한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제25권 제3호 (2012년 8월), 141–157

예비수학교사를 위한 수학사 활용 방안

Using History of Mathematics for Prospective Mathematics Teachers

정해남 Hae Nam Jung

본 논문은 먼저 수학교육에서 수학사를 활용하고자 하는 이론적 배경으로 역사발생적 원리를 중심으로 고찰하고 실제 중학교 교과서에서 수학사 활용 정도를 확인하다. 수학교실에서 수학사 활용의 성공적인 안착을 위해 예비수학교사교육에 수학사를 포함해야 하는 근거를 교사의 지식의 측면에서 살펴보고 예비수학교사를 위한 수학사 활용 프로그램을 제안한다.

There is enthusiasm among many mathematics educators to seek to understand how history of mathematics can be employed to emphasize the usefulness of mathematics and to make it even more useful. We investigate theoretical backgrounds of using history of mathematics for secondary students and prospective mathematics teachers. On the basis of historico-genetic principle and mathematics teachers' professional knowledge, we go into curriculum of prospective mathematics teachers. This study focussed on developing pedagogical approach using history of mathematics for prospective mathematics teachers.

Keywords: 수학사(history of mathematics), 수학사 활용(using history of mathematics), 역사발생적 원리(historico-genetic principle), 예비수학교사교육(education of prospective mathematics teachers)

1 들어가는 말

1969년 NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)의 제 31 연보에서 교수 도구로서의 수학사를 논의하면서 수학교실에서 수학사를 활용을 권고한 이래로 수학교육에서 효과적 동기 부여 및 흥미 유발에 대한 수학사의 역할을 강조하며 수학사를 수학 수업에 실제적으로 활용할 수 있는 방안에 대한 논의가 활발해졌다[6]. 그리고 ICMI(International Commission on Mathematics Instruction)가 1972년에 HPM(International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Math-

이 논문은 2010년도 성신여자대학교 학술연구조성비 지원에 의하여 연구되었음.
MSC: 00A05, 01A72, 01A73
제출일: 2012년 7월 19일 수정일: 2012년 8월 15일 게재확정일: 2012년 8월 19일

ematics)의 창립을 정식으로 승인한 이후 수학교육에서 수학사의 역할에 대한 연구가 좀 더 심화되고 국제교류도 빈번해졌다.

우리나라 역시 이런 경향이 수학교육 연구와 실제에 반영되고 있다. 실제로 수학교실에서 수학사를 다루는 구체적인 방안에 대한 현장 연구에서부터 조선 수학사를 다루는 학위 논문에 이르는 다양한 연구들이 진행되고 있다. 또한, 초·중·고 교육과정과 사범대 교육과정에 수학사가 필수 영역으로 포함되어 있지 않지만, 예비수학교사를 위한 교재나 초·중·고 수학 교과서에서 수학사와 관련된 내용을 어렵지 않게 확인할 수 있고, 사실상 이런 내용들은 점차 늘어나고 있는 경향이다.

현재 수학은 양과 질, 모두 급격하게 발전하고 있으며, 더욱이 수학사 활용이 학생들의 성적을 당장 올려주는 것도 아님에도 불구하고 이처럼 수학 교실에서 수학사를 활용하려는 노력이 끊이지 않는 것은 기존의 학교 수학을 보완할 수 있는 어떤 장점을 분명히 가지고 있다고 볼 수 있다. 수학의 특징이자 장점인 추상성, 일반성, 형식화 등은 수학에 익숙하지 않은 학생들이 수학에 다가가는 것을 방해하는 경우가 많다. 이러한 교과의 특성상 수학교사는 학생과 수학이라는 교과를 매개로 관계를 맺는 데 어려움을 겪는다. 즉, 교과교육에서 교사는 학생을 교과로써 만나고 교과를 통해 대화해야 된다고 하지만, 수학교사에게 교과는 도리어 학생과의 관계에서 걸림돌이 되는 경우가 종종 있다. 수학사 강좌가 없었다면 교육자들은 학생들이 수학을 좋아하거나, 진가를 알아보거나 이해하도록 가르칠 수 없을 거라는 Tymoczko[42]의 말을 고려한다면, 이러한 문제들을 완화시킬 수 있는 방안의 하나로써 수학교실에서 수학사 활용을 제시할 수 있을 것이다.

수학적 개념은 처음부터 완벽했을 것이라고 생각하는 학생들에게 수학자들의 좌절과 성공에 대해 말해 줄 수 있고, 학교에서 배우는 수학적 개념과 기호가 처음에는 지금과 매우 다른 모습이었다는 사실에 학생들이 놀랄 수 있고, 현재 학생들이 쉽게 풀 수 있는 문제들을 예전 사람들을 굉장히 어려워했거나 지금과 전혀 다른 방법으로 문제를 풀었다는 사실을 확인할 수 있을 것이다. 이런 것들을 직접 경험하게 되면 학생들은 수학이 더 이상 완벽하고 확실한 지식이라는 선입관을 의심하기 시작할 것이고 수학에 대한 얘기꺼리가 많아지게 될 것이다. 즉, 수학사 활용은 수학을 완벽한 지식체계가 아닌 인간 활동의 맥락에서 파악하게 하는 것이고 이것은 또한 현대적 수학철학의 주된 경향을 반영하는 것이고, 학생들에게 '수학하기(Doing Mathematics)'의 경험을 제공해 줄 수 있을 것이다[28]. 따라서 학생들에게 수학사라는 영역을 직접 가르치지 않더라도 부분적으로 수학사를 활용한 활동을 구성하는 것은 기존의 교수-학습 과정을 많이 보완해줄 수 있을 것이다.

이러한 수학사 활용의 장점에도 불구하고 수학교실에서 성공적으로 시행되지 않는 이

유 중의 하나가 교사 요인이다. 수학사와 관련된 강좌가 교직 필수 과정이나 교사연수에서 개설되지 않는 경우가 많고, 교육과정이나 지도서에도 수학사 활용에 관한 충분한 안내가 나와 있지 않기 때문에 교사 개인이 아무런 도움 없이 혼자서 스스로 활동을 구성해야 되므로 수학사 활용은 교사에게 큰 부담을 주는 경우가 대부분이다. 따라서 이 논문에서는 수학교실에서 수학사 활용의 이점이 있다면, 이에 대한 예비 수학교사 교육 프로그램을 어떤 근거와 방향에서 구성되어야하는가에 대해 논의해 볼 것이다.

2 수학교육에서 수학사 도입에 대한 배경

1970년대 중반부터 활발하게 전개되기 시작한 수학교육에서 수학사 활용의 배경에 대한 논의는 다음과 같이 3가지로 정리할 수 있다[25].

