

전산구조해석을 위한 기하학적 비선형 유한요소해석 예제 개발

나원배[†] · 이선민
(부경대학교)

Development of Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis Examples for Computational Structural Analysis

Won-Bae NA[†] · Sun-Min LEE
(Pukyong National University)

Abstract

An undergraduate course named computational structural analysis becomes more significant in recent years because of its important role in industries and the recent innovation in computer technology. Typically, the course consists of introduction to finite element method, utilization of general purpose finite element software, and examples focusing on static and linear analyses on various structural members such as a beam, truss, frame, arch, and cable. However, in addition to the static and linear analyses, current industries ask graduates to acquire basic knowledge on structural dynamics and nonlinear analysis, which are not listed in the conventional syllabus of the computational structural analysis. Therefore, this study develops geometrically nonlinear examples, which can help students to easily capture the fundamental nonlinear theory, software manipulation, and problem solving skills. For the purpose, five different examples are found, developed for the analyses of cables and cable nets, which naturally have strong geometrical non-linearity. In the paper, these examples are presented, discussed, and finally compared for a better subject development.

Key words : Computational structural analysis, Finite element, Geometrically nonlinear, Example development

I. 서론

과거 유한요소법 또는 유한요소해석이라는 과목은 석사과정 또는 박사과정에서 개설되는 과목으로 이해되었다. 과목의 내용 및 교과서도 유한요소 및 정식화에 치중되어 새로운 수치해석 코드를 개발하는 관점에서 서술되었다(Bathe, 1982; Becker et al., 1981; Davies, 1980). 이후 컴퓨터의

하드웨어와 소프트웨어가 발달하고, 공학 및 과학 분야에서 유한요소법을 활용한 수치계산이 일반화됨에 따라 우수한 범용 유한요소 프로그램이 다수 출현하였다. 이는 유한요소 코드의 개발이라는 관점보다는 개발된 코드를 적절히 활용하고 응용하는 것으로 과목과 교과서의 내용이 전환되는 계기를 제공하였다(마이더스아이티, 2010; Moaveni, 2003; Chandrupatla and Belegundu, 1997; Desai

[†] Corresponding author : 051-629-6588, wna@pknu.ac.kr

and Kundu, 2001; Logan, 1993). 또한 대학원 과목으로만 인식되던 유한요소법이 전산구조해석이라는 명칭으로 학부 4학년과목에 개설되는 결정적인 동기가 되었다.

현재 학부과정에 전산구조해석을 개설한 학문 분야는 기계, 건설, 조선 등으로서 기계 및 구조 설계와 밀접한 관련이 있다. 일반적으로 이들 학과는 저학년에 고체역학과 관련된 과목을 배치하여 해석해가 존재하는 기계부품 및 구조 부재의 해석을 연습하고 고학년에 유한요소 프로그램을 활용하여 수치적 해를 계산하는 전산구조해석 과목으로 학부 교육과정을 마무리하고 있다.

이와 같은 교육과정은 산업체의 수요에도 밀접한 관련이 있다. 즉, 산업이 발달함에 따라 보다 복잡하고 기능적인 기계 및 구조형식이 요구되고, 이를 해석하고 설계하기 위해서는 컴퓨터를 활용한 모델링, 수치계산, 시뮬레이션 능력이 필수적이기 때문이다(박수홍 등, 2008; 하창승 등, 2007; 장영수 등, 2011; 김정아 등, 2011; Wiechert, 2003).

일반적으로 전산구조해석에서는 유한요소법의 개념과 정식화에 대해 간략히 설명한 후 기계 또는 구조형식별로 예제를 해석하고 학기말 프로젝트로 보다 복잡하고 실질적인 응용문제를 다루게 된다. 이 때, 일부 개발업체가 교육용으로 제공하는 무료 유한요소 소프트웨어를 학생들이 사용할 수 있다.

일반적으로 전산구조해석에서 다루어지는 수치 예제는 보(beam), 트러스(truss), 프레임(frame), 아치(arch), 케이블(cable)로 구성된다. 해석의 범주는 정적해석(static analysis)과 선형해석(linear analysis)에 국한되는 경우가 많다. 따라서 학부생은 산업현장에서 종종 수행하게 되는 비선형(nonlinear) 및 동적(dynamic) 해석을 경험하지 못하고 졸업하는 경우가 많다. 이와 같은 수업 구성은 선형 역학과목에서 동적해석과 비선형해석이 다루어지지 않는 것에서 시작된다. 즉, 동적 해석과 비선형해석의 이론이 학부생이 학습하기

에는 다소 복잡하고 어렵기 때문에 역학이론에서는 개념적인 소개만 다루고 있다. 이와 같은 상황은 이론의 복잡성과 더불어 해석적인 해를 구할 수 있는 예제의 부재에서도 기인한다. 즉, 개념적인 설명을 뒷받침할만한 해석 예제가 부족하다는 것이다.

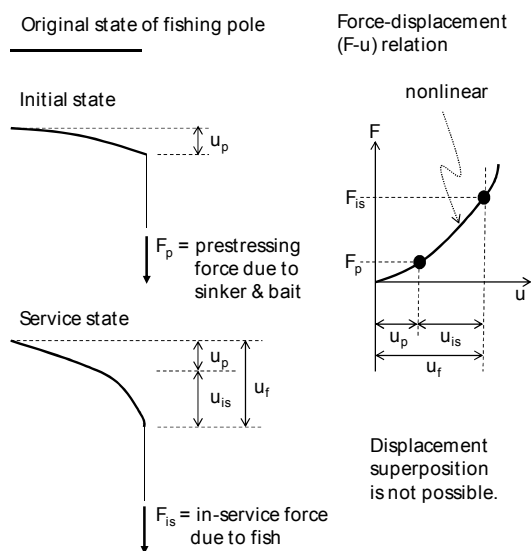
따라서 본 연구에서는 개념적 설명을 뒷받침하는 수치해석 예제를 개발함으로써 전산구조해석 과목의 강의 구성을 현실화하는데 그 초점을 맞추고 있다. 특히, 기존의 정형화된 수치예제의 범주에 속하지 않았던 기하학적 비선형 해석 예제를 개발함으로써 반력계산에 국한되었던 케이블 구조의 해석범위를 변위계산으로 확장하는데 그 목적이 있다. 여기서 기하학적 비선형해석은 해양 및 수산산업에서 빈번히 사용되는 케이블을 염두에 두고 선택하였다. 즉, 각종 해양구조물, 관측 장비, 양식시설, 해상풍력발전 등에 케이블 구조 양식의 사용이 절대적이고 이들 구조는 재료학적 비선형성보다는 기하학적 비선형성이 탁월하기 때문이다(나원배, 1996).

