

# 베타-이항분포의 공액성을 근거로 한 유한 모집단의 신뢰성 입증 시험

전종선 · 안선웅<sup>†</sup>

한양대학교 산업경영공학과

## Reliability Demonstration Test for a Finite Population Based on the Conjugacy of the Beta-Binomial Distribution

Jongseon Jeon · Suneung Ahn<sup>†</sup>

Department of Industrial and Management Engineering, Hanyang University

This paper describes the Bayesian approach for reliability demonstration test based on the samples from a finite population. The Bayesian approach involves the technical method about how to combine the prior distribution and the likelihood function to produce the posterior distribution. In this paper, the hypergeometric distribution is adopted as a likelihood function for a finite population. The conjugacy of the beta-binomial distribution and the hypergeometric distribution is shown and is used to make a decision about whether to accept or reject the finite population judging from a viewpoint of faulty goods. A numerical example is also given.

**Keywords** : Bayesian Approach, Hypergeometric Distribution, Beta-Binomial Distribution, Finite Population, Reliability Demonstration Test.

### 1. 서 론

유한 모집단의 기각 여부를 결정하는 방법의 하나로 신뢰성 입증 시험(reliability demonstration test)이 있다. 신뢰성 입증 시험은 모집단의 신뢰성(reliability)과 신뢰수준(confidence level)을 기준으로 검증한다. 따라서 유한 모집단의 불량품 개수에 관한 정보는 모집단의 신뢰성 입증 시험의 기각 여부를 결정하는 데 매우 중요하다. 모집단의 신뢰성을 추정하기 위해선 모집단의 불량률 추정이 필요하다. 만약, 모집단에 대한 사전정보가 없거나 기존 데이터의 수가 적을 경우에는 베이저안(Bayesian) 접근법이 유용하다[17].

본 연구에서는 특히 유한 모집단에 대한 사전정보가 없는 경우, 샘플링 과정에서 발견하는 불량데이터를 활용하여 모집단의 불량품 개수의 사후분포(posterior distribution)를 추정하는 방법으로 베이저안 접근법을 이용한다. 베이저안 접근법을 이용하여 유한 모집단의 불량률을 추정한 연구가 진행되었다[5, 12]. 또한, Martz and Waller [14]과 Martz et al.[13]는 직렬과 병렬 시스템이 혼합되어 있는 복합구조 시스템의 신뢰수준을 측정하기 위해 베이저안 접근법을 이용하여 연구하였다. Ten and Xie[16]는 베이저안 접근법을 이용한 신뢰성 입증 시험에 이항분포 데이터를 적용한 연구를 수행하였다. 또한, 베이저안 접근법을 이용하여 최적의 신뢰성 입증 시험을 위해 최소

의 시험 비용을 고려한 연구가 있다[10, 11, 12]. 최근에 Borgonovo[2, 3]는 베이즈 정리(Bayes' theorem)를 이용하여 사전분포(prior distribution)와 실험결과 데이터를 사후분포(posterior distribution)에 반영하여 신뢰성 입증 시험에 이용하였다. 사후분포를 추정하는 과정에서 우도함수(likelihood function)와 사전분포가 필요한데, 많은 경우 우도함수와 사전분포의 함수 형태가 유사한 경우에 해당되는 자연공액사전분포(natural conjugate prior distribution)를 주로 선택한다[1, 9, 15]. 우도함수에 대한 자연공액사전분포를 이용하면 베이저안 추정과정을 통해 도출된 사후분포의 형태가 사전분포 및 우도함수와 같은 형태로 표현되어, 사후분포의 추정과정에서 사후분포의 계산과 모수에 대한 해석을 쉽게 할 수 있다[6]. 따라서 본 연구에서는 베타-이항분포(Beta-binomial distribution)가 유한 모집단의 우도함수인 초기하(hypergeometric)분포의 자연공액사전분포임을 보이고, 베이저안 접근법을 이용하여 사후분포를 유도한다. 즉, 초기하분포와 베타-이항분포의 공액성을 제시한다.