첫째, 수학교육의 근본 목표 중의 하나를 수학에 관한 균형 잡힌 상에 도달하는 것이라면 기존의 수학교육에서 연역적 형식 체계와 수학을 동일시하는 상을 보완하기 위해 끊임없이 성장하고 변화하고 오류 가능한 수학의 모습이 필요하다. 즉, 수학적 이론의 발전이나 변화라는 인간의 관계를 토대로 한 역사적 현상을 수학교실에 추가해야 할 필요가 있다는 것이다. 이것은 Lakatos가 수학적 지식을 완성된 절대적이고 확실한 지식이 아닌 추측과 반박을 통해 끊임없이 재형성되는 것으로 파악한 것과 맥을 같이 한다[9]. 또한 이러한 수학에 대한 균형 잡힌 시각은 누구보다도 수학교사에게 먼저 필요하기도 하다.

둘째, 수학사에 대한 고찰은 수학 자체뿐만 아니라 문화적 현상으로서의 수학에 대해 학습할 수 있게 한다. 즉, 수학 역시 문화유산 중의 하나라 보고 역사적으로 수학과 문화적 배경이 어떻게 관계를 맺고 있는가를 파악하여 특정 시대에 특정한 방향으로 수학적 개념이 발달한 토대를 확인할 수 있게 한다. 이것은 수학 발달의 내적 요인뿐만 아니라 외적 요인에 주목하게 한다.

셋째, 교수-학습 방법론적 측면에서 수학교실에 역사적 요소를 도입함으로써 긍정적인 효과를 거둘 수 있다는 것이다. 즉, 역사적 고찰이 수학의 이해를 돕는 수단으로 작용하여 학생들의 학습효과에 긍정적인 영향을 미친다는 것이다. 전통적인 수학 교수는 수학적 개념의 역사적 발달 과정이 끝난 지점에서 시작되기 때문에 학생들이 이해하기 어려웠으나, 그 이전 과정을 수학교실에 도입함으로써 학생들의 이해를 도모한다는 것이다. 이것은 특히 역사발생적 원리와 밀접한 관계를 맺는다.

이 중 수학교육에서 수학사 활용에 가장 큰 영향력을 미친 것은 세 번째 배경과 밀접한 역사발생적 원리다. 역사발생적 원리는 단순히 수학사의 활용만을 강조하는 것이 아니라, 수학교재 구성과 교수-학습 과정에서 수학사와 학습자 사이의 관련성을 중시한다. 이것은 수학의 역사적 발달에 대한 관심이 결국 수학을 학습하는 과정과 관련된 교육적

논의로 귀결된다고 볼 수 있다.

역사발생적 원리를 시기적으로 구분하면, 크게 고전적인 역사발생적 원리와 현대적인 역사발생적 원리로 구분할 수 있다[6]. 고전적인 역사발생적 원리는 17세기 Comenius를 필두로 18세기 Clairaut, 19세기 초 Lindner, Mager 등에 의해 구체적으로 논의되기 시작하였다. 고전적 역사발생적 원리는 생물학자 Haekel의 개체 발생은 계통 발생을 반복한다는 재현의 법칙이 발표되면서 새로운 전기를 맞이하게 된다. 이 생물학적 원리를 Herbart 학파에 의해 교육학 분야에 흡수되었고[6], 19세기 말 많은 수학교육자들에 의해 재현의 법칙이 역사발생적 원리의 핵심적인 주장으로 자리를 잡게 되었다. 20세기에 들어와 Smith, Poincare, Klein 등은 재현의 법칙을 토대로 역사발생적 순서에 따라 수학을 지도해야 된다고 주장하였고, La Cour, Branford, Toeplitz 등은 역사발생적 원리에 따라 수학 교재를 저술하였다[9]. Haekel의 재현의 법칙과 밀접하게 관련되어 있고 수학적 개념의 발생이 단절 없이 연속적으로 이루어진다고 보는 것이 고전적 역사적발생적 원리의 특징이라 할 수 있다.

고전적 역사적발생적 원리와 달리 현대적 역사발생적 원리는 수학의 발달과 개인의 학습과정이 불연속적으로 이루어진다고 본다[6]. 이러한 관점은 수학적 개념의 발달과 개인의 학습에 대한 완전한 평행성을 보장하지 못하며, 20세기 중반 이후 수학철학의 변화를 반영하고 있다. Lakatos는 수학을 오류 가능한 인간의 활동으로 보고 연역적 양식이 아닌 추측과 반박에 따른 재구성이라는 새로운 양식을 제안하면서 학생들도 이러한 형태로 학습해야 된다고 주장하였다[35]. 또한 그는 수학적 개념의 역사발생 순서가 아니라 수학적 발견의 논리에 따라 수학 교재를 구성해야 된다고 주장하였다. Freudenthal은 학습과정을 불연속적인 비약으로 보고, 수학적 개념의 역사발생을 중요시하지만, 역사적 발달과정 그대로를 재현하는 것이 아니라 그것을 학습자의 현실적 문맥을 통해 재구성해야 된다고 강조하고 있다[34]. Brousseau는 Bachelard의 인식론적 장애 개념을 수학교육에 도입하여 자신의 교수학적 상황론을 완성하였다. 교수학적 상황론은 학생 스스로 수학적 지식을 획득할 수 있도록 그 지식이 발생할 수 있는 상황을 만들어 제시하고, 그 과정에서 학생이 이전에 가지고 있던 개념과의 단절을 겪으면서 인식론적 장애를 극복하도록 한다[27]. 즉, 역사발생적 순서대로 학생에게 제시하는 것이 아니라 수학적 개념을 지식의 본질과 관련하여 그 역사발생적 과정을 분석함으로써 학생이 스스로 장애를 극복할 수 있는 상황을 제시한다는 것이다.

고전적 역사발생적 원리와 현대적 역사발생적 원리는 모두 연역적 교재구성에 반대하며, 수학교실에서 단순한 지식 전달이 아닌 학습자의 활동을 중시한다[6]. 또한 학생의 수학 학습에서 어려움의 원천을 이해하기 위해 수학적 개념의 역사적 분석을 강조한다. 특히, 현대적 역사발생적 원리는 학생 스스로 수학적 지식을 구성할 수 있는 환경을 만

드는 교사의 조력자의 역할과 학생의 주체적인 활동과 참여를 강조한다.

우정호는 현대적 역사발생 원리, 특히 Freudenthal의 이론을 토대로 수학교실에서 수학사를 활용하는 이점을 다음과 같이 제시하고 있다[9].

첫째, 알고리즘적인 계산 수학을 반성하여 개념적 사고를 고취하는 데 이용할 수 있다.

둘째, 교육과정의 구성에서 자연스러운 내용 배열의 준거가 되며, 수학적 아이디어의 역사적 발달 과정을 따라 자연스럽게 그 이해를 도울 수 있다.

셋째, 수학의 역사적 발달 과정을 통해 수학적 사고의 인간적인 모습을 접함으로써, 학습 동기를 유발하고 수학 학습에 생기를 불어넣을 수 있다.

넷째, 현대 기술 문명의 발달에서의 수학의 중심적인 역할과 수학의 문화적인 역할을 이해함으로써 수학에 대한 학생의 기존 인식을 바꿀 수 있다.

