East Asian Mathematical Journal
Vol. 28 (2012), No. 4, pp. 353-361
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2012.028

수준상승에 기초한 수학학습지도에 관한 연구

임 대 근 · 김 현 정

ABSTRACT. In this paper, we apply mathematising activities to geometry contents of corrent in middle and high school in order to actualize learning and teaching through Freudenthal's, Piaget's, and Van Hieles's mathematising among many theories affecting teaching and learning methods.

Learners find out mathematical idea through the activities of mathematising that interprete mathematical problemm. And we derive mathematic through the experience of vertical mathematising that expresses it. Based on it, Freudenthal's progressive mathematising process, etc are used in doing the activities of applicative mathematising.

Ⅰ. 서론

2007년 개정 수학과 교육과정에서는 학습자의 능력과 수준, 적성에 적합한 교육을 실시하기 위해 학교상황에 맞는 수준별 집단의 편성·운영을 통한 수준별 수업을 권장하고 있다. 이를 위해 수학과 교육과정에서는 학교의 여건을 고려하여 교육내용을 재구성하고 수준별 집단에 맞는 수학교육을 실시할 수 있도록 자율권을 부여하여 동일한 주제 하에서 학습주제에 접근하는 방법을 다르게 하거나 내용의 깊이를 달리하여 가르치도록 하였다([2]). 이를 위해 개정된 수학교과서에서는 단순암기식의 수동적 학습을 지양하고 학습자가 수학에 대한 유용성과 흥미를 가질 수 있도록 학습자 스스로 주변현상으로부터 아이디어를 찾고 그로부터 수학적 개념이나 지식을 이끌어낼 수 있도록 하는 활동을 각 단원의 첫머리에 제시하고 있다. 학습자는 교사의 안내 하에 생활주변의 여러 현상으로부터 수학적 아이디어를 발견하고 그로부터 수학적 법칙이나 원리를 만들어내는 과정을 통해서 수학학습수준의 상승을 경험하게 된다. 이러한 실생활의 현상으로부터

2011년 1월 15일 투고, 2012년 8월 21일 심사완료.
2000 Mathematics Subject Classification: 97D50
Key words: 수준상승, 수학화, 반영적 추상화, 기하적 사고수준이론

수학적 지식을 이끌어내는 과정에는 수학화와 반영적 추상화, 사고의 대상화라고 하는 의미 있는 활동을 하게 되고, 이를 통해 학습자는 수학에 대한 유용성과 가치를 경험하게 될 것이다.

따라서 본 연구는 학습자주변의 현상으로부터 수학적 개념을 이끌어내는 활동을 통해 수학 학습의 수준이 상승할 수 있음을 Freudenthal의 수학화 활동과 Piaget의 반영적 추상화, Van Hieles의 기하적 사고수준이론을 바탕으로 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. Freudenthal의 수학화 이론

Freudenthal은 '인간 활동으로서의 수학'이라는 아이디어를 기초로 하여 수학은 확실성을 추구해나가는 정신적 활동으로 현실을 매체로 상식에서 출발하여 현상과 본질의 교대작용에 의해서 더 높은 수준의 상식화에 이르는 사고수준의 상승 과정이라 보고 이런 사고활동의 본질을 수학화라 표현하였다. 그는 학습자에게 이런 수학화 과정을 경험시키기 위한 최선의 방법으로 학습자의 현실을 출발점으로 하여 이미 발명된 수학을 학습자 스스로 개선된 방법에 의해 재창조해 나가는 재발명을 제안하였다. 다시 말해서 수학화란 현상을 수학자의 필요에 맞게 적절히 손질하여 새로운 것, 즉 본질로 조직해 내는 조직화 활동이며 수학화 과정은 이런 현상과 본질의 교대작용에 의해 수준상승이 이루어지는 불연속적인 과정이다. 이때 현상이란 현실적인 경험일 수도 있고 수학적 경험일 수도 있으며, 수학화란 수학자들이 수학적 개념, 아이디어, 구조 등을 포함하는 수학적 수단에 의해 현실의 경험을 조직하거나 수학적 경험을 체계화해 나가는 것을 의미한다([13]).

