East Asian Mathematical Journal
Vol. 28 (2012), No. 4, pp. 403-417
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2012.031

인간교육으로서 기하교육의 인식론적 기초에 관한 연구

유 충 현

ABSTRACT. We can understand in the context of kant's philosophy the intuitive geometry education arguing that geometry education should begin with intuition. Both Pestalozzi and Herbart advocate a connection between geometry and intuition as well as a close relationship between geometry and the world. Significance of the intuitive geometry education resizes in the fact that geometry becomes both an example of and a principle of general cognition. The intuitive geometry education uses figures as an educational foundation in the transcendental condition for the main agent of cognition. In this regard, the intuitive geometry education provides grounds for the human character development.

Ⅰ. 서론

기하학은 전통적으로 학문적 논의에 있어 전형적인 방법론을 제공하였고 현대 추상수학에 있어서도 기하학적 개념과 용어는 수학의 각 분야의 기초적인 아이디어나 개념과 깊은 관련을 가지고 있다. 수학의 각 분야와 이를 기반으로 한 자연과학과 공학에 있어서 기하학적 방법과 기하학적 사고가 중요한 요소인 만큼 기하교육의 중요성은 강조하지 않을 수 없다. 고대 희랍과 중세의 스콜라 그리고 근대 인문주의 이래로 기하교육은 자유 교육적 가치를 가진 중요한 자리를 차지하고 있다. 현대 과학기술 사회에서도 기하 교육은 과학 기술 개발과 발전을 위한 도구적 기능을 가지는 중요한 기초 교육이며 개인의 자아 성취와 국가의 경제적 발전에 매우 유용한 지식이라는 사회적 공감대를 가지고 있으며 이것이 기

2012년 7월 13일 투고, 2012년 8월 23일 심사완료.
2000 Mathematics Subject Classification: 97B20
Key words: 직관, 인간교육, 직관 기하 교육, 인식론적 기초
본 논문은 2012년도 한남대학교 학술연구조성비 지원에 의하여 연구되었음.

하교육의 가치를 정당화하는 중요한 근거 중의 하나로 제시되고 있다.

그러나 또 다른 한편으로 학교에서의 기하교육은 수학교육개혁이라는 깃발이 들어 올려 질 때 마다 논의에 대상이 되어 왔으며 소위 입시교육과 극단적인 주지적 교육을 강조한 나머지 비판의 대상이 되기도 하였다. 사정이 이렇다보니 기하교육이 학생의 인간교육에 기여하지 못할 뿐 아니라 그것에 부정적인 영향을 미치고 있지는 않은지 의혹을 받기도 한다. 이러한 기하교육의 비판들은 크게 두 가지 관점에서 분석할 수 있다. 먼저, 기하교육의 문제는 기하교육 밖에 주요 원인이 있다고 보는 관점이 있다. 기하교육의 문제는 지나친 입시 경쟁과 학력 위주라는 사회구조적 문제라고 보는 것이다. 또 다른 한편으로, 기하교육의 문제가 기하교육 안에 주요 원인이 있다고 보는 관점이다. 다시 말해, 기하교육의 문제는 기하교육의 인간 교육적 가치를 드러내지 못했다는 것이며 그것은 또한 인간교육으로서의 기하교육의 인식론적 관점을 마련하지 못했다는 것이 그 주요한 원인으로 생각된다. 따라서 본 연구는 기하교육의 인간 교육적 가치를 드러낸다는 측면에서 기하교육의 안의 관점에서 접근하며 그 교육적 논의를 위한 인간교육으로서의 기하교육의 인식론적 기초를 탐색하는 것을 목적으로 한다.

기하 교육이 인격의 성숙이나 도덕적 인간의 형성에 기여하도록 하기 위해서는 기하교육의 인식론적 기초는 어떠해야 하는 것인가? 이러한 문제는 수학교육의 가장 근원적인 문제 중의 하나이며 학교 수학과 관련된 심각하고 중요한 문제가 아닐 수 없을 것이다. 이러한 문제의식에 따라서 인간교육으로서의 기하 교육의 인식론적 고찰이 필요하다.

본 논문에서는 먼저, 기하교육과 인간 교육과의 관련성을 어떠한 방식으로 설명되어 왔는가하는 인식론적 기초를 탐색하기 위하여, 인간성의 완성을 최고의 이념으로 추구한 대표적인 인식론자인 칸트와 그 인식론적 논의를 교육적 맥락에서 실천한 페스탈로찌 그리고 헤르바르트의 기하 교육에 있어서의 인간교육으로서의 기하교육의 인식론적 기초를 살펴볼 것이다. 특히 기하학적 직관과 상상력 및 기하학적 방법은 기하교육에 있어서 주요한 부분으로 강조되어 왔다. 칸트와 페스탈로찌, 그리고 헤르바르트에 있어 기하교육의 인간 교육적 관점은 인식론적 근거로서 직관에 근거한다. 기하 교육은 그 인식론적 기초인 직관에서 출발한다는 측면을 충분히 이해하지 못하고서는 인간 교육적 가치가 어떠한 것인가 하는 논의는 할 수가 없다.

II. 본론

1. 칸트 인식론과 기하학

수학을 보는 현대의 관점은 대체적으로 논리학의 일부로 간주하거나 공리만으로 형식화하는 관점에서 논리를 직관보다 더 본질적인 것으로 보고 있는 실정이다. 하지만 교육적인 관점에 비추어 본다면 수학적 지식의 구성 관정에서 논리가 직관보다 우선한다는 입장만을 고수하기에는 어려움이 있다. 기하 교육에서 우선적으로 강조할 필요가 있는 것은 기하학적 직관이며 기하 교육의 인식론적 기초를 직관에서 두고 있다. 이러한 기하학의 인식론적 기초에 관한 논의는 칸트의 인식론에서 본격적으로 다루어지고 있다.

