East Asian Mathematical Journal
Vol. 28 (2012), No. 4, pp. 505-532
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2012.037

算學書에서의 입체도형의 堆垜率에 대한 연구

박 영 식 · 최 길 남

ABSTRACT. In this paper, we study to find the sums of finite series with the figurate numbers, which correspond to triangular pyramid and quadrangular pyramid, frustum of triangular pyramid and frustum of quadrangular pyramid, respectively.

Ⅰ. 서론

본 논문에서 입체도형의 퇴타율(堆垜率)은 각뿔과 각뿔대의 각 면에서 각뿔과 각뿔대 모양의 배열을 만드는 점의 수로 이루어진 수열의 급수를 말한다.([5])

『산학정의 상편(算學正義 上編)』의 입체도형의 퇴타율에서 퇴타는 한 면을 평평하게 쌓아 올리고 정사각형이나 원으로 묶은 모양이다. 모두 다 면은 같다. 정사각형은 곧 평방법으로 한다. 그 나머지는 사다리꼴의 넓이를 구하는 법을 사용하여 그 각층에 점차 더해가는 수이다. 원으로 묶은 모양은 6포에 1이고, 정사각형은 8호에 1, 삼각형은 9포에 1이다. 변으로 쌓은 개수를 구하는 것도 있고, 둘레를 쌓은 개수를 구하는 것이 있어 그 이치는 모두 서로 통한다. 층층이 쌓은 것이 입체가 되며 사각형으로 쌓은 것은 사각뿔이 되고, 삼각형으로 쌓는 것은 삼각뿔이 된다. 그 각층의 변은 한 수씩 차례로 더하고 한 면이 삼각형이면 개수는 층수를 살펴 서로 더한 수이고, 사각형이면 층에 놓은 개수는 제곱임을 살펴 서로 더한 수이다. 그 곁은 모두가 울퉁불퉁하여 평평하지 못하므로 입체모양 역시 약간씩 다르다. (堆垜之一面平堆與方圓束形皆與面同方者卽平方法其餘用梯形法以其每層爲遞加之數也束形之圓者六包一方者八包一三角者九包一有邊求積有周求積其理皆相通也至於層屢者爲體之屬而方者爲四角尖堆三角者爲三角尖堆其每層之邊爲遞加一數而面積則三角爲按位相加之數四角爲按位自乘相加之數其傍皆崚層不平故與

2012년 7월 26일 투고, 2012년 8월 24일 심사완료.
2000 Mathematics Subject Classification: 97-03, 01A75
Key words: 수열과 급수, 심괄의 극적술

體亦微異也)

본문에서는 산학서<『산학입문(算學入門) 22권』, 『산학정의 상편(算學正義 上編)』, 『익산 하편(翼算 下編)』, 『묵사집산법 지(默思集算法 地)』, 『양휘산법(楊輝算法)』>에서의 입체도형을 전퇴(全堆)와 반퇴(半堆)를 나누어 전퇴는 삼각타과자(三角垛果子), 사각타과자(四角垛果子), 절적삼각타·절적사각타(截積三角垛·截積四角垛), 그리고 장방퇴(長方堆)를 다루고, 반퇴는 삼각반퇴(三角半堆), 사각반퇴(四角半堆) 그리고 장방반퇴(長房半堆)로 그들의 퇴타율을 수학적 수단에 의해 정리하고 그 정리 수단인 급수를 찾는 활동이 Freudenthal의 수학화이며 이와 같은 例을 보여 줌으로써 학생들의 학습 활동에 도움을 주고자 한다.

Ⅱ. 입체도형의 퇴타율(堆垛率)

1. 전퇴[1](全堆)

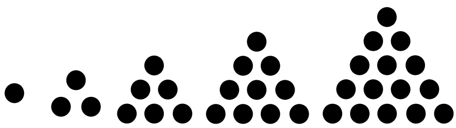
[1] 삼각타과자(三角垛果子)

『산학입문』의 퇴적환원(堆積環源)에서 '삼각타과자는 틈이 있게 정삼각형으로 쌓아올린 삼각뿔이다'라고 하였다. 삼각타과자의 퇴타율은 정삼각뿔의 각면에서 삼각형 모양의 배열을 만드는 점의 수로 이루어진 삼각수열 $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$의 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$로 표현되는 n번째 삼각뿔수를 말한다.([5])

(1) 『산학입문』의 퇴적환원(堆積環源)

「[隙積體垛○等邊三角尖垛]

[義同立方樣而 三面尖頂所胃鋭觚近之 每面皆自下斜殺而上以會于頂]



底一 (底一故一層)

積一 (底一層一尖頂因一因 得積一)

底二 (底二故二層)

積四 (底一層三 尖頂一層 加一倂之得積四○頂一在底三之正中上面也)

底三 (底三故三層)

積十 (底一層六 次上一層加三 尖頂一層加一 倂之得積十)

1) 전퇴(全堆)는 각뿔의 퇴타를 의미한다.

底四 (底四故四層)
積二十 (底一層十 次上一層加六 次上一層加三 尖頂一層加一 併之得積二十)
底五 (底五故五層)
積三十五 (底一層十五 次上一層加十 次上一層加六 次上一層加三 尖頂一層加一 併之得積三十五)
三角果垜也須知 脚底先求幾箇兒 一二添來乘兩遍 六而取一不差池 [三角垜果 置底脚數添一箇乘底脚寄位 又底脚添二箇得數以乘寄位爲實 六歸得積○此三角求積之法雖異啓蒙而 得積之數則同也]
置每面底子數添三 以底子本數乘之 又添二又以本數乘之 六而一得積 [如每面底子二添三得五 以二乘得十 添二得十二 以二乘之得二十四 乃六而一得積四]
還源時 積六之以二爲從方 三爲廉法 一爲隅法 開立方得每面底子 [楊輝算法 三角垜置底面(亦曰底層卽底子)數張三位 本位不加 中加一 下加二 三位相乘六除 底面七箇 本位七不加 中八箇加一 下九箇加二 右三位一闊一長一高」

틈이 있게 입체를 쌓는다. 정삼각뿔로 쌓는다.
뜻은 입체의 모양이지만 세 면에 뾰족한 꼭짓점이 있고, 이른바 예리한 술잔에 가깝다. 면마다 모두 아래에서 비스듬히 올라와 위의 꼭짓점에서 만난다.
밑면의 한 변에 1개 있을 때는(밑이 1이므로 1층이다.)
총 개수는 1이다. (밑이 1이고 층이 1인 꼭짓점이므로 1을 곱하여 총 개수 1을 얻는다.)
밑면의 한 변에 2개 있을 때는 (밑이 2이므로 2층이다.)
총 개수는 4이다. (밑 1층에 3개의 꼭짓점, 1층에 1을 더하여 총 개수 4을 얻는다.