Freudenthal의 학습수준이론에 의하면 수학화는 수준상승과 밀접한 관련이 있다고 볼 수 있다. 앞서 언급한 것과 마찬가지로 Freudenthal의 관점에서 수학화 과정은 역사적으로는 점진적 도식화 과정인 거시적 학습과정이며, 심리적으로는 수준의 비약과 관점의 전환이 거듭되는 불연속적인 과정이다. 수학은 인간의 정신적 활동으로서 현상의 정리수단인 본질이며 수학화 과정은 상대적인 것으로 본질이 다시 현상으로 인식되어 반성의 대상이 되면서 새로운 차원의 본질로 정리되는 교대작용에 의하여 수준의 비약을 거치는 활동이다. 따라서 수학학습은 수학화 과정의 재발명이어야 한다고 주장한다([5]). 또한 수학의 발달과정은 현상이 그것을 정리하는 수단인 본질로 조직되고 그 본질이 다시 현상이 되어 새로운 본질로 조직되는 과정이며, 이 과정에는 몇 개의 수준이 있어 수학의 성장과정은 한 수준에서 다른 수준으로의 계속적인 비약의 과정이며 이것이 바로 '수학

화'라고 보았다([15]).

또한 점진적인 수학화가 가능하도록 하기 위해서는 교수학적 현상학을 통해 학습자의 현실에서 현상과 관계를 맺으면서 수평적 수학화와 수직적 수학화가 교대로 일어나도록 하여 반성적 사고에 의한 수준상승이 자연스럽고 자발적으로 이루어지도록 해야 한다고 볼 수 있다. 특히 수학화 과정에서의 수평적 성분들은 현실 상황의 다양성과 개념형성에 필요한 여러 관념을 풍부하게 표현해 주며, 수직적 성분은 체계적이고 주제 지향적이며 형식적인 지식과 능력을 표현해 준다([19]). 수학화 과정을 현상과 본질의 교대작용에 의한 수준상승의 불연속적 과정이라 볼 때 교수학적 현상학은 이런 현상과 본질의 관계를 교수학적 측면에서 논하는 것을 의미한다([15]). 이는 조직되어야 할 학습자주변의 현상을 가능하면 폭넓게 제시하기 위해 주변현상으로부터 점진적인 수학화를 경험시켜야 함을 의미하고 있다. 또한 이를 통해 수학적 대상에 대한 심상을 구성하게 하고 이를 반성에 의한 수준상승으로 이끌어가기 위한 모델을 제공하려는 것이다([19]).

2. Piaget의 반영적 추상화

Piaget의 수학인식론에서 수학적 개념이 발생되는 메커니즘을 설명하는 핵심이론은 '반영적 추상화'에 대한 이론이며, 이는 동화, 조절과 함께 감각-운동적 행동의 단계로부터 구체적 조작의 단계, 가설-연역적 조작의 단계로의 이행에 수반되는 인지구조를 구성하는 원동력이다.

Piaget는 추상화를 다음과 같이 구분하였다. 인식주체의 외부대상이 갖는 성질로부터 일반화된 지식을 이끌어내는 경험적 추상화(abstraction empirique), 인식주체의 활동에 대한 일반적 조정으로부터 이루어지는 반영적 추상화(abstraction reflechissante), 주체의 활동으로부터 구성이 이루어지지만 그 구성결과의 확인은 외부대상에 대해서 행해지는 의사 경험적 추상화(abstraction pseudo-empirique)이다. Piaget의 반영적 추상화의 메커니즘을 전 단계에서 얻는 것보다 상위의 수준으로 옮기는 '반사(réfléchissment)'와 전 단계에서 반사된 것을 새로운 수준에서 재구성하거나 거기에 이미 놓여져 있는 것과 전 단계의 요소를 관련짓는 '반성(réflexion)'이라는 상보적인 두 과정으로 나누어 설명한다([18]). '반사'의 과정은 내용에 대한 '내면화'로부터 출발하여 '주제화'되고, 주제화된 내용은 반영적 추상화의 다음단계인 '반성'에 의해 새로운 형식을 구성하는 재료가 되는 것이다. '반성'에 의해 생겨나는 '새로운 것'은 동화와 조절사이의 균형화(equilibration) 과정에서 나타나게 되는데, 이 균형화는 하위단계의 구조를 반사에 의해 다음단계로 옮기는 과정에서 야기되는 불균형에 의해 비롯되는 것이다([12]).

