http://dx.doi.org/10.7469/JKSQM.2012.40.2.117

열화가 Wiener process를 따르는 경우의 비용을 고려한 가속열화시험 계획

임 헌 상†

삼성전자㈜

Optimal Design of Accelerated Degradation Tests under the Constraint of Total Experimental Cost in the Case that the Degradation Characteristic Follows a Wiener Process

Heonsang Lim†

Samsung Electronics Co., Ltd.

Key Words : Accelerated Degradation Test, Wiener Process, Optimal Test Plan, Maximum Likelihood Estimation, Total Experimental Cost

Abstract

For the highly reliable products, an accelerated degradation test (ADT) is a useful tool which has been employed in industry to obtain reliability-related information within an affordable amount of time and cost. In an ADT, as all other reliability tests, it is important to carefully design the ADT beforehand to obtain estimates of the quantities of interest as precisely as possible. In this paper, optimal ADTs are developed assuming that the constant-stress loading method is employed and the degradation characteristic follows a Wiener process. Under the constraint that the total cost does not exceed a pre-specified budget, the stress levels, the number of test units allocated to each stress level and the number of measurement (termination time) are determined such that the asymptotic variance of the maximum likelihood estimator of the q-th quantile of the lifetime distribution at the use condition is minimized.

1. 서 론

시간적 측면에서의 품질을 나타내는 신뢰성은 제품의 기능이 고도화, 복잡화 됨에 따라 경쟁력 확보를 위한 필수적 요소가 되고 있다. 또한, 기술 개발의 속도가 빨라지고 제품의 수명 주기가 짧아지는 상황에서 단기간 내에 제품의 신뢰성을 평가하고 이를 향상시키는 것이 매우 중요해지고 있다. 그러나 오늘날 제품은 높은 신뢰성으로 인해 사용 조건에서 시험하여 짧은 시간 내에 수명에 대한 정보를 얻는 것은 거의 불가능해지고 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서 제품을 사용 조건보다 가혹한 조건에서 시험하여 제품의 고장 시간이나 중도 절단 시간을 측정하고 이를 이용하여 제품의 수명에 관련된 정보를 추정하는 가속수명시험(ALT - Accelerated Life Test)이 도입되었다. 가속수명시험의 도입에도 불구하고 제품의 높은 신뢰성 때문에 가속조건에서도 고장 시간 데이터를 획득하기 어려운 경우가 많다. 이런 경우 제품의 고장과 밀접한 관련이 있는 열화특성치를 관측하고 이 데이터로부터 제품의 수명에 대한 정보를 추정하는 가속열화시험(ADT - Accelerated Degradation Test)이 대안이 될 수 있다. 가속열화시험을 수행할 때, 다른 신뢰성 시험과 마찬가지로 한정된 자원으로 제한된 시간 내에 시험을 마쳐야 하기 때문에 비용 제약 하에서 제품의 신뢰성을 효율적으로 평

† 교신저자 inlife78@hanmail.net

가하기 위한 시험 계획을 마련하는 일이 매우 중요하다.

가속열화시험의 계획은 열화분포, 가속함수, 스트레스 인가방법, 관측방법 등 다양한 모형과 시험상황에 대하여 많은 연구가 이루어져 왔다 [2, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 18, 19]. 그러나 한정된 자원으로 제한된 시간 내에 시험을 마쳐야 하는 현업에서의 시험 상황을 반영한 총 시험 비용 제약하에서 가속열화시험의 계획에 관한 연구는 부족한 실정이다. Tang et al. (2004)은 총 시험 비용 제약 하에서 스트레스를 단계적으로 증가시키는 계단형 가속열화시험을 계획하였다. 열화특성치가 Wiener process를 따른다고 가정하고 평균수명 추정량의 점근분산이 주어진 값보다 작게 되는 영역 내에서 총 시험 비용이 최소화되도록 총 시료 수와 각 스트레스 수준에서의 측정횟수를 결정하였다. Liao and Tseng (2006)은 열화특성치가 Wiener process를 따른다고 가정하고, 총 시험 비용 제약 하에서 사용조건에서의 수명 분포의 q 분위수 추정량의 점근분산이 최소가 되도록 총 시료수, 측정간격, 총 측정횟수를 결정하는 계단형 가속열화시험을 계획하였다.

