East Asian Mathematical Journal
Vol. 28 (2012), No. 4, pp. 453–474
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2012.034

# 고등학교 이차곡선 단원의 효과적인 지도 방안

한 은 지 · 김 동 화*

Abstract. The conic sections is an important topic in the current high school geometry. It has been recognized by many researchers that high school students often have difficulty or misconception in the learning of the conic sections because they are taught the conic sections only with algebraic perspective or analytic geometry perspective. In this research, we suggest a way of teaching the conic sections using a dynamic geometry software based on some mathematics teaching and learning theories such as Freudenthal's and Dienes'. Students have various experience of constructing and manipulating the conic sections for themselves and the experience of deriving the equations of the quadratic curves under the teacher's careful guidance. We identified this approach was a feasible way to improve the teaching and learning methods of the conic sections.

## Ⅰ. 서론

이차곡선은 고등학교 현행 수학과 교육과정의 기하와 벡터에서 중요하게 다루어지고 있는 주제 중의 하나이다. 이차곡선이 활용되는 것을 우리 주변에서도 쉽게 발견할 수 있고, 대학 입시의 수리 논술이나 수리 면접에서도 종종 다루어지고 있다. 그러나 학생들은 이차곡선을 학습하는 것을 어려워하고, 오개념을 가지기도 하며, 이차곡선 단원의 교수·학습 과정에서도 어려움이 있다는 것이 지적되어 왔다.

홍성관·박철호(2007)는 이차곡선은 고등학교 기하 내용의 중요한 개념의 하나이나, 교수·학습 상황에서 단순히 대수적인 접근과 해석기하적인 접근만을 시도

2012년 7월 21일 투고, 2012년 8월 22일 심사완료.
* 교신저자
2010 Mathematics Subject Classification: 97D40
Key Words: 원뿔곡선, 탐구형 소프트웨어, 안내된 재발명
이 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음.

하므로 그 본질적인 기하학적 의미를 파악하지 못하며 단순한 기계적인 계산만을 수행하여 문제를 풀어나가려 하기 때문에 여러 가지 오개념을 가지게 되며, 탐구형 소프트웨어 등을 사용한 학생들의 직접적이고 다양한 작도 경험의 부재가 이차곡선의 기하학적 정의뿐만 아니라 대수적 정의에 대한 오개념의 주된 원인라고 지적했다.

류희찬 · 제수연(2009) 또한 현재 고등학교 교육과정의 이차곡선은 주로 해석기하적인 입장에서 지도되기 때문에 학생들은 주어진 방정식이 어떤 이차곡선의 방정식인지 모르더라도 기계적으로 초점의 좌표를 구하고 장축의 길이, 단축의 길이를 구할 수 있으나 이차곡선의 정의나 그 개념을 묻는 문제를 해결하는 과정을 지켜보면 이차곡선을 이루는 각 점들의 관계에 대한 이해가 부족함을 관찰할 수 있다고 지적했다.

장미라 · 강순자(2010)는 현행 교과서에서는 원, 타원, 포물선, 쌍곡선 등의 이차곡선이 원뿔을 잘랐을 때 나타나는 단면 곡선이라고 통합적으로 소개하면서도 실제로는 각각 2차식으로 표현된다는 점 외에 그 곡선들 사이의 어떤 연관성도 언급되어 있지 않다고 주장했다. 뿐만 아니라, '이차곡선'이라는 단원명에서 알 수 있듯이 원뿔곡선이 단순히 이차방정식으로 표현되고 이 방정식을 통해 초점, 꼭짓점, 준선 등을 찾는 기계적 활동만이 주를 이루고 있다고 비판하면서, 이차곡선의 역사적 발달 과정의 분석을 기초로 원뿔곡선과 이차곡선이라는 용어에서 드러나는 의미를 분리하지 않고 연결시켜 이차곡선의 의미를 풍부하게 되살려내는 교수 · 학습이 이루어져야한다고 주장했다.

이차곡선을 포함한 기하 단원의 교수 · 학습을 위하여 탐구형 소프트웨어를 적절히 활용함으로써 추상적인 개체에 대한 시각화와 상호작용성(Interaction)에 기반한 다양한 조작 활동을 통하여 개념에 대한 직관적인 이해뿐만 아니라 수학적 사고력과 창의력 향상에도 도움을 줄 수 있다고 보고되고 있다(김한희 · 박일영 · 박용범, 2000; 황우형 · 차순규, 2002; NCTM, 2000; Borba, M. C. et al, 2005; 홍성관 · 박철호, 2007).

현행 이차곡선의 지도에서 해석기하적인 접근을 강조하는 면의 문제점과 학생들에게 다양한 작도 경험을 제공할 필요성에 많은 사람들이 공감하고 있는 것으로 판단된다. 학교 현장에서 다소 어려움이 있더라도 역사 발생적 원리를 기초로 하여 원뿔곡선의 원래의 개념에 맞추어 학생들이 직접 원뿔을 절단하여 원뿔곡선을 관찰하고 이를 평면으로 옮겨와 해석기하적인 개념으로 유도하는 과정을 경험한다면 학습자가 이차곡선의 기하학적 성질을 직관적으로, 그리고 더 나아가 대수적 정의를 이해하는데 분명히 도움이 될 것이다.

본 연구에서는 수학 교수 · 학습 이론 가운데 특히 Freudenthal의 안내된 재발명과 역사-발생적 원리, Dienes의 수학적 다양성의 원리 등을 바탕으로 하여 동

적 기하 소프트웨어의 하나인 Cabri3D를 활용하여 학생 스스로 이차곡선의 정의를 재발명하도록 하는 수업이 이차곡선의 이해에 효과적인가를 사례연구를 통하여 탐색한다. 본 연구에서 설정한 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

(1) 이차곡선의 역사적 발달과정을 기초로 동적 기하 소프트웨어를 사용하여 원뿔의 단면으로서의 원뿔곡선을 평면곡선으로의 전환하는 과정을 통해 이차곡선의 성질을 학습자 스스로 발견하게 하는 수업이 이차곡선의 기하학적 정의에 대한 학생들의 이해에 도움을 줄 수 있는가?

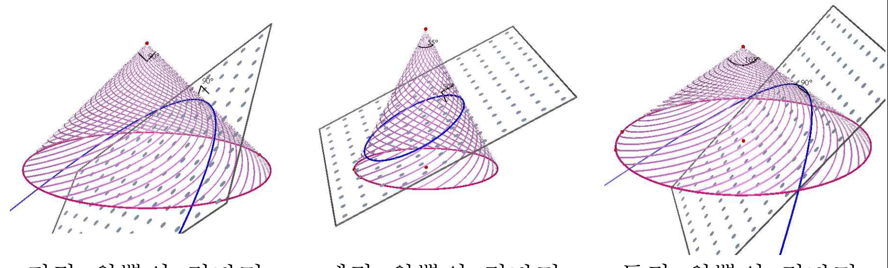
(2) 동적 기하 소프트웨어를 활용하여 학생들이 직접 이차곡선을 작도하고 조작해 보며, 방정식을 유도해보는 활동이 이차곡선의 대수적 표현의 이해에 도움이 되는가?

## Ⅱ. 이론적 배경

본 논문에서는 이차곡선의 역사적 발달 과정을 기초로 하여 학습자 스스로 이차곡선의 정의를 재발명하도록 하고, 동적 기하 소프트웨어의 하나인 Cabri3D를 이용하여 다양한 이차곡선의 작도경험을 제공하는 수업의 사례를 다룬다. 이 장에서는 수업의 이론적인 근간을 이루는 이차곡선의 역사적 발달 과정과 본 연구와 관련된 수학 교수・학습 이론에 대해 살펴본다.

