

# 강성계수의 전달을 이용한 일정 단면을 갖는 비틀림 축계의 고유진동수 민감도 해석

## Sensitivity Analysis for Natural Frequency of Torsional Shafting with Constant Cross Section Using Transfer of Stiffness Coefficient

최명수 · 변정환

Myung-Soo Choi and Jung-Hwan Byun

(접수일 : 2011년 10월 16일, 수정일 : 2011년 12월 15일, 채택확정 : 2011년 12월 23일)

**Key Words** : Sensitivity Analysis(민감도 해석), Natural Frequency(고유진동수), Torsional Vibration(비틀림진동), Shafting (축계), Transfer Stiffness Coefficient Method(전달강성계수법), Reanalysis(재해석)

**Abstract** : In this paper, the authors formulate the sensitivity analysis algorithm for the natural frequency of a torsional shafting by expanding the transfer stiffness coefficient method. The basic concept of the present algorithm is based on the transfer of sensitivity stiffness coefficient, which is the derivative of stiffness coefficient with respect to design parameter, at every node from the first node to the last node in analytical model. The effectiveness of the present algorithm is confirmed by comparing the results of the sensitivity analysis and those of the reanalysis for the natural frequencies of a torsional shafting with a constant cross section. In numerical calculation, the design parameter is the diameter of the shaft element of the torsional shafting.

### 1. 서 론

선박, 자동차와 같은 수송 기계를 비롯해 많은 기계 장치에서 동력 전달을 위해 축(shaft)을 사용하고 있다. 축의 설계 시에는 강도 설계 및 강성 설계와 더불어 진동 설계가 중요한데, 진동 설계에서는 주로 축계(shafting)의 고유진동수를 자유진동 해석을 통해 파악한 후, 공진을 회피하도록 축계의 설계 변수를 조정한다<sup>1)</sup>.

비틀림 진동을 하는 축계에서는 축의 길이, 축의 재질, 축의 직경 등 여러 설계 변수가 존재하지만, 그 중에서 축의 직경이 가장 많이 이용된다. 그런데 축계에서 공진을 피하기 위해 축계의 비틀림 고유진동수를 변경할 때, 축계의 어느 부분의 직경을 얼마나 수정해야할지를 예측하는 것이 쉬운 일이 아니다.

물론 설계자가 시행착오를 통해 최적에 가까운 설계 변수 값을 찾을 수는 있지만 이 경우에는 상당한 시간과 노력을 필요로 한다.

민감도해석(sensitivity analysis)<sup>2)</sup>을 통해 설계자는 설계 변수의 변화에 따른 계의 특성 변화의 정도를 예측할 수 있다. 자유진동에 관한 민감도해석은 주로 유한요소법(finite element method)<sup>3)</sup>을 중심으로 고유치 및 고유벡터의 민감도를 구하는 연구가 수행되어 왔다<sup>4),5)</sup>. 한편, 저자들은 이전의 연구에서 전달강성계수법(transfer stiffness coefficient method)<sup>6)</sup>을 이용하여 직선 봉과 보의 민감도해석에 관한 연구를 수행하여 유효성을 확인한 바 있다<sup>7),8)</sup>.

본 연구에서는 비틀림 축계를 대상으로 고유진동수의 민감도 해석을 수행할 수 있는 알고리즘을 감도강성계수의 전달을 이용하여 정식화한다. 그리고 수치 계산을 통해 축의 직경을 설계 변수로 하여 비틀림 진동을 하는 축계의 고유진동수의 민감도를 구한 후, 이를 재해석 결과와의 비교를 통해 유효성을 확인한다.

M. S. Choi(corresponding author) : Department of Maritime Police Science, ChonNam National University.  
E-mail : engine@chonnam.ac.kr, Tel : 061-659-7183  
J. H. Byun : School of Marine Technology, ChonNam National University.

## 2. 해석 알고리즘

### 2.1 해석 모델

비틀림 자유진동을 하는 일정 단면의 축계는 Fig. 1과 같은 해석 모델로 고려할 수 있다. 해석 모델은 다수의 비틀림 축 요소와 기초(foundation)와 축 사이의 비틀림 스프링으로 구성된다.