또한, 본 연구에서는 베타-이항분포와 초기하분포의 공액성(conjugacy)을 근거로 유한 모집단의 불량품 관점에서의 기각 여부를 결정하기 위해 신뢰성 입증 시험을 하고자 한다. 우선 베이저안 접근법의 '기술적 핵심(technical core)'인 "사후분포는 우도함수와 사전분포의 곱에 비례한다."는 사실을 근거로 신뢰성 입증 시험에 필요한 사전분포, 우도함수와 사후분포를 추정한다. 이때 초기하분포인 우도함수를 대상으로 베타-이항분포가 사전 및 사후분포로 적용된다. 유한 모집단을 대상으로 하는 축차 샘플링(sequential sampling) 과정을 통해 베타-이항분포와 초기하분포의 공액성을 일반화하고 샘플링 과정에서 발견될 수 있는 불량품 개수에 대해 가능한 모든 상황을 반영하는 현실적인 방법을 제시한다.

## 2. 본론

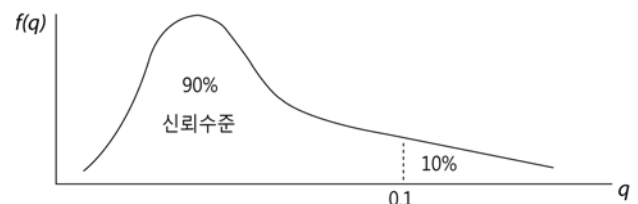
본 연구에서 사용하는 기호는 다음과 같이 정의한다.

- $N$  : 유한 모집단의 크기
- $X$  : 유한 모집단의 불량품 개수
- $n_i$  :  $i$ 번째 샘플의 크기
- $k_i$  :  $i$ 번째 샘플의 불량품 개수
- $E_i$  :  $n_i$ 에서  $k_i$ 개의 불량품이 발견되는 사건

본 연구에서는  $X$ 를 기호의 과다한 사용을 방지하기 위하여 때로는 확률변수 혹은 특정한 값을 의미하는 것으로 사용된다.

### 2.1 유한 모집단의 신뢰성 입증 시험

본 연구에서는 모집단의 특정 신뢰성을 기준으로 하고 특정 신뢰수준을 만족할 때 샘플링을 멈춰서 유한 모집단의 기각 여부를 결정한다. 또한,  $N^*$ 은  $N$ 보다 무수히 크고  $X^*$ 는  $X$ 보다 무수히 클 때,  $\lim_{N^* \rightarrow \infty} X^*/N^* = q$ 로 모집단의 불량률을 나타낸다. 따라서  $q$ 가 특정한 값으로 되지 않고 분포로 나타난다. <그림 1>은 90% 신뢰성을 90%의 신뢰수준으로 보장하는 경우를 의미한다. <그림 1>에서  $q=0.1$ 을 기준으로 곡선의 왼쪽 아랫부분은 90%이다. 곡선의 아랫부분의 넓이는 신뢰수준을 나타낸다. 일반적으로 90%~95% 신뢰성, 90%~95% 신뢰수준을 기준으로 유한 모집단의 신뢰성을 검증한다. 본 연구에서는 <그림 1>과 같이 90% 신뢰성과 90% 신뢰수준을 기준으로 유한 모집단의 신뢰성을 검증한다.



<그림 1> 유한 모집단의 신뢰성 입증 시험 기준

### 2.2 베타-이항분포와 초기하분포의 공액성

베이저안 확률모형에서는 사후분포를 산출하기 위해 적절한 사전분포가 필요하다. 사후분포를 수학적으로 쉽게 구하기 위해 공액사전분포를 이용한다. 공액사전분포를 이용하기 위해선 적절한 우도함수를 선택해야한다. 따라서 불량률의 사전분포를 고려하는데 있어서 어떠한 확률분포를 우도함수로 사용할 것인가와 사전분포의 상위 파라미터(hyper parameter)를 어떻게 결정할 것인가에 대해 고려해야 한다. 식 (1)은 본 연구의 핵심인 베이저안 접근법의 사전분포와 우도함수의 곱이 사후분포와 비례한다는 사실을 나타낸다. 식 (1)의  $P(X)$ 는 사전분포를 나타내며,  $P(k|N, n, X)$ 는 적절한 사후분포를 추정하기 위한 우도함수를 나타내고,  $P(X-k|N-n, k, n)$ 는 샘플링의 결과가 반영된 모집단의 불량품 개수의 확률을 의미하는 사후분포이다.