이처럼 학습자는 이전단계의 형식이 다음 단계의 내용이 되고 내면화와 주제화되는 반사의 과정을 거치면서 인지적 불균형상태가 되며, 동화와 조절을 통해

균형화되는 반성을 거치는 반영적 추상화의 과정을 경험하게 된다. 이렇게 반성에 의해 구성적으로 창조된 새로운 '형식'을 다음단계의 반사과정에서는 보다 세련된 '내용'으로 기능하여 끊임없는 반사와 반성의 순환이 이루어진다. 이러한 반복적인 과정은 단순한 반복이 아니라 앞의 구조가 점점 풍부해지는 수준의 상승을 함의하는 것이다. 반영적 추상화의 '반사'과정은 하위수준에서 사용되거나 함축되어 있는 관련성을 이끌어내어 상위수준에서 사고의 대상으로 바꾸는 '분화'의 과정이며, 이와 비교할 때 '반성'의 과정은 구조가 더 포괄적이고 풍부해지는 구조의 '통합'과정이라 할 수 있다. 이러한 통합과 수학학습의 질적인 비약은 끊임없이 반복되면서 진전하여 간다는 점과 이전수준의 조작적 schème으로부터 다음수준의 조작적 schème으로 재구성되면서 이전수준의 조작이 다음수준의 대상이 되는 '수단의 대상화' 또는 '내면화→주제화'의 반복 과정이 되풀이되는 과정을 통해 수학학습수준이 상승된다는 점을 간과해서는 안 될 것이다([18]).

3. Van Hieles의 기하 학습 수준 이론

Van Hieles는 수학의 학습과정을 수준이론으로 설명하면서 전 수준에서의 사고의 수단이 다음 수준에서는 사고의 대상이 되는 사고의 비약으로 보고 있다. 이는 현상을 정리의 수단인 본질로 조직하고 그 본질이 다시 현상이 되어 새로운 본질로 조직되는 끊임없는 재조직화의 과정인 수학화로 규정한 Freudenthal의 관점과 일맥상통한다고 볼 수 있다. Van Hieles에게 있어 사고는 상대적인 수준이 있는 불연속적인 활동으로서 수학학습에서 하위 수준을 통과하지 않고 상위 수준에 도달할 수 없으며, 수학적 사고는 모든 수준을 순차적으로 거쳐서 발달하게 되는 것이다. 또한 모든 학생들이 같은 속도로 각 수준을 통과하는 것은 아니며, 한 수준에서 다음 수준으로의 발달은 신체의 성숙보다 교육의 내용이나 방법에 더 많이 의존한다. 각 수준이 그 자체의 언어적 상징과 그 상징들을 연결하는 관계체계를 가지고 있으므로 수준의 상승은 언어의 확장과 관계된다고 볼 수 있다([4]).