해석 모델에서 인접한 축 요소 사이의 결합점 및 축계의 좌우단을 각각 절점이라 한다. Fig. 1과 같이 해석 모델이  $n$ 개의 축 요소로 구성되면 이 축계는  $n+1$ 개의 절점을 가지며, 축계의 좌단에서 우단으로 각 절점을 절점 1, 절점 2, ..., 절점  $n+1$ 이라 부른다.

비틀림 자유진동을 해석할 경우, 축계의 각 절점은 1자유도를 가지므로, Fig. 1의 해석모델은 총  $n+1$  자유도를 갖는다.

축 요소는 관성항과 강성항이 포함된 이산계로 모델링한다. 축계의 경계조건은 기초와 축 사이의 비틀림 스프링을 도입하여 모델링한다. 예를들어, 좌단의 경계조건이 고정이면 절점 1에 부착된 비틀림 스프링의 스프링상수 값을 무한대에 해당하는 아주 큰 값으로 고려한다. 만약 좌단의 경계조건이 자유이면 절점 1의 스프링상수 값을 0으로 고려한다.

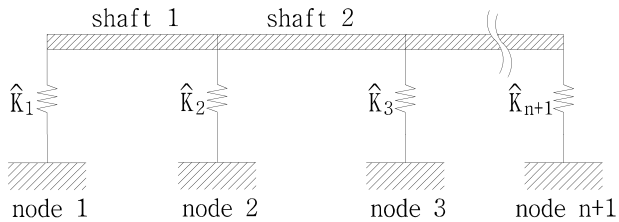


Fig. 1 Analytical model

### 2.2 자유진동 해석 알고리즘

고유진동수의 민감도 해석 알고리즘을 정식화하기 위해서는 자유진동 해석 알고리즘이 필요하다. 따라서 이전에 발표된 바 있는 전달강성계수법<sup>6)</sup>을 이용한 일정 단면을 갖는 축계의 비틀림 자유진동 해석 알고리즘을 간략히 정리해 보면 다음과 같다.

절점  $i$ 의 각변위( $\theta_i$ )와 절점  $i$  좌측의 토크 ( $\overline{T}_i$ ) 및 절점  $i$  우측의 토크 ( $T_i$ ) 사이의 관계를 다음 식과 같이 정의한다.

$$\overline{T}_i = \overline{S}_i \theta_i \quad (1)$$

$$T_i = S_i \theta_i \quad (2)$$

여기서  $\overline{S}_i$  및  $S_i$ 를 각각 절점  $i$  좌측 및 우측의 강성계수(stiffness coefficient)라 한다.

임의의 절점  $i$ 에 비틀림 스프링이 존재할 경우, 토크의 평형식은 다음과 같다.

$$T_i = \overline{T}_i + \widehat{K}_i \theta_i \quad (3)$$

이고, 여기서  $\widehat{K}_i$ 는 기초와 절점  $i$  사이에 부착된 비틀림 스프링의 스프링상수이다.

식 (1)과 (2)를 식 (3)에 대입하면, 강성계수의 포인트 전달식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S_i = \overline{S}_i + \widehat{K}_i \quad (4)$$

$i$ 번째 축 요소 좌우측의 토크와 각변위 사이의 관계를 일관성 질량행렬과 강성행렬로 나타내면

$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_i & K_i \\ -K_i & K_i \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} -J_i/3 & -J_i/6 \\ J_i/6 & J_i/3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

이고,  $K_i$  및  $J_i$ 는 길이  $l_i$ , 지름  $d_i$ , 횡탄성계수  $G_i$ , 밀도  $\rho_i$ 인  $i$ 번째 축 요소의 비틀림 강성( $K_i = \pi G d^4 / 32 l$ ) 및 질량극관성모멘트( $J_i = \pi \rho l d^4 / 32$ )를 의미한다. 그리고  $\omega$ 는 고유진동수이다.