이를 위해 본 논문은 아래의 관점에서 구성되었다. (1) 비선형 해석 이론을 학부생이 이해할 수 있는 가장 기본적인 식으로 표현한다. (2) 비선형해석이 가능한 범용프로그램과 이들의 기능을 설명한다. (3) 수치해석 예제를 개발하고 케이블, 케이블망의 형상별로 분류하여 소개한다. (4) 초기하중과 추가하중에 따라 초기형상과 최종형상을 계산하는 방법을 설명한다. 이때 학부생은 선형과목에서 고체역학의 기초를 학습한 것으로 간주하였으므로 기초적인 용어와 역학이론은 세부적인 설명을 생략하였으며, 선형 연구자들에 사용된 예제를 발굴함으로써 학생 본인의 해석결과와 비교 검토하게 하였다.

II. 비선형 해석 이론

1. 비선형 거동

재료 또는 하중이 선형성을 유지할 때도 케이블 구조물의 응답은 초기하중(pre-stressing force)과 작용하중(in-service load)에 비선형적이다. 초기하중은 구조물의 정적평형상태를 이루도록 작용하는 하중인데, 자중과 압력 등이 있다. 초기하중에 의해 구조물은 안정되고 강성(stiffness)이 발생한다. 초기하중에 관한 케이블 성분은 항상 비선형적이고 응력상태와 평형형상은 초기하중에 종속적이다. 작용하중은 정적 또는 동적인 활하중으로서 구조물이 사용기간 동안 만나는 하중을 의미한다. 이 하중은 초기하중에 겹쳐지게 된다. 작용하중에 대한 구조물의 응답은 구조물의 초기형상, 초기응력상태, 작용하중의 크기와 방향에 따라서 비선형 또는 유사선형(quasi-linear)이 될 수 있다. 응답은 엄밀히 선형이 아니므로 다른 작용하중의 결과와 중첩할 수 없다. 이를 간략하게 설명하면 [그림 1]과 같다.



[그림 1] 낚싯대의 기하학적 비선형 거동

케이블의 비선형거동은 구조해석의 주요 대상이 되는 변위, 변형률, 응력에 영향을 미친다. 즉, 구조물의 비선형성의 원인은 기하학적 비선형성(비선형 변형률-변위 관계식), 재료학적 비선형성

(비선형 응력-변형률 관계식), 하중에 관한 비선형성(비선형 응력경계조건), 운동학적 비선형성(비선형 변위경계조건)으로 분류되며(Felippa, 1976), 이들은 지배방정식과 경계조건에 영향을 미치므로 방정식의 해법과 결과가 달라진다.

그러나 정적변위해석에서는 케이블 구조물의 재료적인 거동은 특수한 몇 가지 경우를 제외하면 일반적으로 선형으로 고려해도 충분하고(Leonard, 1988), 기하학적 비선형성에 비해 상대적으로 선형성이 작기 때문에 기하학적 비선형거동이 주요 비선형거동이라고 할 수 있다.

2. 기하학적 비선형 해석

케이블과 같은 구조물의 기하학적 비선형거동 해석을 위해 비선형방정식의 효율적인 해법 개발에 많은 연구가 수행되었다(Noor, 1999). 많은 해법이 제안되었으나 모든 문제에 최적인 방법은 없고, 대부분의 비선형해석프로그램은 사용자가 여러 가지 종류의 비선형성과 해법알고리즘을 선택할 수 있도록 되어 있다.

기하학적 비선형성을 고려한 구조해석의 경우, 강성행렬이 비선형 항을 포함하고 있으므로 일반적으로 반복해석을 통해 구조물의 변위를 구하게 된다. 즉, 비선형문제를 구간마다 선형화하여 이를 연속적으로 푸는 방법이다. 비선형방정식의 해법은 증분법(incremental method), 반복법(iterative method), 그리고 이 두 방법을 동시에 적용하는 혼합법(mixed method)으로 대별된다(Leonard, 1988). 이들 방법을 효과적으로 설명하는 그림은 Cook 등(1989)에 의해 소개되었다.

증분법에서는 가해야 할 하중이나 주어진 경계치를 여러 단계로 나누고, 각 증분단계에서 응력과 변형률의 변화가 미소하다고 가정하여 응력과 변형률, 그리고 변위와 변형률 사이의 관계를 선형화한다. 현재 증분단계에서의 강성행렬은 이전 증분단계까지의 응력과 변위를 이용하여 구하고, 이로부터 주어진 경계값이나 하중증분과 함께 구

성되는 식(1)을 풀어서 변위 증분 등을 구한다. 이후 식(2)와 같이 이전 단계까지의 값들에 더하여 현 증분단계까지의 하중이나 경계값에 대한 변위 등을 구한다.

$$K(u_m)\Delta u_{m+1} = \Delta R_{m+1} \quad (1)$$

$$u_{m+1} = u_m + \Delta u_{m+1} \quad (2)$$

여기서 K 는 강성행렬, u 는 변위벡터, Δu 는 변위벡터의 증분, ΔR 는 하중벡터의 증분이다.

증분법을 이용할 때 하중이나 경계값의 증분량을 작게 하면 할수록 근사해는 정해에 수렴하는데, 이 방법으로 대부분의 비선형 문제의 근사해를 추정할 수 있고, 또한 하중이나 경계값의 증가에 따른 비선형 거동을 알 수 있다. 그러나 비선형 구조해석에서 강성행렬을 구하는 것은 선형 문제보다 상당히 복잡한 계산과정을 거치게 되어 긴 계산시간이 요구된다. 더욱이 증분법에서는 각 증분단계마다 강성행렬을 새로이 계산해야 하기 때문에 계산시간이 길어진다. 정해에 근사하는 해를 구하기 위해서는 증분량을 충분히 작게 해야 하므로 계산시간이 상당히 길어지는 단점이 있으며, 좋은 결과를 얻기 위해 증분량의 크기를 결정하는데 어려움이 있다. 이러한 단점에도 불구하고 증분법은 계산시간이 길다는 점만을 감수한다면 증분량을 작게 하여서 정해에 가까운 근사해를 구할 수 있다. 이와 같이 증분법은 비선형문제에 적용성이 높기 때문에 정해나 실험결과가 없는 문제에도 광범위하게 적용할 수 있고, 하중이나 경계값의 증가에 따른 비선형 거동을 파악할 수 있다는 장점이 있다.