### 1. 이차곡선의 역사적 발달

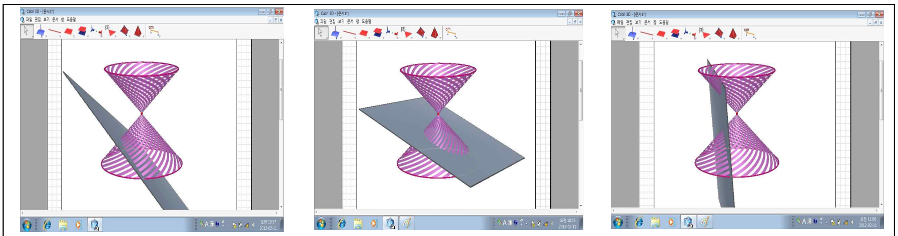
그리스에서는 기원전 4세기경부터 원, 타원, 포물선, 쌍곡선 등의 여러 가지 곡선에 대한 연구가 많았다. 특히 네 곡선 원, 타원, 포물선, 쌍곡선은 원뿔을 꼭짓점을 지나지 않는 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면의 둘레로 나타내어지기 때문에 원뿔곡선이라고 불렀다. 그 당시에 메나에크무스(Menaechmus)가 [그림 1]과 같이 원뿔 곡선을 꼭지각의 크기가 예각인 직원뿔, 직각인 직원뿔, 둔각인 직원뿔의 각 모선에 수직인 평면으로 원뿔을 잘랐을 때 나타나는 단면의 곡선으로 정의하고 이들을 각각 ‘예각 원뿔의 절단면’, ‘직각 원뿔의 절단면’, ‘둔각 원뿔의 절단면’이라 불렀다.



직각 원뿔의 절단면 예각 원뿔의 절단면 둔각 원뿔의 절단면

[그림 1] 메나에크무스의 원뿔곡선

메나에크무스 이후에 아폴로니우스(Apollonius) 꼭지각이 일정한 하나의 원뿔에서 [그림 2]와 같이 절단면의 기울기를 변화시키는 것만으로도 하나의 원뿔에서 세 종류의 원뿔곡선을 모두 얻을 수 있음을 보였다. 아폴로니우스는 원뿔을 “어떤 정점을 항상 지나는 무한의 길이를 갖는 직선이 그 점과 동일 평면상에 있지 않은 원의 원둘레 위의 각 점을 지나서 움직일 때, 그 직선의 자취는 이중 원뿔이 된다”라고 정의하였다. 이 새로운 정의에 따라 쌍곡선은 오늘날과 같은 두 갈래 곡선이 되었다. 그리고 빗원뿔에서도 직원뿔에서와 마찬가지로 원뿔곡선이 만들어지는 것을 보였고, 원뿔곡선에 ‘타원(ellipse)’, ‘포물선(parabola)’, ‘쌍곡선(hyperbola)’라는 이름을 사용하였다(이우영 · 신항균, 2005).



포물선 타원 쌍곡선

[그림 2] 아폴로니우스의 원뿔곡선

그는 하나의 원뿔을 여러 가지 평면으로 자르면서 이 평면이 밑면과 이루는 각이 모선과 밑면이 이루는 각보다 작은가, 같은가, 큰가에 따라

$$y^2 = lx - \alpha x^2,\ y^2 = lx,\ y^2 = lx + \alpha x^2$$

와 같이 나타낼 수 있음을 보였다. 여기서 $\alpha$는 일정한 상수이다. 그는

$$y^2 < lx,\ y^2 = lx,\ y^2 > lx$$

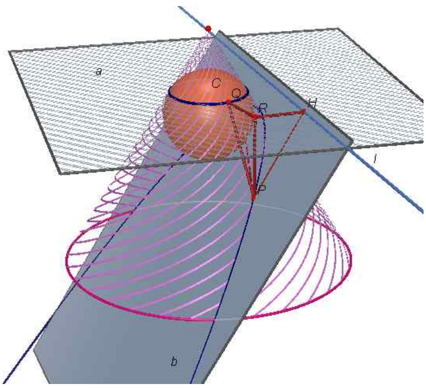
관계를 토대로 이들을 각각 모자라다(ellipsis), 일치하다(parabole), 남다(hyperbole)라는 의미로서 처음으로 타원(ellipse), 포물선(parabola), 쌍곡선

(hyperbola)이라는 이름으로 불렀다(남호영 외, 2005).

데카르트(Descartes)는 파푸스의 자취문제를 연구하여 원점을 지나는 원뿔곡선의 일반적인 방정식 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, ($a,b,c$가 모두 0은 아님)을 이끌어 내었다. 데카르트는 이 방정식이 직선, 포물선, 타원 또는 쌍곡선이 되기 위한 계수의 조건도 정리하였다. 월리스(Wallis)는 데카르트의 평면좌표를 사용하여 아폴로니우스 때부터 원뿔곡선의 성질로부터 세 개의 표준형 $p^2=ld$, $e^2=ld-\frac{ld^2}{t}$, $h^2=ld+\frac{ld^2}{t}$을 이끌어냈다. 여기서 $e,p,h$는 각 원점에 위치하는 꼭짓점에서 측정한 가로좌표 $d$에 대응하는 포물선, 타원, 쌍곡선의 세로좌표이다. 또 $l$과 $t$는 각각 동경과 '지름' 또는 축이다. 이로부터 오늘날 원뿔곡선을 원뿔의 단면으로서보다는 이차곡선으로 검토되기 시작하였다(이우영・신항균, 2005; 장미라・강순자, 2010). 이후 로피탈, 오일러를 거치면서 이차곡선은 해석기하학적으로 발전하게 된다.

18세기에 당드랑(Dandelin)은 원뿔의 단면에서 초점과 준선을 찾고 이 초점과 준선에 의해 원뿔곡선을 작도함으로써 원뿔곡선에 대한 2차원적 접근과 원뿔의 단면으로서의 3차원적 접근을 연결하려고 시도하였다. 그 결과 당드랑의 구를 발견하고 이것을 이용하여 원뿔의 단면으로서의 원뿔곡선의 초점, 준선을 찾고 이들 사이의 기하학적 관계를 증명하였다(장미라・강순자, 2010).

### ① 포물선의 증명



[그림 3]

[그림 3]와 같이 모선과 평행하게 잘라낸 평면 $b$와 원뿔에 접하는 구를 하나 그리고, 구와 원뿔의 교선인 원의 중심을 점 $C$라고 하자. 이 원을 품는 평면 $a$와 평면 $b$와의 교선을 $l$이라 하고 포물선 위의 임의의 점 $P$에서 평면 $a$와 교선 $l$에 내린 수선의 발을 각각 $R, H$라 하자. 또 평면 $b$와 구의 접점을 $F$라 하자(점 $F$는 구의 뒷면에 있음). 선분 $RC$와 $C$를 중심으로 하는 원이 만나는 점을 $Q$라 하면 직선 $PQ$는 원뿔의 모선이므로 구의 접선이다. 구의 접선의 길이는 모두 같으므로

$$PF=PQ$$

원뿔의 축과 직선 $PR$은 평행하므로

$\angle QPR = \angle HPR$($\because RP$는 원뿔의 회전축과 평행, $PQ$는 모선, $PH$는 모선과 평행하므로 두 각의 크기는 원뿔의 회전축과 모선이 이루는 각의 크기와 같다.)

$$\angle QPR = \angle HPR, \text{ 직선 } PR\text{은 공통}, \ \angle QRP = \angle HRP$$

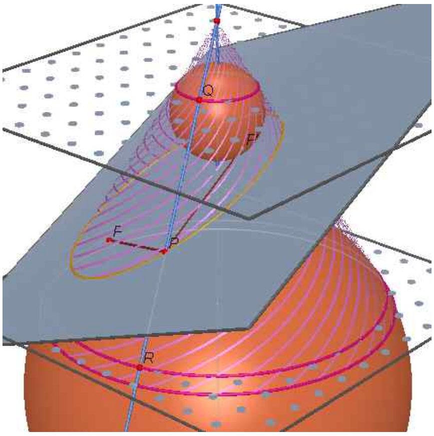
$$\triangle HRP \equiv \triangle QRP$$

$$\therefore PQ = PH$$

따라서 $PF = PH$.