$$P(X-k|N-n, k, n) \propto P(k|N, n, X)P(X). \quad (1)$$

식 (1)의  $P(X)$ 를 알기 위해선 우선 베이저 정리(Bayes' theory)를 이용하여 불량률  $q$ 의 분포를 나타낼 필요가 있다. 본 연구에서는 모집단을 정상품과 불량품 두 가지의 결과

만 고려하므로 우도함수는 이항분포(binomial distribution)를 적용할 수 있다. 또한, 사전분포는 자연공액(natural conjugacy)이론에 근거하여 이항분포의 자연공액사전분포인 베타분포(beta distribution)를 이용한다[6, 13]. 제시된 변수를 이용한 사후분포의 형태는 식 (2)와 같다.

$$P(q|X) = \frac{P(q, X)}{P(X)}. \tag{2}$$

식 (2)에서  $P(q, X)$ 는 식 (3)과 같이 전개할 수 있다.

$$P(q, X) = P(X|q)P(q). \tag{3}$$

사전분포  $P(q)$ 는 식 (4)와 같이 상위 파라미터(hyper parameter)  $a$ 와  $b$ 를 갖는 베타분포의 확률밀도함수(probability density distribution)로 나타난다.

$$P(q) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} q^{a-1} q^{b-1}. \tag{4}$$

식 (4)에서  $a$ 와  $b$ 는 0보다 크고  $\Gamma(\cdot)$ 는 감마함수(gamma function)를 의미하며 불량률  $q$ 는 0보다 크거나 같으며 1보다 작거나 같다. 식 (3)의  $P(X|q)$ 는 우도함수로서 식 (5)와 같이 이항분포를 이용한다.

$$P(X|q) = \binom{N}{X} q^X (1-q)^{N-X}. \tag{5}$$

따라서 식 (3)은 식 (4)와 식 (5)를 이용하여 식 (6)과 같이 전개된다.

$$P(q, X) = \binom{N}{X} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} q^{a+X-1} (1-q)^{b+N-X-1}. \tag{6}$$

한편 식 (1)의  $P(X)$ 는 전확률 법칙(law of total probability)에 의해 식 (7)과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} P(X) &= \int_0^1 P(q, X) dq \tag{7} \\ &= \int_0^1 P(X|q)P(q) dq \\ &= \int_0^1 \left\{ \binom{N}{X} q^X (1-q)^{N-X} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} q^{a-1} (1-q)^{b-1} \right\} dq \\ &= \binom{N}{X} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ &\quad \times \int_0^1 q^{a+X-1} (1-q)^{b+N-X-1} dq. \end{aligned}$$

식 (7)에서  $\int_0^1 q^{a+X-1} (1-q)^{b+N-X-1} dq$ 는 베타분포의 성질에 의해 식 (8)과 같이 전개된다.

$$\int_0^1 q^{a+X-1} (1-q)^{b+N-X-1} dq = \frac{\Gamma(a+X)\Gamma(b+N-X)}{\Gamma(a+b+N)}. \tag{8}$$

따라서 식 (7)은 식 (9)와 같이 정리된다. 이항분포와 베타분포의 공액성을 이용해 식 (9)의  $P(X)$ 는 베타-이항분포(beta-binomial distribution) 형태의 사전분포라는 것을 확인하고  $Be-bin(N, a, b)$ 와 같이 표현한다.

$$P(X) = \binom{N}{X} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+X)\Gamma(b+N-X)}{\Gamma(a+b+N)}. \tag{9}$$

따라서 식 (6)과 식 (9)를 이용하여 사후분포 식 (2)를 정리하면 식 (10)과 같이 베타분포로 나타난다.

$$\begin{aligned} P(q|X) &= \frac{\Gamma(a+b+N)}{\Gamma(a+X)\Gamma(b+N-X)} \tag{10} \\ &\quad \times q^{a+X-1} (1-q)^{b+N-X-1}. \end{aligned}$$

이 과정을 통하여  $P(X)$ 는 베타-이항분포인 것을 확인할 수 있고  $Be-bin(N, a, b)$ 로 표현한다. 본 연구에서  $P(X)$ 는 유한 모집단에서 샘플을 검사하여 불량품 개수를 추정할 때 사전분포로 이용된다. 한편, 사후분포의 추정을 위해 유한 모집단에서 샘플을 검사한다. 이때, 발견되는 불량품 개수는 초기하분포(hypergeometric distribution)를 따른다고 볼 수 있다[8]. 따라서 초기하분포를 우도함수로 적용할 수 있다. 제시된 변수를 이용한 우도함수의 형태는 식 (11)과 같다.