계단형 가속시험의 경우 시험 후 데이터 분석을 위해 누적 노출 모형과 같은 스트레스 변화 효과에 대한 가정이 필요하다는 단점이 있는 반면 일정형 가속시험의 경우 시험 수행 시 스트레스 수준의 유지 및 관리가 수월하고 시험 후 데이터 분석이 용이하다는 장점이 있어 가속열화시험을 이용하는 현장에서는 일정형 가속열화시험이 많이 활용되고 있다. 본 논문에서는 총 시험 비용 제약을 고려하는 경우, 스트레스가 일정하게 가해지는 상황에 대하여 가속열화시험의 계획을 개발하고자 한다. 열화특성치가 Wiener process를 따른다고 가정하고 총 비용 제약 하에서 사용조건에서의 수명 분포의 q 분위수 추정량의 점근분산이 최소가 되도록 스트레스 수준, 각 스트레스 수준에 할당하는 시료 수와 측정 횟수(총 시험 시간)을 결정하고자 한다.

2. 가속 열화 모형

2.1 Wiener process 열화 모형

열화 모형은 일반적으로 일반경로 모형(general path model)과 추계적과정 모형(stochastic process model)으로 분류할 수 있다 [10, 17]. 일반경로모형은 고정효과 모수(fixed-effect parameter)와 랜덤효과 모수(random-effect parameter)를 포함하는 실제 열화 경로(actual degradation path)와 오차항(error term)으로 모형화 된다. 일반경로 모형에서 실제 열화 경로는 시간의 결정적(deterministic) 함수로 나타나고 오차항은 일반적으로 시간에 독립인 측정 오차를 가정하기 때문에 시간에 따른 열화특성치 간의 상관관계를 설명할 수 없다 [Tseng and Peng, 2007]. 이런 이유로 시간에 따른 열화특성치 사이의 상관관계를 설명할 수 있는 추계적과정 모형이 열화에 대한 유용한 모형으로 이용되고 있는데, 본 논문에서는 추계적과정 모형 중 널리 이용되는 Wiener process를 열화모형으로 고려한다.

시점 t에서의 열화특성치 $y(t)$가 추세모수(drift parameter) η와 확산모수(diffusion parameter) σ^2를 가지는 Wiener process를 따른다고 가정하면 다음의 특성을 보인다.

1. $y(0)=0$,
2. $\{y(t)|t \geq 0\}$는 독립 증분을 가지며,
3. 각 독립 증분 $\Delta y_{ab}(=y(t_b)-y(t_a))$은 평균이 $\eta\Delta t$ $(=\eta(t_b-t_a))$이고 분산이 $\sigma^2\Delta t$ $(=\sigma^2(t_b-t_a))$인 정규 분포를 따른다.

2.2 가속모형 및 표준화

본 논문에서는 열화가 Wiener process를 따르며, 추세모수 $\eta(s')$가 스트레스 s'와 다음의 모형 중 하나를 따른다고 가정한다 [Nelson, 1990].

아레니우스 모형 : $\eta(s')=\delta_1'\exp(-\delta_2'/s')$, s'는 절대온도

멱함수 모형 : $\eta(s')=\delta_1'(s')^{\delta_2'}$, s'는 전압

지수 모형 : $\eta(s')=\delta_1'\exp(-\delta_2's')$, s'는 기후 변수

여기서, $\delta_1'(>0)$와 $\delta_2'(>0)$는 미지의 상수이다.

s_0'과 s_M'을 각각 사용 조건과 최대 스트레스 수준이라고 하면 모형의 간편성을 위해 각 스트레스 수준은 다음과 같이 표준화할 수 있다.

$$s=\frac{1/s_0'-1/s'}{1/s_0'-1/s_M'} \text{ 아레니우스 모형,}$$

$$=\frac{\ln s'-\ln s_0'}{\ln s_M'-\ln s_0'} \text{ 멱함수 모형,}$$

$$=\frac{s'-s_0'}{s_M'-s_0'}$$ 지수 모형.

표준화 후 사용조건에서의 스트레스 수준과 최대 스트레스 수준은 각각 0 과 1이 된다. 그리고 추세모수 $\eta(s')$는 다음과 같이 표준화된 스트레스 s 의 형태로 표현할 수 있다.

$$\eta(s)=\exp(\delta_1-\delta_2 s) \tag{1}$$

여기서,
$\delta_1=\ln(\delta_1')-\delta_2'/s_0'$, $\delta_2=\delta_2'(1/s_0'-1/s_M')$
아레니우스 모형,
$\delta_1=\ln(\delta_1')+\delta_2'\ln s_0'$, $\delta_2=\delta_2'(\ln s_M'-\ln s_0')$
멱함수 모형,
$\delta_1=\ln(\delta_1')+\delta_2' s_0'$, $\delta_2=\delta_2'(s_M'-s_0')$
지수 모형이고, $\delta_2'>0$, $s_M'>s_0'$이므로 δ_2는 항상 양수이다.