수학의 역사는 부분적으로 알고리즘화/공식화, 즉 일종의 자동화를 추구해 온 과정으로 파악할 수 있다. 수학교실에서 학생들은 주로 이 자동화 과정의 결과물인 알고리즘이나 공식을 접하게 되므로 학생들은 수학은 공식을 외워 대입하여 계산하는 교과라고 생각하는 경우가 많다. 이러한 수학교실에 수학사를 도입하여 수학적 알고리즘/공식의 자동화 과정이 어떻게 진행되는가를 다양한 방법으로 접해봄으로써 학생 스스로 수학적 개념 형성 과정을 반성해보는 경험을 가능하게 할 수 있다. 예를 들어, 두 수의 합과 곱이 주어진 상태에서 원래의 두 수를 구하는 문제를 해결하기 위해 고대 바빌로니아인이 사용했던 기하적인 방법을 수학교실에서 활용하는 과정 속에서 학생들은 이차방정식의 공식화 과정이 어떻게 이루어지는가를 반성해볼 수 있다[37].

두 번째 수학사 활용 방안은 학생의 이해를 위해 수학 교재의 연역적 전개를 비판하면서 발생적 원리에 입각하여 교재를 구성해야 된다는 주장을 토대로 한다. Arnauld <새 기하학 원론(1667)>을 비롯하여 Clairaut의 <기하학 원론(1741)>, Toeplitz의 <미적분(1949)> 등이 역사발생적 원리에 따라 전개된 대표적인 저서들이다. 특히, Toeplitz는 수학교사교육에서 역사적 사실의 전달이 아닌 수학과 수학적 방법의 특성에 대한 올바른 태도의 전달이 중요하다고 강조하였다. 이것은 학생이 좋은 문제해결자가 되기 위한 첫 단계는 교사가 먼저 좋은 문제해결자가 되어 학생들이 교사의 행동과 태도를 모방할 수 있게 하는 것이 중요하다고 주장한 Polya와 유사하다고 볼 수 있다[31]. Toeplitz는 수학교실에서 실천할 수 있는 방안 두 가지를 제기하였는데, 하나는 희극화를 통해 학생이 직접 발견하게 해서 개념 및 사실을 발생시키는 직접적인 발생적 방법이고, 나머지는 역사적 분석을 통해 개념의 의미와 핵심을 학습하여 그 개념의 교수를 이끌어내는 간접적인 발생적 방법이다[9].

앞의 세 번째 방안은 현대 수학철학의 경향을 반영하고 있다. 학생들은 주로 학교에서

연역적 양식으로 수학을 접하는 경우가 많기 때문에 수학적 개념은 완전하고 절대적이며, 수학자들은 완벽한 인간이라고 생각하는 경우가 많다. 그렇지만 실제로 많은 수학자들이 실패와 성공이라는 부침을 겪게 되고 그 과정은 연역적 양식으로 전개되는 수학과는 전혀 다른 모습이라는 것을 학생들이 인식할 수 있게 된다. 결국 학생들은 수학의 다양한 모습과 인간적인 수학자들을 확인할 수 있고, 이를 토대로 수학 학습의 동기 부여를 받을 수 있다.

마지막으로 학생들은 기술 집약적인 정보화 사회에서 살고 있으면서 수학이 쓸모없는 교과라고 생각하는 경우가 많다. 이것은 부분적으로 수학적 처리 과정을 블랙박스처럼 일반인이 평소에는 쉽게 인식할 수 없게 만든 테크놀로지 사회의 특징에 기인하기도 한다. 따라서 교사는 블랙박스 안에 숨겨진 과정을 학생에게 보여줘 수학이 우리 사회와 어떤 관계를 맺고 있는지 보여줘야 되고 더 나아가 역사적으로 수학이 문명사회 속에서 새로운 전기를 맞이할 때마다 어떤 역할을 했는지 확인시켜 줘야 한다.

3 중학교 2학년 수학 교과서와 익힘책에서 수학사 활용의 예

초·중·고 교육과정에서 수학사가 명시적으로 다뤄지지 않기 때문에 2009 개정 교과서 중심으로 수학사가 구체적으로 어떻게 활용되는가를 살펴보겠다, 초·중·고 수학 교과서를 비교해 보면, 초등학교는 교과서 자체에는 수학사 내용이 나타나지 않고 익힘책에서만 부분적으로 나타나는 반면, 중학교와 고등학교는 수학 교과서와 익힘책 모두 수학사 내용을 포함하고 있다. 주로 수학적 개념의 유래와 수학자와 관련된 읽을거리 중심으로 간략하게 수학사 내용이 소개되어 있다. 고등학교에 비해 중학교가 양적으로 수학사와 관련된 내용이 더 많고 상대적으로 다양한 형태를 취하고 있다.

여기서는 중학교 2학년 수학 교과서와 익힘책을 중심으로 수학사 활용의 예를 살펴보겠다. 교과서와 익힘책에 포함된 수학사 활용의 유형을 '수학자와 관련된 일화 소개', '용어, 기호, 정리에 대한 간략한 수학사적 내용 소개', '역사적 문제 활용하기', '수학 개념의 역사적 발달 과정' 등 4가지 범주로 나눠서 구분하였다. 중학교의 다른 학년과 초·고등학교 수학 교과서와 익힘책의 수학사 활용도 이 4가지 범주를 크게 벗어나지 않는다.

10여종의 중2 수학 교과서와 익힘책에 나타나는 수학사 자료 유형의 4가지 범주에 해당되는 예는 다음과 같다.

① 수학자와 관련된 일화 소개

해당 수학적 주제와 관련된 수학자의 삶이나 업적, 수학자의 일화, 수학자의 연대표, 수학자의 격언 등을 다룬다. 예를 들면 '유리수와 근삿값' 단원은 이 범주에서 스테

빈(Stevin, 1548-1620)을 가장 많이 인용하고 있다. 스테빈의 소수 발견과 십진분수법을 간략히 설명하고 있거나[2, 4, 7, 10, 17, 19, 23], 인터뷰 형식을 취해 스테빈의 업적을 좀 더 자세히 소개하고 있다[15]. 또한, ‘도형의 닮음’ 단원에서는 탈레스(Thales, B.C. 624?-B.C.546?)를 간략히 소개하거나 삼각형의 닮음을 이용하여 피라미드의 높이를 잰 일화를 소개하고 있다[3, 18, 20].

② 용어, 기호, 정리에 대한 간략한 수학사적 내용 소개

용어, 기호, 정리에 대해 수학사적으로 설명하거나 그 유래를 밝히는 경우다. 예를 들어 ‘방정식과 부등식’ 단원에서 해리엇((Harriot 1560–1621)이 부등호(<, >)를 제일 먼저 사용했고[4, 7, 10, 13, 18], 부게르(Bouguer, 1698-1758)가 등호가 들어간 부등호(≤, ≥)를 처음으로 사용했다는 부등호 기호의 유래에 대해 소개하고 있다[7]. 또한 <구장산술>, <구일집> 등을 소개하면서 방정식의 유래에 대해 간단히 소개하고 있다[8, 13, 23].

