **대한수학교육학회 논문집** 8(1), 89-100.

박만구(2009). 수학교육에서 창의성의 개념 및 신장 방안. **한국초등수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>**, 23(3), 803-822.

박성택(2003). **귀납추론이 중심이 되는 수학학습 방안**. 부산교육대학교 과학교육연구소 과학교육연구 제28집.

박혜진・권혁진(2010). 메타인지, 몰입과 수학 창의적 문제해결력 간의 구조적 관계 분석. **한국학교수학회논문집** 13(2), 205-224.

서동엽(2003). 초등 수학 교재에서 활용되는 추론 분석. **서울교육학연구**, 13(2), 159-178.

서동엽(2008). 수학적 추론의 본질에 관한 연구. **한국초등수학교육학회지**, 14(2), 65-80.

안승학(1999). **아동의 귀납적 추론능력을 향상시키기 위한 지도방법에 관한 연구**. 석사학

위논문, 인천교육대학교, 인천.

우정호(2003). **제2증보 수학교육학 개론**. 서울: 서울대학교출판부.

우정호(2007). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판문화원.

우정호(2009). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교출판문화원.

우정호・정영옥・박경미・이경화・김남희・나귀수・임재훈(2006). **수학교육학 연구방법론**. 서울: 경문사.

유현주(1995). **유리수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구**. 박사학위논문, 서울대학교, 서울.

전평국・정인수(2003). 수학적 문제해결 지도에서 교사의 역할에 대한 분석. **한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집>**, 15, 65-70.

정동권・김수미・김지원(2010). **수학 문제해결 지도의 이해**. 서울: 학지사.

정은실(1994). **Polya의 發見的 思考 過程에 대한 考察**. 晋州教育大學教 科學教育研究所誌 제20호.

정은실(1995). **Polya의 수학적 발견술 연구**. 박사학위논문, 서울대학교, 서울.

조두경・박만구(2008). 수학 문제해결 과정에서 나타나는 초등학생들의 수학적 사고 분석. **한국수학교육학회지 시리즈 A <학교수학>**, 47(2), 169-180.

조석희・황동주(2007). 중학교 수학 영재 판별을 위한 수학 창의적 문제해결력 검사 개발. **영재교육연구**, 17(1), 1-26.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification : The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *MATHEMATICAL THINKING AND LEARNING* 7(3), 231-258.

NCTM(1989). **수학교육과정과 평가의 새로운 방향**. 구광조・오병승・류희찬 역. 서울: 경문사.

片桐重男(1992a). **수학적인 생각의 구체화**. 이용률・성현경・정동권・박영배 역. 서울: 경문사.

片桐重男(1992b). **문제해결과정과 발문분석**. 이용률・성현경・정동권・박영배 역. 서울: 경문사.

Analysis of Inductive Reasoning Process

Lee, Sung Keun (Incheon Simgok Elementary School)
Ryu, Heuisu (Gyeongin National University of Education)

Problem solving is important in school mathematics as the means and end of mathematics education. In elementary school, inductive reasoning is closely linked to problem solving. The purpose of this study was to examine ways of improving problem solving ability through analysis of inductive reasoning process.

After the process of inductive reasoning in problem solving was analyzed, five different stages of inductive reasoning were selected. It's assumed that the flow of inductive reasoning would begin with stage 0 and then go on to the higher stages step by step, and diverse sorts of additional inductive reasoning flow were selected depending on what students would do in case of finding counter examples to a regulation found by them or to their inference.

And then a case study was implemented after four elementary school students who were in their sixth grade were selected in order to check the appropriateness of the stages and flows of inductive reasoning selected in this study, and how to teach inductive reasoning and what to teach to improve problem solving ability in terms of questioning and advising, the creation of student-centered class culture and representation were discussed to map out lesson plans.

The conclusion of the study and the implications of the conclusion were as follows:

First, a change of teacher roles is required in problem-solving education. Teachers should provide students with a wide variety of problem-solving strategies, serve as facilitators of their thinking and give many chances for them ide splore the given problems on their own. And they should be careful entegieto take considerations on the level of each student's understanding, the changes of their thinking during problem-solving process and their response.

Second, elementary schools also should provide more intensive education on justification, and one of the best teaching methods will be by taking generic examples.

Third, a student-centered classroom should be created to further the class participation of students and encourage them to explore without any restrictions.

Fourth, inductive reasoning should be viewed as a crucial means to boost mathematical creativity.

* key words : inductive reasoning (귀납적 추론), discovery (발견), justification (정당화), problem solving (문제해결), inductive reasoning process (귀납적 추론 과정).

논문접수 : 2012. 1. 31
논문수정 : 2012. 2. 17
심사완료 : 2012. 3. 9