2.3 수명 분포

열화특성치가 추세모수 $\eta(s)$와 확산모수 σ^2을 가지는 Wiener process를 따를 때, 고장기준값 y_c에 도달하는 시간으로 정의되는 수명은 다음의 확률밀도함수를 갖는 inverse Gaussian 분포를 따른다 [Chhikara and Folks, 1989].

$$g(t)=\sqrt{\frac{y_c^2}{2\pi\sigma^2 t^3}}\exp\left[-\frac{\{\eta(s)t-y_c\}^2}{2\sigma^2 t}\right],\ t>0$$

서순근 et al. (1998)은 일정형 가속수명시험을 계획하는데 제품 열화의 물리적인 현상을 고려하여 수명분포로 inverse Gaussian 분포를 이용하였다.

수명이 inverse Gaussian 분포를 따르는 경우 스트레스 수준 s에서의 수명분포의 q 분위수 $t_{q,s}$는 근사적으로 다음과 같이 구할 수 있다 [Onar and Padgett, 2000].

$$t_{q,s}\approx\frac{\left[z_q\sigma+\sqrt{z_q^2\sigma^2+4\eta(s)y_c}\right]^2}{4[\eta(s)]^2}$$

여기서, z_q는 표준 정규 분포의 q 분위수이다. 위의 근사화는 특히 η가 σ^2에 비해 상대적으로 큰 경우에 정확하다 [Yum and Lim, 2011]. 식 (1)로부터 $\eta(s_0)=\eta(0)=\exp(\delta_1)$가 되고, $\hat{\delta}_1$과 $\hat{\sigma}$을 각각 δ_1과 σ의 최우추정량이라 하면 $t_{q,0}$의 최우추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{t_{q,0}}\approx\frac{\left[z_q\hat{\sigma}+\sqrt{z_q^2\widehat{\sigma^2}+4\exp(\hat{\delta}_1)y_c}\right]^2}{4\exp(2\hat{\delta}_1)}$$

3. 계획 문제의 가정 및 정형화

3.1 가정

본 논문에서는 다음과 같은 모형을 가정하였다.

1. 각 스트레스 수준 $s_i(i=1,2,\cdots,r)$ 에서 스트레스는 시험시간 동안 일정하게 가해지며 열화특성치의 측정간격은 Δt로 미리 동일하게 주어진다.
2. 각 스트레스에 할당되는 시료수를 $n_i(i=1,2,\cdots,r)$라 하면, 시험은 총 $n\left(=\sum_{i=1}^{r}n_i\right)$개의 시료에 대해 r대의 챔버에서 동시에 진행된다.
3. 각 스트레스 수준에서 측정횟수는 m으로 동일하며 총 시험시간 t_M은 $t_M=\Delta t\cdot m$을 만족한다.
4. 각 스트레스 수준에서 j번째 시료의 열화특성치 $y_{ij}(t)$는 추세모수 $\eta(s_i)$와 확산모수 σ^2을 가지는 Wiener process를 따른다.

y_{ijk}를 $t_{ijk}(k=1,2,\cdots,m)$ 에서 측정된 열화특성치라고 하면 각 열화증분 (degradation increment) $\Delta y_{ijk}=y_{ijk}-y_{ij,k-1}$은 평균이 $\eta(s_i)\Delta t$이고 분산이 $\sigma^2\Delta t$인 정규분포를 따른다. 즉, Δy_{ijk}의 확률밀도함수(probability density function)는 다음과 같다.

$$f(\Delta y_{ijk})=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}}\exp\left[-\frac{\{\Delta y_{ijk}-\eta(s_i)\Delta t\}^2}{2\sigma^2\Delta t}\right] \quad -\infty<\Delta y_{ijk}<\infty \tag{2}$$

3.2 최적화 기준

본 논문에서는 사용조건에서 수명 분포의 q 분위수 추정량의 점근분산을 목적함수로 총 시험 비용을 제약식으로 정하고, 목적함수가 최소가 되도록 스트레스 수준, 각 스트레스 수준에 할당하는 시료 수와 측정 횟수(총 시험 시간)을 결정하고자 한다. 목적함수를 계산하

기 위한 대수우도함수는 식 (1)과 (2)으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\ln L = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left[-\frac{1}{2}\ln(2\pi\Delta t) - \ln\sigma - \frac{\{\Delta y_{ijk}A_i\Delta t\}^2}{2\sigma^2\Delta t}\right]$$

여기서 $A_i = \exp(\delta_1 + \delta_2 s_i)$ 이다. 위 식을 δ_1, δ_2, σ에 대하여 일차 편미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_1} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left[-\frac{\{\Delta y_{ijk} - A_i\Delta t\}A_i}{\sigma^2}\right]$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_2} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left[-\frac{\{\Delta y_{ijk} - A_i\Delta t\}A_i s_i}{\sigma^2}\right]$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left[-\frac{1}{\sigma} + \frac{\{\Delta y_{ijk} - A_i\Delta t\}^2}{\sigma^3\Delta t}\right]$$