③ 역사적 문제 활용하기

역사적인 문제를 적용하여 제시하거나 수학사 문제를 포함하여 일화를 설명하는 것도 포함된다. 예를 들어 린드 파피루스에 포함된 피라미드의 높이를 구하는 문제[11]와 탈레스가 사용한 방법을 이용하여 나무 높이나 피라미드의 높이를 구하는 분제를 제시하고 있다[16, 21]. 또한 ‘확률’ 단원에서는 중단된 게임의 상금 분배 문제[5, 14]와 목제주령구의 확률 계산 문제[23]가 여기에 포함된다.

④ 수학 개념의 역사적 발달 과정

해당 수학적 개념이나 아이디어의 역사적 발달 과정에, 즉 이것과 관련된 수학자들의 여러 가지 접근 방법, 어려움, 기호화와 형식화의 점진적 과정 등을 포함한다. 예를 들어 ‘방정식과 부등식’ 단원에서 조선시대의 <이수신편>에 소개된 문제를 ‘이율분신’이라는 방법을 이용하여 해결하는 방법을 소개하고 있고[13, 16], 중국의 <손자산경>에 실려 있는 문제를 그 책의 풀이법과 현재의 풀이법을 비교할 수 있도록 제시하고 있다[20]. ‘문자와 식’ 단원에서는 인도의 고대 베다 경전에 바탕을 둔 수학의 계산법과 원리를 설명하고 있고[13], 마방진의 소개와 곱셈 마방진의 기본 원리를 설명하고 학생들이 스스로 마방진을 구성하는 활동을 제시하고 있다[17, 22].

위의 4가지 범주 중 가장 많은 부분을 차지하는 것은 첫 번째 ‘수학자와 관련된 일화 소개’이고(82회), 그 다음은 두 번째와 세 번째인 ‘용어, 기호, 정리에 대한 간략한 수학사적 내용 소개’(41회)와 ‘역사적 문제 활용하기’(44회)가 비슷하게 나타난다. 두 번째 범주는 수학사 내용이 단원별로 비록 고르게 나타나는 반면, 세 번째 범주는 주로 옛날

문제를 현대적인 방법으로 해결하는 경우인데 절반 정도가 ‘방정식과 부등식’ 단원에 몰려 있다. 마지막 범주인 ‘수학 개념의 역사적 발달 과정’(6회)은 거의 나타나지 않고 나타나더라도 단순한 변천 과정을 소개하거나 과거의 해결 전략과 현재의 해결 전략을 비교하는 경우로 국한된다.

수학사와 관련된 2009 개정 교육과정에 해당되는 수학 교과서의 두드러진 특징은 이전 교과서에 비해 동양 수학사나 한국 수학사를 소개하는 비중이 늘었다는 것이다. 이는 2000년대 중반 이후부터 <묵사집산법>, <구수략>, <구일집>, <측량도해>, <익산> 등 조선시대 수학책들이 번역되기 시작하면서, 더불어 이와 관련 도서들이 출판됨으로써 중국을 중심으로 한 동양 수학사와 한국 수학사에 대한 접근성이 이전 교육과정보다 더 용이해진 것에 기인하는 것으로 볼 수 있다.

4 예비수학교사 교육에서 수학사 활용의 필요성

예비교사 교육에 대한 연구 중에서 가장 중요시되는 분야 중의 하나는 예비교사를 위한 교육과정 구성에 기초가 되는 교사의 전문지식에 대한 분야다. 이 분야는 Shulman이 교사의 전문지식을 개념적으로 분석한 이후 이 주제에 대한 연구들이 폭넓게 확장되어 왔다. 이들 연구는 전통적으로 교사의 전문지식을 주로 가르치는 교과 자체 지식으로 한정시켜 왔던 것에 비해 교수법적인 요소를 덧붙이며 통합적인 측면을 강조하는 경향을 띄고 있다.

Shulman은 교사와 관련된 지식을 교과 지식(subject matter knowledge), 교수법적 내용 지식(pedagogical content knowledge), 그리고 교육과정 지식(curriculum content knowledge)으로 구분하였다. 수학 교수에서 교과 지식은 정의, 정리, 원리, 절차, 아이디어 등 수학 교과의 구조를 이해는 것에 해당되고, 교수법적 내용 지식은 학교수학의 내용을 학생이 이해할 수 있도록 가르치기 위한 방법 전반에 대한 지식에 해당된다[38]. Shulman은 이 두 종류의 지식을 명확히 구분하며, 교수법적 내용 지식은 내용 전문가와 교육전문가를 구분하는 중요한 기준이 되므로 교사에게 교수법적 내용 지식이 중요하다고 역설한 이래로, 교수법적 내용 지식에 대한 연구가 각 교과별로 광범위하게 이루어져 왔다. 사실 교수법적 내용 지식은 교수법과 해당 교과 내용 지식의 단순합이 아니므로 교사가 이러한 지식들을 어떻게 통합하는가가 관건이다.

Tamir도 Shulman과 비슷한 시기에 교사 지식에 대한 구조를 연구하였는데, 그 역시 전통적인 교과 지식에 교수법적인 요소를 추가하여 구조를 완성시켰다. 그는 교과 교수법 지식에 ‘학생’, ‘교육과정’, ‘수업(교수와 운영)’, ‘평가’ 등 네 범주로 나눈 다음, 각각의 범주에 필요한 하위 구조를 ‘지식’과 ‘기능’으로 나눠 구조화시켰다([41]에서 재인용). ‘지식’이라는 항목에서는 이론, 모델, 개념, 사실을 언급하고 있는 반면 ‘기

능’에서는 이런 수용된 진리가 확립되어 온 방법, 수단, 절차 등에 초점을 맞추고 있다([41]에서 재인용). Tamir는 교사는 한 학문의 실제적인 구조와 종합적인 구조에 익숙해야하고, 자신이 가르치는 교과와 다른 교과를 상호 관련시킬 수 있어야 된다고 강조하였다.

Bromme은 Shulman의 범주를 수학 교과에 적용하여 교과의 측면을 강조하면서 심리적인 측면에서 세분화하였다. 대학에서 배우는 수학에 해당되는 ‘학문으로서 수학에 관한 지식’ 초·중등학교에서 가르치는 ‘학교수학 지식’, 수학과 수학 교수-학습 인식론에 기초한 ‘학교 수학의 철학’, ‘교육학 지식’, ‘교과-교수법 지식(subject-matter-specific pedagogical knowledge)’, ‘상이한 분야로부터의 인지적 통합’ 등 6가지로 수학교사의 지식을 범주화하였다[40]. Bromme은 교과의 성격을 잘 이해하기 위해 교과의 외부에서 바라볼 수 있는 시각을 강조하고 있는데 이것이 바로 학교 수학의 철학에 해당된다. 이것은 수학 교사가 수학을 어떻게 파악하는가에 따라 그 교수방법이 영향을 받는다고 주장한 Thom과 교사의 수학철학을 강조한 Ernest와 맥을 같이 한다[9]. 또한 Bromme은 교과-교수법 지식에서 교육학적 지식과 교과 지식에 대한 경험을 전반적으로 언급하고 있고, 상이한 분야로부터의 지식의 인지적 통합에서는 이러한 통합이 실제 훈련과 전문적인 경험을 하는 동안에 일어난다는 점을 강조한다[40]. 이렇듯 다른 기원에서 유래하는 지식이 섞여서 통합된 것이 수학교사의 전문 지식의 독특한 성질이다.