밑면에 한 변에 3개 있을 때 (밑이 3이므로 3층이다.)
총 개수는 10이다. (밑 1층에 6, 다음 윗 1층에 3, 꼭지점 1층의 1을 더하여 총 개수 10을 얻는다.)
밑면의 한 변에 4개 있을 때 (밑이 4이므로 4층이다.)
총 개수는 20이다. (밑 1층에 10, 다음 윗 1층에 6, 그 다음의 윗 1층에 3, 꼭짓점 1층에 1을 더하여 총 개수 20을 얻는다.)
밑면의 한 변에 5개 있을 때 (밑이 5이므로 5층이다.)
총 개수는 35이다. (밑 1층에 15, 다음 윗 1층에 10, 그 다음 윗 1층에 6, 그 다음 윗 1층에 3, 꼭지점 1층에 1을 더하여 총 개수 35를 얻는다.)
삼각과타를 반드시 알려면 아랫바닥의 개수가 몇 개인지를 먼저 찾아서 1을 더해서 곱한 것과 2를 더해서 곱한 것을 6으로 나누면 틀림이 없다.(삼각타과는 아랫바닥의 한 변에 있는 개수에 1을 더하고 아랫바닥의 한 변에 있는 개수를 곱

하여 놓아둔다. 또 아랫바닥의 한 변에 있는 개수에 2를 더하여 얻은 수를 놓아둔 개수에 곱하여 나뉨수로 하고 6으로 나누면 총 개수를 얻는다. 이 삼각구적의 방법은 비록『산학계몽』과는 다르나 얻은 총 개수는 같다.)

각 면의 바닥의 한 변에 있는 개수에 3을 더하고 바닥의 한 변에 있는 개수를 곱한다. 또 2를 더하고, 또 바닥의 한 변에 있는 개수를 곱하여 6으로 나누어 총 개수를 얻는다.(가령 각 바닥의 한 변에 있는 개수가 2이면 3을 더하여 5를 얻고 2를 곱하여 10을 얻는다. 또 2를 더하여 12를 얻어 2를 곱하여 24를 얻고 6으로 나누어 총 개수 4를 얻는다.)

환원할 때는 총 개수 6을 곱하고 2를 종방, 3을 염법, 1을 우법으로 한 삼차방정식을 풀면 각 바닥의 한 변에 있는 개수를 얻는다.

『양휘산법』에서 삼각타는 바닥면(또는 바닥층, 즉 바닥의 한 변에 있는 개수를 말한다)의 개수를 세 자리 본위, 중위, 하위로 늘어 놓는다. 본위(층수)는 더하지 않고, 중위에 1을 더하며 하위에 2를 더하여 얻은 세자리 수를 서로 곱하여 6으로 나눈다. 바닥면의 한 변에 있는 개수가 7이면 본위 7에는 더하지 않고, 중위 8은 1을 더한 것이며 하위 9는 2를 더하였다. 이 세자리 수를 하나는 너비, 하나는 길이, 그리고 하나는 높이다.)

(분석) 아랫바닥의 한 변에 있는 개수를 n, 삼각타의 총 개수를 S_n이라 하자.

① $S_n = 1 + (1+2) + (1+2+3) + \cdots + (1+2+3+\cdots+n) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

② ①에서 n은 본위수, $(n+1)$은 중위수 그리고 $(n+2)$는 하위수이고, 환원하여 n을 구하려면 3차방정식 $n^3 + 3n^2 + 2n = 6S_n$을 풀면 된다. 여기서 1은 3차 계수로 우법(隅法), 3은 2차 계수로 염법(廉法) 그리고 2는 1차 계수로 종방(從方)이다.([2])

③『양휘산법』의 승제통변본말(乘除通變本末)에서는 삼각타의 총 개수 $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{n(n+1)}{2} \times (n+2)$를 밑면의 너비 n, 길이 $(n+1)$인 삼각형으로 높이가 $(n+2)$로 이루어진 삼각뿔의 부피로 간주하였다. 즉 삼각구적의 방법이다. 元의 주세걸(朱世傑, 916~1125)의 『산학계몽(算學啓蒙)』에서는 총 개수를 $\dfrac{\{n(n+3)+2\} \times n}{6}$으로 표현하고 있으나 S_n과는 동치이다.

(2)『산학정의(상)』의 퇴타율(堆垜率)

「今有三角垜果子底面每邊四十四箇問積幾何

答曰一萬五千一百八十箇

法置底邊又以底邊添一乘之得數再以底邊添二乘之得九萬一千八十箇爲實以六爲法除之得積
(三角尖體底面卽三角平堆故添一乘之二歸得面積也兩三角面之合成方面也有方差一箇則三尖體之合成立體也必有高差二箇故再以底邊添二乘之三歸得尖體也今所得爲立方體故以二與三相因得六爲法除之也)
又法以一箇爲上邊添一以上邊乘之得二下邊添一以下邊乘之得一千九百八十以上邊添一以下邊乘之得八十八三數相倂得數以下邊爲層數乘之得九萬一千八十箇六歸得積
(此法底面三角平堆法體積當用尖體法而上邊實有一箇故用方臺法也)」

삼각타과자의 밑면의 각 변에 44개가 있다. 모두 몇 개인가?
답 : 15180개.

해법 : 밑변의 개수와 밑변의 개수에 1을 더하고 곱하여 수를 얻고, 다시 밑변의 개수에 2를 더하여 곱하면, 91080개를 얻어 나뉨수로 하고 6을 나눗수로 하여 나누면 총 개수를 얻는다.(삼각뿔의 밑면은, 즉 삼각평퇴이므로 밑면의 한 변의 개수에 1을 더하고 한 변의 개수를 곱하여 2로 나누면, 면에 있는 개수를 얻는다. 두 개의 삼각면을 합치면 사각면을 이룬다. 변(가로, 세로)에 있는 개수의 차가 1개이므로 3개의 삼각뿔이 합쳐 입체(삼각기둥)가 이루어지고 반드시 높이는 한 변의 개수와의 차가 2개이므로 여기에 밑변의 개수에 2를 더하여 밑변의 개수를 곱하고 3으로 나누면, 삼각뿔에 있는 개수를 얻는다. 지금 얻는 입체는 육면체이므로 2와 3을 서로 곱하여 6을얻어 나눗수로 하여 나눈다.)

별해 : 1개를 윗변으로 하고 1개를 더하여 곱하면 2를 얻고, 밑변에 1개를 더하여 곱하면 1980을 얻는다. 윗변에 1을 더하여 밑변을 곱하면 88을 얻어 이 세수를 서로 더하여 수를 얻는다. 밑변을 층수로 하여 곱하면 91080개를 얻고 6으로 나누면 총 개수를 얻는다.(이 법은 밑면에는 삼각평퇴법을 사용하고 체적은 첨체법을 사용하여 윗변이 실제로 1개 있으므로 방대<사각뿔대>법을 사용한다.)

(분석) 밑면의 한 변에 있는 개수를 n이라 하면, 밑면의 개수는 삼각평퇴법에 의해 $\dfrac{n(n+1)}{2}$이다. 이 한 변에 있는 개수가 n인 두 삼각형을 합치면 한 변의 개수 n, 다른 한 변의 개수가 $(n+1)$인 직사각형이 되고, 또 한 변이 $(n+1)$개인 두 삼각형을 합치면 한 변이 $(n+1)$개, 다른 한 변이 $(n+2)$개인 직사각형이 되

어 이것을 높이로 하는 면으로 본다. 즉 직육면체가 된다. 이것을 2로 나누면 삼각기둥<참도체(塹堵體)>이 되고 삼각기둥은 삼각뿔<별노체(鼈臑體)>의 3배이다. 따라서 첨체(삼각뿔)의 총 개수는 첨체법의 의해

(직육면체의 부피)$\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=$(삼각뿔의 부피)가 되므로

$$(\text{삼각뿔의 총 개수}) = n(n+1)(n+2)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

이다.