δ_1, δ_2, σ의 최우추정량 $\hat{\delta_1}$, $\hat{\delta_2}$, $\hat{\sigma}$은 위의 대수우도함수 $\ln L$을 최대화하는 값으로서 다음 세 식의 해를 계산함으로서 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_1} = 0, \frac{\partial \ln L}{\partial \delta_2} = 0, \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0$$

그리고 피셔정보행렬 F는 $\ln L$를 δ_1, δ_2, σ에 대하여 이차 편미분하고 음의 기댓값을 취하여 다음과 같이 구할 수 있다 [Lim and Yum, 2011].

$$\mathrm{F} = \frac{t_M}{\sigma^2}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{r} n_i A_i^2 & \sum_{i=1}^{r} n_i A_i^2 s_i & 0 \\ & \sum_{i=1}^{r} n_i A_i^2 s_i^2 & 0 \\ symmetric & & \frac{2m}{t_M}\sum_{i=1}^{r} n_i \end{bmatrix}$$

이로부터 F^{-1}를 구하고 h를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_{q,0}}{\partial \delta_1} \\ \frac{\partial t_{q,0}}{\partial \delta_2} \\ \frac{\partial t_{q,0}}{\partial \sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_c(z_q\sigma + u)}{\exp(\delta_1)u} - \frac{(z_q\sigma + u)^2}{2\exp(2\delta_1)} \\ 0 \\ \frac{1}{2\exp(2\delta_1)}\left(z_q + \frac{z_q^2\sigma}{u}\right)(z_q\sigma + u) \end{bmatrix}$$

여기서 $u = \sqrt{4\exp(\delta_1)y_c + z_q^2\sigma^2}$ 이다. 그러면, $\widehat{t_{q,0}}$의 점근분산은 다음과 같이 구할 수 있다 (부록 A).

$$Avar(\widehat{t_{q,0}}) = \mathrm{h}^t\mathrm{F}^{-1}\mathrm{h} = \frac{\sigma^2}{t_M}\left[h_1^2\exp(-2\delta_1)v + \frac{h_3^2 t_M}{2m\sum_{i=1}^{r} n_i}\right]$$

여기서

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i \exp(2\delta_2 s_i)s_i^2}{\sum_{i<l}^{r} n_i n_l \exp(2\delta_2 s_i + 2\delta_2 s_l)(s_l - s_i)^2}$$

이고 ‘t’는 전치(Transpose)를 나타낸다.

3.3 총 시험 비용 제약

총 시험 비용 $TC(n, \Delta t, m)$은 다음과 같은 세 부분으로 구성된다.

1) 시험 수행 비용 : $C_{op}\Delta t\ m$, 여기서 C_{op}는 단위 시간당 운영 비용,
2) 측정 비용 : $C_{mea}m\sum_{i=1}^{r} n_i$, 여기서 C_{mea}는 1회 측정 비용,
3) 시료 비용 : $C_{it}\sum_{i=1}^{r} n_i$, 여기서 C_{it} 는 1개 시료 비용.

그러므로 총 시험 비용은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$TC(n, \Delta t, m) = C_{op}\Delta t\ m + C_{mea}m\sum_{i=1}^{r} n_i + C_{it}\sum_{i=1}^{r} n_i$$

4. 가속열화시험의 최적 계획

4.1 문제의 정형화 및 최적화

3.2 절과 3.3절로부터 두 스트레스 수준을 갖는 가속열화시험의 최적화 문제는 다음과 같이 정형화할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Min } Avar(\widehat{t_{q,0}}) = \frac{\sigma^2}{t_M}\left[h_1^2\exp(-2\delta_1)v + \frac{h_3^2 t_M}{2m(n_1 + n_2)}\right] \\ &\text{s.t. } C_{op}\Delta t\ m + C_{mea}m(n_1 + n_2) + C_{it}(n_1 + n_2) \le C_b \\ &\quad 0 \le s_1 < s_2 \le 1 \\ &\quad n_1, n_2, m \in N = \{1, 2, 3, \cdots\} \end{aligned}$$

여기서,

$$v = \frac{1}{(s_2 - s_1)^2}\left\{\frac{s_1^2}{n_2\exp(2\delta_2 s_2)} + \frac{s_2^2}{n_1\exp(2\delta_2 s_1)}\right\}$$

이고 C_b는 미리 정해지는 시험 예산이다.

위 문제는 목적함수가 복잡하기 때문에 분석적(analytic) 방법으로 해를 구하기 어려우나 결정변수의 정수 제약과 s_1에 대하여 격자탐색을 이용하여 다음과 같은 방법으로 최적해를 구할 수 있다 (s_2의 경우 $Avar(\widehat{t_{q,0}})$가 s_2의 감소함수이므로 s_2의 최적해는 $s_2=1$이 된다 (부록 B)).