칸트에 있어 기하학적 지식의 구성은 직관에서 출발한다. 칸트에 의하면, “수학은 이성에 의해 개념의 구성으로부터 얻는 인식이다. 개념을 구성한다는 것은 개념에 대응하는 직관을 선험적으로 드러내는 것을 의미한다.”(B741) 칸트에 있어 수학은 이성에 의해 개념의 구성으로부터 얻는 인식이며 개념의 구성으로 확립되는 인식체계라고 할 수 있다. 수학개념에 관여하는 마음의 인식능력은 감성과 오성 모두가 관계한다. 먼저, 칸트가 수학을 감성을 관련시키고 있다는 점에서 수학의 본질은 직관과 개념의 구성이 그 핵심으로 이해 할 수 있다. 칸트가 말하는 ‘개념의 구성’이라는 것은 무엇을 의미하는 것인가? 통상적으로, 삼각형 개념의 구성이라고 한다면, 삼각형 개념의 속하는 예들이 어떤 것이며 그 개념의 성질로부터 따라 나오는 다른 성질이 어떤 것이 있는지를 파악하는 이성능력 정도로 이해된다. 삼각형에 관한 모든 내용을 살피는 과정에서 삼각형에 해당되는 전형적인 예를 종이 위에 그리거나 혹은 마음에 사고함으로써 삼각형의 개념의 구성을 수행할 것이다. 이와 같은 일을 칸트는 특정 삼각형을 상상력의 형상적 종합을 통해 선험적 직관을 표상하거나 혹은 그 선험적 직관에 따라서 종이 위에 경험적 직관으로 표상한다고 말한다(B741). 칸트의 주장은 그 삼각형을 종이 위에 예를 그리든 혹은 마음에 형상하든 언제나 선험적 직관에 의존해야 한다는 것이다. 다시 말해, 개념의 구성에서 본질적인 조건은 경험만이 아니며 그 경험을 가능하게 하는 선험적 조건을 논리적으로 가정할 수밖에 없다는 점에서 구성은 선험적으로 이루어진다는 것이다.

칸트는 삼각형 개념의 구성에 이와 같은 주장을 통해 무엇을 말하려고 했던 것일까? 칸트에 의하면, 개념의 구성을 통해 성립하는 기하학은 바로 그 구성의 본성에 비추어 필연성과 보편성을 갖는다는 것이다(B3-4). 이 말은 기하학의 필연성과 보편성을 보장해 주는 것이 선험적 직관이라는 것이다. 칸트에 의하면 “기하학의 명제들은 필연적으로 공간, 즉 선험적 직관에 관해 타당하고 결과적으로 공간에서 발견될 수 있는 모든 것들에 대해 타당하다”(B287). ‘삼각형의 세 각의 합이 두 직각의 크기와 같다’라는 기하학적 명제를 확립하려면 기하학자는 항상 직관의 인도와 함께 일련의 추리를 수행해야 한다는 것이 칸트의 주장이다(B744-745). 다시 말해, 기하학자는 개념인 삼각형을 구성함에 있어, 거기에서 행

해지는 구체적인 조작에서 직관의 안내를 받는 한편, 연속적으로 이루어지는 구체적인 조작들과 그 결과들을 확인하는 사고 행위, 즉 추리를 수행하는 전체의 과정을 통틀어 칸트는 구성이라고 한다. 삼각형과 각이라는 개념 자체로서는 기하학적 명제를 알 수 없지만 그럼에도 불구하고 그 개념들의 관계에 속하는 속성을 찾아내는 전체의 인식 행위가 구성 과정이며 그 과정에서 선험적 직관이 관여한다는 것이다. 기하학적 개념의 구성에 관여하는 직관을 표면적으로 구체적인 조작의 산물인 종이위에 그림 도형들에 대한 경험적 직관인 것처럼 보이지만, 칸트 선험철학의 주된 관심은 그러한 경험적 직관의 조작을 가능하게 하는 즉, 그것의 논리적 원인으로서의 ‘선험적 직관’이다. 즉 경험적 직관을 가능하게 하는 선험적 직관이며, 개념의 구성에 의한 인식인 기하학의 필연성과 보편성을 설명해주는 것이 바로 선험적 직관이다.

칸트는 사실 도형의 공간적 속성이 선험적 직관의 속성들과 독립적인 것이라고 말하지 않는다. 칸트에 의하면 도형이 공간적 표상으로서 마음에 인지되는 이유는 그 종이 위의 도형이 감성에 주어졌기 때문이지 그것들 자체가 그러한 공간적 표상으로서 존재하기 때문에 그런 것이 아니라고 말한다. 따라서 기하학은 그렇게 표상된 도형, 즉 공간적 속성에 관한 진술인 것이다. 이것이 어떻게 가능한가를 묻는다면, 그것을 가능하게 하는 형식으로서의 공간이 마음에 선험적으로 주어져 있기 때문이다. 도형이 개념의 대상이며 구성의 본질은 선험적 직관에 의존한다면, 기하학은 도형일반을 대상으로 선험적 직관의 안내를 통해 도형 자체의 속성과 그 관계로 규정될 수 있다.

> “기하학은 공간의 속성들을 종합적으로 그러나 선천적으로 규정하는 학문이다. 공간에 관한 그러한 인식이 가능하기 위해서 그 공간에 관한 우리의 표상은 어떤 것이어야만 하는가? 공간은 그 기원상 직관이다. 그것이 직관인 이유는 개념에서는 그 개념을 넘어선 어떤 명제도 얻을 수 없지만 기하학에서는 그러한 개념을 넘어선 명제가 얻어지기 때문이다. ... 이 직관은 선험적 직관이다..... 공간은 직접적인 표상인 직관을 얻기 위한 외감 일반의 형식으로서 주관 내에 자리 잡고 있다”(B40-41).