해법 : $n=44$일 경우, $(\text{삼각타과자의 총 개수}) = \frac{44(44+1)(44+2)}{6} = 15180.$

별해 : 방대(사각뿔대)법을 사용한다. 즉 방대의 윗변의 길이를 a, 너비를 b, 그리고 밑변의 길이를 c, 너비를 d 그리고 높이를 h라 하면 추동법에 의해 얻어지는 부피 V는, 즉 $V=\frac{h}{6}\{(2b+d)a+(2d+b)c\}$이다.

삼각타과자의 밑면은 삼각평퇴법으로 하고 사각뿔대법에 의해 삼각타과자의 쌓은 총 개수 S_n을 구한다. 즉,

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n^2+3n+2)}{6} = \frac{n}{6}\{(1+1)\times 1 + n(n+1) + (1+1)n\}$$

이므로

$$\begin{aligned} S_{44} &= \frac{44}{6}\{(1+1)\times 1 + 44\times(44+1) + (1+1)\times 44\} \\ &= \frac{44}{6}(2+1980+88) \\ &= \frac{91080}{6} \\ &= 15180 \end{aligned}$$

(3)『익산(하)』의 퇴타설(堆垜說)

「三角垜積或稱茭草落一積 卽層累茭草積之共數也
其底邊卽冣大茭草底邊而六稜俱等 其形爲三角尖體
然冣上一箇亦占實數 故以一箇爲上闊添一爲上長
以底邊爲下闊添一爲下長乃以上長倍之加入下長以上闊乘之得數
又以下長倍之加入上長以下闊乘之得數 又以上下長相減 得數
乃倂三位 以下闊爲高乘之如十二而一得積
此御三角臺體法而層累之積 異於塹堵等體之溱合
故更加上下邊之較 卽沈存中之創獲者也

<上下邊各加一爲長者 底面爲茭草積 故用其法也>
其積亦爲以反錐差乘各層底邊之共數也
<反錐差乘者[2]以挨次遞加之各數 從末位起一乘之也
盖三角垜積旣爲茭草積之層累 而茭草積
又爲底邊之層累 故如第三位三角垜積 卽第一第二第三位茭草積之共數
而第一位茭草積 卽第一位底邊 第二位茭草積 卽第一第二位底邊之共數
第三位茭草積卽第一第二第三位底邊之共數 卽合爲第一位底邊三倍
第二位底邊二倍第三位底邊一倍凡以反錐差乘者皆倣此>
又法以茭草積爲實 以底邊加二乘之三歸得積[3]」

삼각타적 또는 교초낙일적이라 부른다. 즉 교초적을 층으로 쌓은 것의 합이다. 그 밑변은, 즉 가장 큰 교초를 밑변으로 한 6개 모서리가 모두 같은 것으로 그 모양은 삼각뿔이다. 그러나 윗면에 1개가 놓여있어 역시 실수 자리를 차지하므로 1개를 윗면의 너비로 하고, 1개를 더하여 윗면의 길이로 하며 밑변을 아랫면의 너비로 하고, 1개를 더한 것을 아랫면의 길이로 한다. 이에 윗면의 길이를 2배하여 아랫면의 길이에 더하고 윗면의 너비를 곱하면 수를 얻는다. 또 아랫면의 길이를 2배하여 윗면의 길이에 더하고 아랫면의 너비를 곱하여 수 <$[\{2(n+1)+2\}\times 2]\times n$>을 얻는다. 또, 위·아랫면의 길이를 서로 빼어 수 <$(n+1)-2$>를 얻고 이에 세수<$(n+5)$, $n(2n+4)$, $(n-1)$>을 더하고 아랫면의 너비를 높이로 하여 곱하고, 12로 나누면 총 개수

$$\left\langle \frac{n\{(n+5)+12n^2+4n+(n-1)\}}{12}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right\rangle$$을 얻는다.

이는 삼각뿔대의 부피계산법을 따른 것이고, 참도 등의 부피계산과는 다르므로 위·아랫변의 차를 다시 더한다. 이는 곧 심존중(심괄)이 처음으로 밝힌 것이다.

---

2) $S_n^0=\sum_{k=}^{n}1=n,\ S_n^1=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ 그리고

$S_n^2=\sum_{k=1}^{n}S_k^1=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 라고 하면 S_n^1 은 교초적이고

$S_n^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+n)=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)k$이므로

$S_n^2=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)S_k^0$을 반추차승(反錐差乘)이라 한다. 또 추차(또는 포차(抛差))는 수열 a_1, a_2, $\cdots$, a_n에 차례로 1, 2, $\cdots$, n을 곱한다. 이상혁은 『익산(하)』에서 추차는 층수를 곱하는 것으로 대치하고 있다.

3) $S_n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n+2}{3}=S_n^1\times\frac{n+2}{3}$

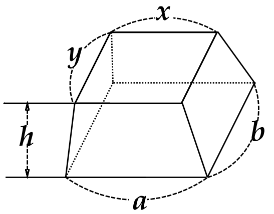
<위·아랫변 각각에 1을 더하여 길이로 하는 것은 밑면이 교초적이므로 그 방법을 쓰는 것이다. 그 합(積) 역시 각 층의 밑변에 반추차를 곱하여 더한 수이다. <반추차를 곱한다는 것은 마지막 자리에 1을 곱한 것에 따라 각 수를 차례로 더해가면서 곱하는 것이다. 삼각타적은 이미 교초적을 층으로 쌓아 놓은 것이고 교초적 또한 밑면을 층으로 쌓아 놓은 것이므로 예컨대, 제3자리까지의 삼각타적은, 즉 제1, 제2, 제3자리까지의 교초적의 합이 되어, 제1자리까지의 교초적은, 즉 제1자리의 밑변, 제2자리까지의 교초적은, 즉 제1, 제2자리까지의 밑변의 합, 제3자리까지의 밑변의 합이 되어, 곧 이들의 합은 제1자리의 밑변의 3배, 제2자리의 밑변의 2배, 제3자리의 밑변의 1배의 합이 된다. 무릇 반추차를 곱한다는 것이 모두 이와 마찬가지이다.>

또, 법으로 교초적과 밑변에 2를 더한 것을 서로 곱하여 나눔수로 하여 3으로 나누면 총 개수를 얻는다.

(분석) ① 삼각과일타의 각 면 밑바닥의 한 변에 n개가 있을 때, 밑바닥에 있는 개수를 a_n, 쌓은 개수의 총합을 S_n이라하면 다음과 같다.

k	1	2	3	4	5	$\cdots$	n	$\cdots$
a_k	1	3	6	10	15	$\cdots$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\cdots$
S_k	1	4	10	20	35	$\cdots$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$	$\cdots$

②『구장술해(九章術解)』 권5의 상공(商功)에서 추동(芻童)은 사각뿔대로 그 부피를 다음과 같이 서술하고 있다.