식 (1)의  $i$ 를  $i+1$ 로 수정한 식과 식 (2)를 식 (5)에 대입하면, 강성계수의 필드(field) 전달식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\overline{S}_{i+1} = D_i + C_i V_i \quad (7)$$

여기서

$$V_i = B_i / G_i, \quad G_i = S_i - A_i \quad (8)$$

이다.

좌단의 경계조건을 비틀림 스프링  $\widehat{K}_1$ 으로 고려하였으므로,  $\overline{T}_1$ 은 영이 된다. 따라서 절점 1( $i=1$ )에서 식 (1)~(3)으로부터 절점 1 우측의 강성계수를 구하면

$$S_1 = \widehat{K}_1 \quad (9)$$

가 된다.

식 (9)를 시작으로 강성계수의 필드 및 포인트 전달식을 Fig. 1의 해석 모델에 연속적으로 적용하면 최종적으로 마지막 절점인 절점  $n+1$  우측의 강성계수( $S_{n+1}$ )를 구할 수 있다. 모델링 시에 축계 우단의 경계조건을 비틀림 스프링  $\widehat{K}_{n+1}$ 으로 고려하였으므로, 우단의 경계조건은 자유( $T_{n+1} = 0, \theta_{n+1} \neq 0$ )로 고려할 수 있다. 따라서 절점  $n+1$ 에서 식 (2)는  $T_{n+1} = S_{n+1}\theta_{n+1} = 0$ 이 되므로, 진동수 방정식은 다음 식이 된다.

$$S_{n+1}(\omega) = 0 \quad (10)$$

따라서, 식 (10)을 이용하여 임의의 진동수 값에 따른  $S_{n+1}$ 의 궤적을 그려보거나, 이분법 및 할선법 등과 같은 수치해석 기법을 적용하면 고유진동수를 구할 수 있다.

### 2.3 고유진동수 민감도 해석 알고리즘

이 절에서는 설계 변수를  $\alpha$ 로 두고, 설계 변수의 변화에 따른 고유진동수의 민감도를 계산하는 알고리즘을 정식화한다.

식 (1)과 (2)를 설계 변수  $\alpha$ 에 대하여 미분하면

$$\overline{T}_i^* = \overline{S}_i^* \theta_i + \overline{S}_i \theta_i^* \quad (11)$$

$$T_i^* = S_i^* \theta_i + S_i \theta_i^* \quad (12)$$

이 되고, 여기서 상첨자 \*는 설계 변수  $\alpha$ 에 대한 미분을 의미한다. 그리고  $\overline{S}_i^*$  및  $S_i^*$ 를 각각 절점  $i$  좌측 및 우측의 감도강성계수라 한다.

식 (3)을 설계 변수  $\alpha$ 에 대하여 미분하면

$$T_i^* = \overline{T}_i^* + \widehat{K}_i^* \theta_i + \widehat{K}_i \theta_i^* \quad (13)$$

이 되고, 여기서  $\widehat{K}_i^*$ 는 설계 변수  $\alpha$ 에 대한 비틀림 스프링( $\widehat{K}_i$ )의 미분을 뜻한다.

식 (11)과 (12)를 식 (13)에 대입하면, 감도강성계수의 포인트(point) 전달식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S_i^* = \overline{S}_i^* + \widehat{K}_i^* \quad (14)$$

식 (5)를 설계 변수  $\alpha$ 에 대하여 미분하면

$$\begin{Bmatrix} T_i^* \\ \overline{T}_{i+1}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i^* & B_i^* \\ C_i^* & D_i^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_{i+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i^* \\ \theta_{i+1}^* \end{Bmatrix} \quad (15)$$

여기서

$$\begin{bmatrix} A_i^* & B_i^* \\ C_i^* & D_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_i^* & K_i^* \\ -K_i^* & K_i^* \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} -J_i^*/3 - J_i^*/6 \\ J_i^*/6 & J_i^*/3 \end{bmatrix} - 2\omega\omega^* \begin{bmatrix} -J_i/3 - J_i/6 \\ J_i/6 & J_i/3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

이고,  $\omega^*$ 는 고유진동수의 민감도이다.