단계 1) 비용 제약 하에서 가능한 시료의 최대수를 다음과 같이 구한다.

$$n_{\max}=\left\lfloor \frac{C_b-C_{op}\Delta t}{C_{mea}-C_{it}} \right\rfloor$$

여기서 $\lfloor x \rfloor$는 x보다 작은 영역에서 가장 큰 정수이다.

단계 2) $n=1$로 정한다.

단계 3) $Avar(\widehat{t_{q,0}})$는 측정회수에 대하여 감소함수이므로 가능한 m의 최대값 $m=(C_b-C_{it}n)/(C_{op}\Delta t+C_{mea}n)$으로 정한다.

단계 4) $n_1=1$로 정한다.

단계 5) $n_2=n-n_1$으로 정하고, $0\le s_1<1$에 대해 0.01 단위로 증가시키며 $Avar(\widehat{t_{q,0}})$을 계산한다.

단계 6) $n_1=n_1+1$로 변경하고 $n_1=n$이 될 때까지 단계 5)를 반복한다.

단계 7) $n=n+1$로 변경하고 $n=n_{\max}$가 될 때까지 단계 3) ~ 단계 6)을 반복한다.

단계 8) 최적해는 $Avar(\widehat{t_{q,0}})$이 최소가 되는 결정변수 (n_1, n_2, m, s_1, s_2)의 조합으로 결정된다.

4.2 사전추정

$Avar(\widehat{t_{q,0}})$는 미지의 상수 δ_1, δ_2, σ에 의존하므로 최적시험 계획을 수립하기 위해서는 사전 추정이 필요하다. Lim and Yum (2011)은 최대 스트레스 수준에서의 예비 시험과 전문가의 판단에 의한 사전 추정 방법을 제시하였다. 소수의 시료에 대하여 최대 스트레스 수준에서 예비 시험을 수행하고 이 시험으로부터 획득된 데이터를 분석하여 σ와 $\delta_1+\delta_2$ 형태의 모수를 추정한다. p_0를 사용조건에서 특정 시점 (τ)까지의 고장 확률이라고 하면 δ_1은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta_1=\ln\left(\frac{z_0\sigma\sqrt{\tau}+y_c}{\tau}\right)$$

여기서, z_0는 표준 정규 분포의 p_0 분위수이다. 결과적으로 δ_1은 예비 시험으로부터 추정된 σ를 이용하여 사전 추정할 수 있고, δ_2는 예비 시험으로부터 추정된 $\delta_1+\delta_2$로부터 δ_1의 사전추정치를 뺌으로써 사전 추정할 수 있다.

5. 예 제

발광 다이오드(LED-Light Emitting Diode)는 높은 광도, 낮은 소비 전력, 높은 신뢰성 때문에 TV와 모니터 등의 전자제품에 널리 사용되고 있다. 본 예제에서는 사용조건에서 발광 다이오드의 0.1 분위수 수명을 추정하기 위한 가속열화시험을 계획하고자 한다. 고장과 밀접한 관련이 있는 열화특성치를 시간에 따른 LED 밝기의 감소라 하고 초기 대비 50% 이하로 떨어지면 고장으로 정의한다. 온도는 가속 스트레스 변수로 고려되고 최대 스트레스 수준과 사용 조건은 각각 150°C (=423°K)과 50°C(=323°K)로 주어진다. 열화특성치는 하루에 한번 측정되고 ($\Delta t=1$), 추세모수의 스트레스 의존성이 아레니우스 모형을 만족하는 Wiener proc-

<표 1> 시험 예산에 따른 최적 계획 ($s_2=1$)

C_b	m	n_1	n_2	s_1	$Avar(\widehat{t_{q,0}})$	Cost
1000	20	11	2	0.71	6.55×10^8	998.0
3000	40	18	4	0.71	1.94×10^8	3000.0
5000	49	26	5	0.71	1.12×10^8	4994.4
7000	62	29	6	0.71	7.84×10^7	6996.4
9000	83	28	6	0.71	6.03×10^7	8996.9

ess를 따른다고 가정한다.