사각뿔대의 윗면의 길이 x, 너비 y, 아랫변의 길이 a, 너비 b, 높이 h 그리고 사각뿔대의 부피를 V라 하면, V는 xyh, (4개의 참도체의 부피)와 (4개의 양마체의 부피)의 합이므로

$V=\frac{h}{6}\{(2x+a)y+(2a+x)b\}$이다.([6])

이 추동의 부피공식을 북송의 심괄(沈括, 1031~1095)은 『몽계필담(夢溪筆談)』 제18권에서 '쌓아 놓은 바둑돌이나 층을 나누어 쌓아 올린 흙단(壇) 혹은 주점에 쌓아 올린 술단지와 같은 류'와 같이 '비어있는 퇴적체'를 말하는 극적(隙積)의 전체 개수(S) 또는 부피를 구하는 방법을 제시했다.([10])

$$S = \frac{h}{6}\{(2x+a)y+(2a+x)b\} + \frac{h}{6}(b-y)$$
$$= \frac{h}{6}\{(2x+a)y+(2a+x)b+(b-y)\} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (\ast)$$

따라서 밑변의 한 변에 n개 놓여 있는 삼각타의 총 개수 S_n은 $a=n$, $b=n+1$, $x=1$ 그리고 $y=2$와 $h=n$인 경우로 한 모서리가 1인 정육면체를 쌓아 만든 것을 생각하면 윗공식($\ast$)로부터 얻은 값 S는 그 입체의 부피이면서 또한 쌓아올린 정육면체의 개수를 말한다. 이 때 $2S$는 부병(缶瓶)이 너비를 따라 n개, 길이를 따라 $n+1$개가 놓여있는 부병일타(缶瓶一垜)와 같으므로

$$2S = \frac{n}{6}\{(2+n)\times 2+(2n+1)(n+1)+(n-1)\} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

이다. 따라서 $S = S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 이다.

『산학계몽』에는 삼각과일타(三角果一垜)를 삼각타과자(三角垜果子) 또는 간단히 삼각타라고 부른다.

[2] 사각타과자(四角垜果子)

『산학입문』의 퇴적환원(堆積環源)에서 ‘사각타과자는 틈이 있게 정사각형으로 쌓아올린 사각뿔이다’라고 하였다. 사각타과자의 퇴타율은 정사각뿔의 각 면에서 사각형 모양의 배열을 만드는 점의 수로 이루어진 사각수열 $\{n^2\}$의 급수

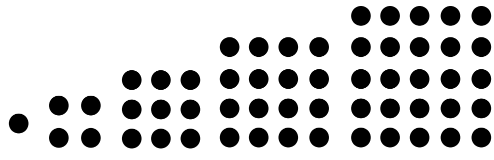
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

로 표현되는 n번째 사각뿔수를 말한다.([5])

(1)『산학입문』의 퇴적환원(堆積環源)

[隙積體垜○等邊四角尖堆]

[義同立方樣而四面尖頂所謂銳觚近之每面皆自下斜殺而上以會于頂]



「底一 [底一故一層] 積一[底一層一尖頂因得積一]

底二[底二故二層] 積五[底一層四尖頂一層加一併之得積五]

底三[底三故三層] 積十四[底一層九次上一層加四尖頂一層加一併之得積十四]

底四[底四故四層] 積三十[底一層十六 次上一層加九 次上一層加四尖頂一層加一

併之得積三十]

底五[底五故五層] 積五十五[底一層二十五 次上一層加十六次上一層加九次上一層加四尖頂一層加一併之得積五十五]

要知四角盤中果[4]添一仍添半箇隨乘此數來以爲實如三而一去除之

[四角垜果置底脚添一箇乘底脚寄位又底脚添半箇以乘寄位爲實三歸得積○又術置底脚添半箇乘底脚寄爲又底角添一箇以乘寄位爲實三歸得積○此四角求積之法雖異啓蒙而得積之數則同也]

置每面底子數添一箇半以底子本數乘之又添半箇又以本數乘之三而一得積

[如每面底子二添一箇半得三箇半以二乘得七箇又添半箇得七箇半以二乘得十五箇三而一得積五]

還原時積三之以半箇爲從方一箇半爲從廉一爲隅法開立方得每面底子隙積也[楊輝算法四隅垜置底層數張三位上不加中加半下加一三位相乘三除○三角四角垜果子此法據啓蒙別有一法見詳明及默齊集然而得積之數則皆異也詳明以下幷出楊輝算法]」

[틈있게 입체를 쌓는다. 정사각형을 뾰족하게 쌓는 것이다.]

[뜻은 입체로 4면이 뾰족한 꼭지점을 가지며 이른바 예리한 술잔과 가깝다. 각면은 모두가 아래에서 비스듬히 올라와서 위의 꼭지점에서 만난다.]

밑1 [밑바닥의 한변에 있는 개수가 1이므로 1층이다.]

총수1 [밑바닥 1층은 1개의 꼭지점으로 층수는 1이다.]

밑2 [밑바닥의 한 변에 있는 개수가 2이므로 2층이다.]

총수5 [밑바닥 1층에 4개가 있고 꼭대기 1층의 1개를 더하면 총수 5를 얻는다.]

밑3 [밑바닥의 한 변에 있는 개수가 3이므로 3층이다.]

총수 14 [밑바닥 1층에 9개, 다음 위 1층에 4개, 꼭대기 1층에 1개가 있어 더하면 총수 14개를 얻는다.]

밑4 [밑바닥의 한변에 있는 개수가 4이므로 4층이다.]

총수30 [밑바닥 1층에 16개, 다음 위 1층에 9개, 그 다음 위 1층에 4개, 꼭대기 1층에 1개가 있어 더하면 총수 30개를 얻는다.]

밑5 [밑바닥의 한 변에 있는 개수가 5이므로 5층이다.]

총수55 [밑바닥 1층에 25개, 다음 위 1층에 16개, 그 다음 위 1층에 9개, 그 다음 위 1층에 4개, 꼭대기 1층에 1개가 있어 더하면 총수 55개를 얻는다.]

사각타과의 총 개수를 알려면 (밑바닥의 한 변에 있는) 개수에 1을 더하고 다시 반개를 더하여 연이어 이들 수를 곱하여 나뉨수로 하고 3으로 나누면 된다.

4) 四角盤中果는 사각타과를 뜻한다.

[사각타과에서 밑바닥의 한 변에 있는 개수에 1개를 첨가하고 밑바닥의 한 변에 있는 개수에 곱하여 옆에 놓고, 또 밑바닥의 한 변에 있는 개수에 반개를 첨가하고 옆에 놓아둔 개수를 곱하여 나뉨수로 하고 3으로 나누면 총수를 얻는다.

또, 별해는 밑바닥의 한 변에 있는 개수에 반개를 더하여 밑바닥의 한 변에 있는 개수와 곱하여 옆에 놓는다. 또 밑바닥의 한 변에 있는 개수에 1개를 더하여 옆에 놓아둔 개수를 곱하고 나뉨수로 하여 3으로 나누면 총수를 얻는다. 이 사각구적의 방법은 비록 『산학계몽』에 있는 방법과는 다르지만 구한 총수는 같다.]

각 밑바닥의 한 변에 있는 개수에 1개 반을 더하여 밑바닥의 한 변에 있는 본수를 곱하고, 또 반 개를 더하여 다시 본수를 곱하고 3으로 나누면 총수를 얻는다.