식 (11)의  $i$ 를  $i+1$ 로 수정한 식과 식(12)를 식 (15)에 대입하면, 감도강성계수의 필드(field) 전달식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\overline{S}_{i+1}^* = D_i^* + C_i^* V_i + C_i V_i^* \quad (17)$$

여기서

$$V_i^* = (B_i^* - G_i^* V_i)/G_i, \quad G_i^* = S_i^* - A_i^* \quad (18)$$

이다.

좌단의 경계조건을 비틀림 스프링  $\widehat{K}_1$ 으로 고려하였으므로,  $\overline{T}_1$  및  $\overline{T}_1^*$ 은 영이 된다. 따라서 식 (11)~(13)로부터 절점 1 우측의 감도강성계수를 구하면

$$S_1^* = \widehat{K}_1^* \quad (19)$$

가 된다.

식 (19)를 시작으로 감도강성계수의 필드 전달식과 포인트 전달식을 Fig. 1의 해석 모델에 연속적으로 적용하면 최종적으로 마지막 절점인 절점  $n+1$  우측의 감도강성계수( $S_{n+1}^*$ )를 구할 수 있다. 모델링 시에 축계 우단의 경계조건을 절점  $n+1$ 의 비틀림 스프링  $\widehat{K}_{n+1}$ 으로 고려하였으므로, 우단의 경계조건은 자유( $T_{n+1} = T_{n+1}^* = 0, \theta_{n+1} \neq 0$ )로 고려할 수 있다. 따라서 절점  $n+1$ 에서 식 (12)는  $T_{n+1} = S_{n+1}^* \theta_{n+1} + S_{n+1} \theta_{n+1}^* = 0$ 이 되므로, 식 (10)을 이용하여 다음 식을 유도할 수 있다.

$$S_{n+1}^*(\omega^*) = 0 \quad (20)$$

따라서, 식 (20)에 이분법 및 할선법 등과 같은 수치해석 기법을 적용하면 고유진동수의 민감도를 구할 수 있다.

### 3. 수치 계산 결과 및 고찰

#### 3.1 수치 계산 모델

Fig. 2에 나타난 계산 모델은 길이가 10 m이고 지름이 2 cm인 원형 일정 단면 중실축이다. 이 축을 100개의 축 요소로 이산화하여 모델링하였다. 축 재료의 물성치는 밀도가  $7860 \text{ kg/m}^3$ , 횡탄성계수가  $7.923 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ 이고, 양단의 경계조건은 자유이다.

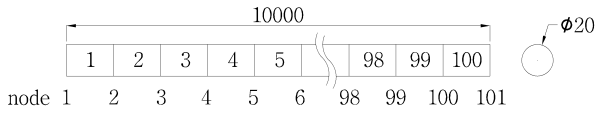


Fig. 2 Computation model

#### 3.2 자유진동 해석 결과

고유진동수의 민감도를 구하기 위해서는 먼저 자유진동 해석이 선행되어야 한다. 본 연구에서는 기존의 전달강성계수법<sup>6)</sup>을 이용하여 자유진동 해석을 수행하였고, 강제 모드를 제외한 1차부터 3차까지의 고유진동수를 계산한 결과가 Table 1이다. 계산 결과의 정확성을 확인하기 위하여, 기존의 유한요소법<sup>3)</sup>으로 계산한 결과도 Table 1에 추가하였다. 양 방법의 결과는 일치하였다.

Table 1 Natural frequencies of computation model [Hz]