$$P(k|N, n, X) = \frac{\binom{X}{k} \binom{N-X}{n-k}}{\binom{N}{n}}, k=0, 1, \dots, \min(n, X). \tag{11}$$

식 (11)에서 식 (16)까지의 과정으로 베타-이항분포와 초기하분포의 공액성(conjugacy)을 보인다. 식 (11)을 무차별의 원리(principle of indifference)에 의해 식 (12)와 같이 표현할 수 있다.

$$P(k|N, n, X) = \frac{\binom{n}{k} \binom{N-n}{n-k}}{\binom{N}{X}}, k=0, 1, \dots, \min(n, X). \tag{12}$$

식 (12)의 형태는 사전분포와 결합할 때 계산이 편리하다. 유한 모집단의 샘플링 후에 불량품 개수의 확률인  $P(X-k|N-n, k, n)$ 는 베이즈 정리에 의해 식 (13)과 같이 표현할 수 있다.

$$P(X-k|N-n, k, n) = \frac{P(k|N, n, X)P(X)}{P(k)}. \quad (13)$$

식 (13)의  $P(X-k|N-n, k, n)$ 는 식 (9)의 유도과정과 유사하게 전확률의 법칙과 이항분포와 베타분포의 공액성을 이용하여 정리하면 식 (14)와 같이 나타난다. 식 (14)의  $P(X-k|N-n, k, n)$ 는 식 (9)의  $P(X)$ 와 같이 베타-이항분포의 형태이고  $Be-bin(N-n, a+k, b+n-k)$ 라고 표현할 수 있다. 사전분포  $Be-bin(N, a, b)$ 에서 파라미터  $a, b$ 가 각각  $a+k, b+n-k$ 로 업데이트 된 것을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} P(X-k|N-n, k, n) &= \int_0^1 P(X-k, q) dq \\ &= \int_0^1 P(X-k|q)P(q|k) dq \\ &= \int_0^1 \left\{ \binom{N-n}{X-k} q^{X-k} \right. \\ &\quad \left. \times (1-q)^{N-n-(X-k)} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a+k)\Gamma(b+n-k)} \right. \\ &\quad \left. \times q^{a+k-1}(1-q)^{b+n-k-1} \right\} dq \\ &= \binom{N-n}{X-k} \frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a+k)\Gamma(b+n-k)} \\ &\quad \times \int_0^1 q^{a+X-1}(1-q)^{b+N-X-1} dq \\ &= \binom{N-n}{X-k} \frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a+k)\Gamma(b+n-k)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(a+X)\Gamma(b+N-X)}{\Gamma(a+b+N)}. \end{aligned} \quad (14)$$

식 (15)에서  $P(k)$ 는 식 (9), 식 (12)와 식 (14)를 이용하면 식 (16)과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{P(k|N, n, X)P(X)}{P(X-k|N-n, k, n)} \\ &= \frac{\left\{ \frac{\binom{n}{k} \binom{N-n}{X-k}}{\binom{N}{X}} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \right\}}{\left\{ \frac{\binom{N-n}{X-k} \Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a+k)\Gamma(b+n-k)} \right\}} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(a+X)\Gamma(b+N-X)}{\Gamma(a+b+N)} \\ &= \frac{\binom{n}{k} \binom{N-n}{X-k}}{\binom{N}{X}} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+n-k)}{\Gamma(a+b+n)}. \end{aligned} \quad (15)$$

첫 번째 샘플의 불량품 개수의 확률인  $P(k)$ 는 전확률 법칙과 베타분포의 성질을 이용해 식 (16)으로 정리할 수 있다.