칸트에 의하면, 기하학은 일차적으로 도형을 대상으로 하지만 기하학은 또한 공간의 속성에 관한 인식체계이다. 기하학을 인식체계로서 사용되는 원칙, 즉 기하학적 원칙은 선험적 직관인 공간에서 따라 나온다는 말은 그 원칙이 공간에 의해서 가능하다는 의미이다. 즉, 선험적 직관인 공간은 감성의 선험적 형식으로서의 인식의 원리라는 것이다. 기하학적 원칙은 공간의 속성에 관한 주장이므로 그것은 당연히 도형에 관한 원칙이다. 공간이 선험적 직관이라는 것은 선험적 직관이 공간적 속성을 담지하고 있다는 것이며 이 점에서 공간적 속성을 담고 있는

도형에 관한 기하학적 인식이 비로소 가능하다는 의미이며. 선험적 직관이 기하학적 인식의 기초라는 것이다. 다시 말해, 기하학은 개념의 구성에 의해 확립되며 선험적 직관인 공간은 개념의 구성을 가능하게 하는 선험적 원리이다. 기하학은 도형의 속성에 관한 명제이고 도형의 속성은 공간의 속성을 담고 있다는 점에서 기하학은 공간의 속성에 관한 체계이다. 그러므로 기하학은 그 자체를 가능하게 하는 선험적 원리인 선험적 직관에 관한 체계이다.

인식론적 관점에서 기하학적 인식이 모든 인식의 전형이다. 확실하고 안정된 학문인 기하학이 어떻게 해서 가능한지를 해명하는 일은 곧 인식 일반이 어떻게 해서 가능한지를 해명하는 인식론의 근본적인 주제이며, 순수이성비판의 핵심적인 물음이라고 할 수 있다. 칸트에 있어 기하학은 공간적 속성에 관한 체계이며 또한 그것을 가능하게 하는 선험적 직관은 공간이다. 만일 그렇다면 공간에 관한 체계인 기하학은 감성의 형식에 관한 인식 체계이며 보다 넓게는 인간 마음의 인식활동에 관한 지식 체계인 것이다. 이와 같이 칸트에 있어 기하학적 인식의 고유한 특성은 기하학이 인식일반의 선험적 원리인 공간 자체에 관한 인식으로 이해된다는 데에 있다. 다시 말해, 기하학은 인식일반의 전형이면서 인식일반의 원리가 되는 것이다.

기하학은 자연과 세계에 대한 설명이라는 칸트의 주장을 이해할 수 있다. 칸트에 의하면 공간은 마음 안에 존재하는 것으로서 모든 경험의 논리적 원인으로 간주할 수 있다. 선험적 직관이 경험세계에 투사될 그 논리적 원인을 이끌어 내는 작용을 수행한다면 기하학은 경험세계의 가능한 현상을 설명해주는 원천이 된다. 인간은 기하학적 경험의 논리적 가능성을 사유함으로써 기하학적 지식을 확립하며 인식일반의 논리적 가능성을 사유함으로써 기하학적 사고의 형성이 가능하게 된다고 할 수 있다. 도형에 관한 기하학이 공간의 속성에 관한 진술이라는 점을 고려해 본다면 그 공간의 속성은 모든 경험의 논리적 가능성이라는 점에서 기하학은 경험의 논리적 가능성 자체가 무엇인지를 말해주는 지식이라고 말할 수 있다. 물론 그것은 선험적 직관에 의해 성립하는 만큼 논리적으로 가능한 모든 경험들에 관한 진술이기도 하다. 그래서 인간은 기하학을 통해서 자연과 세계를 설명할 수 있으며 동시에 왜 그렇게 할 수 있는지도 알게 되는 것이다.

2. 페스탈로찌와 헤르바르트의 인식론과 기하학

기하학과 직관에 관한 칸트의 선험 철학적 논의를 실천적 맥락에서 직관적 기하교육까지 발전시킨 수학교육자가 페스탈로찌와 헤르바르트라 할 수 있다. 페스탈로찌에 있어 교육의 목적은 사물의 본질을 직관적으로 이해하는 것에서 출발

한다. 직관적 인식은 그 사물의 인식이 이루고 있는 세 가지 주요 특징, 즉 그 사물의 수, 형, 그리고 언어에 기인한 것이다.

교육의 목적이 사물의 본질을 직관적으로 이해한 것에 기초한 만큼 수, 도형, 언어 교육은 가장 기초적인 교육이다. 페스탈로찌에 있어 사물의 본질의 직관적 이해를 가능하게 하는 주관적 조건이 모든 인간에서 역시 있다고 보지 않으면 안된다.

칸트에 있어 인식을 가능하게 하는 인식주체의 선험적 조건인 시간과 공간 그리고 범주에 상응하는 능력을 페스탈로찌 또한 교육적 맥락에서 선험적으로 전제하고 있다. 칸트와 같이 페스탈로찌는 인식주체의 선험적 조건에서 역시 교육의 기초로 수와 도형을 이끌어내고 이러한 인식론적 입장에서 기하 교육의 심성도야의 근거를 마련하고 있다.

페스탈로찌는 인식의 기본요소가 수, 도형, 언어이므로 심성도야의 핵심적 내용이 기하학이 되어야 한다는 인식론적 논거로 기하의 인간 교육적 근거를 다음과 같이 주장하고 있다. "세는 일과 계산하는 일은 정신의 모든 질서의 근본이다. 계산정신과 진리감각을 분리하는 사람은 신이 맺어준 것을 분리하는 사람이다. 도형의 교육은 정신적 능력을 키워줄 본질적인 훈련이다"(1801, p.169). 또한 페스탈로찌의 논의를 사려깊이 생각하여 그의 논의로 발전시킨 헤르바르트 역시 도형이 인간 정신의 중심적인 요소임을 강조하고 있다. "도형은 우리 인간 정신의 중심에 있다. 측정과 사고라는 요소는 가장 본성적인 것이며, 수학은 이러한 요소와 가장 밀접한 관련을 가지고 점차적으로 이러한 요소를 발달시킨다. 수학은 정신활동의 중심에 있다. (1802, pp. 149)"