가속열화시험의 최적 계획을 수립하기 위해서는 미지의 모수를 사전 추정하는 것이 필요하다. 최대 스트레스 수준 150°C에서 100시간 동안 10개의 시료에 대하여 사전시험을 수행하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

6.4, 4.8, 7.8, 7.0, 9.0, 6.2, 5.0, 3.0, 7.0, 9.4 (%)

위 데이터를 최우추정법으로 분석한 결과 $\delta_1+\delta_2$와 σ의 추정치로 각각 -2.7, 0.18를 구할 수 있다. 그리고 사용조건에서 6달 동안 고장 확률을 1 x 10-4라 하면, δ_1의 사전추정치는 -7.1이 되고 δ_2의 사전추정치는 4.4 (=-2.7-(-7.1))가 된다. 총 시험비용을 계산하기 위한 운영 단위 비용, 1회 측정 비용 그리고 1개 시료 비용을 각각 C_{op}=5.7/일, C_{mea}=2.9/측정, C_{it}=10/시료 라고 한

<표 2> 예제에 대한 민감도 분석

σ	δ_1	δ_2	$Avar\left(\widehat{t_{q,0}}\right)_0$	$Avar\left(\widehat{t_{q,0}}\right)^*$	Ratio
0.14	-5.68	3.52	8.13×10^6	7.53×10^6	1.0794
		4.40	2.10×10^6	2.10×10^6	1.0000
		5.28	5.65×10^5	5.36×10^5	1.0531
	-7.10	3.52	5.59×10^8	5.18×10^8	1.0794
		4.40	1.44×10^8	1.44×10^8	1.0000
		5.28	3.86×10^7	3.66×10^7	1.0535
	-8.52	3.52	1.05×10^{10}	9.70×10^9	1.0794
		4.40	2.70×10^9	2.70×10^9	1.0000
		5.28	7.22×10^8	6.85×10^8	1.0536
0.18	-5.68	3.52	8.94×10^6	8.29×10^6	1.0794
		4.40	2.31×10^6	2.31×10^6	1.0000
		5.28	6.22×10^5	5.90×10^5	1.0531
	-7.10	3.52	4.34×10^8	4.02×10^8	1.0794
		4.40	1.12×10^8	1.12×10^8	1.0000
		5.28	3.00×10^7	2.85×10^7	1.0534
	-8.52	3.52	4.97×10^9	4.60×10^9	1.0794
		4.40	1.28×10^9	1.28×10^9	1.0000
		5.28	3.43×10^8	3.25×10^8	1.0536
0.22	-5.68	3.52	9.06×10^6	8.40×10^6	1.0794
		4.40	2.34×10^6	2.34×10^6	1.0000
		5.28	6.31×10^5	5.99×10^5	1.0530
	-7.10	3.52	3.17×10^8	2.94×10^8	1.0794
		4.40	8.17×10^7	8.17×10^7	1.0000
		5.28	2.19×10^7	2.08×10^7	1.0534
	-8.52	3.52	2.42×10^9	2.25×10^9	1.0794
		4.40	6.25×10^8	6.25×10^8	1.0000
		5.28	1.67×10^8	1.59×10^8	1.0535

다. 다양한 시험 예산에 대하여 최적 시험 계획은 <표 1>에서 보여주고, 그 중 $C_b = 5000$일 때의 최적 시험 계획은 다음과 같다.

$$m = 49, n_1 = 26, n_2 = 5, s_1 = 0.71, s_2 = 1 \tag{3}$$

즉, 최적 계획은 26개 시료를 낮은 스트레스 조건 115°C, 5개 시료를 높은 스트레스 수준 150°C에 할당하여 각 스트레스 수준에서 각각 49회씩 측정하는 것이다. 비용을 고려하지 않은 Lim and Yum (2011)과 비교하면 s_1과 s_2는 각각 0.71과 1로 동일하며, 각 스트레스 수준에 할당하는 시료의 비율은 0.84:0.16 (26:5)로 비용을 고려하지 않는 경우의 0.83:0.17과 큰 차이가 없다. 또한, $1000 \le C_b \le 9000$ 범위에서의 최적계획을 비교하면 모든 범위에서 $s_1 = 0.71$과 $s_2 = 1$로 동일하고 $n_1/(n_1+n_2)$는 $0.82 \le n_1/(n_1+n_2) \le 0.85$에 존재한다. 이것은 스트레스 수준과 각 스트레스에 할당하는 시료 비율은 총 시험 비용에 민감하지 않는다는 것을 의미한다.

최적 가속열화시험 계획을 수립하는데 δ_1, δ_2와 σ의 사전추정치가 이용되기 때문에 δ_1, δ_2와 σ의 실제값에 대한 최적 계획과는 다를 수 있다. 그러므로 최적 계획의 δ_1, δ_2와 σ에 대한 민감도 분석이 필요하다. 위 예제에서 δ_1, δ_2와 σ 사전추정치의 ±20% 오차에 대하여 민감도 분석이 수행되고 그 결과는 <표2>에서 보여준다. 여기서 $Avar(\widehat{t_{q,0}})_0$와 $Avar(\widehat{t_{q,0}})^*$는 각각 식 (3)에서의 계획과 δ_1, δ_2와 σ의 참값을 사용하여 얻어진 최적 계획에 대한 $Avar(\widehat{t_{q,0}})$ 값이다. <표2>에서 Ratio $\left(Avar(\widehat{t_{q,0}})_0 / Avar(\widehat{t_{q,0}})^*\right)$ 값은 δ_1, δ_2와 σ의 사전추정 시 발생할 수 있는 오차에 대하여 민감하지 않다는 것을 의미한다.