식 (15)의  $P(k)$ 는 베타-이항분포와 초기하분포의 공액성 (conjugacy)을 이용해 얻은 값이다. 식 (15)와  $P(k)$ 를 전확률 법칙에 의해 정리한 식 (16)의 값은 같다. 따라서 베타-이항분포와 초기하분포는 공액성을 갖는다고 볼 수 있다. 공액성을 이용해 사후분포가 사전분포와 같은 형태인 베타-이항분포로 나타낼 수 있다. 제 2.3절에서  $i$ 번째 샘플링 후에도 공액성을 갖는지 확인한다.

$$\begin{aligned} P(k) &= \int_0^1 P(k, q) dq \\ &= \int_0^1 P(k|q)P(q) dq \\ &= \int_0^1 \left\{ \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} q^{a-1} (1-q)^{b-1} \right\} dq \\ &= \binom{n}{k} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+n-k)}{\Gamma(a+b+n)}. \end{aligned} \quad (16)$$

### 2.3 축차 샘플링(Sequential Sampling)

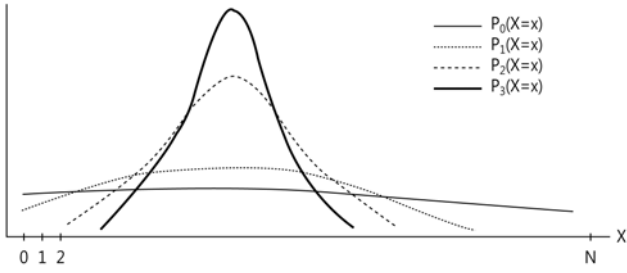
축차 샘플링은 일반적으로 고정 샘플링(fixed sampling)에 비해 적은 샘플 수로 유한 모집단의 신뢰성을 입증한다[16]. 따라서 본 연구에서는 최소의 샘플 수로 모집단의 신뢰성을 검증하기 위해 축차 샘플링 방법을 이용한다. <그림 2>는 축차 샘플링 과정에서  $P(X=x)$ 의 변화를 나타낸다. 샘플링의 횟수가 많아질수록  $P(X=x)$ 의 분포 모양이 특정값을 중심으로 불확실성의 정도가 줄어드는 것을 볼 수 있다.

첫 번째 샘플링 후 모집단의 불량품 개수의 확률인 식 (14)를 일반화하면 식 (17)처럼 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} P((X-k) = (x-k)|E_i) &= \frac{P(E_i|(X=x))P(X=x)}{\sum_{x=k}^{N-(n-k)} P(E_i|(X=x))P(X=x)}. \end{aligned} \quad (17)$$

$E_i$ 는  $i$ 번째 샘플  $n_i$ 에서  $k_i$ 의 불량품이 발견되는 사건이라 정의한다.  $i=1$ 일 때, 유한 모집단에서 샘플의 불량품의 개수가  $k$ 일 확률은 식 (18)과 같이 나타난다.

$$P(E_1|(X=x)) = \frac{\binom{x}{k_1} \binom{N-x}{n_1-k_1}}{\binom{N}{n_1}}. \quad (18)$$



<그림 2> 축차 샘플링 과정에서  $P(X = x)$ 의 변화

$i = 2, 3, 4, \dots$  일 때, 식 (19)와 같이 나타난다.

$$P(E_i | (X_i = x)) = \frac{\binom{x}{k_i} \binom{N_i - x}{n_i - k_i}}{\binom{N_i}{n_i}}, \quad (19)$$

$$N_i = N - \sum_{j=1}^{i-1} n_j, X_i = X - \sum_{j=1}^{i-1} k_j.$$

식 (17)로부터 새로운 사후분포를 정리하면  $i = 1$ 일 때, 식 (20)으로 나타난다.

$$P_1((X - k_1) = (x - k_1) | E_1) = \frac{P(E_1 | (X = x)) P_0(X = x)}{\sum_x P(E_1 | (X = x)) P_0(X = x)},$$

여기에서  $x = k_1, \dots, N - (n_1 - k_1)$ . (20)

$i = 2, 3, 4, \dots$  일 때, 식 (21)과 같다.

$$P_i((X - \sum_{j=1}^i k_j) = (x - \sum_{j=1}^i k_j) | E_i) = \frac{P(E_i | (X = x)) P_{i-1}(X = x)}{\sum_x P(E_i | (X = x)) P_{i-1}(X = x)},$$

여기에서  $x = \sum_{j=1}^{i-1} k_j, \dots, N - \sum_{j=1}^{i-1} (n_j - k_j)$ . (21)

샘플링 전에 모집단에 대한 사전정보가 없다고 가정하면, 일양사전분포(uniform prior distribution)로 볼 수 있다. 따라서  $P(X = x) = 1/(N+1)$ 이라고 할 수 있다.