특히 페스탈로찌는 인간교육의 본질이 직관에서 출발해야 함을 말한다. "직관이 모든 인식의 절대적 기초라는 점을 인정하는 것이다. 다시 말해서, 반드시 모든 인식은 직관으로부터 출발하고 직관으로 돌아올 수 있어야만 한다는 것이다."(1801, p.223) 또한 헤르바르트에 의하면 인간교육에서 가장 중요한 것은 도덕성이다. 헤르바르트의 도덕에 대한 중요한 통찰력은 수학을 인간본성과 삶의 심미적 원리와 결부시키는 데 있다. 헤르바르트에 있어 수학은 인간의 마음에 기반한 것이다. "열정을 가진 교사에 의해 삼각형을 다루는 일은 세계와 자연의 법칙을 학생의 마음에 확고하게 자각하도록 하는 것이며 여기에 학생의 관심을 몰두시키게 만든다.(1802, pp. x), 페스탈로찌는 기하 교육의 이념을 다음과 같이 서술하고 있다. "아동의 정신적 향상과 도덕적 향상을 통합시키는 제 단계들에 있어서의 첫 발걸음이 이제 어머니(교사)의 사랑의 손길에 이해 시작된 것이다. 아동은 처음으로 완성하게 된 선, 즉 직선과 곡선 속에서 그 법칙을 본다. 처음으로 하나의 선을 완전하게 그릴 수 있을 때.. 숭고한 법칙이 처음으로 싹튼다. 본질적으로 완성을 위한 부단한 노력에 근거하기 때문에 아동은 요람에 있을 때부

터 이 법칙이 아동의 마음에 깊이 새겨지도록 포괄적인 작용을 한다. (1801, p.288)

페스탈로찌에 있어 기하 교육의 인간 교육적 이념을 구현하기 위한 인식론적 기초는 직관이다. 페스탈로찌는 직관을 모든 인식의 기초로 두고 학습의 원형인 수, 도형, 언어의 세 요소 중에서 도형을 인식론적으로 가장 기초에 두고 있다. 초등수학의 단계에 비형식적, 직관적 기하학을 도입하여, 마음의 수학을 강조한다. 기하학은 페스탈로찌에 있어 교육의 목표를 달성하는 데 가장 중요한 교과이며 이를 위하여 기하교육은 자연의 불변적인 법칙에 대한 포괄적 지식과 인간의 마음의 형식을 따라 이루어져야 한다. 직관적 기초에 기하교육은 아동들이 자연스럽고 의미 있게 기하학을 배우게 한다. 페스탈로찌의 기하교육에 있어 독특한 점은 기하교육을 언어교육이나 산술교육과 함께 통합적으로 이루어진다는 점이다. 먼저, 기하의 언어 교수는 철자판을 사용하여 이루어진다. 문자표를 이용한 기하의 산술 교수는 동질적인 계산표에 의해 단위의 변화에 따른 크기의 변화를 직관적으로 의식할 수 있도록 지도된다. 실제로 눈앞에서 변화하는 대상을 통해 아동은 대상의 늘어나고 줄어듦에 대한 의식은 이후 계산표를 통해 강화된다. 페스탈로찌에 의하면, 계산은 가장 분명하고 명확한 직관의 성과로 아동을 명확한 개념으로 이끈다. 페스탈로찌는 정사각형을 행과 열로 각각 등분할 한 분수의 직관표를 고안하고 정사각형을 기하지도를 위한 직관표의 기본 도형으로 사용한다. 분수는 기하의 산술적 교수의 두 번째 방식이며 분수의 관계를 직관적으로 보여주는 도형으로 정사각형을 사용한다. 도형지도를 위한 측정도형과 동일한 정사각형을 사용함으로 기하 지도와 산술 지도의 연결을 고려한 것으로 생각된다. 페스탈로찌에 있어 기하학은 이성의 훈련이며 직관의 결과로서 진리로 이끌어 주는 방편이다. 페스탈로찌는 기하학에서 도야되는 직관력이 그 이후의 정서도야와 도덕교육으로도 이어진다고 보고 있다.

기하학은 페스탈로찌와 헤르바르트에 있어 심성도야를 증진시키는 핵심적 교과이다. 도형은 인식의 기초이므로 직관적 기하 교육은 올바른 인식의 기초를 위한 핵심적 교과이다. 페스탈로찌와 헤르바르트에 있어 직관은 기하 교육의 인식론적 기초이다. 이를 위하여 수많은 직관도표를 고안한 것은 직관적 방법에 의해 학생 스스로 기하학적 법칙을 발견하게 하기 위한 것이다. 페스탈로찌와 헤르바르트의 인식론은 칸트의 인식론과 같이 직관에서 시작하고 중요 원리 사이의 상호관련성을 학습하며, 기하 교육을 통하여 자연의 필연성과 자유성을 본받아야 함을 강조한다.

3. 인간교육으로서의 기하 교육의 전개

페스탈로찌에 있어 인식의 기본적 요소인 수, 도형, 언어 사이의 관계에서 언어와는 달리 수와 도형은 자연의 가장 포괄적인 개념으로 다른 모든 것의 근거가 된다. 수와 도형의 개념은 아동의 수학적 안목을 형성시키고 자연과 세계를 인식하는 형식이 된다. 특히 도형의 인식은 수와 언어의 인식의 전제라는 점에서 도형교육의 결함은 인식의 결함을 초례할 수 있다는 점에서 가장 기본적인 것은 기하교육이라 할 수 있다.

> “도형에 대한 교육의 결여는 단지 인간의 인식교육에 있어서의 단순한 결함으로만 간주되어서는 안 된다. 오히려 그것은 모든 인식의 본질적 기초에 있어서의 결함으로 간주되어야 하는 것이다. 언어나 수에 대한 인식은 반드시 형에 대한 인식이 전제되어야 한다는 점에서 그 결여는 인식의 결함으로 나타는 것이다”(1081, p.195)

페스탈로찌에 있어 도형교육은 사물의 형태의 인식에서 출발하여 그 형태의 특성을 이해하면서 직관력을 도야하는 일이다. 도형교육은 단순히 도형의 형태와 그 성질에 관한 학습뿐만 아니라, 측정활동, 즉 사물의 크기를 재고 그 크기 사이의 성질을 파악하는 것, 사물의 본질을 직관적으로 이해하는 것, 그리고 대상의 형태에 내포되어 있는 특징을 그리는 학습, 그리고 언어교수와 도형교수가 통합적으로 교육하는 것을 강조하고 있다.

도형 지도의 첫 단계는 자연과 세계의 대상에 대한 직관의 기술에서 시작된다. 페스탈로찌는 직관의 기초를 위한 방법들을 구체적으로 제시하고 있다.