Van Hieles가 제시한 기하학습수준에서 제1수준은 주변 사물이라는 대상을 도형이라는 수단에 의해 파악하는 단계이며, 제2수준은 도형이라는 대상을 도형의 성질이라는 수단에 의해 사고하는 단계이다. 제3수준은 도형의 성질이 사고의 대상이 되고, 그러한 도형의 성질을 명제라는 수단으로 파악하는 단계이다. 제4수준에서는 명제가 사고의 대상이 되고 논리를 수단으로 그러한 명제를 파악하며, 제5수준에서는 논리 그 자체가 연구의 대상이 된다([12]). 이러한 Van Hieles의 학습수준이론에서 수학적 사고활동이란 경험의 세계를 단계적으로 조직화하는 활동이며, 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새로이 경험의 대상으로 의식화되고 그것을 조직화하는 활동을 통해 그 다음수준으로 사고의 비약을 하게 된다

는 것이다. 이는 Piaget의 '반영적 추상화'와 밀접한 관련이 있으며, Van Hieles와 Piaget는 인지적 발달과정은 나선적 교대과정을 통해 이루어지는 것으로 파악하고 있다. 이 과정을 Van Hieles는 '수단의 대상화'로, Piaget는 '반사와 반성의 교대작용'으로 설명하고 있다([5]).

Ⅲ. 수준상승에 기초한 수학학습지도

1. 개정 수학과 교육과정 분석

2007년 개정 수학과 교육과정에서는 중・고등학교과정의 교육내용을 '수와 연산', '문자와 식', '함수', '확률과 통계', '기하'의 5개 영역으로 구성하고 있다([1]). 중학교와 고등학교의 각 내용영역에서 학습하게 될 학습주제 가운데 기하영역과 관련된 내용을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 중학교

중학교 기하영역에서는 자연현상이나 실생활의 상황을 통해 평면과 공간 및 평면도형과 입체도형의 개념을 직관적으로 이해하고, 여러 가지 도형의 성질을 학생의 수준에 따라 직관적으로 혹은 연역적 추론을 통해 이해하고 탐구하며, 이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결하는 학습활동을 한다. 이때, 논증은 간단히 다루고 이들 성질을 이해하고 활용하는 데 중점을 둔다. 특히 도형의 성질의 이해에서 학생들에게 엄밀한 증명을 강조하지 않지만, 학생의 수준에 따라 그 정도와 방법을 달리하여 지도할 수 있다([2]).

(2) 고등학교

고등학교 1학년 과정에서는 논리적 사고와 수학적 창의성을 신장시킬 수 있는 좋은 소재인 기하영역을 대수적인 방법으로 접근하는 해석기하의 측면에서 다루고 있다. 중학교에서 학습한 도형에 관한 여러 성질과 관계를 대수적인 방법으로 새롭게 조명해 볼 수 있는 기회를 제공한다. 좌표평면에서 두 점 사이의 거리, 직선의 방정식 및 이를 이용한 두 직선의 위치 관계, 원의 방정식, 원과 직선의 위치 관계 등을 대수적으로 접근하며, 원의 접선의 방정식을 구하고 평행이동과 대칭이동을 다룬다. 또한 부등식의 영역에서 다루는 최대・최소 문제는 실생활의 의사결정상황에서 수학적 방법에 어떻게 적용되는지를 보여주어 학생들로 하여금 수학의 유용성을 인식하게 할 수 있다.

기하와 벡터는 자연과학, 공학 등을 공부하는 학생들이 주로 학습하게 될 심화수준의 과목으로, 일차변환과 행렬, 벡터, 이차곡선, 공간도형과 공간좌표 등을 다룬다. 또한 우리가 접하는 실생활에서는 이차원적인 문제보다 삼차원공간의 문제가 더 많이 나타나므로, 삼차원공간좌표를 도입하여 지금까지 좌표평면을 통하여 다룬 이차원적인 기하문제나 개념을 삼차원공간으로 확장하는 일반화의 과정

을 통하여 좀 더 높은 수준의 기하문제를 다루고 있다([1]).

2. 교과서분석을 통한 수준상승의 실제

이 절에서는 중·고등학교교과서에 제시된 기하영역의 내용 중 몇 가지 예를 통해 Freudenthal의 수학화 이론, Piaget의 반영적 추상화, Van Hieles의 기하적 사고수준이론이 수학학습의 수준상승에 어떻게 적용될 수 있는지 구체적으로 살펴보고자 한다.