Collinson은 모범적인 교사에게 필요한 지식을 다음과 같이 세 범주로 나눠 설명하고 있다. 교과 지식, 교육과정 지식, 교수법 지식에 해당되는 ‘전문적 지식’, 학생과의 인간적 상호관계, 교육단체, 지방자치단체 등과의 관계에 관한 지식을 포함하는 ‘인간관계에 대한 지식(interpersonal knowledge)’, 직업윤리, 지속적으로 공부하려는 성향, 반성적인 사고 등에 해당되는 ‘내성적 지식(intrapersonal knowledge)’ 등이 세 범주에 해당된다([41]에서 재인용). Collinson은 기존의 교사교육이나 교수에 대한 연구가 전문적인 교과 지식만을 너무 강조해 온 것을 비판하면서 상대적으로 ‘인간관계에 대한 지식’과 ‘내성적 지식’을 강조하고 있다. 그는 ‘인간과계에 대한 지식’에서 교수-학습이 일어나는 상황뿐만 아니라 그 외적 상황까지 확대시키고 있다([41]에서 재인용). 교사가 교실 맥락에서 학생의 학습을 성공적으로 도왔어도, 동료교사나 학교장, 특히 학부모에게 자신이 가르치는 것에 대해 충분히 정당화하지 못하면 문제가 야기될 수밖에 없다. 그리고 교사 또한 학생과 마찬가지로 계속해서 공부하는 자세가 필요하다는 점에서 ‘내성적 지식’은 단순히 책을 통해 얻어지는 지식이 아닌 삶의 자세로 확대시키고 있다. 이러한 Collinson의 강조점은 요즘과 같이 수업 외적인 요소가 수학교실에 영향을 많이 미치는 교육환경에서 더욱 더 주목해야 할 가치가 있는 것으로 보인다.

지금까지 살펴 본 연구들이 한결같이 강조하고 있는 것은 각각 제시한 교사지식의 범

주들의 간학문적인 통합이다. 즉, 교사의 지식은 어느 한 범주에 대한 두드러진 강조보다는 이들의 통합된 지식이 교수 실제에서 중요하다는 것이다. 이러한 통합은 경험의 맥락에서 가능하므로, 실제 교수 현장에서 가장 잘 일어날 것이고, 교직과정에서는 교생실습 기간에 이뤄질 것이다. 그렇지만 현장에서 가르치는 것을 경험한다고 해서 저절로 수학교사나 예비수학교사의 지식의 통합이 일어나는 것은 아니다. 따라서 교직이수과정에서 이러한 통합이 가능한 실제 경험과 유사하게 일어날 수 있는 학습 환경을 고려한 강좌가 필요하다.

현재 시행되고 있는 예비수학교사의 교육과정은 크게 3가지 영역으로 나눌 수 있는데, ‘교육학’, ‘교과내용학’, ‘교과교육학’이 이에 해당된다. ‘교육학’은 일반교직과목에 해당되고, ‘교과내용학’은 전공 수학 강좌를 포함하는데, 이 두 범주는 통합적이기 보다는 독립적인 강좌로 대학별로 유사하게 진행되는 실정이다.

‘교과교육학’ 영역은 교과교육론, 교과교재연구 및 지도법, 교과논리와 논술이 필수과목이고 그 외에 수학교육과정론, 수학교육심리학, 수학교육공학, 문제해결론, 수학교육평가론 등과 같은 강좌 중에 2-4 강좌가 대학 실정에 맞게 개설되고 있다. 이 세 영역 중 앞에서 언급한 통합적인 활동이 용이한 수업 환경이 가능한 영역은 교과 교육학이다. 교과교육학은 강좌 성격상 수학을 가르치는 전반에 관련된 내용이므로 근본적으로 여러 분야에서 기원하는 지식들이 통합되어 있는 경우가 많다. 문제는 이 통합이 예비수학교사에 의해 스스로 이뤄지는 경우라기보다는 통합된 내용을 예비수학교사들이 익히는 경우가 많다는 것이다. 결국, 예비수학교사들은 교육과정 안에서 자신의 교육관과 수학철학관에 입각해 여러 종류의 전문지식을 통합해 볼 수 있는 기회가 적다. 따라서 예비수학교사 스스로 기원이 다른 여러 지식을 인지적으로 통합해 볼 수 있는 경험을 제공하는 강좌가 필요한데, 이런 강좌의 소재로 유용하게 사용될 수 있는 것 중의 하나가 수학사와 관련된 내용이다. 수학사는 기본적으로 복합적이고 종합적인 학문이고, 어떤 접근법을 취하느냐에 따라 수학적으로, 사회학적으로, 문화적으로 다양한 결과를 낳을 수 있다. 또한, 수학교실에서 수학사를 활용할 때 학생들에게서 얻을 수 있는 긍정적 효과를 예비수학교사에게 기대해 볼 수 있다. 실제로 Philippou와 Christou는 수학사를 기초로 한 연수 프로그램에 참여한 교사들의 수학 교수-학습에 대한 긍정적인 태도 변화를 보고하고 있고[30], Arcavi는 수학사 활용이 수학교실뿐만 아니라 교사교육에서도 중요하므로 예비수학교사를 준비시키는데 수학사를 경험하게 하고, 이를 위한 적절한 구체적인 자료를 준비하는 것을 강조한다[26].

5 예비 수학교사 교육에서 수학사 활용 방안

앞 절에서 살펴본 것처럼 예비 수학교사가 여러 분야에서 기원하는 지식들을 통합하고, 수학사를 교수-학습의 일반적인 과정으로 통합하는데 도움이 되는 강좌를 위한 몇 가지 방안을 제안하겠다. 기존의 수학사 활용 교사교육 프로그램들을 참조하여 다음과 같은 특징을 갖춘 강좌를 구성하는 것이 중요하다[39].

① 활동적 참여

강의식 수업보다는 워크숍 형태에 준하는 프로그램을 개발하여 예비 수학교사들이 주체적으로 활동하고 참여할 수 있도록 하는 것이 중요하다. 개별 활동, 짝 활동, 모둠 활동을 적절히 구성하여 예비 수학교사의 자발적인 활동을 최대한 이끌어 내어 스스로 수학적 활동을 구성하고 판단할 수 있도록 한다. 가능한 프로젝트 활동을 포함하는 것이 유용하다.