> “먼저, 삼각형 모양, 둥근 모양, 타원 모양, 등의 갖가지 사물을 아동에게 먼저 제시한다.그 후 곧바로 종이로 그려진 여러 분할된 도형들로 잘라서 4등분된 정사각형, 6등분된 정사각형, 8등분된 정사각형, 그리고 원형, 반원형, 4등분된 타원형 등의 모양으로 아동에게 제시한다. 이렇게 함으로서 아동은 도형들에 대한 규정된 언어의 기초적 사항과 측정의 전제가 되는 계산의 기초적 사항을 배우게 된다. 특히, 아동은 이와 같이 직관의 기초를 통해서 모든 형태에 있어서의 수와 양을 정확하게 표현할 수 있는 능력을 습득하게 된다. 입체기하학의 원리는 그 모형, 즉 모델링을 통해서만 이해되는 것이다. 모형을 만드는 훈련을 거친 아동은 이것이 아주 쉽게 이해된다. 아동이 모형을 만드는 법을 어느 정도 알고 있는 경우에 특히 이것은 아동의 정신에 깊은 인상을 심어준다.“(1801, p.124-6)

페스탈로찌는 직관의 기술을 지도하기 위하여 측정도형들을 고안하였다. 이 측정도형을 사용함으로써 형태의 비례를 지도할 수 있다. 측정도형이란 정삭각형을

동일한 형태로 분할한 것이며, 본질적으로 정사각형의 기초인 수직선과 수평선에 대한 정확한 지식이 필요하다. 정사각형을 직선을 통해 분할하면 모든 각은 물론 원과 호를 규정하고 측정할 수 있는 일정한 도형들이 만들어진다. 페스탈로찌는 측정도형을 사용한 도형지도에 대한 방법을 상세히 기술하고 있다.

> “먼저 어떤 것도 결합되지 않고 그 자체로만 구성된 직선을 여러 가지 상황에서 다양한 방향에서 제시하면서 그 직선의 성질을 보여준다. 이 직선의 다양한 형태를 다른 응용목적과 관계시키지 않은 채 아동에게 분명하게 의식시킨다. 그리고 직선을 수평선, 수직선, 사선 등으로 이름 붙이고, 사선은 먼저 상향사선과 하양사선으로 나누어 명명하고 이어서 우측 상향사선과 좌측 상향사선, 우측 하향사선과 좌측 하향사선으로 나누어 명명한다. 또한 평행선의 형태에 대한 명칭, 즉 수평평행선, 수직평행선, 대각선(빗금평행선) 등의 명칭을 알려 준다. 그런 다음 아동들이 알고 있는 선들을 결합함으로써 생기는 주요 각들을 직각, 예각, 둔각 등으로 명명하면서 분명하게 이해시킨다. 그런 후에, 두 개의 각을 결합함으로써 생기는 정사각형과 정사각형을 정확히 이등분, 사등분, 육등분 등으로 분할한 도형, 그리고 원과 원을 타원형으로 만든 여러 가지 형태의 도형 등을 아동에게 알려 주면서 명칭을 부여한다. 즉 측정도형의 명칭들은 이 과정에서 단순히, 정사각형, 곡선, 원, 반원, 4분의 1원, 타원형, 반타원형, 4분의 1타원형 등으로 명명한다.(1801, p.195-196)“

페스탈로찌에 의하면 반드시 아동은 이 도형들을 측정의 수단으로 사용하도록 가르쳐야 하며, 이 도형들의 여러 관계들의 성질을 알게 해야 한다. 이를 위해 측정도형의 관계들을 아동들이 명명하게 하는 노력과 아동 스스로 이 도형들을 적용하고 응용할 것을 권고하고 있다. 그리고 도형지도에 그리기를 포함시킴으로써 아동은 직관할 수 있을 뿐만 아니라 그리기 연습을 통해 실제적으로 측정할 수 있는 능력을 갖도록 하여, 모든 도형을 응용할 것을 권고 하고 있다.

헤르바르트는 페스탈로찌가 정사각형을 형태의 기본으로 생각한 것과는 달리 직관에 대한 인식론적 근거를 제시하면서 삼각형을 형의 기본으로 간주한다[2]. 모든 형태의 진정한 기본요소는 정사각형이 아니라 삼각형으로 생각한다. 삼각형은 기하학적으로도 선과 점에 의해 구성되는 가장 기본적인 도형일 뿐만 아니라 우

2) “우리의 눈이 삼각형의 형태로 사물을 지각한다. 즉 삼각형은 가장 단순한 기본적인 형으로 사물은 삼각형의 형태에 의해 결정된다. 사전에 어떤 연습을 하지 않더라도 직관의 과정에서 삼각형들의 형태를 유기적으로 조직하는 데에는 결코 실패하지 않는다. 말할 필요도 없이 형태가 눈에 의해 지각된다는 사실을 간단히 분석하더라도 형태를 지각함에 있어 삼각형의 형태는 유용하며, 더구나 직관에 의한 삼각형은 개념과 사고를 자극할 뿐만 아니라 교사가 관찰 대상에 학생의 관심을 집중시킬 수 있다. (1802, pp.175)”

리의 인식이 대상을 파악하는 방식이기도 하다는 것이다. 헤르바르트는 가장 기본적인 형태가 삼각형이라는 인식론적 근거에서 삼각법에 의한 초등기하 지도를 고안한다. 삼각법에 의해 대상의 일반성을 가르칠 것을 권고한다.

“삼각형을 기본으로 하는 삼각법은 각과 변에 의해 결정된다. 각과 변에 의한 삼각법은 크기와 형태 역시 우리의 지각과 동일한 것이며, 대상의 일반성을 이해하는 것에 기초가 된다. 삼각법의 의한 대상의 일반성의 이해는 우리의 노력과 교수가 필요하다. 수학이 우리의 정신을 도야시킨다는 것은 많은 연습과 앎의 관계에서 이루어 질 수 있다. (1802, pp. 178)”

삼각형을 기본으로 하는 삼각법의 지도에서 특히 직각 삼각형은 삼각법의 기본적인 개념으로 중요하게 생각한다. 삼각법은 경험에서의 불완전한 인식을 상상력에 의해 일반화시키는 오성을 훈련에서 기초하고 있다.