즉, 평면 $b$로 원뿔을 잘라서 생기는 곡선은 점 $F$를 초점, 직선 $l$을 준선으로 하는 포물선이다.

**② 타원의 증명**




[그림 4]

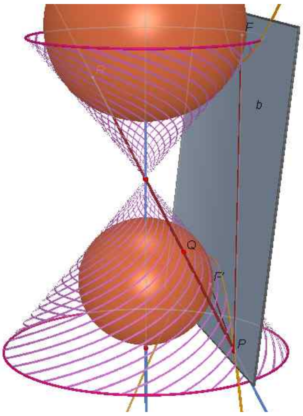
[그림 4]과 같이 모선보다 기울기가 작게 잘라낸 평면 $b$와 원뿔에 접하는 두 개의 구를 생각하자. 평면 $b$와 원뿔이 만나서 생기는 곡선 위의 임의의 점을 $P$, 평면 $b$와 두 구의 교점을 각각 $F, F'$, 점 $P$와 원뿔의 꼭짓점을 지나는 직선의 연장선과 두 구의 교점을 각각 $Q, R$이라 하면 구의 접선의 길이는 모두 같으므로

$$PQ = PF', \ PR = PF$$

$$\therefore PF + PF' = PQ + PR = QR(\text{일정})$$

즉, 평면 $b$와 원뿔이 만나서 생기는 곡선은 두 초점이 점 $F$와 점 $F'$인 타원이다.

**③ 쌍곡선의 증명**



[그림 5]

[그림 5]와 같이 모선보다 기울기가 크게 잘라낸 평면 $b$와 원뿔에 접하는 두 개의 구를 생각하자. 평면 $b$와 원뿔이 만나서 생기는 곡선 위의 임의의 점을 $P$, 평면 $b$와 두 구의 교점을 각각 $F, F'$, 점 $P$와 원뿔의 꼭짓점을 지나는 직선의 연장선과 두 구의 교점을 각각 $Q, R$이라 하면 구의 접선의 길이는 모두 같으므로

$$PQ = PF', \ PR = PF$$
$$\therefore PF - PF' = PR - PQ = QR(\text{일정})$$

즉, 평면 $b$와 원뿔이 만나서 생기는 곡선은 두 초점이 점 $F$와 점 $F'$인 쌍곡선이다.

### 2. 수학 교수・학습 이론

본 연구에서는 Freudenthal의 안내된 재발명과 역사-발생적 원리(Freudenthal, 1991), Dienes의 수학적 다양성의 원리(정정성・박종률・임재훈, 2001; 황혜정, 2007)를 바탕으로 하고, Cabri3D를 이용하여 학생들이 이차곡선의 역사적 발달 과정에 따라 원뿔을 직접 잘라보며 원뿔곡선을 만들어 보고, 공간에서 원뿔곡선의 정의를 발견하고, 공간에서의 원뿔곡선을 평면으로 옮겨와 다양한 이차곡선을 작도하는 경험을 제공하고, 방정식을 유도해 보는 수업을 실시하였다.

Freudenthal은 학습자는 인류의 학습 과정을 수정된 방식으로 재현한다고 주장한다. 다시 말해서, 아동의 정신적 발달은 역사를 그대로 재현하는 것이 아니라 아동의 현실을 출발점으로 해서 이미 발명된 수학을 아동 스스로 개선된 방법에 의해서 재창조해 나간다는 것이다. 따라서 교사는 학생들에게 배워야할 수학을 각인하려고 할 것이 아니라 수학화 과정을 재발명하도록 도와주어야 한다. 재발명이 이루어지려면 무엇보다도 그 필요성이 인식되어야 하는데, 그러한 필요성은 학생들이 낮은 수준에서 행한 행동에 대한 반성이 이루어질 때, 즉 자신이 어떻게 그렇게 했는지에 대해 깊이 생각하고 자기 자신의 행동에 대한 반성이 이루어질 때 비로소 생겨난다. 그리고 이러한 재발명을 위해서는 인위적인 구체물보다 자연스러운 상황, 아동들이 현실적・구체적으로 받아들일 수 있는 문맥이 제시되어야 하며, 학습자의 현실에서 출발해서 안내에 의해 수학화 경험으로 연결

되어야 한다.

Freudenthal은 수학의 역사적 발달과정은 수학화 과정의 패러다임이지만 이를 학습자의 현재의 정신구조에 연결시켜 수정해야 한다고 했다. 어떤 내용을 역사-발생적으로 지도한다는 것은 내용이 발생된 순서대로 교재가 구성되어야 한다는 뜻은 아니며, 훌륭한 교사의 지도를 통하여 수학이 어떻게 발생되는가를 역사적으로 찾고, 그러한 방법으로 지도하려고 한다는 것이다.

수학적 개념은 보통 몇 개의 변인을 포함하고, 개념을 구성하는 변인은 변화하지만 이 변인들 사이의 항구적인 관계가 수학적 개념이다. 수학적 개념의 성장을 돕기 위해 구조화된 경험을 제공하려면, 개념은 변하지 않게 유지하면서 가능한 한 많은 변인을 변화시켜야 한다. Dienes의 수학적 다양성의 원리는 수학의 일반화가 잘 되기 위해 해당 수학의 내용과 관련된 변수를 고정시키고, 관련 없는 즉 비본질적인 변수는 다양하게 변화시키는 경험이 제공되어야 한다는 것이다. 적당한 컴퓨터 소프트웨어를 활용하면 이러한 원리를 가상 환경에서 효과적으로 구현할 수 있다.

## Ⅲ. 연구방법 및 절차

### 1. 연구대상

본 연구는 2011년 3월부터 연구자가 지도하고 있는 J여고 2학년 자연이공과정의 수학 동아리 소속 학생 7명을 대상으로 하였다. J여고의 2학년 자연이공과정 학생들은 2012년 3월 학력평가에서 4등급 이상을 받은 학생 수의 비율이 전체 학생 수의 40.5%를 차지하여 부산광역시의 78개 학교 중에서 52위, 2012년 6월 학력평가에서 4등급 이상을 받은 학생 수의 비율은 전체 학생수의 35%를 차지하여 부산시내 87개 학교 중 62위에 위치했다. 이로부터 미루어볼 때 J여고의 2학년 자연이공과정 학생들의 수학학업 성취수준은 부산시내 학교들 중에서 대략 중·하위권에 속한다고 할 수 있다.

수업에 참여한 학생들은 학력평가에서 평균적으로 4등급 정도의 성적을 받는 학생들로, 1등급에서 5등급까지 성취수준은 다양하였으나, 전반적으로 수학 학습 내용에 대한 이해도는 보통정도인 학생들이었다. 그러나 수학에 대한 흥미도는 높은 편이며, 수학이라는 교과에 대해 호감을 느끼고 있었다. 이 학생들은 본 수업을 듣기 전까지는 이차곡선에 대하여 전혀 알지 못한 상태이다.

### 2. 연구방법 및 절차

본 연구에서 실시된 수업의 내용은 고등학교 기하와 벡터에서 학습하는 내용으로, 현행 교육과정 상으로는 고등학교 3학년 때에 학습하게 되어있다. 하지만

대학입시 준비에 매진하고 있는 고등학교 3학년 학생들에게 체험하도록 하고 그 효과를 분석하기에는 현실적인 어려움이 있었다. 따라서 본 수업을 정규 수업시간 대신 2학년 자연과정 학생들을 대상으로 수학 동아리활동을 통하여 본 수업을 실시하였다.