[가령, 각 밑바닥의 한 변에 있는 개수가 2이면, 1개 반을 첨가하여 3개 반을 얻고 2를 곱하여 7개를 얻는다. 또 반개를 첨가하여 7개 반을 얻고 2를 곱하면 15를 얻어 3으로 나누면 총수 5를 얻는다.]

환원할 때는 총수를 3배하고 반개를 종방, 1개 반을 종렴, 1을 우법으로 하는 3차 방정식을 풀면, 각 밑바닥의 한 변에 있는 개수를 얻는다.

[『양휘산법』의 사우타에서 밑바닥층의 한 변에 있는 개수를 세자리로 늘여 윗자리에는 더하지 않으며 가운데 자리에 반 개, 아랫자리에 1개를 더하고 세 자리에 있는 개수를 서로 곱하여 3으로 나눈다.

삼각·사각타과자의 이 풀이법은 『산학계몽』에 의한 것이다. 별도로 한 풀이법은 『상명산법』과 『묵제집』에도 보인다. 그러나 얻은 총수는 모두 같다. 『상명산법』이하는 모두 『양휘산법』에서 나왔다.]

(분석) 밑바닥층의 한 변에 있는 개수를 n, 사각타과자의 총개수를 S_n이라하자.

① 해법 : $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})}{3}$ …… (사각구적법)

또는 $S_n = \dfrac{(n+1)n(n+\frac{1}{2})}{3}$

별해 : $S_n = \dfrac{(n+\frac{1}{2})n(n+1)}{3}$

산학계몽에서 $S_n = \dfrac{\left\{(n+\frac{3}{2})n+\frac{1}{2}\right\}n}{3}$, 양휘산법 및 상명산법에서는

$S_n = \dfrac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}$ 로 표현하고 있다.

② 환원하여 n을 구하려면 3차 방정식 $3S = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$을 푼다. 여기서 $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, 1을 각각 종방, 종렴 그리고 우법이라 한다. 3차 방정식 $x^3 + ax^2 + bx = c$에서 a를 염법(廉法), b를 방법(方法) 그리고 c를 실(實)이라고도 한다.([2])

(2)『묵사집 산법(지)』의 퇴타개적문(堆垜開積門)

「今有 四角果一垜[5]每面底脚二十八箇問積幾何
答曰 七千七百一十四箇
法曰置底脚添一箇半以底脚乘之得八百二十六又添半箇
得八百二十六箇半又以底脚乘之得二萬三千一百四十二爲寀
以三爲法寀如法而一得合問
又曰置底脚添一箇以底脚乘之得八百一十二又列底脚
添半得二十八箇半以此乘八百一十二得二萬三千一百四十二
却以三歸之亦合問
按此假令底脚二則積爲五底脚三則積爲十四
底脚四則積爲三十底脚五則積爲五十五餘倣此」

사각과일타의 각 면의 밑바닥 한 변에 28개가 있다. 모두 몇 개인가?

답 : 7714개

해법 : 밑바닥 한 변의 개수에 1개 반을 첨가하고 밑 바닥 한 변의 개수를 곱하면 826을 얻는다. 또 반 개를 첨가하여 826개 반을 얻고 또 밑바닥 한 변의 개수를 곱하면 23142를 얻어 포라 한다. 3을 나눗수로 하여 포를 나누면 물음에 합당한 답을 얻는다.

별해 : 밑바닥 한 변의 개수에 1개를 첨가하고 밑바닥 한변의 개수를 곱하고 812를 얻고, 또 밑바닥 한 변의 개수에 반개를 첨가하여 28개 반을 얻고 이것으로 812를 곱하면 23142를 얻어 3으로 나누면 역시 물음에 합당하다.

이를 살펴보면, 밑바닥 한 변의 개수가 2이면 모두 5, 밑바닥 한 변의 개수가 3이면 모두 14, 밑바닥 한 변의 개수가 4이면 모두 30 그리고 밑바닥 한 변의 개

5) 사각과일타(또는 사각타)는 1, 4, 9, $\cdots$, n^2의 사각수 개수의 정사각형을 차례로 쌓아 놓은 것이다.

수가 5이면 모두 55개로 나머지는 이와 비슷하다.

(분석) ① 사각과일타(四角果一垜)를 『산학계몽』에서는 ‘사각타과자(四角垜果子)’라 부르고, 간단히‘사각타’라고도 한다.
② 사각과일타에서 각 면의 밑바닥 한 변에 n개가 있을 경우, 그 밑바닥에 놓여 있는 개수를 a_n, 쌓아 놓은 총 개수를 S_n이라 하면 다음과 같다.

k	1	2	3	4	5	$\cdots$	n
a_k	1	4	9	16	25	$\cdots$	n^2
S_k	1	5	14	30	55	$\cdots$	$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ 1의 (3)의 분석 ②에서 $x=y=1$과 $a=b=n$을 극적술의 공식에 대입하면,

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{6}\{(2+n)+(2n+1)n\}+\frac{n}{6}(n-1) \\
&= \frac{n}{6}(2n^2+3n+1) \\
&= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)
\end{aligned}
$$

④ 해법 : $\left\{(28+\frac{3}{2})\times 28+\frac{1}{2}\right\}\times 28\times\frac{1}{3}=7714$(개)

별해 : $(28+1)\times 28\times(28+\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}=7714$(개)

(3)『산학정의(상)』의 퇴타율(堆垜率)

「今有四角垜果子底面每邊三十五箇問積若干

答曰一萬四千九百十箇

法置底邊又以底邊添半箇乘之得數再以底邊添一乘之得四萬四千七百三十箇爲實以三爲法除之得積

(四角尖體底面卽平方堆故諸率皆用三角添體之半也)

又法以一箇爲上邊自乘得一下邊自乘得一千二百二十五上下邊相乘得三十五三數相併又加上下邊之

半較十七箇得數以下邊爲層數乘之得四萬四千七百三十箇爲實三歸得積

(此法因上邊實有一箇用方臺法而其層累之積此尖體積多三角平堆積一段其邊卽上下邊之較也今體積

當用三歸而平堆法當二歸故更加半較以爲三歸之地也)」

사각타과자의 밑면의 각 변에 35개가 있다. 모두 몇 개인가?

답 : 14910개

해법 : 밑면의 각 변에 있는 개수에 반 개를 더하고 밑면의 변에 있는 개수를 곱하면 수를 얻는다. 다시 밑면의 변에 있는 개수에 1을 더하여 곱하면 44730개를 얻어 나뉨수로 하고 3을나눗수로 하여 나누면 총 개수를 얻는다.(사각뿔의 밑면, 즉 평방퇴이므로 모든 풀이는 모두 다 삼각뿔이 반이 되는 것을 이용한다.)