반복법은 주어진 경계값이나 하중에 대해 허용기준치 내에서 평형이 만족되도록 근사해를 반복적으로 계속 수정하는 방법으로 직접반복법과 Newton-Raphson법 등이 있다. 임의의 $m+1$ 번째 반복계산에서 강성행렬로부터 다음단계까지 해를 구하기 위한 평형방정식은 다음과 같다.

$$K(u_m)u_{m+1} = R \quad (3)$$

여기서 $K(u_m)$ 은 m 번째 반복해석에서 구하는 변위 u_m 에 의해 구성된 강성행렬이며 u_{m+1} 은 그 다음단계($m+1$)에서 구하는 변위이다. 위의 식을 변위에 대해 정리하면 $m+1$ 번째 반복과정에서 구하는 변위는 다음 식으로 표현된다.

$$u_{m+1} = K(u_m)^{-1}R \quad (4)$$

식(4)에 따라 반복해석을 수행하는 과정에서 m 번째 반복과 $m+1$ 번째 반복에서 구한 변위의 차이가 허용치보다 작을 때 해가 수렴한 것으로 간주하고 마지막으로 구한 해를 근사해로 취하고 반복해석을 마친다.

반복법은 사용하는 행렬계수에 따라 접선법(tangential method)과 활선법(secant method)으로 구분된다. 일반적인 접선법과 활선법에서는 매 반복마다 계수행렬을 새로 계산하지만, 초기 접선법이나 초기활선법에서는 이를 계산하지 않고 처음의 것을 수렴이 될 때까지 그대로 사용한다. 일반적인 접선법과 활선법은 수렴이 빠른 반면에 계수행렬을 반복 때마다 다시 계산해야 하는 단점이 있고, 초기접선법과 초기활선법은 처음 계수행렬을 수렴이 될 때까지 그대로 이용하므로 계수행렬을 계산하는 시간이 단축되지만 수렴이 느린 단점이 있다.

혼합법은 증분법과 반복법의 장점을 취한 방법으로서 하중을 몇 개의 단계로 나누어 가하고 각 하중단계에서 반복법을 사용하여 구조물을 해석하는 방법이다. 따라서 이 방법을 사용하면 계산시간을 단축시키면서 해의 수렴을 향상시킬 수 있어 현재 가장 많이 사용되고 있다(최창근, 1992). 대체로 반복법에 의해 해의 수렴의 정도를 확신할 수 없거나 또는 비선형거동을 알고 싶을 때 증분법을 사용하면 근사해를 어느 정도 추정할

수 있고, 수렴에 대한 확신이 있으면 혼합법을 적용하는 것이 좋다(임상전 등, 1991).

Ⅲ. 유한요소 프로그램

1. 프로그램 특성

구조해석에서 응용할 수 있는 유한요소 프로그램은 범용프로그램과 특수용도 프로그램으로 분류할 수 있다. 일반적으로 비선형연속체 해석에서는 ABAQUS, ADINA, ANSYS, MIDAS 등의 범용프로그램이 자주 사용된다.

이들 프로그램의 해석범위는 일반적으로 구조해석과 장해석(field analysis)으로 대별된다. 구조해석은 정적해석, 동적해석, 안정성해석으로 구성된다. 각각의 해석은 다시 선형과 비선형으로 나눌 수 있다. 요소라이브러리는 구조해석요소, 전열요소, 유체요소, 특수요소 등으로 구성되어 있다. 요소에 따라 적용할 수 있는 비선형성이 달라지므로 사용 시 주의해야 한다. 예제 개발을 위해 사용된 ANSYS에서는 구조물의 비선형성을 기하학적 비선형, 재료적 비선형, 기타 비선형으로 분류한다. 기하학적 비선형에는 대변형률, 대처짐, 응력경화 등이 있다. 대변형률에는 형상변화와 대회전이 포함되고 대처짐은 유한회전과 미소변형률을 가정한다.

구조물의 외면강성은 구조물의 내면응력의 상태에 의해 영향을 받을 수 있다. 이러한 내면 응력과 가로강성사이의 결합을 응력경화라 하는데 케이블과 막과 같은 구조물에서 명백히 나타난다. 비록 응력경화 이론에서는 회전과 변형률이 미소하다고 가정하지만 응력경화행렬이 선형이론을 사용하여 얻어지는 경우에도 응력경화행렬은 매 반복회수마다 변화하기 때문에 응력경화는 구조물의 기하학적 비선형에 포함시킬 수 있다.

2. 비선형 변위해석과정

케이블 구조물의 기하학적 비선형성을 고려한

변위해석과정은 2단계로 구성된다. 초기하중에 의한 초기평형상태 또는 초기형상을 계산하는 과정과 초기형상에서 작용하중을 재하시킴으로써 최종형상을 계산하는 과정이다. 각각의 과정에서 해의 수렴을 위해 적절한 모델링과 해법을 선택해야 한다.

케이블은 비교적 모델링하기는 쉬우나 해의 수렴을 유도하기 어렵기 때문에 적절한 해법을 선택해야 하는 어려움이 있다. 이러한 어려움을 극복하기 위해 해법단계에서 다중하중증분과 평형반복을 사용하여 증분의 크기와 평형반복의 횟수를 조정하고, 적절한 반복법을 선택하게 된다. 해의 수렴을 유도하기 위해 ANSYS에서는 현재의 해석 상태에 따라 증분 또는 작용하중의 크기를 결정해 주는 자동시간단계(automatic time step), 현재의 증분 크기를 50% 감소시키는 이등분(bisection), 현재 또는 이전의 해석 상태에 따라 다음 증분의 크기를 예측하는 예견자(predictor) 등이 이용된다(Swanson Analysis System Inc. 1994).