샘플링 후에 모집단의 크기와 전체 불량품 개수는 각 샘플의 크기와 샘플에서 불량품이 발견됨에 따라 변한다. 따라서 모집단의 불량품 개수를 추정할 때 변화하는 모집단의 크기와 전체 불량품 개수를 고려해야 좀 더 현실적인 모집단의 불량률을 추정할 수 있다.  $i$ 번째 샘플링 후에 모집단의 크기와 전체 불량품 개수의 변화를 고려한 분포는 식 (22)와 같이 베타-이항 분포로 나타낼 수

있다. 식 (22)를 통하여 축차 샘플링 과정에서도 베타-이항분포와 초기하분포의 공액성을 확인 할 수 있다.

$$P_i((X - \sum_{j=1}^i k_j) = (x - \sum_{j=1}^i k_j) | E_i) = P_i((X - \sum_{j=1}^i k_j) = (x - \sum_{j=1}^i k_j) | N - \sum_{j=1}^i n_j, k_i, n_i) = \binom{N - \sum_{j=1}^i n_j}{X - \sum_{j=1}^i k_j} \frac{\Gamma(a + b + \sum_{j=1}^i n_j)}{\Gamma(a + \sum_{j=1}^i k_j) \Gamma(b + \sum_{j=1}^i (n_j - k_j))} \times \frac{\Gamma(a + X) \Gamma(b + N - X)}{\Gamma(a + b + N)}. \quad (22)$$

만약 모집단에 대해 아무런 정보가 없다면 베타분포의 상위 파라미터  $a = b = 1$ 로 가정하여 식 (23)과 같이 나타낼 수 있다. 또한, 감마함수에서  $t$ 가 정수라면  $\Gamma(t) = (t-1)!$ 로 계산한다.

$$P_i((X - \sum_{j=1}^i k_j) = (x - \sum_{j=1}^i k_j) | E_i) = \binom{N - \sum_{j=1}^i n_j}{X - \sum_{j=1}^i k_j} \frac{\Gamma(2 + \sum_{j=1}^i n_j)}{\Gamma(1 + \sum_{j=1}^i k_j) \Gamma(1 + \sum_{j=1}^i (n_j - k_j))} \times \frac{\Gamma(1 + X) \Gamma(1 + N - X)}{\Gamma(2 + N)}. \quad (23)$$

$i$ 번째 샘플링 후 모집단의 불량품 개수의 확률은 식 (23)이다. 식 (23)과 모집단의 신뢰수준( $C$ )과 관계는 식 (24)로 나타난다.

$$\sum_x P_i((X - \sum_{j=1}^i k_j) = (x - \sum_{j=1}^i k_j) | E_i) \geq C,$$

여기에서,  $x = \sum_{j=1}^{i-1} k_j, \dots, X_0$ . (24)

여기서  $X_0$ 는 최소의  $i$ 번째 샘플링으로 식 (24)를 만족하는 최대의 변수이다. 만약, 90%의 신뢰성을 보장한다면 최대 모집단의 10%가  $X_0$ 이다. 일반적으로 축차 샘플링은 고정 샘플링에 비해 최소의 샘플링 횟수로 유한 모집단의 신뢰성을 검증하기 때문에 식 (24)를 만족하는 최소의 샘플링 횟수( $i$ )를 찾아야 한다.



〈표 2〉  $k_1 = 1, k_{i+1} = 0, N=20, n_i = 1(i=1, \dots, 15), P_i(X=x)(i=0, 1, \dots, 16)$ 의 값

(단위 : %)