(1) 삼각형의 외심

중학교 2학년과정의 교과내용 중 '삼각형의 외심'에서는 종이접기라는 구체적인 조작활동을 통해 삼각형의 두 변의 수직이등분선의 교점에서 삼각형의 세 꼭짓점에 이르는 거리가 서로 같음을 직관적으로 알게 한다. 그리고 이를 삼각형의 합동조건과 선분의 수직이등분선 위의 한 점에서 선분의 양 끝점에 이르는 거리는 같음을 이용하여 증명한 후, 삼각형의 외심과 외접원의 뜻을 설명하고 있다. 또한 고등학교 1학년과정에서는 이를 이용하여 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표를 구하고 있다.

교육과정 상의 이런 전개는 Freudenthal의 관점에서 보면, '종이접기'라는 현실세계의 상황을 직관적으로 탐구하여 규칙성을 발견하는 수평적 수학화와 이를 형식화·추상화하는 수직적 수학화를 통해 '삼각형의 외심'이라는 수학적 개념을 이끌어내는 수학화의 과정이라 볼 수 있다. 또한 '종이접기'라는 현상으로부터 수학화를 통해 '삼각형의 외심'이라는 본질을 찾아내고, 이를 바탕으로 좀 더 높은 차원의 본질인 '삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표'를 구하게 된다. 이는 한 수준에서 본질이었던 '삼각형의 외심'이 더 높은 차원의 본질을 이끌어내는 현상이 되는 현상과 본질의 교대작용이며, 이러한 과정을 통해 학습자는 수준의 비약, 즉 수준 상승을 경험하게 된다고 볼 수 있다.

이를 Piaget의 관점에서 보면, 종이접기 활동을 통해 '삼각형의 두 변의 수직이등분선의 교점에서 삼각형의 세 꼭지점에 이르는 거리가 같다'는 수학적 아이디어를 주제화시키는 반사의 과정과 주제화된 내용을 반성의 과정을 통해 '삼각형의 외심'이라는 새로운 형식을 구성하게 되는 반영적 추상화의 과정이 된다. 또한 '삼각형의 외심'은 '삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표'이라는 새로운 형식을 구성하기 위한 내용이 된다. 따라서 이전 단계에선 반영적 추상화를 통해 창조된 형식이었지만 다음 단계에선 보다 세련된 내용으로 작용하여 새로운 형식을 구성하는 재료가 된다. Piaget는 이러한 반사와 반성의 순환, 내용-형식의 끊임없는 교대를 통해 개념의 확장, 즉 학습수준의 상승이 이루어진다고 보았다.

학습자가 주변에서 쉽게 접할 수 있는 '종이접기'활동을 사고의 대상으로 보면

이로부터 이끌어낸 ‘삼각형의 외심’은 사고의 수단이 되고, 이는 다음 수준에서 사고의 대상으로 작용하여 ‘삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표’라는 새로운 사고의 수단을 이끌어내는 과정을 Van Hieles는 사고의 비약이라 하였다. 또한 이를 통해 학습자의 수준이 발달된다고 보았다.

(2) 원과 직선의 위치관계

고등학교 1학년 과정의 ‘원과 직선의 위치관계’에서는 단원도입부에 칸딘스키의 예술세계라는 생활주변의 상황을 제시하여 임의의 원과 직선의 위치관계는 세 가지 경우가 존재함을 직관적으로 이해시키고, 이를 해석기하적인 방법을 통해 원의 접선의 방정식을 구하도록 구성되어 있다.

이를 Freudenthal의 관점에서 보면, ‘칸딘스키의 그림’이라는 실생활의 현상을 통해 ‘임의의 원과 직선의 위치관계는 세 가지 경우가 존재한다’는 수학적 아이디어를 이끌어 낸 후 이를 ‘원과 직선의 위치관계’로 형식화하는 수학화의 과정이라 볼 수 있다. 또한 이를 현상과 본질의 교대작용의 메커니즘으로 본다면 ‘칸딘스키의 그림’이라는 현상으로부터 이끌어낸 ‘원과 직선의 위치관계’라는 본질은 ‘원의 접선의 방정식’이라는 더 높은 차원의 본질을 이끌어내기 위한 현상이 되는 것이며, 이를 통해 학습자의 수준 상승이 이루어진다고 볼 수 있다.