헤르바르트에 의하면, 형태가 결정되는 것은 길이의 비율과 각의 크기에 의한 것이다. 오성의 훈련을 통한 삼각법은 길이의 비율과 각의 크기를 통한 형의 본질을 파악하기 위한 수학교육적 조치이다. 대상의 형태를 결정하는 것은 한편으로는 길이의 비율이며, 다른 한편으로는 각의 크기이다. 헤르바르트에 의하면, 길이의 비율과 각의 크기의 관계를 직관과 개념의 관계로 설명된다. 즉 길이의 비율은 각의 크기를 전제한 것으로, 즉 각의 크기를 직관함으로써 길이의 비율이라는 개념이 형성된다는 것이다. 특히 직각 삼각형을 기반으로 한 삼각비에 초점을 두고 있다. 삼각법에 의한 기하지도는 페스탈로찌의 직관적 교수과정을 완전히 거친 다음에 이루어져야 한다.

이를 위해서 헤르바르트는 삼각법에서 학생이 먼저 연속적인 대상의 위치를 파악하고, 삼각형의 각과 변들을 정확하게 측정함으로써 대상의 크기를 정확하게 예측할 수 있도록 한다. 학생의 마음은 모든 대상을 삼각형의 형태로 정확하게 측정하기 전에 무의식적으로 그것을 분석하는 습성을 형성하게 된다. 이러한 습성에 있어 그 대상의 심미적, 도덕적 의미를 놓치지 않도록 주의해야 하며 이를 위하여 교사 자신이 도형지도에서 심미적, 도덕적 의미를 드러내 줄 수 있어야 한다. 헤르바르트는 수학적 상상력을 그리고 페스탈로찌 역시 수학에 있어 추리력과 발견적 독창성을 강조한다. 헤르바르트는 기하교육의 직관적 전개를 위하여 구체적인 교육과정을 제안하기도 한다[3].

---

3) “수세기와 측정은 가장 이른 초기에 교육되지 않으면 안 된다. 8,9,10세의 수학은 직관의 ABC가 형성되어야 하고, 매일 일정한 시간동안 교수되어야 한다. 12, 13, 14세의 기간에는 직관의 ABC가 잘 갖추어진 학생에게 기하와 기하, 삼각법, 초등대수학을 충분한 시간을 두고 지도 되어야 한다. 마지막으로 18, 19, 20세의 전문적인 수학교수에 의해 수학을 삶에서 적용하고 구현하고 정신도야를 위해 주의 깊고 완벽하게 공부하여 완성해야 한다. 이는 순수수학을 고려하면서 동

직관적 기하 교육의 이념은 20세기 초의 Treutlein의 직관기하에서도 찾아볼 수 있다. 도형의 직관적 인식과 그 교수 자체가 가지는 교육적 가치를 인정하고 하나의 교과로서 직관기하를 만들었다. 직관 기하는 입체의 관찰을 바탕으로 여러 가지 도형을 이끌어 내고 그것을 변형하여 새로운 도형을 구성하며, 목측하기, 실측하기, 그리기, 모형만들기 등을 통하여 내부직관과 공간관념을 배양하여 논증기하의 기초를 마련하고자 한 것이다.(우정호, 2001, p.119). Treutlein은 평면도형보다는 입체도형이 조작적 활동에 보다 적합하다는 점에서 입체도형을 우선시키고 있다. 그는 사고 속에서 입체도형의 내부 구조를 상상하는 것을 마음의 기하라는 표현을 하고 있다. 이와 관련하여 가장 전형적인 직관기하의 교수법으로 공기 정육면체를 제안한다. Treutlein의 직관기하는 페스탈로찌와 헤르바르트가 평면도형에 중점으로 적용한 직관적 공간지도를 입체도형에 적용한 것이라는 점에서 그의 직관기하는 페스탈로찌와 헤르바르트의 직관적 기하교육의 이념을 계승한 것이라 볼 수 있다.

4. 인간교육으로서 기하교육의 인식론적 기초가 가지는 수학교육적 함의

플라톤에 있어 이데아의 모델은 이상적 도형이었다. 이점은 플라톤에 있어 기하교육은 참된 이데아를 탐구하는 과정 그 자체이며, 이데아의 세계로의 영혼을 전향시키는 과정이었다. 이러한 기하 교육의 이념은 칸트에게 계승되었다고 볼 수 있다. 칸트에게 있어서 도형은 이념의 감성적 수준, 즉 감성의 선험적 조건인 공간의 속성을 드러내는 것이다. 이 이념은 형이상학적 마음이라는 점을 고려한다면, 칸트의 관점에서 기하교육의 목적은 인간교육과 관련된다.

칸트의 인식론에서 내용과 형식은 각각 기하 교육에서 '논리적 원인'과 '사실적 계기'라고 해석 할 수 있다. 도형이라는 개념의 사실적 계기는 마음 밖에 존재하는 것이다. 칸트에게 있어 인간은 현상계에 속해 있으며 현상계를 벗어날 수 없다. 현상은 우리의 인식의 발판이며, 우리 밖에 존재하는 자연과 세계라는 현상은 도형의 사실적 계기로 작용할 수 있다. 그러므로 자연과 세계라는 현상은 도형의 객관적 조건으로서 사실적 계기가 될 수 있다. 사실적 계기는 마음 밖의 계기로서 마음 안에 있는 논리적 원인이 마음 밖으로 드러나도록 촉발시키는 역할을 한다는 점에서 사실적 계기가 없다면 논리적 원인은 드러날 수 없다. 또한 동시에 사실적 계기가 아무리 작용해도 그것을 가능하게 하는 논리적 원인이 갖추어져 있지 않다면 사실적 계기는 의미가 없는 것이다.