별해 : 1개를 윗면의 한 변의 개수로 하여 제곱하면 1을 얻고, 밑면의 한 변에 있는 개수를 제곱하면 1225를 얻어 위와 밑의 면의 각 한 변에 있는 개수를 서로 곱하여 35를 얻는다. 얻은 세수를 서로 더한다. 또 위와 밑면의 각 한 변에 있는 개수의 반의 차를 더하여 17개를 얻고 밑면의 한 변에 있는 개수를 층수로 하여 곱하면 44730개를 얻어 나뉨수로 하고 3으로 나누면 총 개수를 얻는다.(이 풀이는 윗변에 실수1개가 있게 함으로써 사각뿔대법을 사용하여 층으로 쌓은 개수는 뿔의 개수보다 삼각평퇴의 개수 1단이 많다. 그 변은, 즉 위와 밑면의 각 한 변에 있는 개수의 차이다. 지금 입체의 개수는 마땅히 3으로 나누고 평퇴법은 마땅히 2로 나누므로 여기에 위와 밑면의 각 한 변에 있는 개수의 반의 차를 더하여 3으로 나누는 것이다.)

(분석) 해법 : 밑면의 한 변에 있는 개수를 n, 사각타과자의 총 개수를 S_n이라 하면, $S_n = \dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)n(n+1)}{3} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이다.

따라서 $S_{35} = \dfrac{\left(35+\frac{1}{2}\right)\times 35\times(35+1)}{3} = \dfrac{44730}{3} = 14910$

별해 : 1의 (3)의 분석 ②에서 윗면의 한 변에 1개, 밑면의 한 변에 n개가 놓여 있을 때, n층으로 쌓는 사각타과자의 총 개수 S_n은 극적술에 의해

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{6}\{(2+n)\times 1+(2n+1)\times n\}+\frac{n}{6}(n-1) \\ &= \frac{n}{3}\left\{1^2+\frac{2\times n}{2}+n^2\right\}+\frac{n}{6}(n-1) \\ &= \frac{n}{3}\left\{1^2+(1\times n)+n^2+\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$
\begin{aligned}
S_{35} &= 35\left\{1^2+(1\times 35)+35^2+\left(\frac{35}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\}\\
&= \frac{35(1+35+1225+17)}{3}\\
&= \frac{44730}{3}\\
&= 14910
\end{aligned}
$$

(4)『익산(하)』의 퇴타설(堆垜說)

이상혁은 사각타적 해법도 역시 윗면의 한 변에 있는 개수 1, 밑바닥의 한 변에 있는 개수 n, 그리고 총 개수 S_n에서 $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, 극적술에 의해 $S_n=\frac{n\{(2\times 1+n)\times 1+(2n+1)\times n+(n-1)\}}{6}$, 그리고

$S_n=\frac{2n+1}{3}\times$(교초적)으로 나타내고 있다. 다음은 급수의 부분합인 절적(截積)을 분적법(分積法)과 계차수열을 이용한 3차법(三差法)으로 구하는 것을 보인다.

「求截積者亦用方臺體法<亦加上下邊較>
或用分積法置本位四角垜積上邊倍之內減二
以乘本位茭草積上層面積
<爲第一層正方面積凡四角諸積之稱四積者皆正方面積也>
加一內減倍邊以乘本位底邊相併從之
或用三差法以第一層面積爲上差第二層面積內減上差爲中差
第三層面積內減二中差及一上差爲下差
乃以本位底邊乘上差以前位茭草積乘中差
以前前位三角垜積乘下差併之得逐層
正方面積之共數也」

절적사각타적을 구하는 것 역시 사각뿔대의 부피를 구하는 법을 사용한다.<또한 위·아랫변의 차를 더하여야 한다.> 또는 분적법을 사용하는데 본위사각타적은 윗면의 한 변에 있는 개수의 2배에서 2를 빼고 본위교초적을 곱한 것과 윗층면적<제1층 정사각형의면적이다. 대개 사각의 모든 적(積)의 면적은 모두 정사각형의 면적이다.>에 1을 더하여 2배한 변을 빼고 밑바닥의 한 변에 있는 개수를 곱한 것을 서로 더하면 절적사각타적이 된다.

혹은 삼차법을 사용한다. 제1층 면적을 상차, 제2층 면적에서 상차를 뺀 것을 중차, 제3층 면적에서 2배 중차와 1배의 상차를 뺀 것을 하차라 하고, 이에 본위

밑바닥에 상차를 곱하고 윗층수 교초적에 중차, 위 윗층수 삼각타적에 하차를 곱하여 더하면 차례로 쌓은 정사각형의 면적의 합의 수(사각타적)를 얻는다.

(분석) ① 분적법으로 절적사각타적

$$S_n = \sum_{k=m}^{m+n-1} k^2 = m^2 + (m+1)^2 + \cdots + (m+n-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (m+k-1)^2 \text{에서}$$

$$S_n - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} \{(m+k-1)^2 - k^2\} = (m-1)^2 n + (2m-2)\sum_{k=1}^{n} k \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2(m-1)\sum_{k=1}^{n} k + (m-1)\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= (\text{본위사각타적}) + 2(m-1) \times (\text{본위교초적}) + (m-1)^2 n \end{aligned}$$

이다.

② 삼차법은 절적사각타적을 상차, 중차, 하차를 이용하여 구하는 방법이다.

上差 $= m^2$(1층 면적), 中差 $=$ (2층 면적) $-$ 上差 $= (m+1)^2 - m^2 = 2m+1$

下差 $=$ (3층 면적) $-$ (中差의 두배 $+$ 上差) $= (m+2)^2 - 2(2m+1) - m^2 = 2$

로부터 절적사각타적 S_n은, 즉

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=m}^{m+n-1} k^2 &= (\text{본위 밑바닥의 변에 있는 개수}) \times (\text{상차}) \\ &+ (\text{전위교초적}) \times (\text{중차}) + (\text{전전위삼각타적}) \times (\text{하차}) \end{aligned}$$

임을 다음과 같이 보이자. 일반적으로 제 $(r-1)$계차수열이 등차수열을 이루는 수열 a_1, a_2, $\cdots$, a_n에서 제1계차 수열의 초항 d_1, 제2계차 수열의 초항 d_2, $\cdots$, 제r계차 수열의 초항을 d_r이라 하면,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + {}_{(n-1)}C_1 d_1 + {}_{(n-1)}C_2 d_2 + \cdots + {}_{(n-1)}C_r d_r \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{r} {}_{(n-1)}C_k d_k \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{r} \binom{n-1}{k} d_k \end{aligned}$$

이다. 또 $S_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$라하면, 수열 S_1, S_2, $\cdots$, $S_n\left(= \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$의 제1 계차수열은 a_2, a_3, $\cdots$, a_n이 된다. 제1계차 수열이 a_2, a_3, $\cdots$, a_n이므로 제2 계차수열로부터 제r계차 수열의 초항은 모두 원래 수열 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n의 계차수열의 두 번째 항 d_k^2가 된다. (단, d_k^2는 d_k의 다음항) 예컨대, $n=6$, $r=4$일 때 제3계차수열은 등차수열이 되므로 제4계수열은 상수수열이다. 따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= a_1 + (a_1 + d_1) + (a_2 + d_1^2) + (a_2 + d_1^2 + d_1^3) \\ &\quad + (a_2 + d_1^2 + d_1^3 + d_1^4) + (a_2 + d_1^2 + d_1^3 + d_1^4 + d_1^5) \\ &= a_1 + a_2 + (4a_2 + 4d_2^2) + d_1^3 + (d_1^3 + d_1^4) + (d_1^3 + d_1^4 + d_1^5) \\ &= a_1 + 5a_1 + 4d_1^2 + (d_1^2 + d_2^2) + (d_1^2 + d_2^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_2^3) + (d_1^2 + d_2^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_2^3 + d_2^4) \\ &= a_1 + 5a_2 + 10d_1^2 + 6d_2^2 + 3d_2^3 + d_2^4 \\ &= a_1 + 5a_2 + 10d_1^2 + 6d_2^2 + \left\{3(d_2^2 + d_3^2) + (d_2^2 + d_3^2 + d_3^3)\right\} \\ &= a_1 + 5a_2 + 10d_1^2 + 10d_2^2 + 4d_3^2 + d_3^3 \\ &= a_1 + 5a_2 + 10d_1^2 + 10d_2^2 + 4d_3^2 + (d_3^2 + d_4) \\ &= a_1 + 5a_2 + 10d_1^2 + 10d_2^2 + 5d_3^2 + d_4 \\ &= a_1 + \binom{5}{1}a_2 + \binom{5}{2}d_1^2 + \binom{5}{3}d_2^2 + \binom{5}{4}d_3^2 + \binom{5}{5}d_4 \\ &= a_1 + \binom{5}{1}a_2 + \sum_{k=2}^{5}\binom{5}{k}d_{k-1}^2\end{aligned}$$