Piaget의 관점에서 ‘원과 직선의 위치관계’는 ‘칸딘스키의 그림’이라는 내용으로부터 이끌어낸 형식이며, 더 높은 수준에서의 새로운 형식인 ‘원의 접선의 방정식’을 구성하기 위한 내용이 되는 것이다. 이는 이전 단계에서의 형식이 다음 단계에선 더 높은 수준의 새로운 형식을 이끌어내기 위한 세련된 내용이 된다는 Piaget의 내용-형식의 교대작용이며, 이러한 ‘내용-형식의 교대’에 의한 반사와 반성의 순환을 통해 학습자의 수준이 상승된다고 볼 수 있다.

마지막으로 이를 Van Hieles의 관점에 비추어 보면, ‘칸딘스키의 그림’은 사고의 대상이며 ‘원과 직선의 위치관계’는 이로부터 이끌어낸 사고의 수단이 되고, 다음 단계에선 사고의 대상이 되어 새로운 사고의 수단인 ‘원의 접선의 방정식’을 구성하게 된다. 이는 전 단계의 사고의 수단이 다음 단계의 사고의 대상이 되는 수단의 대상화이며, 이를 통해 사고의 비약, 즉 학습자의 수준이 상승하게 되는 것이다.

지금까지 살펴본 수준상승의 예는 현행 중・고등학교교과서에 있는 내용을 연구자가 Freudenthal의 수학화 이론과 Piaget의 반영적 추상화의 과정, Van Hieles의 기하적 사고수준이론을 바탕으로 분석한 것이다. 같은 내용이더라도 학자의 관점에 따라 표현의 차이는 있지만, 학습자주변에서 흔히 볼 수 있는 현실적인 상황으로부터 수학적 아이디어를 찾고 이를 통해 수학적 지식을 이끌어내는 일련의 과정을 거친다는 점과 학습자가 이전에 배운 지식이 좀 더 높은 수준으로 상승하기 위한 발판이 된다는 점에서는 Freudenthal과 Piaget, Van Hieles

의 관점 모두 일맥상통한다고 볼 수 있다. 이러한 수준상승에 기초한 수학학습이 학습자에게 효과적으로 이루어지기 위해서 교사는, 첫째 학습자에게 적절한 현상을 제공하고 재발명으로서의 수학화 과정을 안내해야 하며, 반성적 사고에 의한 수준의 비약을 통해 사고를 수학적으로 세련되게 하여 그 결과 역시 학습자의 현실과 다시 연결되도록 지도해야 한다. 둘째 학습자의 인지발달 수준보다 조금 더 높은 수준의 활동을 제공하여 인지적 갈등상황을 유도하며, 동화와 조절의 균형화 과정을 통해 해소할 수 있도록 지도해야 한다. 셋째 한 수준에서 다음 수준으로의 발전은 생물학적 성숙이나 발달이 아니라 수학적 사고 활동을 통해 경험의 세계를 단계적으로 조직화하고 내용사이의 관계망이 충분히 형성될 때 가능하므로 교사는 학습자가 이전 수준에서의 사고의 수단을 다음 수준에서 사고의 대상으로 적용할 수 있도록 적절한 수준모델을 제시할 필요가 있다.