3. 요소라이브러리

케이블 구조물의 해석을 위해 ANSYS에서 사용되는 구조용 선요소(line element)는 2차원 선요소, 3차원 선요소가 있다. 이들은 다시 인장과 압축을 모두 고려하는 트러스요소와 인장 또는 압축만 고려할 수 있는 트러스요소로 분류된다. 여기서 인장 또는 압축만 고려되는 트러스요소는 인장흡선을 사용하면 요소가 압축력을 받을 때 강성이 제거된다. 요소는 2개의 절점을 가지고, 절점에서는 3자유도 방향으로의 변위를 가진다. 굽힘강성은 포함하지 않으며, 응력경화와 대처짐의 기하학적 비선형성을 가진다.

Ⅳ. 수치해석 예제

1. 해석모델

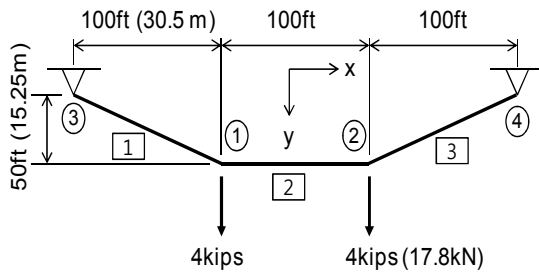
수치 예제의 해석종류는 비선형정적해석에 속하고 모델의 종류에 따라 단순케이블과 케이블망, 초기상태 또는 초기평형상태의 형상에 따라 사다리, 현수, 안장, 접시모양, 또 해석범위에 따라 초기평형상태가 주어진 경우와 주어지지 않은 경우로 분류할 수 있다. [표 1]은 이들 예제를 요약한 것이다. 예제에서 국제표준 단위계와 영국계 단위계를 혼용하여 사용함으로써 학생들이 단위환산 연습을 수행하도록 하였다.

<표 1> 수치해석 예제

Ex	Type	Shape	Initial Equilibrium State
1	Simple Cable	Ladder	Yes
2	Simple Cable	Catenary	Yes
3	Cable Net	Dish	Yes
4	Cable Net	Saddle	Yes
5	Cable Net	Catenary	No

2. 사다리모양 단순케이블

본 예제의 목적은 초기 사하중과 추가하중에 따른 변위해석을 수행함으로써 하중과 변위의 관계를 살펴보고, 이 때 해의 수렴을 유도하는 방법을 검토하는데 있다. 케이블의 기본 배치는 [그림 2]와 같고 케이블 단면적은 0.227in^2 , 탄성계수는 $12,000\text{ksi}$ 이다. 4kips 가 초기하중으로 작용하였고, 추가하중은 [표 2]와 같다. 여기서 하중조건 1과 2는 대칭이며, 3~5는 비대칭이다.



[그림 2] 사다리모양 단순케이블

<표 2> 사다리모양 단순케이블의 하중조건

Node	Comp.	Loading Cases (kips)				
		1	2	3	4	5
1	x	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	y	3.00	9.00	0.00	1.00	0.00
2	x	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
	y	3.00	9.00	3.00	9.00	3.00

본 예제는 Baron(Baron et al., 1971), Ma(Ma et al. 1979)에 의해 해석되었다. Baron은 직접강성법을 사용하였으며, Ma는 균일한 증분을 사용하여 하중조건 3에 대하여 증분해석을 수행하였다. 이 경우에 대해서 두 결과는 잘 일치하고 있으며, 특히 Ma는 증분의 수를 증가시킬수록 Baron의 결과와 일치하고 있음을 나타내었다 (Leonard, 1988).

본 해석에서는 절점과 요소의 수를 선행해석과 동일하게 정의하고(3요소, 4절점), 요소의 형태는 인장을 고려한 트러스요소를 사용하였다. 경계조건은 절점 3과 4에서 변위를 구속한다. 먼저 주어진 초기형상과 초기사하중을 고려한 기하학적 비선형해석 결과로부터 각 요소의 변형률과 초기 응력상태를 알고, 초기강성행렬을 구성한다. 여기에 사하중과 [표 2]의 하중조건을 동시에 재하시켜 해석을 수행한다.

3. 현수모양 단순케이블

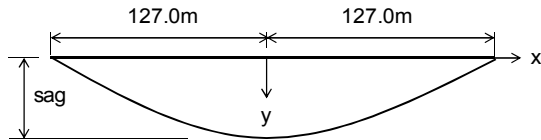
본 예제의 목적은 초기하중에 의해서 [그림 3]과 같이 현수모양을 나타내는 단순케이블의 초기 평형상태를 결정하고, 이 때 해의 수렴을 유도하는 방법을 검토 하는데 있다. 또한 해의 정도를 얻기 위한 요소의 수를 살펴본다.

하중으로는 자중을 고려하며 케이블의 단면적은 0.417cm^2 , 탄성계수는 $13.78 \times 10^6\text{N/cm}^2$, 지간의 길이는 254m , 자중은 3.504N/m 이다.

본 예제는 Lee(이동일, 1990)에 의해 해석되었다. Lee는 케이블 부재의 미분방정식의 해를 편미분하여 접선강성행렬을 구한 후 유한요소법의

로 처짐을 구하였고, 그 결과를 실험치 또는 보나 트러스 부재로 해석한 경우와 비교하였다.

본 해석에서는 인장요소를 사용하여 기하학적 비선형해석을 수행하였다. 유한요소모델은 7가지 경우로서 요소의 수는 각각 4, 10, 50, 100, 400, 700, 1000이며, 경계조건은 양쪽 끝단에서 변위를 구속한다.



[그림 3] 현수모양 단순케이블

4. 접시모양 케이블망

본 예제의 목적은 초기평형상태가 초기하중 없이 접시모양인 케이블망의 하중조건에 따른 변위 해석을 수행하고, 해의 수렴을 유도하는 방법을 검토하는데 있다.