Order	TSCM	FEM
1	158.75	158.75
2	317.54	317.54
3	476.42	476.42

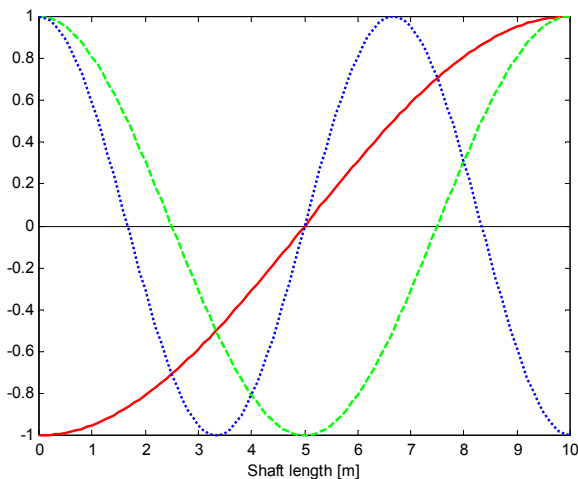


Fig. 3 Natural modes of computation model

Fig. 3는 수치 계산 모델에 대한 고유모드를 전달 강성계수법으로 계산한 결과이다. 그림에서 실선, 파선, 점선은 각각 1차, 2차, 3차 진동 모드의 형상이다.

#### 3.3 고유진동수 민감도 해석 결과

본 연구에서 개발된 방법으로, 축 요소 100개의 직경을 각각 설계 변수로 하여 1차 고유진동수의 민감도를 100번 계산한 결과가 Fig. 4이다. 100개의 요소 중에서 1, 50-51, 100번째 축 요소의 직경이 설계 변수일 때, 1차 고유진동수의 민감도가 아주 높았다. 따라서 일정 단면을 갖는 비틀림 축계의 설계자가 1차 고유진동수를 효과적으로 변경하기를 원한다면, 축의 양단 부분과 중앙 부분의 직경을 수정하는 것이 다른 부분의 직경을 수정하는 것보다 훨씬 효과적이라는 것을 알 수 있었다. 그리고 축의 중앙 부분의 민감도는 양이므로, 이 부분의 직경을 증가하면 고유진동수는 증가된다. 그러나 축의 양단 부분의 민감도는 음이므로, 이 부분의 직경을 증가하면 고유진동수는 감소된다.

Fig. 5는 축 요소 100개의 직경을 각각 설계 변수로 하여 2차 고유진동수의 민감도를 계산한 결과이다. 100개의 요소 중에서 1, 25-26, 50-51, 75-76, 100번째 축 요소의 직경이 설계 변수일 때, 2차 고유진동수의 민감도가 다른 부분에 비해 상대적으로 높았다. 따라서 비틀림 축계의 설계자가 2차 고유진동수를 효과적으로 변경하기를 원한다면, 축의 양끝 부분과 축의 1/4, 2/4, 3/4 부분의 직경을 수정하는 것이 다른 부분의 직경을 수정하는 것보다 효과적이다. 그리고 축의 양단 부분과 중앙 부분의 민감도는 음이므로, 이 부분의 직경을 증가하면 고유진동수는 감소되고, 이 부분의 직경을 감소하면 고유진동수는 증가된다.