Ⅳ. 결론

본 연구는 개정 수학과 교육과정의 교과서내용을 바탕으로 수학학습수준의 상승에 대하여 살펴보았다. 이를 위해 수학 학습에 대한 수준상승이론의 배경이 되는 Freudenthal과 Piaget, Van Hieles의 이론에 대하여 살펴보고, 현행 중・고등학교 수학교과서의 기하영역을 세 학자의 관점에서 분석하였다. 현행 중・고등학교 수학교과서에서는 단원의 도입부에 학습자가 주변에서 접할 수 있는 실생활상황을 제시하고, 그에 대한 구체적인 활동을 통해 수학적 개념을 이끌어내도록 구성하고 있다. 이는 현실세계의 현상으로부터 수학적 아이디어를 이끌어내고 이를 좀 더 추상적이고 세련되게 수학적으로 표현하는 Freudenthal의 수학화 과정, 구체적인 조작활동을 통한 반사와 반성의 교대작용을 통한 Piaget의 반영적 추상화의 과정이라 볼 수 있다. 또한 현실세계의 상황을 사고의 대상으로 삼아 수학적 개념을 이끌어내고 이를 다시 더 높은 수준의 사고의 대상으로 삼는 Van Hieles의 기하적 사고수준이론과 일맥상통하는 것이라 볼 수 있다. 또한 교사는 학습자가 좀 더 높은 수준의 수학적 지식을 효율적으로 학습할 수 있도록 하기 위해 학습자의 사전지식과 수준을 파악하고 그 수준에 적합한 문제를 제시하여야 한다. 이를 통해 학습자가 수학에 대한 성취감과 흥미를 느끼게 된다면, 수학에 대한 긍정적인 태도를 가지는데 도움이 될 것이라 생각한다.

참고문헌

[1] 교육과학기술부, 교육인적자원부 고시 제 2007-79호에 따른 고등학교 교육과정해설5 -수학-, 2008.
[2] 교육과학기술부, 교육인적자원부 고시 제 2006-75호 및 2007-79호에 따른 중학교 교육과정 해설 Ⅲ -수학-, 2008.
[3] 김남희 외 5인, 수학교육과정 및 교재연구, 경문사, 2006.
[4] 김양희, 김양희의 수학교육론 특강, 웅진굿쌤, 2008.
[5] 우정호, 수학학습지도 원리와 방법(제2개정판), 서울대학교 출판부, 2010.
[6] ______, 학교수학의 교육적 기초(증보판), 서울대학교 출판부, 2001.
[7] 우정호 외 7인, 고등학교 기하와 벡터 교사용지도서, (주)두산동아, 2010.
[8] 우정호 외 9인, 고등학교 수학 교사용지도서, (주)두산동아, 2009.
[9] ____________, 중학교 수학1 교사용지도서, (주)두산동아, 2009.
[10] ___________, 중학교 수학2 교사용지도서, (주)두산동아, 2010.
[11] 우정호, 학교수학의 교육적 기초(증보판), 서울대학교 출판부, 2001.
[12] 황혜정 외 5인, 수학교육학 신론(개정판), 문음사, 2007.
[13] Hans Freudenthal 저, 우정호 외 5인 역, 프로이덴탈의 수학교육론, 경문사, 2008.
[14] 김연식, 우정호, 박영배, 박교식, 수학교육학 용어 해설(4), 대한수학교육학회 논문집 제6권 제1호, pp.215-227, 1996.
[15] 김연식, 정영옥, Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구, 대한수학교육학회 논문집 제7권 제2호, pp.1-23, 1997.
[16] 나귀수, 기하개념의 이해와 적용에 관한 소고, 대한수학교육학회 논문집 제7권 제2호, pp.349-358, 1997.
[17] _______, 중학교기하의 증명지도에 관한 소고 -Van Hiele와 Freudenthal의 이론을 중심으로, 대한수학교육학회 논문집 제8권 제1호, pp.291-298, 1998.
[18] 우정호, 홍진곤, 반영적 추상화와 조작적 수학학습-지도, 대한수학교육학회 논문집 「수학교육학 연구」제9권 제2호, pp.383-404, 1999.
[19] 정영옥, Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구, 박사학위논문, 서울대학교 대학원, 1997.

Daekeun Lim and Hyunjung Kim
Department of Mathematics
Keimyung University
Daegu, Korea
E-mail address: limd@kmu.ac.kr
luckybag1111@hanmail.net