② 학교 교육과정과의 적합성

나중에 가르치게 될 학교 교육과정에 부합하는 주제를 채택하면 예비수학교사들을 좀 더 동기화시킬 수 있는데, 이는 예비수학교사 자신들이 참여하는 활동 자체가 미래의 자신의 실제 수업에서 잠재적으로 적용가능하기 때문이다. 또한 이런 활동에 참여하게 됨으로써 본인의 어려움뿐만 아니라 장래의 자신의 학생들이 겪을 수 있는 어려움을 예측할 수 있고, 이것을 완화시키거나 해결할 수 있는 방안에 대해 동료들과 함께 논의할 수 있는 기회를 가진다.

③ 1차 사료 활용하기

수학사의 1차 사료 중 교육과정과 관련된 내용이나 문제를 활용하는 것이 중요하다. 1차 사료의 용어 및 접근법은 과거 수학의 참모습을 어떠한 가공 없이 그대로 만날 수 있으므로 2차 사료에서 종종 발생될 수 있는 오역의 문제점을 피할 수 있다. 그렇지만 1차 사료의 접근성에 대한 언어적 문제가 있으므로 길이와 복잡성을 고려하여 소재 선택을 신중하게 해야 되고, 경우에 따라서는 번역문을 제시할 필요가 있다.

위의 3가지 특징을 토대로 예비수학교사를 위한 프로그램을 만들기 위해 다음과 같은 3가지 유형의 활동을 제안한다.

5.1 수학에서 문자, 기호, 공식 사용의 역할 인식하기

앞에서 살펴 본 중학교 2학년 교과서에서 역사적인 문제를 사용하는 경우는 방정식과 관련된 문제가 가장 많이 사용되었다. 교사교육 프로그램의 수학사 활용 강좌나 수학교실

에서 수학사 활용 프로젝트에서도 마찬가지다. 역사적 문제 해결 방법과 현대적 해결 방법이 차이가 나는 가장 큰 이유는 문자와 기호의 사용이다. 실제로 동·서양의 수학사를 비교해 보면 대수적 측면에서 앞섰던 동양이 서양에게 역전되는 시점이 대충 17세기부터라고 볼 수 있는데, 이것은 16세기 말 Viete가 미지의 양과 기지의 양을 모두 문자로 표시하기 시작한 이후다[1]. 이 시기는 Nesselmann의 대수적 표기의 역사적 발달 세 단계 중 세 번째 단계인 '상징적 대수학(symbolic algebra)' 단계에 해당된다[33]. 이 단계는 더 이상 수학적 기호와 그것이 의미하는 실체와의 명확한 관계는 거의 없어지는 반면, 일반해를 표시하는 것이 가능해지고, 이를 바탕으로 공식화가 가능해진 시기로 볼 수 있다. 이러한 공식화 과정을 통해 서양의 수학은 비약적으로 발전할 수 있었다[33].

예비수학교사들이 역사적인 수학문제를 다룸으로써 문자, 기호, 그리고 공식의 역할이 수학을 발달을 얼마나 앞당길 수 있는 가를 스스로 생각해 볼 수 있게 하는 것이 중요하다. 이 과정 속에서 수학은 내용뿐만 아니라 형식도 중요한 학문이라는 것을 인식하면서 수학 안에서의 내용과 형식의 관계에 주목하게 한다[1]. 표1은 문자와 기호의 사용 여부에 따라 예전의 풀이 방법과 달라지는 경우와 그렇지 않은 경우 모두를 포함하는 활동을 구성한것이다.

A. 어떤 두 수의 합이 20이고 이 두 수의 곱이 96일 때, 이 두 수는 각각 얼마인가?[37] ※다음은 Polya의 <수학적 발견(Ⅰ)>에 나오는 문제이다[31]. B. 농부는 몇 마리의 닭과 토끼를 기르고 있는데, 머리의 수를 세어보니 모두 50개이고, 발의 수를 세어보니 140개였다. 닭과 토끼는 각각 몇 마리인가? ※다음은 <구장산술(九章算術)>의 방정(方程)장에 나오는 문제이다[12]. C. 벼 상품 3단, 중품 2단, 하품 1단은 알곡이 39말이며, 상품을 2단, 중품 3단, 하품 1단은 알곡이 34말이고, 벼 상품 1단, 중품 2단, 하품 3단은 알곡이 26말이다. 상·중·하품 1단의 알곡은 각각 얼마인가? 1. A의 문제를 해결하시오. A의 문제를 '둘레의 반이 20이고, 넓이는 96인 직사각형의 가로와 세로를 구하시오.'로 변형시킨 다음, 문자나 식을 사용하지 않고 해결하시오. 변형한 문제와 유사한 문제를 만들어 보고, 그 문제를 기하적인 방법을 이용하여 해결 하시오. 2. B와 C에 제시된 문제를 문자와 식을 사용하지 말고 해결하시오. 3. 문자와 식을 사용한 현대적 해결방법과 ppt에서 제시한 문자와 식을 사용하지 않은 A, B, C의 해결방법에 대해 모둠별로 토론해보시오. 4. 문자와 식을 사용하는 현대적 방법과 사용하지 않는 방법이 구조적으로 유사한 경우는 몇 번인가? 왜 그렇게 생각하는가?

표 1: 활동지1

5.2 원전문제 해결하기 및 문제해결 전략 비교

동·서양 수학 원전에 나오는 옛 문제들과 풀이과정은 당대의 시대적 상황에 대한 정보나 그 당시 사람들의 수학적 독창성을 확인하게 해주고 수학적 필요성에 대해서도 예증하게 해준다. 또한 동·서양 고대 수학 문제들의 유사성이나 해결 전략의 공통점과 차이점을 인식함으로써 동양과 서양의 문화적 배경이나 사유 방식을 비교해 볼 수 있을 것이다. 그리고 고대인의 구체적인 문제 해결 과정을 통해 이들이 방정식 체계를 나름 이해하고 제곱근이나 세제곱을 구하기 위해 반복적인 알고리즘 체계를 확립시킨 사실에 놀라게 될 것이다[32].

이 과정에서 우리가 가장 많이 주목하는 것은 문제해결 전략이다. 동일한 구조의 문제라도 예전에 해결하던 방식과 현재의 해결 방식은 차이가 나는 경우가 많다. 따라서 원전에 나오는 수학 문제를 직접 풀어보면서 자신의 전략과 예전의 전략을 비교해 보는 과정이 중요하다. 이 과정을 통해 현대적 대수처리 과정의 효율성과 장점을 분명히 파악할 수 있고, 예전의 전략이 나올 수밖에 없는 수학적 선결조건을 고민하고 확인할 수 있을 것이다. 이것은 예비 수학교사로 하여금 문제해결 과정 속에서 좀 더 적극적이고 비판적인 태도를 취할 수 있게 해주고, 결국 자신들이 탐구하는 수학적 아이디어에 대해 좀 더 깊게 생각해 볼 수 있는 기회를 가질 수 있을 것이다.