6. 결 론

사용조건에서는 고장이 거의 발생하지 제품에 대하여 정상 사용조건보다 열악한 조건에서 시험하여 열화특성치를 측정하고 이로부터 짧은 시간 내에 정상 사용조건에서의 신뢰성에 대한 정보를 얻고자 하는 가속열화시험이 현업에서 자주 이용되고 있다. 이러한 가속열화시험은 한정된 자원으로 제한된 시간 내에 시험을 마쳐야 하기 때문에 시험을 시작하기 전에 비용을 고려한 가속열화시험 계획을 마련하는 일이 매우 중요하다.

본 논문에서는 비용을 고려한 가속열화시험의 계획을 개발하였다. 열화특성치가 Wiener process를 따르고 스트레스가 일정하게 인가되는 경우에 대하여 사용조건에서 수명분포의 q 분위수 추정량의 점근분산이 최소가 되도록 스트레스 수준, 각 스트레스 수준에 할당하는 시료 수와 측정 횟수(총 시험 시간)을 결정하였다.

추후 연구과제로 열화특성치가 단조증가하는 특성을 반영하여 열화가 gamma process를 따르는 경우의 비용을 고려한 일정형 가속열화시험의 계획이 있다. 또한, 두 가지 스트레스가 가해지는 경우 짧은 시간 내에 제품의 수명에 대한 많은 양의 정보를 획득할 수 있으므로 두 가지 스트레스가 가해지는 경우의 비용을 고려한 가속열화시험의 계획에 대한 연구가 필요하다.

참고문헌

[1] 서순근, 김갑석, 하천수(1998), "브라운 운동을 따르는 열화현상을 이용한 일정스트레스 가속수명시험의 최적설계", 「품질경영학회지」, 26권, 1호, pp. 74-87.

[2] 이낙영(1995), "Optimum Design of Accelerated Degradation Tests for Lognormal Distribution", 「품질경영학회지」, 23권, 1호, pp. 29-40.

[3] 최규명, 이낙영(1996), "Optimum design of Accelerated Degradation Tests for Weibull Distribution", 「품질경영학회지」, 24권, 3호, pp. 37-49.

[4] Boulanger, M. and Escobar, L. A.(1994), "Experimental Design for a Class of Accelerated Degradation Tests", *Technometrics*, Vol. 36, No. 3, pp. 260-272.

[5] Chhikara, R. S. and Folks, J. L.(1989), *The Inverse Gaussian Distribution*, Marcel Dekker, New York.

[6] Li, Q. and Kececioglu, D. B.(2004), "Optimal Design of Accelerated Degradation Tests", *International Journal of Materials and Product Technology*, Vol. 20, No. 1-3, pp. 73-90.

[7] Li, Q. and Kececioglu, D. B.(2006), "Design of an Optimal Plan for an Accelerated Degradation Test: A Case Study", *International Journal of Quality and Reliability Management*, Vol. 23, No. 4, pp. 426-440.

[8] Liao, C. M. and Tseng, S. T.(2006), "Optimal Design for Step-Stress Accelerated Degradation Tests", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 55, No. 1, pp. 59-66.

[9] Lim, H. and Yum, B. J.(2011), "Optimal design of accelerated degradation tests based on Wiener process models", *Journal of Applied Statistics*, Vol. 38, No. 2, pp. 309-325.

[10] Lu, C. J. and Meeker, W. Q.(1993), "Using Degradaon Measures to Estimate a Time-to-Failure Distrution", *Technometrics*, Vol. 35, No. 2, pp. 161-174.

[11] Nelson, W.(1990), *Accelerating Test: Statistical Models, Test Plans and Data Analysis*, John Wiley & Sons, New York.

[12] Onar, A. and Padgett, W. J.(2000), "Accelerated Test Models with the Inverse Gaussian Distribution", *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 89, No. 1-2, pp. 119-133.

[13] Park, J. I. and Yum, B. J.(1997), "Optimal Design of Accelerated Degradation Tests for Estimating Mean Lifetime at the Use Condition", *Engineering Optimization*, Vol. 28, No. 3, pp. 199-230.

[14] Park, S. J. and Yum, B. J.(2004), "Optimal Design of Step-Stress Degradation Tests in the Case of Destructive Measurement", *Quality Technology and Quantitative Management*, Vol. 1, No. 1, pp. 105-124.