$x$	$P_0(X=x)$	$P_1(X=x)$	$P_2(X=x)$	$P_3(X=x)$	$P_4(X=x)$	$P_5(X=x)$	$P_6(X=x)$	$P_7(X=x)$	$P_8(X=x)$	$P_9(X=x)$	$P_{10}(X=x)$	$P_{11}(X=x)$	$P_{12}(X=x)$	$P_{13}(X=x)$	$P_{14}(X=x)$	$P_{15}(X=x)$	$P_{16}(X=x)$
0	4.76																
1	4.76	0.48	1.43	2.86	4.76	7.14	10.00	13.33	17.14	21.43	26.19	31.43	37.14	43.33	50.00	57.14	64.76
2	4.76	0.95	2.71	5.11	8.02	11.28	14.74	18.25	21.65	24.81	27.57	29.77	31.28	31.93	31.58	30.08	27.27
3	4.76	1.43	3.83	6.82	10.03	13.16	15.96	18.25	19.85	20.68	20.68	19.85	18.25	15.96	13.16	10.03	6.82
4	4.76	1.90	4.81	8.02	11.01	13.42	15.03	15.74	15.57	14.60	12.97	10.90	8.59	6.26	4.13	2.36	1.07
5	4.76	2.38	5.64	8.77	11.18	12.58	12.91	12.30	10.95	9.12	7.09	5.11	3.35	1.96	0.97	0.37	0.08
6	4.76	2.86	6.32	9.12	10.73	11.07	10.33	8.85	7.01	5.11	3.41	2.04	1.07	0.47	0.15	0.03	
7	4.76	3.33	6.84	9.12	9.84	9.22	7.75	5.90	4.09	2.55	1.42	0.68	0.27	0.08	0.01		
8	4.76	3.81	7.22	8.82	8.65	7.30	5.45	3.63	2.16	1.12	0.50	0.18	0.05	0.01			
9	4.76	4.29	7.44	8.27	7.30	5.47	3.58	2.04	1.01	0.42	0.14	0.03	0.00				
10	4.76	4.76	7.52	7.52	5.90	3.87	2.17	1.03	0.41	0.13	0.03	0.00					
11	4.76	5.24	7.44	6.62	4.54	2.55	1.19	0.45	0.13	0.03	0.00						
12	4.76	5.71	7.22	5.61	3.30	1.55	0.58	0.17	0.03	0.00							
13	4.76	6.19	6.84	4.56	2.24	0.84	0.23	0.04	0.00								
14	4.76	6.67	6.32	3.51	1.38	0.39	0.07	0.01									
15	4.76	7.14	5.64	2.51	0.74	0.14	0.01										
16	4.76	7.62	4.81	1.60	0.31	0.03											
17	4.76	8.10	3.83	0.85	0.08												
18	4.76	8.57	2.71	0.30													
19	4.76	9.05	1.43														
20	4.76	9.52															

만약, 첫 번째 샘플에서 불량품이 발생했고 16번째 샘플링 전에 불량품을 발견하여도 이를 수식에 반영하여 계속 신뢰성 입증 시험을 할 수 있다. 하지만 모집단의 수가 20이고 90%의 신뢰성을 반영하기 위해선 최대 허용 불량품 개수가 2이다. 따라서 나머지 20번째까지 샘플링 과정에서 불량품이 나오지 않는다면 모집단의 신뢰성을 입증할 수 있다. 모집단의 크기가 더 크다면 모집단의 불량품 개수를 추정할 때 샘플링 과정에서 발견되는 불량품을 수식에 반영하여 현실적인 연구결과가 나온다고 볼 수 있다. 또한,  $k_2 = 1$ 일 때 또는  $k_3 = 1$ 일 때와 마찬가지로 여러 경우의 수를 고려해 볼 수 있다.

### 4. 결 론

유한 모집단의 신뢰성을 입증하기 위해서는 모집단의 불량품 개수를 추정할 수 있어야 한다. 따라서 불량품 개수에 대한 사전분포가 필요하다. 또한, 사전분포를 이용하여 사후분포를 추정하기 위해 자연공액(natural conjugate) 관계를 갖는 우도함수도 필요하다.

본 연구에서는 베이지안(Bayesian) 방법론을 근거로 한

다. 사전분포를 활용하여 관심 모수들의 정보를 표현할 수도 있고 이러한 모수는 실험을 통해 갱신된다. 실험을 통해 갱신되는 모수를 이용하는 방법으로 사전분포는 모수들의 사후분포를 만들며, 이상의 과정을 반복하면서 사후분포는 다시 사전분포의 역할을 하게 된다. 베이지안 모형의 반복적 추론과정에 의해 샘플링 과정에서 발견될 수 있는 불량품을 반영하면서 반복적으로 해석될 수 있다.