먼저 학생들에게 주변 환경에서 관찰할 수 있는 이차곡선을 간단히 소개하고, 안내된 재발명의 방법으로 이차곡선의 발달과정을 소개하면서 그 발달과정을 수정된 방법으로 직접 재현해 보도록 한 다음, 학생들이 관찰 및 증명을 통하여 이차곡선의 기하학적 개념을 스스로 발명하도록 하였다. 그리고 이차곡선의 개념에 따라 평면에서 이차곡선을 작도해 보고 방정식을 유도하는 경험을 제공한 후에 교과서에 있는 이차곡선의 방정식과 관련된 문제들에 대해 탐구하도록 하였다.

실제수업은 2012년 5월부터 6월까지 J여고의 동아리 시간에 실시되었다. J여고에서는 2주에 한 번 2시간씩 동아리활동이 이루어지고 있었다. 원뿔을 절단하여 이차곡선을 만들고 당드랑의 구를 이용하여 이차곡선의 정의를 증명을 통해 스스로 발견하는 학습을 위하여 동아리 학생 7명을 3명, 4명으로 이루어진 두 개의 모둠(A, B)으로 나누어 함께 토론하며 학습하도록 하였다.

본 연구에서 이용한 자료는 학생들과의 토론과 인터뷰, 형성평가 결과, 수업과정과 후의 학생들의 반응이다. 이러한 자료를 통하여 홍성관・박철호(2007)가 지적했던 이차곡선 학습에서 학습자들에게 발생할 수 있는 기하학적 정의뿐만 아니라 대수적 정의에 대한 오개념의 발생 여부를 조사한다.

## Ⅳ. 연구결과 및 분석

### 1. 이차곡선의 개념 지도

현재까지 J여고에서는 앞의 여러 연구자가 지적했던 것처럼 통상적인 방법으로 이차곡선에 대한 지도가 이루어지고 있었다. 즉, 다양한 이차곡선의 작도 경험 없이 교과서에 주어진 대로 이차곡선의 정의를 소개하고, 정의에 따라 이차곡선의 방정식을 세우는 과정으로 이차곡선 단원의 수업이 이루어지고 있었다. 본 수업은 실제로 2차시(100분)씩 2회에 걸쳐 실시되며, 1차시에서는 Cabri3D를 이용하여 원뿔을 직접 잘라보며 이차곡선을 관찰하고, 2차시에서는 당드랑의 구를 이용하여 가상의 공간에서 이차곡선의 정의를 발견한다. 다음으로 3차시에서는 공간에서의 이차곡선을 평면으로 옮겨와 이차곡선을 작도하는 경험을 제공하고, 4차시에서는 이를 바탕으로 이차곡선의 대수방정식을 유도한다. 구체적인 교수・학습 과정은 다음과 같다.

가. 1~2차시 : 도입(7분)

ppt를 사용하여 학생들에게 우리 주변에서 발견할 수 있는 이차곡선의 모습을 관찰하도록 하였다. 이러한 과정에서 포물선, 타원, 쌍곡선이라는 용어를 학생들이 이미 알고 있으며, 일상생활에서 자연스럽게 사용하고 있다는 것을 인식시킴으로써 학습할 내용이 실생활과 긴밀하게 연관되어 있다는 것을 강조하고, 학습 목표를 주지시킴으로써 학습주제에 좀 더 집중할 수 있도록 하였다.

나. 1~2차시 : 전개1(28분)

Cabri3D를 이용하여 원뿔곡선이 발달한 역사적 순서대로 Ⅱ장의 [그림 1], [그림 2]와 같이 메나에크무스의 방법, 아폴로니우스의 방법으로 원뿔을 절단하여 이차곡선을 직접 만들어 보고 관찰하도록 하였다. 이러한 과정에서 처음에 학생들은 3차원 입체를 구현하는 Cabri3D 프로그램에 관심이 집중되기도 하였다. 그러나 수업의 본질인 이차곡선에 집중할 수 있도록 유도하여 이차곡선의 관찰에 집중할 수 있었다. 학생들이 Cabri3D를 직접 사용하는 방법은 잘 알지 못했기 때문에 기본적으로 원뿔을 절단할 때 필요한 원뿔, 절단면은 미리 작도하여 제시했고, 학생들은 원뿔의 밑면의 반지름의 길이, 높이, 절단면의 위치 등을 조절해 가며 만들어지는 원뿔곡선을 관찰했다. 학생들은 이미 포물선, 타원, 쌍곡선이라는 용어는 수학 수업시간이나 일상생활에서 접해본 경험이 있어 원뿔을 절단하여 만든 곡선을 보고 어떤 곡선이냐는 질문에 쉽게 대답했다. 그러나 메나에크무스의 방법으로 만든 쌍곡선의 경우에는 곡선이 쌍으로 존재하지 않아 쌍곡선이라고 대답하지 않고 포물선이라고 대답했다.

다. 1~2차시 : 전개2(50분)

앞서 관찰한 포물선, 타원, 쌍곡선이 한자어이므로, 한자의 뜻을 통해 이차곡선의 정의가 무엇인지 예상해 보게 하였다. 이 과정에서 학생들은 포물선, 타원, 쌍곡선이라는 용어가 이차곡선의 모양에서 비롯된 것이라는 것을 알게 되었고, 이렇게 모양으로만 이차곡선을 정의해서는 수학적인 정의라고 하기에는 뭔가 부족함이 있음을 인식했다.

이후 당드랑의 구를 이용하여 이차곡선을 발견하게 하였다. 포물선의 정의를 발견하는 과정에서 필요한 당드랑의 구, 당드랑의 구와 원뿔의 접점들을 지나는 평면까지는 Cabri3D를 사용하여 Ⅱ장의 [그림 3]~[그림 5]와 같이 3차원적으로 제공하고, 학생들에게 주어진 상황에서 어떤 성질이 성립하는지 발견하도록 하였다. 그러나 처음에는 예상했던 것에 비해 학생들이 다소 어려워하여 계획했던 것처럼 학생들이 완전히 스스로의 힘으로 이차곡선의 정의를 발견해내는 것은 불가능해 보였고, 따라서 단계별로 주의깊게 힌트를 제공하여 포물선의 정의를 찾아낼 수 있도록 유도하였다. 이 과정에서 항상 최소의 힌트를 제공할 수 있도록

유의하였다. 다음은 앞의 [그림 3]와 같은 환경을 제공하여 포물선의 정의를 발견하는 과정의 대화 내용이다.

교사 : 여기에 직원뿔이 있습니다. 그리고 이 직원뿔의 밑면과 모선이 이루는 각과 밑면과 절단면이 이루는 각이 같도록 원뿔을 절단했습니다. 원뿔과 절단면에 동시에 접하는 구를 만들었습니다. 이 구와 절단면이 접하는 접점을 점 F라고 합시다. 그러면 이 구와 원뿔이 만나는 점들을 모으면 무엇이 되나요?

학생들 : 원.

교사 : 그럼 이 원의 중심을 점 C라고 하고 원 C를 지나는 평면을 만듭니다. 이 평면의 이름을 $a$라고 합시다. 그러면 평면 $a$와 절단면이 만나서 직선이 생기지요? 이 직선을 $l$이라고 합시다. 이 상황에서 어떤 성질이 성립하는지 발견할 수 있겠나요?

학생들 : (대답없음)

교사 : 그럼 좀 더 뭔가 보이게 해볼까요? 포물선 위의 임의의 한 점을 골라 점 P라고 합시다. 그럼 점 P에서 직선 $l$에 수선의 발을 내릴 수 있겠지요? 이 점을 점 H라 합시다. 그리고 점 P에서 평면 $a$에도 수선의 발을 내리고, 이 점을 R이라고 하구요. 그리고 점 C와 점 R을 연결한 선분이 원 C와 만나는 점을 점 Q라 합시다. 그리고 점 P와 점 F도 연결한 선분을 작도합시다. 이런 상황에서는 뭔가 보이나요?