일반적으로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= a_1 + \binom{n-1}{1}a_2 + \sum_{k=2}^{r+1}\binom{n-1}{k}d_{k-1}^2 \\ &= a_1 + (n-1)(a_1 + d_1) + \left\{\binom{n-1}{2}d_1^2 + \binom{n-1}{3}d_2^2 + \cdots + \binom{n-1}{r+1}d_r^2\right\} \\ &= a_1 + (n-1)a_1 + \binom{n-1}{1}d_1 \\ &\quad + \left\{\binom{n-1}{2}(d_1 + d_2) + \binom{n-1}{3}(d_2 + d_3) + \cdots + \binom{n-1}{r+1}(d_r + d_{r+1})\right\} \\ &= na_1 + \left\{\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right\}d_1 \\ &\quad + \left\{\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3}\right\}d_2 + \cdots + \left\{\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r+1}\right\}d_r \\ &= \binom{n}{1}a_1 + \binom{n}{2}d_1 + \binom{n}{3}d_2 + \cdots + \binom{n}{r+1}d_r\end{aligned}$$

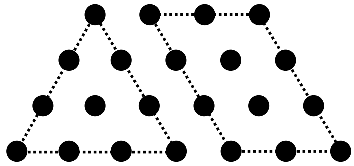
$$\therefore \sum_{k=1}^{n} = aa_1 + \sum_{k=2}^{r+1}\binom{n}{k}d_{k-1} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\ast\ast)$$

따라서 $a_k = k^2$, $(k = m,\ m+1,\ \cdots,\ m+n-1)$, 중차 d_1 그리고 하차 d_2를 $(\ast\ast)$에 대입하면, 절적사각타적

$$\begin{aligned}S_n = \sum_{k=m}^{m+n-1} k^2 &= na_m + \binom{n}{2}d_1 + \binom{n}{3}d_2 \\ &= nm^2 + \frac{n(n-1)}{2}(2m+1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times 2\end{aligned}$$

를 얻는다.

④절적사각타적의 해법과 같은 방법으로 절적삼각타적 $S_n\left(\sum_{k=m}^{m+n-1} k\right)$를 다음과 같이 구할 수 있다. 절적삼각타의 아랫변의 한변에 n개, 윗면이 한 변에 m개 놓여 있을 경우



(i) 삼차법은 상차 $\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)$, 중차$(m+1)$ 그리고 하차(1)을 이용하여 구하는 방법이다. 즉

$$S_n=\sum_{k=m}^{m+n-1}\frac{k(k+1)}{2}=n\frac{m(m+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}(m+1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\times 1$$

(ii) 분적법은 절적삼각타를 그림과 같이 사다리꼴로 나타내고 이를 삼각형과 평행사변형으로 나누어 그 합을 계산하는 방법이다. 상층의 개수는 $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{m(m+1)}{2}$이고 하층의 개수는

$$\sum_{k=1}^{m+n-1} k=\frac{(m+n-1)(m+n)}{2}$$ 이다.

$S_k^1=\frac{k(k+1)}{2}$이라 하자. 절적삼각타적 S_n, 즉

$$\begin{aligned}S_n=\sum_{k=m}^{m+n-1} S_k^1 &=(1+2+\cdots+m) \\ &+\{1+2+\cdots+m+(m+1)\}+\cdots+\{1+2+\cdots+(m+n-1)\},\end{aligned}$$

이다. 한편

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} S_k^1 &= \frac{1(1+1)}{2}+\frac{2(2+1)}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2} \\ &= 1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+n)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}S_n-\sum_{k=1}^{n} S_k^1 &= (2+3+\cdots+m)+\{3+4+\cdots(m+1)\} \\ &\quad+\cdots+\{(n+1)+(n+2)+\cdots+(m+n-1)\} \\ &= \left\{\frac{(m-1)m}{2}+(2-1)(m-1)\right\}+\left\{\frac{(m-1)m}{2}+(3-1)(m-1)\right\} \\ &\quad+\cdots+\left\{\frac{(m-1)m}{2}+n(m-1)\right\} \\ &= n\cdot\frac{(m-1)m}{2}+(m-1)(1+2+\cdots+n) \\ &= n\sum_{k=1}^{m-1} k+(m-1)\sum_{k=1}^{n} k=(m-1)S_n^1+n(S_m^1-m)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{m+n-1} S_k^1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} S_k^1 + (m-1)S_n^1 + n(S_m^1 - m) \\ &= (\text{본위삼각타적}) + (m-1) \times (\text{본위교초적}) + \frac{(m-1)m}{2} n \end{aligned}$$

[3] 장방퇴(長方堆)

(1)『산학정의(상)』의 퇴타율(堆垜率)

「今有長方堆底邊長十八箇闊十二箇問積幾何

答曰一千一百十八箇

法以長闊較六箇折半又加半箇得三箇半以加長得二十一箇半以闊乘之再以闊加一得十三乘之得三千三百五十四箇爲實三歸得積

(長方堆卽底闊所成之四角尖堆及底闊爲邊長闊較爲厚之三角平堆共積而長闊高連乘後尖堆當三歸而得平堆當二歸而得故四角堆應加之率6)外更加半較爲長令平堆積添半倍然後同用三歸也)

又法以長闊相減加一得七爲上長以一爲上闊乃以上長闊相乘得七又以下長闊相乘得二百十六又以上長乘下闊上闊下長相倂折半得五十一三數倂之又加上下長之半較五箇半得數以下闊爲層數乘之得三千三百五十四箇爲實三歸得積

(此法用長堤法7)御之而加半較之義同前問又法)」

장방퇴의 밑변 길이에 18개 너비에 12개가 있다. 모두 몇 개인가?