시에 교육적인 관점에서 응용수학 역시 인식주체의 문제와 관련하여 다루어져야 하며, 학생의 주체적인 정신적 필요성에 집중되는 것이 중요하다.(1802, pp. 159-160)"

역사발생적 관점에서 보면 도형은 여러 가지 자연과 세계의 사실적 현상을 설명하고 인식하기 위한 과정에서 발생하였다. 이것은 현상이 도형의 계기로 작용하고 있음을 말해 주는 것으로 볼 수 있다. 페스탈로찌의 용어로, 사실적 계기를 통해 인식 주체의 마음에 불명확한 인식이었던 도형의 개념이 명확한 인식이 되는 것이다. 칸트적인 관점에서 표현한다면, 사실적 계기를 통해 인식 주체의 마음에 있는 선험적인 조건인 공간, 즉 논리적 원인으로서의 도형이 발현되는 것이라 말할 수 있다. 다시 말해, 기하교육은 현상을 사실적 계기로 하여 논리적 원인으로서의 도형이 발현하여 현상의 본질을 이해하는 선험적인 논리적 원인으로서의 도형을 확인할 수 있는 것이다. 그렇다면, 기하 교육에 있어 도형의 사실적 계기로 작용할 수 있는 현상을 적절히 제공하는 것이 필요하다. 페스탈로찌와 헤르바르트의 직관적 교수에 따른 기하지도, 그리고 Treutlein의 직관기하의 주장은 기하 교육에 있어서 사실적 계기의 중요성을 보여주는 것이라 볼 수 있다. 기하학의 직관적 지도와 활동주의적 관점은 특별한 사실적 계기를 통해 마음에 있는 선험적인 주관적 조건, 즉 논리적 원인으로서의 수와 도형이 발현될 수 있도록 하는 데 의미를 가진다.

칸트의 인식론에 비추어 본다면, 기하교육이란 인식주체의 선험적인 조건, 즉 논리적 원인과 사실적 계기의 통합으로 이루어진다. 논리적 원인과 사실적 계기라는 두 조건은 각각 서로 다른 것의 존재를 전제하며 서로의 이면을 이루고 있다고 볼 수 있으며 도형이라는 개념이 마음이 되는 과정은 그 개념을 이해하는 데 있어서 논리적 원인과 사실적 계기가 서로 상호작용하는 과정이라고 할 수 있다. 이렇게 본다면 기하교육의 과정은 기하학이 마음의 한 부분으로 되는 과정이라고 해석할 수 있다. 칸트의 선험철학에서 도형이라는 개념을 포함한 모든 기하학적 개념은 이념의 현상적 표현물로서의 지위를 지닐 수 있다. 기하학적 개념이라는 이론적 활동의 이면에는 형이상학적 마음인 이념이 있으며, 모든 기하학적 개념은 이 하나 뿐인 마음인 이념이 대상에 따라 상이한 형태로 표현되는 것이다. 이러한 점에서 도형이라는 개념 역시 이념의 현상적 표현이라 할 수 있다. 도형은 모든 수학적 사고 전체의 바탕에 놓여 있는 기본적인 인식으로서 이념의 감성적 수준, 즉 감성의 선험적 조건인 공간 그 자체의 표상으로서 그것은 이념과 관계해 있는 것을 그 특징으로 한다.

페스탈로찌와 헤르바르트는 형식적 그리고 추상적인 접근의 대안으로 직관적 교수에 의한 도형 지도를 주장하였다. 기하교육이 직관에서 출발해야 한다는 주장은 칸트의 인식론에 비추어 생각해 볼 수 있다. 기하학은 직관에 기초해 있다. 감성은 마음이 현상 질료에 의해 촉발되는 방식에 따라 표상을 구성하는 능력이며, 그 결과가 직관을 구성한다. 이러한 현상을 특정한 방식으로 정돈하는 선험적 조건이 공간이다. 도형은 공간이라는 선험적 조건에 의해 설명되며, 더욱이

공간의 선험적 표상이 도형이다. 이와 같이 기하 교육은 개념에만 의존하는 것이 아니라 더 근본적으로 직관에 기초한 것이다. 기하학적 추론이나 개념 형성과정에서 직관이 제공하는 표상에 의존하지 않을 수 없다는 점에서 직관은 기하학적 사고의 시작이라 할 수 있다. 기하교육에서 직관의 강조는 기하학의 형식이 자연과 세계라는 현상에서 출발하되 인식의 선험적 형식인 직관에서 출발한다는 사실을 드러내는 것이라 볼 수 있다. 페스탈로찌의 직관적 교수나 헤르바르트의 경험적 표상은 형식적 개념, 즉 기하라는 개념이 되기 전의 자연과 세계의 현상인 경험적 직관을 가리키는 것이며 그것을 추상하는 과정은 기하학이라는 형식을 드러내는 과정으로 볼 수 있다. 페스탈로찌나 헤르바르트는 기하학이라는 형식으로 가는 출발점으로 직관을 중시하는 것은 단순히 자연과 세계라는 현상이나 경험적 직관을 중요시 하는 것이 아니라 현상이나 경험적 직관에서 출발하여 형식적인 기하 개념에 이르는 기하학적 사고의 전 과정을 중요시한 것이 볼 수 있다.

기하학과 직관의 연결, 그리고 기하 교수와 산술 및 언어 교수와의 연결은 기하 교육과 세계와의 유기적 관련을 강조한다. 유기체라는 것은 그것을 구성하는 요소가 서로의 관계를 맺고 있는 하나의 전체라고 말할 수 있다. 페스탈로찌나 헤르바르트에 있어 기하학과 세계는 배타적이고 분리적인 것이 아니라, 기하학과 세계를 직관적인 방법으로 밀접하게 관련시켜 하나의 유기적 관련을 가진다. 이러한 관점에서 본다면, 기하학과 세계를 분리해 가르치는 것은 수학이라는 하나의 유기체를 단편적인 것으로 간주하여 자연과 세계라는 현상을 부분적으로 인식하게 하는 것이라 할 수 있다. 페스탈로찌나 헤르바르트는 아동이 자신의 직관적 경험을 근거로 도형 개념을 재발견하며, 주변 사물과 관련한 직관에서 기하교육을 출발하여 점진적으로 기하학 개념, 즉 형식적 완성에 이르도록 권고 한다. 기하학의 역사 발생적 과정은 자연과 세계에 대한 소박한 직관에 따른 현상들의 추상화된 형식화를 통해 발달되는 과정을 보여준다고 할 수 있다. 추상적이고 형식화된 기하 개념은 그 발달 과정의 모든 개념과 그 과정이 압축된 상태라고 볼 수 있다면 추상적이고 형식화된 기하학 개념을 이해하기 위하여 압축된 결과만이 아니라 그 발전 과정까지 내면화 되어야 한다.