학생M : 저 두 삼각형이 합동일 것 같아요.

교사 : 어떤 삼각형을 말하는 거죠?

학생M : 삼각형 PRQ랑 삼각형 PRH요.

교사 : 어째서 그 두 삼각형이 합동인가요?

학생M : 일단 선분 PR은 공통이에요. 그리고..

학생Y : 직각이에요! 각 PRQ랑 각 PRH!

교사 : 그렇군요. 그리고 하나의 조건이 더 성립되어야만 합동이 되는데..

학생들 : (대답없음)

교사 : 좀 더 생각할 시간을 드릴께요. 화면을 움직여 가면서 지금 보이지 않는 것들도 한번 관찰해 보세요. 그럼 뭔가 떠오를지도 몰라요.

<중략>

학생S : RHA 합동이 되려면 선분 PQ랑 선분 PH의 길이가 같아야 하는데..
교사 : 그 두 선분의 길이가 같다는 보장이 있나요?
학생S : ..(대답없음)
교사 : 음.. 그럼 다른 합동조건을 생각해보면 어떨까?
학생H : SAS합동?
교사 : 그럼 어떤 조건이 더 필요하죠?
학생H : 선분 QR이랑 선분 HR이랑 길이가 같아야 되요.
교사 : 그 길이는 같다는 보장이?
학생H : 음... 아닌 것 같아요.
교사 : 그럼 SAS합동도 아닌 것 같네요. 그럼 두 삼각형은 합동이 아닌가?
학생M : 아.. 합동일 것 같은데.. ASA?
교사 : ASA합동이려면 어떤 조건을 만족하면 되지요?
학생M : 각 RPQ랑 각 RPH의 크기가 같으면 되요..
교사 : 그 두 각의 크기는 같을까?
학생M : 보기에는 같아 보이는데..
교사 : 우리가 이 절단면을 어떻게 만들었더라?
학생M : 모선이랑 평행하게.. 어? 두 각의 크기가 같은 게 맞는 것 같아요.
교사 : 왜?
학생M : 일단 PQ는 모선이에요.. 그래서 각 RPQ는 모선과 원뿔의 회전축이 이루는 각이랑 같아요.
교사 : 그럼 RPH는?
학생M : 선분 PR이 밑면이랑 수직이고 선분 PH는 절단면에 포함되어 있어니까 이것도 모선과 원뿔의 회전축이 이루는 각이랑 같은 것 아니에요?
교사 : 그런 것 같군요. 잘 찾아냈네요. 다른 친구들도 학생M이 한 말 뜻을 이해했나요?
학생들 : 아~ (몇 학생은 고개를 끄덕임)
교사 : 그럼 두 삼각형 PRQ랑 PRH는 합동인 게 맞군요. 이 사실이 우리가 포물선의 정의를 찾아내는데 어떤 도움이 될까?
학생N : 선생님, 아까 화면 돌리다가 봤는데요,, 선분 PQ는 저 구의 접선이에요.
교사 : 와~ 학생N이 중요한 사실을 하나 발견한 것 같은데? 또 다른 접선은 없었나요?
학생N : 음... 잠시만요...(Cabri3D그림을 돌려보며) 선분 PF도 접선인 것 같아요.
교사 : 네. 선분 PQ와 선분 PF는 이 구의 접선이군요. 그럼 어떤

성질이 성립할까?
학생K : 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 접선의 길이가 같으니까... 이게 구에서도 성립하면..
학생M : PQ랑 PF의 길이가 같아요. 그런데 아까 합동 때문에 PQ는 PH랑 길이가 같으니까.. PH도 PF랑 길이가 같겠네요.
<생략>

이 과정에서도 7명의 학생들의 수준이 다양했기 때문에 3~4명 학생들은 연구자가 유도하는 질문에 정확한 답변을 하였지만 나머지 학생들은 바로 대답하지 못하였고, 모둠활동을 통해 서로 토론해 가면서 의견을 주고 받음으로써 대부분의 학생들이 학습내용을 이해할 수 있었다.

포물선의 정의를 발견한 이후 [그림 4], [그림 5]와 같은 환경에서 타원, 쌍곡선의 정의를 발견하는 과정은 상대적으로 포물선에 비해 쉽기 때문에 힌트의 양을 많이 줄일 수 있었다. 비슷한 담화를 통하여 학생들이 스스로 발견할 수 있도록 유도하였고, 학생들은 어렵지 않게 타원, 쌍곡선의 수학적 정의를 발견할 수 있었다.

교사 : 지금까지 포물선, 타원, 쌍곡선의 수학적 정의를 직접 찾아봤습니다. 정리해볼까요? 포물선의 정의는?
학생들 : 점 F까지의 거리와 직선 $l$까지의 거리가 같은 점들의 집합
교사 : 그렇군요. 그럼 타원의 정의는?
학생들 : 두 점 F, $F'$까지의 거리의 합이 일정한 점들의 집합
교사 : 마지막으로, 쌍곡선의 정의는?
학생들 : 두 점 F, $F'$까지의 거리의 차가 일정한 점들의 집합

이러한 과정 후에 이차곡선의 정의에서 꼭 필요한 요소인 초점, 준선, 장축, 단축, 주축 등의 용어도 정리하였다.

라. 1~2차시 : 정리 및 평가(15분)

이렇게 수업을 진행한 후, 교과서(황선욱 외, 2010)의 익힘문제를 활용한 형성평가에서 다음과 같은 문제를 제시하였다.

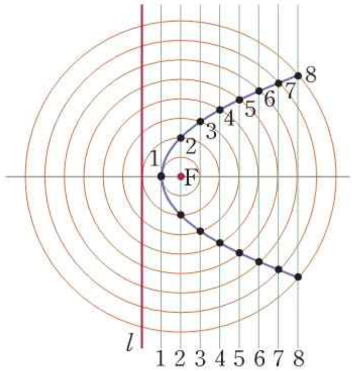
**첫번째. 포물선의 작도**

① 오른쪽 그림과 같이 간격이 일정한 동심원과 평행선을 그리고, 각각에 차례로 번호를 붙인다.

② 1번 원과 1번 직선이 만나는 점, 2번 원과 2번 직선이 만나는 점, 3번 원과 3번 직선이 만나는 점을 표시한다.

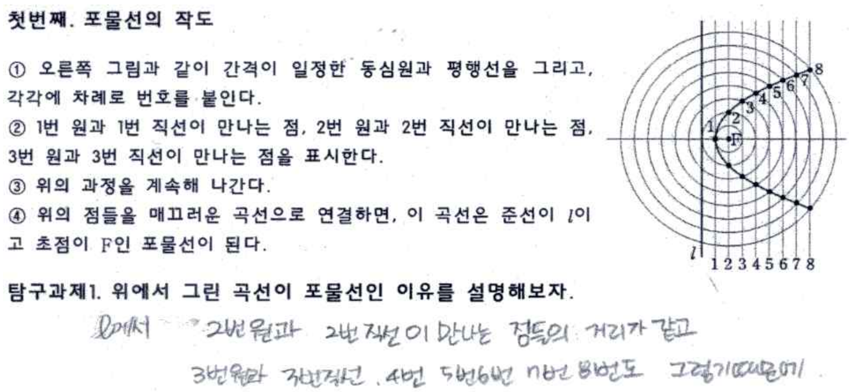
③ 위의 과정을 계속해 나간다.

④ 위의 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면, 이 곡선은 준선이 $l$이고 초점이 F인 포물선이 된다.