[그림 4]와 같은 케이블망에서 케이블 단면적은 0.010ft², 탄성계수는 3,600,000k/ft²이다. 초기상태의 케이블망은 접시모양이며 자유롭게 매달려 있고, 부재력은 없으며 절점좌표는 [표 3]과 같다. 여기서 z좌표는 식(5)에 의하여 결정된다.

$$z = z_0 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{2DX} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{2.5DY} \right)^2 \right\} \quad (5)$$

여기서 z₀는 2.75ft, DX는 10.5ft, DY=12.0ft이다. 하중조건은 [표 4]와 같이 초기사하중과 추가활하중의 조합으로 구성되며 경계조건은 외부절점의 변위를 구속한다. Baron(Baron et al., 1971)는 반복법으로 Lo(Leonard, 1988)는 혼합법을 사용하여 본 예제를 해석하였다.

5. 안장모양 케이블망

본 예제의 목적은 초기평형상태가 초기응력이

주어진 안장모양 케이블망의 하중조건에 따른 변위 해석을 수행하고 해의 수렴을 유도하는 방안을 검토하는데 있다. 케이블의 기하학적 형태는 [그림 5]와 같다.

<표 3> 접시모양 케이블망의 절점 좌표

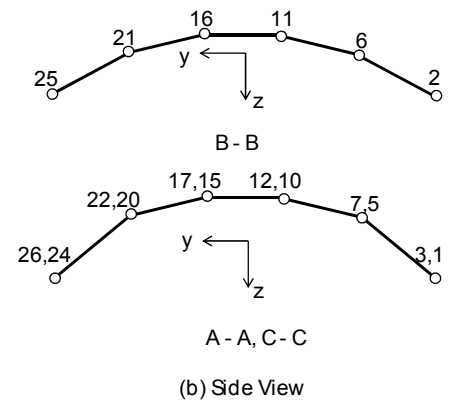
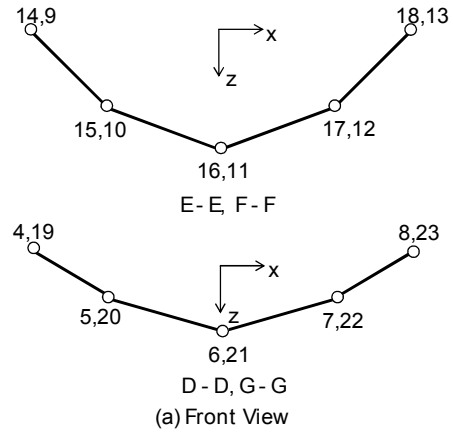
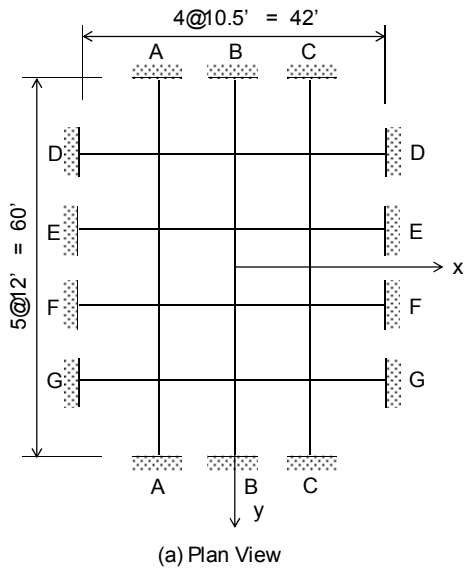
Node	Coordinates (ft)		
	x	y	z
1	-10.50	-30.00	0.00
2	0.00	-30.00	0.00
4	-21.00	-18.00	0.00
5	-10.50	-18.00	1.32
6	0.00	-18.00	1.76
9	-21.00	-6.00	0.00
10	-10.50	-6.00	1.98
11	0.00	-6.00	2.64

<표 4> 하중조건

Loads	
Dead Load (DL): 18.0 lb/ft ²	Lived Load (LL): 30.0 lb/ft ²
Loading Cases	
Symmetrical	Un-symmetrical
1	2
DL + 3LL P _z = 13.608k at each interior loads	DL + partial LL P _z = 6.048k at nodes 5, 6, 7, 10, 11, 12 P _z = 2.268k at nodes 15, 16, 17, 20, 21, 22

유한요소모델은 절점의 z좌표를 제외하고는 접시모양 케이블망과 동일하며, 케이블의 단면적과 탄성계수도 동일하다. 케이블망은 안장형태이고 초기상태서 케이블망의 절점은 쌍곡포물면의 표면에 놓여 있으며 z좌표는 다음과 같이 정의된다 (Baron et al., 1971).

$$z = -f_x \left(\frac{x}{a} \right)^2 + f_y \left(\frac{y}{b} \right)^2 \quad (6)$$

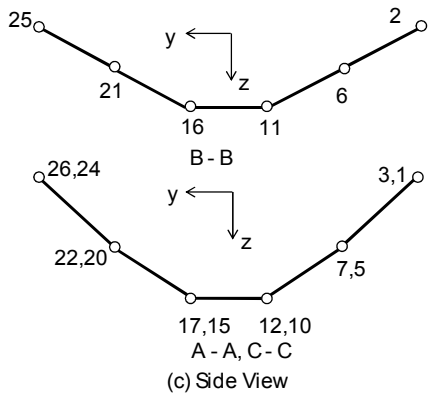
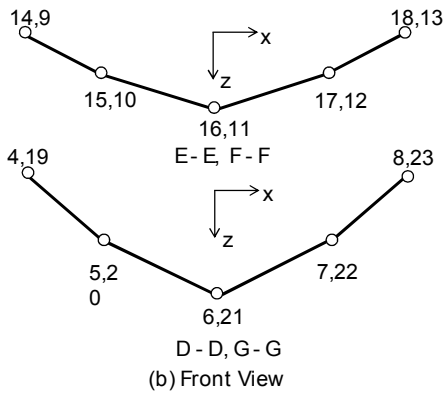


[그림 5] 안장모양 케이블망

여기서 f_x 는 2.75ft, f_y 는 5.50ft, a 는 21.0ft, b 는 30.0ft이다. [표 5]는 절점의 좌표를 나타낸다.