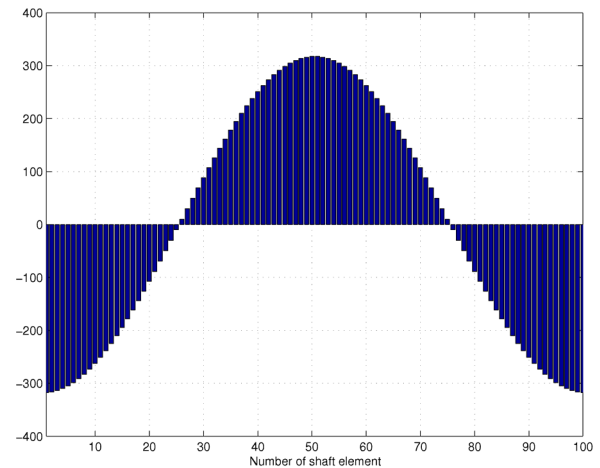


Fig. 4 Sensitivity of the 1st natural frequency

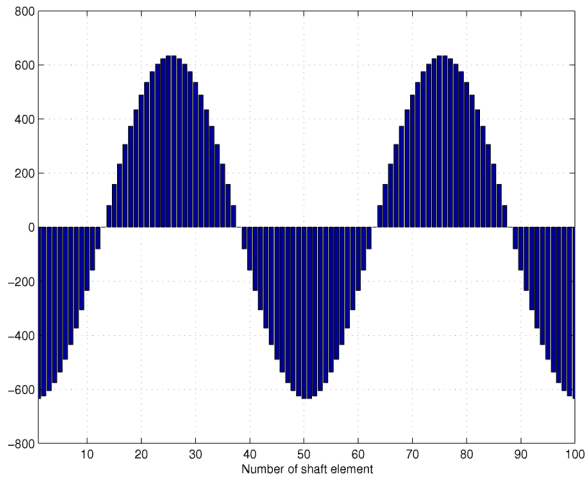


Fig. 5 Sensitivity of the 2nd natural frequency

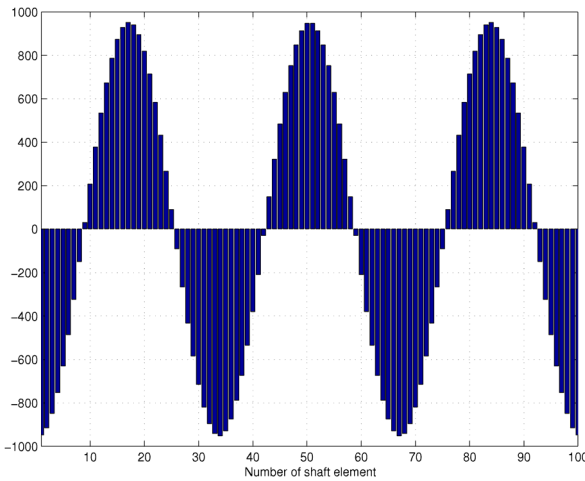


Fig. 6 Sensitivity of the 3rd natural frequency

Fig. 6는 축 요소 100개의 직경을 설계 변수로 하여 3차 고유진동수의 민감도를 각각 계산한 결과이다. 17과 84번째 축 요소에 대한 민감도 값은 951.6546, 34와 67번째 축 요소에 대한 민감도 값은 -951.6546, 50과 51번째 축 요소에 대한 민감도 값은 947.8989, 1과 100번째 축 요소에 대한 민감도 값은 -947.8989였다. 따라서 비틀림 축계의 설계자가 3차 고유진동수를 효과적으로 변경하기를 원한다면, 축의 양단 부분과 축의 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6 부분의 직경을 수정하는 것이 다른 부분의 직경을 수정하는 것보다 훨씬 효과적이라는 것을 알 수 있었다.

Fig. 4~Fig. 6을 종합적으로 고려해 보면 다음과 같은 정보를 얻을 수 있다. 축의 중앙 부분의 직경이 설계 변수일 때, 고유진동수의 민감도의 절대값이 크므로 설계 변경에 효과적이다. 그러나 이 때 1차 및 3차 고유진동수의 민감도는 양수, 2차 고유진동수의 민감도는 음수이다. 따라서 축의 중앙 부분의 직경을

Table 2 Natural frequencies of modified computation model [Hz]

Element	$f_1$	$f_2$	$f_3$
1	157.07	314.20	471.44
17	157.69	317.87	478.89
25	158.28	319.19	475.42
26	158.36	319.19	474.69
34	158.95	317.89	471.38
50	159.58	314.18	478.88
51	159.58	314.18	478.88
67	158.95	317.89	471.38
75	158.36	319.19	474.69
76	158.28	319.19	475.42
84	157.69	317.87	478.89
100	157.07	314.20	471.44

Table 3 Change of natural frequencies of computation model for variation of diameter of shaft element 50 [Hz]

(a) 10% increment

Order	Original	Estimation	Reanalysis
1	158.75	159.39	159.26
2	317.54	316.28	316.08
3	476.42	478.31	477.92

(b) 20% increment

Order	Original	Estimation	Reanalysis
1	158.75	160.02	159.58
2	317.54	315.00	314.18
3	476.42	480.19	478.88

(c) 30% increment

Order	Original	Estimation	Reanalysis
1	158.75	160.65	159.79
2	317.54	313.72	311.78
3	476.42	482.07	479.51

증가하면 1차 및 3차 고유진동수는 증가하고, 2차 고유진동수는 감소한다는 것을 알 수 있었다. 반면에 축의 양단 부분의 직경이 설계 변수일 때, 고유진동수의 민감도의 절대값이 높으므로 설계 변경에 역시 효과적임을 알 수 있다. 그리고 1차, 2차, 3차 고유진동수의 민감도는 모두 음수이므로, 축의 양단 부분의 직경을 증가하면 1차, 2차, 3차 고유진동수는 모두

효과적으로 감소하며, 이 부분의 직경을 줄이면 1차, 2차, 3차 고유진동수는 모두 효과적으로 증가한다.