**탐구과제1. 위에서 그린 곡선이 포물선인 이유를 설명해보자.**

이 문제를 처음 직면했을 때 학생들은 문제의 의미를 잘 파악하지 못해 혼란스러워하여 예정된 시간보다 더 많은 시간을 주었고, 대부분의 학생들이 그림에서의 동심원과 평행선의 간격이 일정하다는 사실을 인식하고, 주어진 곡선이 포물선인 이유를 찾아냈다. [그림 6]는 학생 M이 작성한 평가지 답안이다.


첫번째. 포물선의 작도

① 오른쪽 그림과 같이 간격이 일정한 동심원과 평행선을 그리고, 각각에 차례로 번호를 붙인다.

② 1번 원과 1번 직선이 만나는 점, 2번 원과 2번 직선이 만나는 점, 3번 원과 3번 직선이 만나는 점을 표시한다.

③ 위의 과정을 계속해 나간다.

④ 위의 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면, 이 곡선은 준선이 $l$이고 초점이 F인 포물선이 된다.

탐구과제1. 위에서 그린 곡선이 포물선인 이유를 설명해보자.

l에서 → 2번원과 2번직선이 만나는 점들의 거리가 같고

3번원과 3번직선 . 4번 5번6번 7번 8번도 그렇기때문에

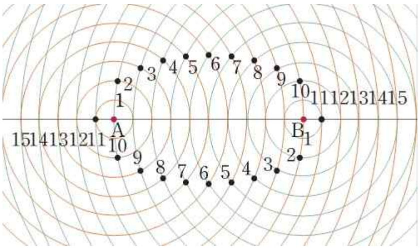
[그림 6] 학생 M의 답안지(포물선)

이 문제를 해결한 이후로는 다른 두 가지 형성평가 문제들은 비슷한 방법으로 해결할 수 있는 문제들이었기 때문에 동심원을 이용한 타원, 쌍곡선의 작도문제에서는 주어진 곡선이 타원, 쌍곡선인 이유를 모두 잘 찾아냈다. [그림 7]과 [그림 8]은 학생 M이 작성한 평가지 답안이다.

**두번째. 타원의 작도**

오른쪽 그림은 동심원을 이용하여 타원을 작도하기 위해 점을 표시한 것이다.

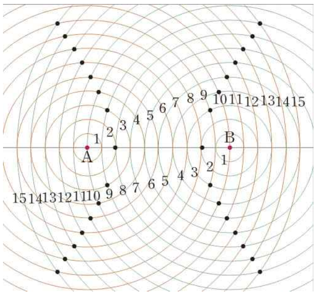
**탐구과제2. 이 그림의 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면 타원이 되는 이유를 설명해보자.**



**세번째. 쌍곡선의 작도**

오른쪽 그림은 동심원을 이용하여 쌍곡선을 작도하기 위해 점을 표시한 것이다.

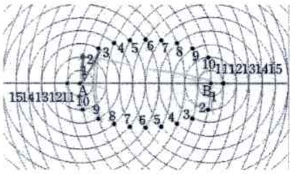
**탐구과제3. 이 그림의 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면 쌍곡선이 되는 이유를 설명해보자.**



**두번째. 타원의 작도**

오른쪽 그림은 동심원을 이용하여 타원을 작도하기 위해 점을 표시한 것이다.

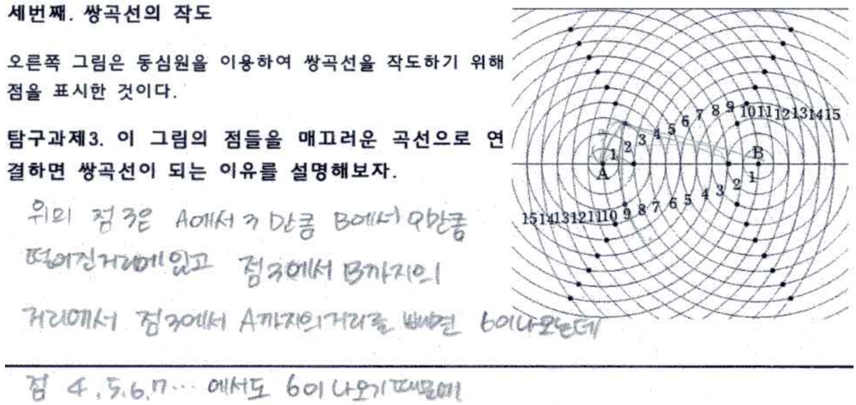
**탐구과제2. 이 그림의 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면 타원이 되는 이유를 설명해보자.**



위의 점2는 점 A에서 2만큼 점 B에서 10만큼 떨어진 거리에 있고 점 A,B에서 점 2까지의 거리의 합은 12이다. A,B에서 점 3까지의 거리의 합도 12이기 때문에

4
5
6
7
⋮

[그림 7] 학생 M의 답안지(타원)



**세번째. 쌍곡선의 작도**

오른쪽 그림은 동심원을 이용하여 쌍곡선을 작도하기 위해 점을 표시한 것이다.

**탐구과제3. 이 그림의 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면 쌍곡선이 되는 이유를 설명해보자.**

위의 점 3은 A에서 3만큼 B에서 9만큼 떨어진거리에있고 점3에서 B까지의 거리에서 점3에서 A까지의거리를 빼면 6이나오는데

점 4,5,6,7… 에서도 6이 나오기때문에



[그림 8] 학생 M의 답안지(쌍곡선)

형성평가를 하는 과정에서 새로이 발견하게 된 사실은 학생들이 주어진 곡선이 어떤 이차곡선인지, 그 이유가 무엇인지를 알고 있기는 하지만 자신이 알고 있는 사실을 문장으로 잘 표현하지 못한다는 것이다. 이는 이 학생들은 수학과 교육과정에서 강조하고 있는 수학적 의사소통 능력이 다소 부족함을 의미하는 것이라 사료된다.

### 2. 이차곡선의 방정식 지도

가. 3~4차시 : 도입(7분)

3~4차시 수업은 1~2차시 수업 이후 1개월의 시간이 지난 후였다. 그래서 학생들이 지난 차시의 학습내용을 잘 기억하지 못할 것으로 생각되어 먼저 이차곡선의 정의를 다시 떠올릴 수 있도록 하였다.

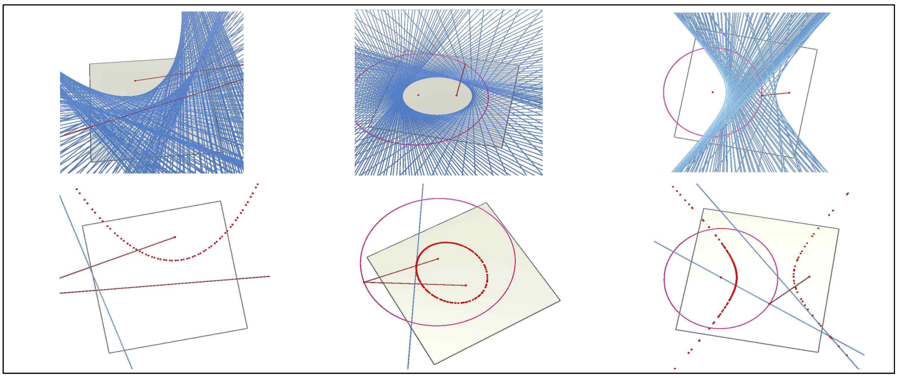
나. 3~4차시 : 전개1(40분)

이차곡선의 정의를 이용하여 평면상에 이차곡선을 작도하는 과정에서는 선분의 수직이등분선의 성질을 이용해야만 한다. 따라서 이차곡선을 작도하는 과정에서 이 성질을 사전에 힌트로 제공하고, Cabri3D를 사용하여 이차곡선을 작도하는 방법을 다음과 같이 토론하였다.