본 예제의 케이블은 절점에 작용하는 외력 없이 초기응력을 가진 상태이다. 즉 [그림 4a]에서 x 방향 케이블(D, E, F, G) 초기인장력의 x 성분, p_x 는 92.4kips이고, y 방향 케이블(A, B, C) 초기인장력의 y 성분, p_y 는 82.5kips이다. 초기상태에서 다음식이 만족될 때에 임의의 절점 i 에서의 평형이 이루어진다.

$$\frac{z_1 - 2z_i + z_3}{DX} p_x = - \frac{z_2 - 2z_i + z_4}{DY} p_y \quad (7)$$



[그림 4] 접시모양 케이블망

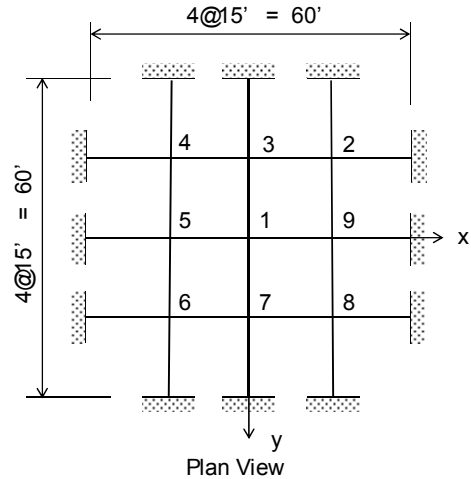
여기서 DX 와 DY 는 각각 인접한 절점사이의 x 및 y 방향의 수평거리이고, z_i 는 [그림 6]과 같이 i 번째 절점에서의 z 좌표이다.

본 예제는 Baron(Baron et al., 1971)에 의해 해석되어졌다. Baron은 집시모양의 케이블망과 동일하게 반복법을 사용하여 해석을 수행하였다. 본 해석에서는 초기의 기하학적 형상과 부재력으로부터 초기변형률을 계산하여 초기응력상태를 나타내고 해석을 수행한다.

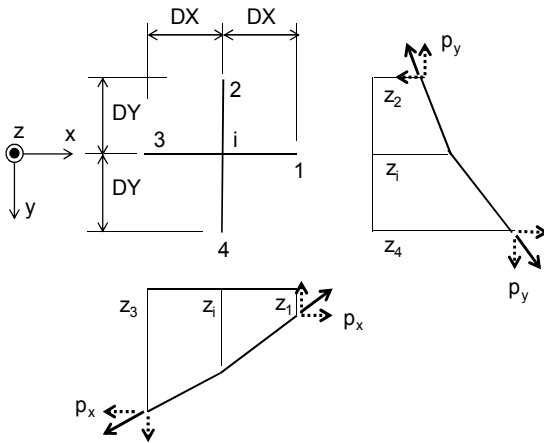
<표 5> 안장모양 케이블망의 절점 좌표

Node	Coordinates (ft)		
	x	y	z
1	-10.50	-30.00	4.81
2	0.00	-30.00	5.50
4	-21.00	-18.00	-0.77
5	-10.50	-18.00	1.29
6	0.00	-18.00	1.98
9	-21.00	-6.00	-2.53
10	-10.50	-6.00	-0.47
11	0.00	-6.00	20.22

태가 주어지지 않은 경우 초기평형상태와 추가하중에 의한 최종처짐을 구하고, 해의 수렴을 유도하는 것이다. [그림 7]과 같은 케이블망에서 초기하중인 자중에 의한 초기평형상태는 현수모양이며, 모든 케이블의 단면적은 $2.4in^2$, 탄성계수는 23,000ksi이다. 추가하중은 절점 2에 z 방향으로 200kips가 작용한다.



[그림 7] 현수모양 케이블망



[그림 6] 직각으로 만나는 프리스트레스 케이블

6. 현수모양 케이블망

본 예제의 목적은 초기하중에 의한 초기평형상

태가 주어지지 않은 경우 초기평형상태와 추가하중에 의한 최종처짐을 구하고, 해의 수렴을 유도하는 것이다. [그림 7]과 같은 케이블망에서 초기하중인 자중에 의한 초기평형상태는 현수모양이며, 모든 케이블의 단면적은 $2.4in^2$, 탄성계수는 23,000ksi이다. 추가하중은 절점 2에 z 방향으로 200kips가 작용한다.

본 예제는 Kar(1971), Okazaki(1971), Lee(이동일, 1990), Hood(1976)에 의해 해석되었다. 초기하중은 Kar와 Okazaki가 케이블망 내부절점 2, 4, 6, 8에 746.12lb를, 3, 5, 7, 9에 745.53lb를, 그리고 절점 1에 730.77lb를 각각 작용시켰고, Lee는 집중하중을 전체요소의 길이로 나누어 자중 1.55031lb/ft를 작용시켰다. 또한 Kar와 Okazaki는 초기부재력을 24.999kips로 주고 초기하중단계에서 선형해석을 수행하였으나 Lee는 초기부재력을 재하하지 않고 초기하중단계에서 비선형해석을 수행하였다.

본 예제에서는 <표 6>과 같이 자중이 작용하는 경우(Case 1)와 집중하중이 작용하는 경우(Case 2), 그리고 Kar와 Okazaki와 같이 초기하중단계에서 선형해석을 한 경우(Case 3)로 나누어 해석을 수행한다.

<표 6> 현수모양 케이블망의 하중조건

Node	Loading Cases		
	Case 1	Case 2	Case 3
Initial Load	1.55031 lb/ft	746.12lb at 2,4,6,8 745.53lb at 3,5,7,9 730.77lb at 1	746.12lb at 2,4,6,8 745.53lb at 3,5,7,9 730.77lb at 1
Analysis Type	Nonlinear	Nonlinear	Linear
Additional Load	200kips at 2	200kips at 2	200kips at 2
Analysis Type	Nonlinear	Nonlinear	Nonlinear

V. 수치해석 결과

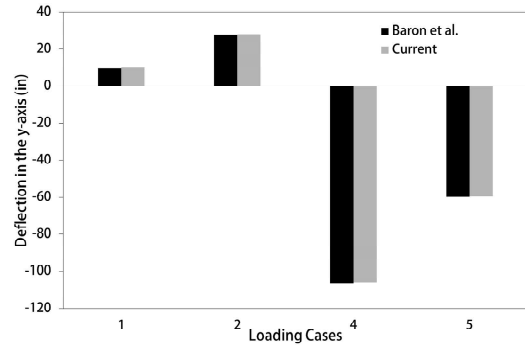
1. 해석결과

기하학적 비선형해석을 수행할 때 해의 수렴을 유도하기 위해서 모델링 단계에서는 초기변형률이 없는 경우에도(단순케이블의 경우 사다리모양과 현수모양, 케이블망인 경우 접시모양과 현수모양) 초기변형률을 도입하고, 해법단계에서는 반복알고리즘과 다중증분의 조합으로 이루어진 혼합법을 적용한다. 초기 강성을 제공하기 위한 초기변형률을 고려할 때 해에 영향을 미치지 않도록 $10^{-9} \sim 10^{-6}$ 정도의 미소초기변형률을 도입하면 해의 수렴을 보장할 수 있다. 아래에 각 해석 결과의 일부를 나타내었다. 즉, 변위가 기하학적 비선형해석의 주된 해석 목적이므로 이들 변위를 각 예제별로 나타내었다.