다음은 원전의 문제[1, 12, 36]를 활용하여 서양의 이중 가정법과 중국의 영부족술을 비교해 보고 이것을 다시 현대적 해결방법과 비교해 보는 활동을 구성한 것이다. 이 과정에서 시대별 해결 전략, 동일 구조 문제에 대한 동양과 서양의 해결 전략을 살펴보게 되고 '비례'라는 수학적 아이디어가 매우 기초적이면서도 위력적이라는 사실을 인식하게 될 것이다. 실제로 1차 방정식과 관련된 여러 해결 전략은 거의 모두 '비례' 개념을 응용하여 접근하고 있다.

5.3 연극/영화의 소재로 활용하기

우리나라의 경우 수학교육에서 연극이나 영화를 활용하는 경우가 많지 않지만 연극이나 영화는 유용한 교육 매체 중 하나다. 간혹 수학자나 수학적 개념과 관련된 영화나 연극을 보고 감상문을 작성하는 과제 이후 수학교실에서 전체 토론이나 조별 토론을 하는 경우는 있지만 수학적 소재를 포함하는 연극이나 영화를 직접 만드는 활동은 거의 없다. 수학사는 수학사 자체가 이야기적 구조를 포함하고 있기 때문에 다른 형태의 수학적 소재에 비해 연극과 영화의 소재로 사용하기가 용이하고, 또한 연극과 영화 자체의 종합예술적인 성격으로 인해 다른 수학사 도입 활동에 비해 더 종합적이고 입체적이다.

수학사적 소재를 포함한 연극이나 영화를 만들기 위해 예비수학교사들은 먼저 제시된 수학적 소재의 사회적, 문화적 배경에 대한 폭넓은 이해가 필요하게 되고, 그러한 개념

※다음은 린드 파피루스(B.C. 2000)에는 나오는 문제이다[1].

A. 아하와 아하의 $\frac{1}{7}$의 합이 16과 같다

※다음은 <구장산술(九章算術)>의 영부족(盈不足)장에 나오는 문제이다[12].

B. 여럿이서 함께 닭을 구매하려고 하는데, 각자 9전씩 내면 11전이 남고, 6전씩 내면 16전이 모자란다. 사람 수와 닭 값은 각각 얼마인가?
(今有共買鷄, 人出九, 盈一十一, 人出六, 不足十六, 問人數, 鷄價各幾何)

※다음은 피보나치의 <산반서>(12C)에 나오는 문제이다[36].

C. 한 상인이 사과 7개당 1dinar를 지불하고 약간의 사과를 샀고, 다음날 사과 5개당 1dinar를 받고 사과 모두를 팔았다. 이 상인의 순이익은 12dinar다. 이 상인이 처음에 사과의 값을 모두 얼마를 지불했는가?

1. 위의 문제를 각자 풀어보시오.
2. ppt에 제시된 고대 이집트인의 A의 풀이 방법을 보고, 사용된 수학적 원리에 대해 모둠별로 토론해보시오. 그 원리에 따라 B와 C를 다시 해결하시오.
3. ppt에 제시된 B와 C의 풀이법과 앞에서 해결한 B와 C의 문제해결 과정을 비교해 보시오.
4. 현대적 해결방법과 ppt에서 제시한 A, B, C의 해결방법에 대해 모둠별로 토론해보시오.
5. ppt에서 제시한 A, B, C의 해결방법이 왜 고안되었다고 생각합니까?
6. A, B, C는 각각 어떤 종류의 방정식에 적합하다고 생각합니까?

표 2: 활동지2

이 나올 수밖에 없었던 시대적 선결 조건이 무엇인지도 생각해 볼 수 있는 기회를 가질 수 있을 것이다. 또한, 이런 활동을 준비하면서 수학이나 수학자를 소재로 다룬 다양한 매체에 관심을 갖게 되면서 수학에 대한 문화적 배경이 더욱 더 풍부해질 수 있을 것이다. 결과적으로 수학의 다양한 모습을 접하고 수학을 폭넓은 사회문화적 맥락에서 이해할 수 있게 된다.

연극이나 영화 제작을 위해 제일 먼저 주제에 맞는 필요한 다양한 자료를 조사하여 수집하고, 이 과정에서 다른 수학적 소재의 연극, 영화, 다큐멘터리, 소설 등을 참조할 수도 있을 것이다. 그 다음 등장인물의 캐릭터 설정을 하고 희곡이나 시나리오 작업을 준비해야 될 것이다. 희곡과 시나리오 작성시 실제 무대나 영화에서 구현할 수 있는 기술의 수준을 인지하여 현실적으로 공연/상영 가능한 범위를 숙지해야 할 것이다. 희곡과 시나리오가 완성되면, 연출의 핵심사항을 인지하고 공유한 이후 출연 배우들의 연습을 통해 극의 완성도를 높여 공연하거나 상영하면 될 것이다. 영화의 경우, 많은 장비가 필요할 것이라고 생각할 수도 있지만, 요즘은 기성 영화감독들도 스마트폰 하나로 영화를 완성하는 작업을 하기 때문에 특별한 장비 없이도 어느 정도 수준까지 촬영이 가능할

것이다.

Hitchcook[29]이 학생을 대상으로 De Morgan을 소재로 구성한 연극적 표현 활동을 토대로 Georg Cantor (1845–1918)를 소재로 하는 연극/영화 활동을 구성해 보면 다음과 같다. 이 활동에서 Cantor의 무한 개념에 대한 공헌이 의미하는 바가 Cantor의 동시대와 현재에서 어떻게 차이가 나는가를 인지함으로써 Cantor의 '수학의 본질은 자유다' 라는 짧은 문장의 울림을 매우 다르게 느낄 수 있을 것이다. 마지막으로, 연극이나 영화를 만드는 활동은 다른 수학적 활동에 비해 긴 시간이 필요하므로 일정 기간마다 중간 보고 활동을 구성하는 것이 바람직할 것이다.