| | |
|---|---|
| 교사 : | 지금부터 포물선을 정의에 맞게 작도해 보겠습니다. 먼저, 포물선의 정의가 뭐였더라? |
| 학생M : | 초점과 준선으로부터의 거리가 같은 점들의 집합이요. |
| 교사 : | 그럼 일단 초점과 준선이 있어야겠네요? 평면에 직선 $l$을 작도하고, 직선 $l$ 밖의 한 점 F를 작도하겠습니다. 그 뒤엔 어떻게 해야할까? |

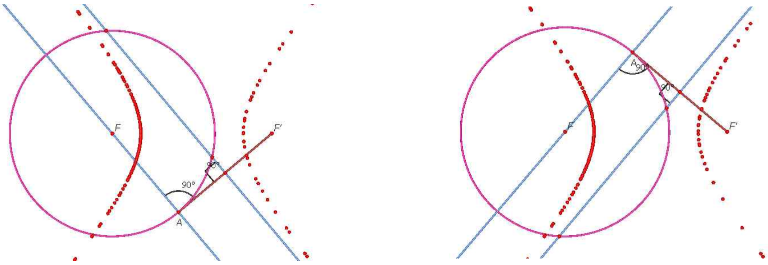
학생N : 포물선 위의 한 점을 작도해야죠~
교사 : 그 점은 어떤 성질을 만족해야할까?
학생N : 직선 $l$과 점 F까지의 거리가 같아야 해요.
교사 : 그런데, 아까 선생님이 힌트로 뭔가 하나 알려줬었는데?
학생H : 선분의 수직이등분선 위의 점은 선분의 양 끝점까지의 거리가 같다고 했어요.
교사 : 그걸 여기에 활용할 수 없을까?
학생M : 아! 포물선 위의 점에서 직선 $l$이랑 점 F까지의 거리가 같아야 하니까..
학생N : 포물선 위의 점이 수직이등분선 위에 있게 하면?
교사 : 어느 선분의 수직이등분선일까요?
학생N : 점 F랑 직선 $l$까지니까..
학생M : 아하!! 직선 $l$위의 한 점이랑 점 F를 이어서 선분을 만들면 되요!

비슷한 과정으로 [그림 9]와 같이 타원, 쌍곡선도 평면상에 작도해 보고, 초점, 준선의 위치를 변화시켜가며 다양한 모습의 이차곡선을 관찰하도록 하였다.



[그림 9] 포물선, 타원, 쌍곡선의 작도

특히 타원과 쌍곡선은 한 초점을 고정해 두고 다른 한 초점의 위치를 변화시키면 타원이 점차적으로 쌍곡선으로 변화하는 모습을 관찰하여 세 이차곡선들이 서로 연관되어 있음을 인식시켰다. 그리고 작도하는 과정에서 만들어지는 선분의 수직이등분선이 이차곡선의 접선임을 간단히 소개하기도 하였다. 특히 쌍곡선을 관찰하는 과정에서는 [그림 10]과 같이 쌍곡선의 점근선이 어떻게 만들어지는지를 살펴보게 하여 쌍곡선은 포물선 두 개가 대칭적으로 놓여있는 것이 아님을 강조하였다. 이러한 과정으로 다양한 이차곡선들을 조작・관찰한 이후 학생들에게는 이차곡선의 개념이미지가 정확하게 확립되고 있다고 판단되었다.




[그림 10] 쌍곡선의 점근선 작도

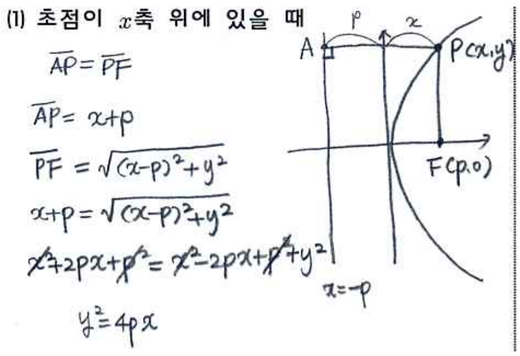
다. 3~4차시 : 전개2(38분)

다양한 이차곡선의 모습을 관찰한 뒤, 이를 방정식으로 나타내는 활동을 하였다. 이차곡선의 방정식을 세울 때에는 교과서에 제시되어 있는 것처럼 초점, 준선의 위치를 조건으로 제시하고, Cabri3D도 사용하여 정의에 맞게 방정식을 유도하도록 하였다.

교사 : 지금부터 포물선의 방정식을 세워보도록 하겠습니다. 포물선의 정의에서 가장 핵심적인 것들은 뭐가 있었죠?

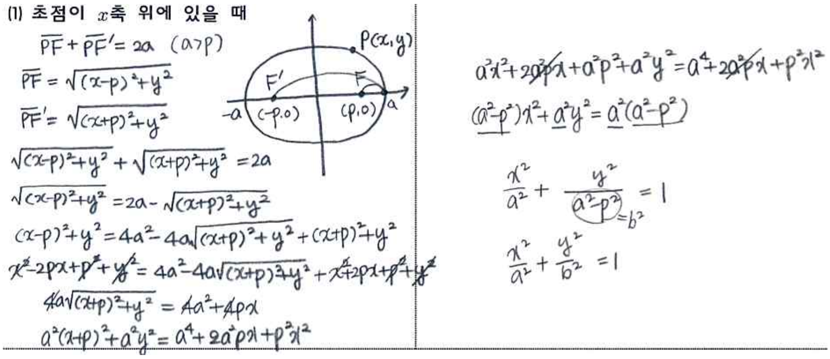
학생N : 초점이랑 준선이요.

교사 : 그래서 초점이랑 준선의 위치를 먼저 정합시다. 일단 가장 간단한 경우로 생각해서 초점이 $x$축 위에 있다고 합시다. 초점을 점 $\mathrm{F}(p, 0)$으로 정하고, 준선은 $x=-p$로 정합시다. 여기서 포물선의 정의를 이용해야겠죠? 지금부터 포물선의 정의를 이용해서 포물선의 방정식을 세워보세요.



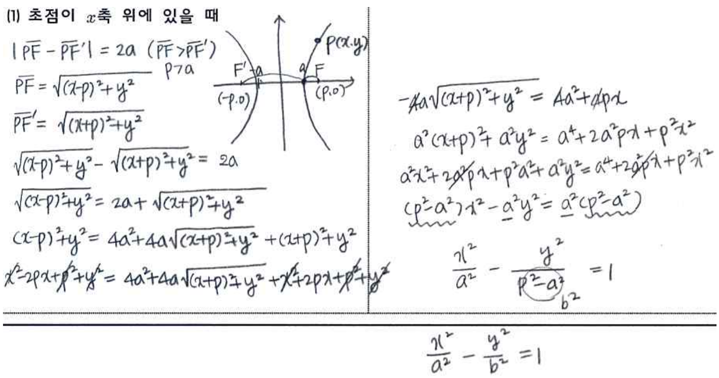

[그림 11] 포물선의 방정식을 유도하는 활동지

타원의 방정식을 세울 때에도 초점의 위치를 $\mathrm{F}(p, 0)$, $\mathrm{F}'(-p, 0)$으로 정하고 타원이 좌표평면에 그려졌을 때 장축의 길이가 타원 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리의 합과 같음을 살펴보게 하여 이를 $2a$로 정한 뒤, 방정식을 세우도록 하였다. 방정식의 유도는 모둠별 활동으로 수행하였고, [그림 11]~[그림 14]는 모둠A의 활동지이다.




[그림 12] 타원의 방정식을 유도하는 활동지

마찬가지 방법으로 쌍곡선의 방정식을 세울 때에도 초점의 위치를 $\mathrm{F}(p, 0)$, $\mathrm{F}'(-p, 0)$으로 정하고, 쌍곡선이 좌표평면에 그려졌을 때 주축의 길이가 쌍곡선 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리의 차와 같음을 살펴보게 하여 이를 $2a$로 정한 뒤 방정식을 세우도록 하였다. 특히 쌍곡선의 경우에는 극한개념을 이용하여 점근선의 방정식도 직접 찾아보게 하였다.