본 연구에서는 베이지안 방법론을 활용하기 위해 베타-이항분포를 유한 모집단의 불량품 개수에 대한 사전분포로 초기분포를 우도함수로 고려하여 두 분포의 공액성을 보였다. 또한, 축차 샘플링 과정에서도 공액성을 이용하기 위해  $i$ 번째 샘플링 후에도 두 분포에 공액성이 있는지를 보였다. 최종적으로 샘플링 후에 변하는 모집단의 크기와 불량품 개수를 고려할 수 있는 베타-이항분포를 사후분포로 이용하여 베이지안 방법론으로 유한 모집단의 신뢰성 입증 시험을 하였다.

본 연구의 방법은 베타-이항분포와 초기분포의 공액성을 근거로 하여 한 번의 과정으로  $i$ 번째 불량품 개수의 확률을 쉽고 빠르게 계산할 수 있다. 또한, 축차 샘플링 과정에서 불량품이 발생하면 모집단의 불량품 개수를 업데이트하여 계산한다.

참고문헌

- [1] Ahn, S. E. and Kim, W. H., "Diagnosis of Lead Time Demand Based on the Characteristics of Negative Binomial Distribution," *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 28(2) : 146-151, 2005.
- [2] Borgonovo, E.; "A new uncertainty importance measure," *Reliability engineering and system safety*, 92(6) : 771-784, 2007.
- [3] Borgonovo, E.; "Epistemic uncertainty in the ranking and categorization of probabilistic safety assessment model elements : Issues and findings," *Risk analysis*, 28(4) : 983-1001, 2008.
- [4] Childs, A. and Chen, Y.; "Multilevel Fixed and Sequential Acceptance Sampling : The R Package MFSAS," *Journal of Statistical Software*, 43(6) : 2011.
- [5] Coolen, F. and Coolen-Schrijner, P.; Bayesian reliability demonstration, Wiley encyclopedia of statistics in quality and reliability, 2006.
- [6] Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., and Rubin, D. B.; "Bayesian data analysis," Chapman and Hall, New York, 2000.
- [7] Guérin, F., Dumon, B., and Usureau, E.; "Reliability estimation by Bayesian method : Definition of prior distribution using dependability study," *Reliability Engineering and System Safety*, 82(3) : 299-306, 2003.
- [8] Kim, D.; "On the actual coverage probability of hypergeometric parameter," *Journal of the Korea Data Information Science Society*, 21(6) : 1109-1115, 2010.
- [9] Kim, H. M. and Ahn, S. E.; "Hazard Rate Estimation from Bayesian Approach," *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 28(3) : 26-35, 2005.
- [10] Kleyner, A., Bhagath, S., Gasparini, M., Robinson, J., and Bender, M.; "Bayesian techniques to reduce the sample size in automotive electronics attribute testing," *Microelectronics reliability*, 37(6) : 879-883, 1997.
- [11] Krolo, A., Rzepka, B., and Bertsche, B.; "Application of Bayes statistics to reduce sample-size considering a lifetime-ratio," *Proceedings of annual reliability and maintainability symposium*, 577-583, 2002.
- [12] Lu, M. W. and Rudy, R. J.; "Reliability demonstration test for a finite population," *Quality and Reliability Engineering International*, 17(1) : 33-38, 2001.
- [13] Martz, H. F. and Waller, R. A.; "Bayesian reliability analysis of complex series/parallel systems of binomial subsystems and components," *Technometrics*, 32(4) : 407-416, 1990.
- [14] Martz, H. F., Waller, R. A., and Fickas, E. T.; "Bayesian reliability analysis of series systems of binomial subsystems and components," *Technometrics*, 30(2) : 143-154, 1988.
- [15] Percy, D. F.; "Subjective priors for maintenance models," *Journal of quality in maintenance engineering*, 10(3) : 221-227, 2004.
- [16] Ten, L. M. and Xie, M.; "Bayes reliability demonstration test plan for series-systems with binomial subsystem data," *Proceedings of annual reliability and maintainability symposium*, 241-246, 1998.
- [17] Vicens, G. J., Rodriguez-Iturbe, I., and Schaake, J. C.; "A Bayesian framework for the use of regional information in hydrology," *Water Resources Research*, 11(3) : 405-414, 1975.