본 연구에서 개발된 방법의 신뢰성을 확인하기 위하여, 축 요소 100개의 직경을 하나씩 변경하면서 자유진동 해석을 100회 재해석하였다. Table 2에는 축 요소의 직경을 20% 증가했을 때, 재해석한 1차 고유진동수( $f_1$ ), 2차 고유진동수( $f_2$ ), 3차 고유진동수( $f_3$ )를 나타내었다. 민감도 해석의 결과와 동일한 결과가 나왔고, 따라서 본 연구에서 개발된 해석 알고리즘의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

민감도해석 결과를 이용하면, 고유진동수의 예측이 가능해진다. Table 3에서는 50번째 축 요소의 직경을 10%, 20%, 30% 증가할 때, 1차 민감도를 이용하여 1차, 2차, 3차 고유진동수의 예측치를 구하였고, 이 결과를 재해석한 결과와 비교하였다. 축 요소의 직경 변화량이 증가하면서 오차가 증가하였지만, 직경의 변화에 대한 추정치가 재해석의 결과와 유사하였다.

#### 4. 결 론

이 논문에서는 일정 단면을 갖는 비틀림 축계를 대상으로 고유진동수의 민감도해석을 수행할 수 있는 알고리즘을 전달강성계수법으로 정식화한다. 그리고 양단의 경계조건이 자유인 일정 단면 비틀림 축계를 대상으로 수치 모델화한 후, 자유진동 해석을 수행하여 고유진동수와 고유모드를 구하였다. 그리고 설계변수를 축계를 구성하는 축 요소의 지름으로 정한 후, 고유진동수의 민감도를 계산하므로써 각 차수별로 고유진동수의 변화에 효과적인 축 지름의 위치를 알 수 있었다.

설계 변수인 축의 직경을 일부 수정하여 재해석한 결과와 감도해석 결과를 이용하여 고유진동수를 추정된 결과를 비교하였고, 이를 통해 개발된 방법의 유효성을 확인하였다.

#### 참고 문헌

1. C. G. Min, O. B. Lee and H. K. Lee, 2004, "Mechanical Design", Bomoondng, Seoul, pp. 225-283.
2. Uri Kirsch, 1981, "Optimum Structural Design", McGraw-Hill, New York, pp. 348-356.
3. C. K. Choi, 2002, "the Transfer of Stiffness

- Coefficient", TechnoPress, Deajeon, pp. 225-283.
4. Z. Liu, S. Chen and Y. Zhao, 1994, "An Accurate Method for Computing Eigenvector Derivatives for Free-Free Structures", Computers & Structures, Vol. 52, No. 6, pp. 1135-1143.
5. K. F. Alvin, 1997, "Efficient Computation of Eigenvector Sensitivities for Structural Dynamics", AIAA Journal, Vol. 35, No. 11, pp. 1760-1766.
6. D. H. Moon, M. S. Choi and J. M. Shim, 1997, "Torsional Vibration Analysis of Shaft System Using Transfer Dynamic Stiffness Coefficient", Journal of Korea society for Power System Engineering, Vol. 1, No. 1, pp. 9197.
7. M. S. Choi, 2001, "A Study on the Static Sensitivity Analysis Algorithm Using the Transfer of Stiffness Coefficient", Journal of Korea society for Power System Engineer -ing, Vol. 5, No. 4, pp. 82-89.
8. Deok-Hong Moon and Myung-Soo Choi, 2003, "Development of Sensitivity Analysis Algorithm for a Straight-Line Beam Structure by the Transfer Stiffness Coefficient Method", JSME International Journal (C), Vol. 46, No. 1, pp. 138-144.