[15] Tang, L. C., Yang, G. Y. and Xie, M.(2004), "Planning of Step-Stress Accelerated Degradation Test", *The Annual Reliability and Maintainability Symposium*, pp. 287-292.

[16] Tseng, S. T. and Peng, C. Y.(2007), "Stochastic Diffusion Modeling of Degradation Data", *Journal of data Science*, Vol. 5, pp. 315-333.

[17] Wu, S. J. and Chang, C. T.(2002), "Optimal Design of Degradation Tests in Presence of Cost Constraint", *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 76, No. 2, pp. 109-115.

[18] Yu, H. F.(2003), "Designing an Accelerated Degradation Experiment by Optimizing the Estimation of the Percentile", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 19, No. 3, pp. 197-214.

[19] Yu, H. F.(2006), "Designing an Accelerated Degradation Experiment with a Reciprocal Weibull Degradation Rate", *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 136, No. 2, pp. 282-297.

2012년 4월 10일 접수, 2012년 5월 16일 수정, 2012년 5월 30일 채택

부 록

부록 A. 사용조건에서 수명분포의 q 분위수 추정량의 점근분산 유도

피셔정보행렬의 역행렬은 Lim and Yum (2011) 에서 $N\sum_{i=1}^{r}\pi_i$ 를 $\sum_{i=1}^{r}n_i$ 로 대체하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathrm{F}^{-1}=\frac{\sigma^2}{t_M}\begin{bmatrix}\frac{f_{22}}{f_{11}f_{22}-f_{12}^2} & \frac{-f_{12}}{f_{11}f_{22}-f_{12}^2} & 0\\ & \frac{f_{11}}{f_{11}f_{22}-f_{12}^2} & 0\\ sym. & & \frac{1}{f_{33}}\end{bmatrix}$$

여기서, $f_{11}=\sum_{i=1}^{r}n_iA_i^2$, $f_{12}=\sum_{i=1}^{r}n_iA_i^2s_i$,

$f_{22}=\sum_{i=1}^{r}n_iA_i^2s_i^2$, $f_{33}=\frac{2m}{t_M}\sum_{i=1}^{r}n_i$,

$f_{11}f_{22}-f_{12}^2=\exp(4\delta_1)\sum_{i<l}^{r}n_in_l\exp(2\delta_2s_i+2\delta_2s_l)(s_l-s_i)^2$.

결과적으로, $\widehat{t_{q,0}}$ 의 점근 분산은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Avar(\widehat{t_{q,0}})=\mathrm{h}^t\mathrm{F}^{-1}\mathrm{h}=\frac{\sigma^2}{t_M}\left(h_1^2\frac{f_{22}}{f_{11}f_{22}-f_{12}^2}+h_3^2\frac{1}{f_{33}}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{t_M}\left\{\begin{array}{l}h_1^2\exp(-2\delta_1)\dfrac{\sum_{i=1}^{r}n_i\exp(2\delta_2s_i)s_i^2}{\sum_{i<l}^{r}n_in_l\exp(2\delta_2s_i+2\delta_2s_l)(s_l-s_i)^2}\\ +h_3^2\dfrac{t_M}{2m\sum_{i=1}^{r}n_i}\end{array}\right\}$$

부록 B. $Avar(\widehat{t_{q,0}})$의 s_2에 대하여 감소함수 증명

목적함수 $Avar(\widehat{t_{q,0}})$를 s_2에 대하여 일차 편미분하면, 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial Avar(\widehat{t_{q,0}})}{\partial s_2}$$

$$=\frac{\sigma^2h_1^2}{t_M\exp(2\delta_1)}\times\left[\begin{array}{l}\dfrac{-2}{(s_2-s_1)^3}\left\{\dfrac{s_1^2}{n_2\exp(2\delta_2s_2)}+\dfrac{s_2^2}{n_1\exp(2\delta_2s_1)}\right\}\\ +\dfrac{1}{(s_2-s_1)^2}\left\{\dfrac{-2\delta_2s_1^2}{n_2\exp(2\delta_2s_2)}+\dfrac{2s_2}{n_1\exp(2\delta_2s_1)}\right\}\end{array}\right]$$

$$=\frac{\sigma^2h_1^2}{t_M\exp(2\delta_1)}\frac{1}{(s_2-s_1)^3}\times\left\{\frac{-s_1^2-2\delta_2s_1^2(s_2-s_1)}{n_2\exp(2\delta_2s_2)}+\frac{-2s_1s_2}{n_1\exp(2\delta_2s_1)}\right\}<0$$

$\frac{\partial Avar(\widehat{t_{q,0}})}{\partial s_2}<0$ 이므로 $Avar(\widehat{t_{q,0}})$는 s_2의 단조감소함수이고, 결과적으로 s_2의 최적해는 $s_2=1$이 된다.