<주제설정>

① Cantor 자신과 Cantor의 동시대 수학자들의 사회에 대해 배우기

② 수학의 발달에서 Cantor의 공헌 시점에서 Cantor의 통찰력 공유하기

③ ①, ②를 기초로 수학 만들기에 대한 간접경험을 해보고 문화적 유산으로서의 수학에 대한 통찰 얻기

<프로젝트>

① 이 프로젝트를 위한 자료수집 활동에 대해 간단히 설명하고 느낀 점이 무엇인지 말해보시오. (개별 활동)

② Cantor의 가상 인터뷰를 쓰고, 그 역할을 실제로 해보시오. (짝 활동)

③ Cantor의 수학적 삶의 일정 시기를 선택하여 희곡/시나리오(15∼20분 정도)를 구성하고 실제로 연극/영화를 만드시오. (조별 활동)

표 3: 활동지3

6 나오는 말

수학교실에서 수학사 활용이 일화소개에 의한 동기 및 흥미 유발이나 단편적인 수학사적인 정보사용을 넘어서서 수학사가 수학 교수-학습의 일반적인 과정으로 통합되어야 된다고 많은 연구자들이 주장하고 있지만 현장에서는 아직 정착되지 않고 있다. 이를 극복하기 위한 방안을 다각도로 모색하고 있지만, 그 중 큰 비중을 차지하는 부분이 예비수학교사의 교육과 교사연수와 관련된 것이다. 수학교육에서 어떤 변화를 원한다면 가장 중요한 선결 조건은 그 변화 방향으로 교사를 준비시켜야 되는 것이다. 따라서 수학사 활용과 관련된 더 많은 다양한 예비수학교사 교육에 대한 연구가 필요하고, 이러한 연구 결과를 기초로 한 수학사 활용 강좌들이 사범대학 교육과정과 교직이수과정에서 자리를 잡아야 한다. 또한 이런 강좌에서 예비수학교사가 자신의 다양한 지식을 스스로 통합해 보고 실제로 적용할 수 있는 경험을 가능하도록 해야 할 것이다.

참고 문헌

1. 김남희 외 5인, 『수학교육과정과 교재연구(개정판)』, 서울: 경문사, 2011.
2. 김원경 외 6인, 『중학교 수학 2』, 서울: 비유와 상징, 2010.
3. 김원경 외 6인, 『중학교 수학 익힘책 2』, 서울: 비유와 상징, 2010.
4. 김홍종 외 3인, 『중학교 수학 2』, 서울: 더텍스트, 2010.
5. 김홍종 외 3인, 『중학교 수학 익힘책 2』, 서울: 더텍스트, 2010.
6. 민세영, 「역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구」, 박사학위논문, 서울대학교, 2002.
7. 신항균 외 3인, 『중학교 수학 2』, 서울: 지학사, 2010.
8. 신항균 외 3인, 『중학교 수학 익힘책 2』, 서울: 지학사, 2010.
9. 우정호, 『학교수학의 교육적 기초(제2증보판)』, 서울: 서울대학교출판문화원, 2007.
10. 우정호 외 9인, 『중학교 수학 2』, 서울: 두산동아, 2010.
11. 우정호 외 9인, 『중학교 수학 익힘책2』, 서울: 두산동아, 2010.
12. 유휘, 『구장산술·주비산경』, 차종천(역), 서울: 범양출판사, 2000.
13. 유희찬 외 7인, 『중학교 수학 2』, 서울: 미래엔 컬쳐그룹, 2010.
14. 유희찬 외 7인, 『중학교 수학 익힘책 2』, 서울: 미래엔 컬쳐그룹, 2010.
15. 윤성식 외 6인, 『중학교 수학 2』, 서울: 더텍스트, 2010.
16. 윤성식 외 6인, 『중학교 수학 익힘책 2』, 서울: 더텍스트, 2010.
17. 이강섭 외 4인, 『중학교 수학 2』, 서울: 지학사, 2010.
18. 이강섭 외 4인, 『중학교 수학 익힘책 2』, 서울: 지학사, 2010.
19. 이준열 외 5인, 『중학교 수학 2』, 서울: 천재교육, 2010.
20. 이준열 외 5인, 『중학교 수학 익힘책 2』, 서울: 천재교육, 2010.
21. 정상권 외 6인, 『중학교 수학 2』, 서울: 금성출판사, 2010.
22. 정상권 외 6인, 『중학교 수학 익힘책 2』, 서울: 금성출판사, 2010.
23. 정창현 외 4인, 『중학교 수학 2』, 서울: 대교, 2010.
24. 정창현 외 4인, 『중학교 수학 익힘책 2』, 서울: 대교, 2010.
25. 한경혜, 「수학과 교수-학습에서 수학사 활용의 교육적 함의: 수월성 교육을 중심으로 한 미적분 지도의 예」, 한국수학사학회지 19(2006), No.4, pp. 31–62.
26. A. M. Arcavi, “Two Benefits of Using History”, *For the Learning of Mathematics* 11(1991), No.2, 1pp. 1–14.
27. G. Brousseau, *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1997.
28. G. C. Rota, *Mathematics and Philosophy: The Story of a Misunderstanding*, in A. M. White(Ed.), Essays in Humanistic Mathematics, Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1993.
29. G. Hitchcock, *A Window on the World of Mathematics*, 1870, in V. J. Katz(Ed.), Using History to Teach Mathematics, Washington, DC: The Mathematical Association of America, 2000.
30. G. N. Philippou & C. Christou, “The Effects of a Preparatory Mathematics Program in Changing Prospective Teachers’ Attitudes toward Mathematics”, *Educational Studies in Mathematics* 35(1998), No.1, pp. 189–206.
31. G. Polya, 『수학적 발견 (1)』, 우정호(역), 서울: 교우사, 2005.

32. G. Winicki, *The Analysis of Regula Falsi as an Instance for Professional Developmment of Elementary School Teachers*, in V. J. Katz(Ed.), Using History to Teach Mathematics, Washington, DC: The Mathematical Association of America, 2000.
33. H. Eves, 『수학의 위대한 순간들』, 허민 · 오혜영(역), 서울: 경문사, 2003.
34. H. Freudenthal, 『프로이덴탈의 수학교육론』, 우정호 외(역), 서울: 경문사, 2008.
35. I. Lakatos, 『수학적 발견의 논리』, 우정호(역), 서울: 아르케, 2001.
36. L. Grugnetti, *The History of Mathematics and Its Influence on Pedagogical Problems*, in V. J. Katz(Ed.), Using History to Teach Mathematics, Washington, DC: The Mathematical Association of America, 2000.
37. L. Radford & G, Gruerette, *Second Degree Equations in the Classroom: A Babylonian Approach*, in V. J. Katz(Ed.), Using History to Teach Mathematics, Washington, DC: The Mathematical Association of America, 2000.
38. L. S. Shulman, "Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching", *Educational Researcher*, 15(1986), No.2, pp. 4–14.
39. M. Bruckheimer & A. Arcavi, *Mathematics and its History: An Educational Patnership*, in V. J. Katz(Ed.), Using History to Teach Mathematics, Washington, DC: The Mathematical Association of America, 2000.
40. R. Bromme, *Beyond Subject Matter: A Psychological Topology of Teachers' Professional Knowledge*, in R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straesser and B. Winkelmann(Eds.), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Dordrecht: Kluwer, 1994.
41. R. D. Even, *Prospective Secondary Mathematics Teachers' Knowledge and Understanding about Mathematical Functions*, Unpublished Doctoral Dissertation, Michigan State University, 1989.
42. T. Tymoczko, *Humanistic and Utilitarian Aspects of Mathematics*, in A. M. White(Ed.), Essays in Humanistic Mathematics, Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1993.

정해남 성신여자대학교 수학과
Department of Mathematics, Sungshin Women's University
E-mail: letitbe@sungshin.ac.kr