2. 사다리모양 단순케이블 해석결과

해의 수렴을 유도하기 위해 초기하중에 의한 초기변형률을 구할 때 미소초기변형률을 도입하였다. 계산되어진 초기변형률을 이용한 하중조건에 따른 절점1의 y-축 방향 처짐을 [그림 8]에 정

리하였으며 이는 Baron의 결과와 비교되었다. 모든 하중조건에 대해서 본 해석결과는 Baron의 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 하중조건 1과 2의 결과를 비교하면 추가하중이 3배일 때 변위가 약 3배가 되지 않는다. 이것은 기하학적 비선형해석에서는 변위와 변형률의 관계가 비선형적이기 때문이다.



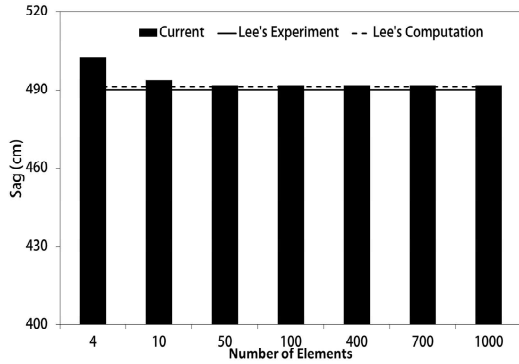
[그림 8] 사다리모양 단순케이블 처짐

3. 현수모양 단순케이블 해석결과

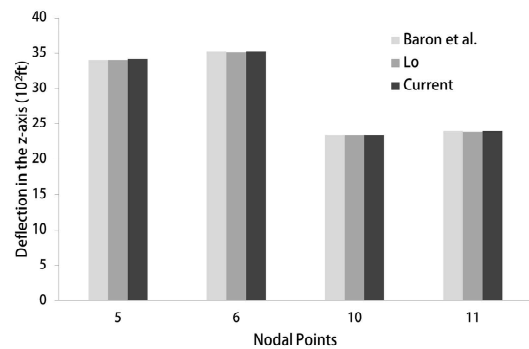
해의 수렴을 유도하기 위해 미소초기변형률을 도입하여 해석을 수행하였다. 중앙 처짐(sag)을 [그림 9]에 나타내었고 Lee의 결과와 비교하였다. 실험치를 참값으로 생각했을 때, 요소의 수가 10개 이상이면 최대변위의 오차는 1% 미만이다. 따라서 유한요소로서 인장트러스요소를 사용한 경우 요소의 수를 증가할수록 실험치에 접근하고 있음을 알 수 있으며, 과도하게 많은 요소를 사용할 필요가 없음을 확인할 수 있다.

4. 접시모양 케이블망 해석결과

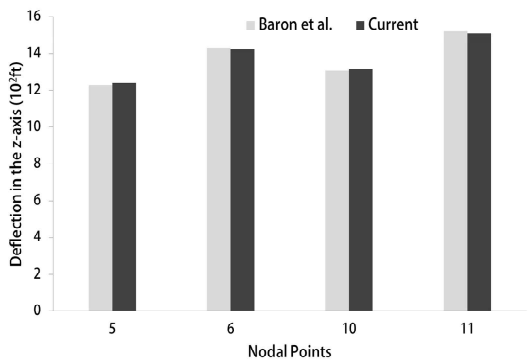
해의 수렴을 유도하기 위해 미소초기변형률을 도입하여 해석을 수행하였다. 하중 조건 1에서의 해석결과를 [그림 10]에 나타내었다. 해석결과는 대칭하중인 하중조건 1에서 Baron 및 Lo의 결과(z-축 방향 처짐)와 일치하고 있음을 알 수 있다.



[그림 9] 현수모양 단순케이블 처짐



[그림 10] 접시모양 케이블망 처짐



[그림 11] 접시모양 케이블망 처짐

5. 안장모양 케이블망 해석결과

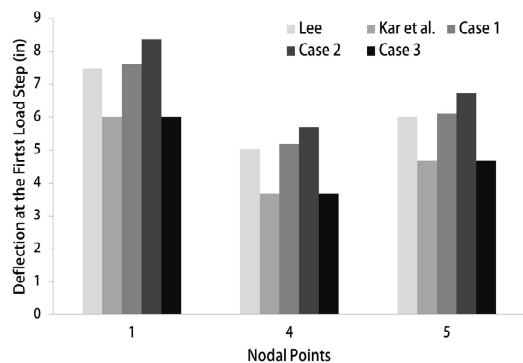
주어진 초기인장력에 의한 초기변형률을 계산하여 해의 수렴을 유도하였다. 따라서 미소초기 변형률은 도입되지 않았다. 하중조건 1에서의 해

석결과를 [그림 11]에 나타내었다. 해석결과 대칭 하중 조건 1에서 Baron의 결과와 일치하고 있음을 알 수 있다.