[그림 13] 쌍곡선의 방정식을 유도하는 활동지

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\rightarrow\pm\frac{b}{a}x$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)=1$$

[그림 14] 쌍곡선의 점근선의 방정식을 유도하는 활동지

같은 방법으로 초점 및 장축, 주축이 $y$축 위에 있는 경우에도 방정식을 세우게 하였다. 학생들은 정의를 이미 알고 있었기 때문에 이차곡선의 방정식을 유도하는 과정이 이차곡선의 정의를 증명을 통해 발견하는 것보다 상대적으로 쉽다고 느꼈으며, 어렵지 않게 이차곡선의 방정식을 세울 수 있었다.

라. 3~4차시 : 정리 및 평가(15분)

이차곡선의 방정식을 정리하고 학습한 내용을 확인할 수 있는 형성평가를 실시하였다. 형성평가 문제는 주어진 조건에 맞는 이차곡선의 방정식을 세워 보도록 하거나 아니면 이차곡선의 방정식을 제시한 후 그 방정식이 어떤 곡선의 방정식인지, 초점, 준선 또는 장축, 단축의 길이가 얼마인지를 묻는 유형의 문제였다. 평가 문제는 많은 교과서에 제시되어있는 문제들로서, 학생들은 어렵지 않게 문제를 해결하였다.

이러한 과정으로 이차곡선을 학습을 마친 후 학생들을 대상으로 인터뷰를 하였을 때, 학생들은 이차곡선의 방정식을 세우는 것보다 이차곡선의 정의를 증명을 통해 발견해내는 과정이 상대적으로 더 어렵게 느꼈다고 대답했다. 그러나 그러한 과정이 이차곡선의 성질을 확실하게 이해하는 데에 도움이 되는 것 같다고 대답하였으며, 정의를 발견하는 과정 없이 이차곡선의 정의를 바로 제시한다면 타원과 쌍곡선의 경우에는 정의를 혼동하기 쉬워 보인다는 의견도 있었다. 본 수업과정에서의 학습자의 반응이나 형성평가 결과로부터 미루어볼 때, 본 연구에서 제시한 방식대로 수업을 하는 것이 학습자로 하여금 다소 어려운 과정을 경험하게 할 수는 있으나, 이차곡선의 정의와 대수적 표현에 대한 이해에 효과적이라고 사료된다.

## Ⅴ. 결론

고등학교 교육과정의 이차곡선의 교수·학습 상황에서  단순히 대수적인 접근

과 해석기하적인 접근만을 시도하므로 그 본질적인 기하학적 의미를 파악하지 못하며 기계적인 계산만으로 문제를 풀어나가려 하기 때문에 학생들은 이차곡선을 학습하는 것을 어려워하고 이차곡선의 기하학적 정의뿐만 아니라 대수적 정의에 대한 오개념도 종종 가진다는 지적이 있어왔다. 이러한 문제점을 극복하기 위한 하나의 방안으로서 학생들에게 다양한 작도경험을 제공할 필요성에 많은 사람들이 공감하고 있는 것으로 보인다.

학교 현장에서 다소 어려움이 있더라도 역사-발생적 원리를 기초로 하여 원뿔곡선의 원래의 개념에 맞추어 학생들이 직접 원뿔을 절단하여 원뿔곡선을 관찰하고 이를 평면으로 옮겨와 해석기하적인 개념으로 유도하는 과정을 경험한다면 학습자가 이차곡선의 기하학적 성질을 직관적으로, 그리고 더 나아가 수학적 정의를 이해하는 데 분명히 도움이 될 것으로 사료된다.

본 연구에서는 Freudenthal의 안내된 재발명과 역사-발생적 원리, Dienes의 수학적 다양성의 원리 등의 수학 학습이론을 바탕으로 하여 동적 기하 소프트웨어의 하나인 Cabri3D를 활용하여 학생 스스로 이차곡선의 정의와 대수적 표현을 별견하도록 하는 수업이 이차곡선의 이해에 효과적인가를 알아보는 수업 사례연구를 실시하였으며, 다음과 같은 연구결과를 얻을 수 있었다.

첫째, 이차곡선의 역사적 발달과정을 기초로 동적 기하 소프트웨어를 사용하여 원뿔을 절단하여 원뿔곡선을 관찰하고, 당드랑의 구를 이용하여 원뿔의 단면으로서의 3차원 원뿔곡선을 평면곡선으로의 전환하는 과정을 통하여 원뿔곡선의 성질을 학습자 스스로 발견해 보도록 하는 과정은 이차곡선의 기하학적 정의에 대한 학생들의 이해에 상당히 효과적이다.

둘째, 교사의 적절한 안내를 받으며 동적 기하 소프트웨어를 활용하여 학생들이 직접 이차곡선을 작도하고 다양한 모양을 관찰해 보며, 이차곡선의 방정식을 직접 유도하는 활동이 이차곡선의 대수적 표현의 이해를 높이는 데 도움이 된다.

본 연구에서는 현실적 여건을 고려하여 정규 수업시간 대신 2학년 학생들 7명으로 구성된 수학 동아리활동을 통하여 수업을 실시하였다. 동아리를 두 모둠으로 나누고 교사와 각 모둠별로 컴퓨터가 있는 환경에서 이루어진 수업활동과 그 결과를 분석했으므로 교실수업으로 일반화하기에는 다소 무리가 있지만, 고등학교 교육과정의 이차곡선 단원의 교수・학습을 위하여 시사하는 바는 분명히 있다고 사료된다.

## 참고문헌

[1] 김한・박일영・박용범(2000), 수학 응용소프트웨어를 활용한 효과적인 이차곡선의 지도방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 24,

125-141.
[2] 남호영 외(2005), 원뿔에서 태어난 이차곡선, 수학사랑.
[3] 류희찬 · 제수연(2009), 역동적 기하 환경에서 파푸스의 분석법을 이용한 이차곡선의 작도활동에서 나타난 학생들의 수학적 발견과 정당화, 교원교육 25(4), 168-189.
[4] 이우영 · 신항균(2005), 수학사, 경문사.
[5] 장미라 · 강순자(2010), 역사적 고찰을 통한 이차곡선의 지도방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 24(3), 731-744.
[6] 정정성 · 박종률 · 임재훈(2001), Dienes의 수학 학습원리의 이해와 적용, Journal of Science Education 25, 1-13.
[7] 홍성관 · 박철호(2007), 이차곡선 학습에서 고등학생들의 오개념 분석, 대한수학교육학회지 <학교수학> 9(1), 119-139.
[8] 황선욱 외(2010), 고등학교 기하와 벡터 교사용 지도서, ㈜좋은책신사고.
[9] 황선욱 외(2010), 고등학교 기하와 벡터 익힘책, ㈜좋은책신사고.
[10] 황우형 · 차순규(2002), 탐구형소프트웨어를 사용한 해석기하 지도에 관한 사례연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 41(3), 341-360.
[11] 황혜정 외(2007), 수학교육학신론, 문음사.
[12] Freudenthal, H.(1991), Revisiting mathematics education: China lectures. Cordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.
[13] Borba, M. C. et al(2005), Human-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking, Springer.
[14] NCTM(2000). Principles and Standards for School Mathematics, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Kim, Dong Hwa
Department of Mathematics Education
Pusan National University
Pusan, 609-736 Korea
E-mail address: dhgim@pusan.ac.kr

Han, Eun Ji
Jurye Girl's Highschool
Pusan, 617-833 Korea
E-mail address: vvsunflowervv@hanmail.net