III. 결론

학교에서의 기하교육은 소위 입시교육과 극단적인 지식 중심의 교육으로 인하여 비판의 대상이 되기도 한다. 기하교육의 인간 교육적 관점의 부재라는 것이 그 주요한 원인으로 생각 된다. 이러한 문제의식에 따라서 인간교육으로서의 기하교육의 인식론적 기초에 관한 고찰이 요구된다. 인간교육을 최고의 이념으로 추구한 칸트와 페스탈로찌 그리고 헤르바르트의 기하교육에 대한 고찰하였고, 이

를 바탕으로 인간교육으로서의 기하교육의 인식론적 기초가 가지는 교육적 가치가 어떠한 것인가를 탐색하였다.

기하교육의 인간교육적 관점은 인식론적 기초로서 직관에 기초한 것이다. 칸트와 페스탈로찌 그리고 헤르바르트의 기하 교육론에서 발견할 수 있는 기하학의 교육적 가치는 기하교육을 통해 이루어지는 마음의 도야라 할 수 있다. 기하교육 통하여 마음의 도야를 강조하는 것은 현상을 보는 형식으로서의 기하를 강조한 것, 다시 말해, 자연과 세계라는 현상을 기하라는 특정한 형식에서 파악한 것이다. 이러한 점에서 기하는 자연과 세계라는 현상을 보는 개념적 수단이며, 기하교육은 자연과 세계라는 현상을 보는 그 개념적 수단으로 기하학이라는 특정한 형식을 가지게 하는 것이다. 그렇다면, 기하교육의 인간교육적 가치는 단지 생활의 문제나 필요충족의 수단을 제공하는 데 그치는 것이 아니라 자연이나 세계라는 현상을 파악할 줄 아는 형식을 가져다 줄 수 있는가에 의해 정당화되는 것이다. 기하학이라는 형식을 통해 자연과 세계라는 현상을 보고 판단하는 일은 마음의 인식작용과 관련된다. 형식은 마음의 인지적 표현이라는 점에서 형식을 마음의 인지적 표현으로 이해할 때, 원칙상 형식은 마음이 가지는 모든 특징과 기능을 가진다고 보아야 한다. 기하교육이 자연과 세계라는 현상을 보는 기하학이라는 형식을 가지게 하는 것이라는 점과 형식이 마음의 인지적 표현이라는 점은 기하학이라는 형식을 통한 심성도야와 관련지을 단서가 된다. 기하학이라는 형식을 통한 심성도야라는 의미는 기하교육에 가정되어 있는 그 형식이 마음으로 들어와 마음이 되어, 자연과 세계라는 현상을 보는 개념적 수단으로서 기하학으로 다시 표현되는 것을 의미한다고 볼 수 있다. 이러한 의미에서 인간교육으로서의 기하교육의 인식론적 기초가 가지는 교육적 함의는 수학의 초석이 되는 도형 개념이 마음의 사유 법칙으로 표상된다는 점에서, 자연과 세계의 표현인 기하학이 인간의 마음과 서로 무관한 것이 아님을 깨닫게 한다는 점에서 인간교육과 관련을 가진다는 것이다.

기하교육의 인간교육적 이념을 추구하는 것은 그 내용인 기하학을 통해서만 가능하다고 볼 수 있다. 칸트와 페스탈로찌 그리고 헤르바르트가 직관을 강조한 것은 기하교육의 인간교육적 이념이 직관에서 출발하는 것임을 말하는 것으로 볼 수 있다. 이러한 측면에서 본다면, 기하의 가장 기본적인 도형이라는 개념에는 이미 기하교육의 인간교육적 목적이 가정되어 있으며 직관적으로 도형이라는 개념으로 표현함으로써 그 이념이 실현될 수 있다고 보아야 한다. 기하교육을 통한 인간교육은 그 이념이 가정되어 있는 도형이라는 개념을 직관적으로 표현하는 과정에서 이루어진다고 볼 수 있다. 기하교육에서 직관적 사고과정을 강조하는 것은 자연과 세계라는 현상에서 출발하여 그 현상의 선험적 조건으로서의 논리적 원인을 추구해야 한다는 것을 보여주고 있다. 인간교육으로서의 기하교육의

인식론적 기초로서 직관을 강조하는 것은 기하학이라는 형식과 자연과 세계라는 현상을 모두 강조한 기하교육의 인간 교육적 의미를 보여주려고 한 것으로 볼 수 있다.

참고문헌

[1] 강현영, 심성함양으로서의 수학교육, 서울대학교 박사학위논문 2007.

[2] 김창환, 헤르바르트: 실천으로서의 교육학, 서울: 문음사 2002.

[3] 우정호, 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교출판부 2001.

[4] 한대희, 인간교육으로서의 수학교육, 서울대학교 박사학위논문 2000.

[5] Carl J. Posy Kants philosophy of mathematics: modern essays / edited Dordrecht, Kluwer Academic Publishers 1992.

[6] Harper, William, Kant on Space, Empirical Realism and the Foundations of Geometry, Topoi, Vol.3 1984.

[7] Herbart, Johann Friedrich, Eckoff W. J(trans.), The Ideal of Pestalozzi, ABC of sense-perception, D. Appleton and company 1802.

[8] Kant, Immanuel, Critique of Pure Reason, Kritik der reinen Vernunft. von R. Schmidt. Hamburg 1787.

[9] Pestalozzi, H., Wie Gertrud lehrt ihre Kinderaddressed to J. P. Greaves Esq. London: Sherwood 1801(김정환 역, 페스탈로찌의 실천, 서울:젊은날 1991).

[10] Pestalozzi, H., Letters on Early Educations, addressed to J. P. Greaves Esq. London: Sherwood 1827(김정환 역, 어머니들에게 보내는 편지, 서울: 서원 1989).

Yu Chung Hyun
Department of Mathematics Education
Hannam University
Daejeon 306-791, KOREA
E-mail address: yuch007@naver.com