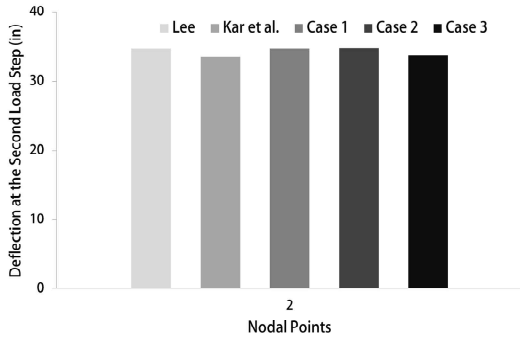
6. 현수모양 케이블망 해석결과

해의 수렴을 유도하기 위해 미소초기변형률을 도입하였다. [그림 12]는 초기하중에 의한 절점 1, 4, 5의 처짐을 나타낸다. [그림 13]은 추가하중에 의한 절점 2의 처짐을 나타낸다. 여기서 Case1은 자중을 고려한 경우이며, Case2는 집중하중을 고려한 경우이다. 초기처짐의 차이는 본 해석과 Lee는 초기부재력을 0으로 주고 초기하중단계에서 비선형해석을, Kar와 Okazaki는 초기부재력을 24.999kips로 주고 초기하중단계에서 선형해석을 수행했기 때문이다. 이것을 확인하기 위해 초기부재력으로부터 초기변형률을 계산하고 초기하중 단계에서 선형해석을 추가하중단계에서 비선형해석을 수행하면 Case3과 같은 결과를 얻는다. 이때 초기변형률이 해의 수렴을 유도한다. 따라서 Case3에서는 미소초기변형률이 도입되지 않았다.

이들 결과를 비교하면 초기처짐에서 Lee의 결과는 Case1가 일치하고, Kar와 Okazaki의 결과는 Case3과 일치함을 알 수 있다. 집중하중을 고려한 Case2는 최대 초기처짐을 나타낸다. 반면에 최종처짐에서는 이들 결과가 모두 3.4% 미만의 오차를 나타냄으로 해석결과가 일치한다.



[그림 12] 현수모양 케이블망의 처짐



[그림 13] 현수모양 케이블망의 처짐

VI. 결론

학부과목 전산구조해석에서 사용할 수 있는 기하학적 비선형 유한요소 해석 예제를 개발하였다. 기하학적 비선형 거동이 탁월한 케이블과 케이블망을 대상구조로 선정하였으며 구조형상, 초기평형상태 등으로 분류하여 정리하였다. 또한 본 연구와 선행연구자들의 해석 과정과 결과를 비교 검토함으로써 비선형해석 개념과 기법을 어려운 정식화 또는 수식 없이 설명하였다. 케이블과 케이블망이 해양 및 수산산업에 빈번히 사용됨으로 이들 산업과 관련된 학과의 전산구조해석 과목에 이들 예제를 소개함으로써 졸업생의 역량을 향상시키고 관련 산업에 우수한 인재를 보급할 수 있을 것으로 판단된다.

참고 문헌

김정아 · 김병수 · 이지현 · 김종훈(2011). 융합형 인재 양성을 위한 IT 기반 STEAM 교수·학습 방안 연구, 수산해양교육연구 23(3), 445~460.
 나원배(1996). 케이블 구조물의 비선형 유한요소 해석에 관한 기초적 연구, 부산수산대학교 석사학위논문.
 마이더스아이티(2010), 알기 쉬운 유한요소해석, 사이텍미디어.
 박수홍 · 정주영 · 류영호(2008). 창의적 공학교육을 위한 캡스톤 디자인(Capstone Design) 교수

활동지원모형 개발, 수산해양교육연구 20(2), 184~200.
 이동일(1990). FEM에 의한 3차원 CABLE망의 정적해석, 서울대학교 석사학위논문.
 임상전 · 광병만 · 이주선(1991). 유한요소법 입문, 동명사.
 장영수 · 박종운 · 송정현 · 최성욱(2011). 부산지역 해양수산 IT융합 인적자원개발에 관한 연구, 수산해양교육연구 23(2), 244~252.
 최창근(1992). 유한요소해석, 집문당.
 하창승 · 조규성 · 백천현(2007). 시뮬레이션 기법을 적용한 환적 컨테이너터미널 운영분석 교육 시스템 개발연구, 수산해양교육연구 19(3), 346~354.
 Baron, F. and Vendatesan, M. S.(1971). Nonlinear Analysis of Cable and Truss Structures, Journal of Structural Division, ASCE, 97, ST2.
 Bathe, K. J.(1982). Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, New Jersey.
 Becker, E. B., Carey, G. F., and Oden, J. T.(1981). Finite Elements An Introduction Volume 1, Prentice-Hall, New Jersey.
 Chandrupatla, T. R. and Belegundu, A. D. (1997). Introduction to Finite Elements in Engineering, 2nd Edition, Prentice-Hall, New Jersey.
 Cook, R. D., Malkus, D. S., and Plesha, M. E. (1989). Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Wiley.
 Davies, A. J.(1980). The Finite Element Method: A First Approach, Clarendon Press, Oxford.
 Desai, C. S. and Kundu, T.(2001). Introductory Finite Element Method, CRC Press.
 Felippa, C. A.(1976). Procedures for Computer Analysis of Large Nonlinear Structural Systems, Pergman Press, 60~101.
 Hood, C. G.(1976). A General Stiffness Method for the Solution of Nonlinear Cable Networks with Arbitrary Loading, Computer and Structures, 6, 391~396.
 Kar, A. K.(1971). An Initial-Value Approach to the Analysis of Rectangular Cable Roof Nets, The Pennsylvania State University.
 Leonard, J. W.(1988). Tension Structures, McGraw-Hill Book Company.

- Logan, D. L.(1993). A First Course in the Finite Element Method, 2nd Edition, PWS Publishing Company, Boston.
- Ma, D., Leonard, J. W., and Chu, K. H.(1979). Slack-Elasto-Plastic Dynamics of Cable Systems, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 105, EM2.
- Moaveni, S.(2003). Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS, Prentice-Hall, New Jersey.
- Noor, A. K.(1999). Computational Structures Technology: Leap Frogging into the Twenty-first Century, Computers and Structures, 73, 1~31.
- Okazaki, C. Y.(1971). A Study of Convergence for Highly Nonlinear Behavior of Rectangular Cable Roof Nets, The Pennsylvania State University.
- Swanson Analysis System Inc.(1994). ANSYS User's Manual for Revision 5.0, Volume 1 Procedures.
- Wiechert, W.(2003). The Role of Modeling in Computational Science Education, Future Generation Computer Systems, 19, 1363~1374.
-
- 논문접수일 : 2012년 09월 07일
 - 심사완료일 : 1차 - 2012년 09월 24일
 - 게재확정일 : 2012년 09월 26일