답 : 1118 개

해법 : 길이와 너비의 개수의 차 6개를 반으로 하고, 또 반 개를 더하면 3개 반을 얻는다. 길이를 더하여 21개 반을 얻어 너비로 곱하고, 다시 너비에 1을 더하여 13을 얻어 곱하면 3354개를 얻어 나뉨수로 하여 3으로 나누면 총 개수를 얻는다.(장방퇴 곧 밑면의 길이와 너비로 이루어진 사각첨퇴와 밑면의 길이와 너비를 변으로 하여 길이와 너비의 차를 두께로 하는 삼각평퇴와 함께 쌓은 것으로 길이, 너비, 높이를 연이어 곱한 후, 첨퇴는 마땅히 3으로 나누어 얻고, 평퇴는 마땅히 2로 나누어 얻으므로 사각퇴는 가지율(加之率)로 구하고 그 밖에 다시

---

6) 가지율(加之率)은 장방퇴의 밑면 길이에 l개 , 너비에 m개를 놓았을 때, $\frac{1}{3}lm(m+1)$ 과 같은 계산법을 말한다.

7) 장제법(長堤法)은 부등장방체의 부피를 구하는 법이다.

길이와 너비의 차의 반을 더하여 길이로 하고 평퇴적이 되게 하여 반 배한 후에 3으로 나눈다.)

별해 : 길이와 너비를 서로 빼서 1을 더하여 7을 얻어 윗면의 길이로 하고 1를 윗면의 너비로 하여 이에 윗면의 길이와 너비를 서로 곱하여 7을 얻고, 또 밑면의 길이와 너비를 서로 곱하여 216을 얻는다. 또 윗면의 길이를 밑면의 너비에 곱하고 윗면의 너비와 밑면의 길이를 서로 곱하여 서로 더하고 반으로 하면 51을 얻어 이 세 수를 더한다. 또 위와 밑면의 길이의 반의 차 5개 반을 더하여 얻은 수에 밑면의 너비를 층수로 하여 곱하면 3354개를 얻어 나눔수로 하고 3으로 나누면 총 개수를 얻는다.(이 풀이법은 장제법이라 하고 반의 차를 더하는 의미는 앞의 물음에 대한 풀이와 같다.)

(분석) 『산학입문(이수신편 제22권)』 퇴적환원(堆積環源)의 부병퇴타(缶瓶堆垛)에서 "대개 한 면으로 쌓은 것을 퇴(堆)라 하고 전체를 쌓은 것을 타(垛)라고 하며 퇴타의 총 개수를 적(積)이라 하여 항상 통용된다. 여기서는 장방반퇴(長方半堆)이다. 대개 뾰족한 꼭대기가 없으면 모두 반퇴라고 한다.(凡一面曰堆 全體曰垛而堆垛之積或亦通稱此乃長方半堆也凡無尖頂者皆雲半堆)"

여기서 장방퇴는 부병퇴타와 같다.

장방퇴의 밑면의 길이에 a개, 너비에 b개를 놓고, m층까지의 총 개수를 S_m이라 하면 다음과 같다. 여기서 층수 m은 너비에 있는 개수를 말한다.

a	1	3	5	7	$\cdots$	l	$\cdots$
b	1	2	3	4	$\cdots$	m	$\cdots$
S_m	1	8	26	60	$\cdots$	$\frac{1}{3}\left(\frac{l-m}{2}+\frac{1}{2}+l\right)m(m+1)$	$\cdots$

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1\\
S_2 &= (3\times 2)+(2\times 1)=8\\
S_3 &= (5\times 3)+(4\times 2)+(3\times 1)=26\\
S_4 &= (7\times 4)+(6\times 3)+(5\times 2)+(4\times 1)=60\\
\vdots\ & \quad \vdots\\
S_m &= (l\times m)+(l-1)(m-1)+(l-2)(m-2)+\cdots+(l-m+1)\times 1
\end{aligned}$$

여기서 $(l-m+1)$은 윗면의 길이에 놓인 개수이고 1은 너비에 놓인 개수이다. 즉,

$$
\begin{aligned}
S_m =\ & (l-m+m)m+(l-m+m-1)(m-1) \\
& +(l-m+m-2)(m-2)+\cdots+(l-m+1)\times 1+\{(l-m)\times 1+1^2\} \\
=\ & \{(l-m)m+m^2\}+\{(l-m)(m-1)+(m-1)^2\}+\cdots+\{(l-m)\times 1+1^2\} \\
=\ & (l-m)\{m+(m-1)+\cdots+1\}+\{m^2+(m-1)^2+\cdots+1^2\} \\
=\ & (l-m)\frac{m(m+1)}{2}+\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \\
=\ & m(m+1)\left(\frac{l-m}{2}+\frac{2m+1}{6}\right) \\
=\ & \frac{m(m+1)}{3}\left\{(l-m)+\frac{l-m}{2}+m+\frac{1}{2}\right\} \\
=\ & \frac{1}{3}\left(\frac{l-m}{2}+\frac{1}{2}+l\right)m(m+1) \\
=\ & \frac{1}{3}lm(m+1)+\frac{1}{3}\left(\frac{l-m}{2}+\frac{1}{2}\right)m(m+1)
\end{aligned}
$$

여기서 $\frac{1}{3}lm(m+1)$은 사각퇴의 가지율이고 $\frac{1}{3}\left(\frac{l-m}{2}+\frac{1}{2}\right)m(m+1)$은 삼각평퇴적이다.

해법 : 12층까지의 장방퇴의 총 개수 S_{12}는 즉,

$$
\begin{aligned}
S_{12} =\ & \frac{1}{3}\left(\frac{18-12}{2}+\frac{1}{2}+18\right)\times 12\times(12+1) \\
=\ & \frac{1}{3}\left(21+\frac{1}{2}\right)\times 12\times 13 \\
=\ & 1118
\end{aligned}
$$

별해 :

$$
\begin{aligned}
S_m =\ & \frac{1}{3}\left(\frac{l-m}{2}+\frac{1}{2}+l\right)m(m+1) \\
=\ & \frac{m}{3}\left\{\frac{(l-m)(m+1)}{2}+\frac{m+1}{2}+l(m+1)\right\} \\
=\ & \frac{m}{3}\left\{\frac{(l-m+1)m+l}{2}+lm+(l-m+1)+\frac{m-1}{2}\right\} \\
=\ & \frac{m}{3}\left[\left\{(l-m+1)\times 1+lm+\frac{(l-m+1)m+(l\times 1)}{2}\right\}+\left(\frac{l}{2}-\frac{l-m+1}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

여기서 $\frac{m}{3}\left\{(l-m+1)\times 1+lm+\frac{(l-m+1)m+(l\times 1)}{2}\right\}$은 장제법(부등장방체의 부피계산법)에 의해 윗면의 길이가 $(l-m+1)$, 너비가 1이고, 밑면의 길이가 l, 너비와 높이가 각각 m인 부등장방체의 부피를 나타내고, $\left(\frac{l}{2}-\frac{l-m+1}{2}\right)$은 위와 밑면의 길이의 반차를 나타낸다. 따라서

$$S_{12} = \frac{12}{3}\left[\left\{(7\times 1)+(18\times 12)+\frac{(18-12+1)\times 12+(1\times 18)}{2}\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{18-(18-12+1)}{2}\right]$$
$$= \frac{12}{3}\left(7+216+51+\frac{11}{2}\right) = 279.5\times 4$$
$$= 1118$$

2. 반퇴[8)](半堆)

[1] 삼각반퇴(三角半堆)

『산학정의(상)』의 퇴타율(堆垜率)

「今有三角半堆底邊五十五箇上邊二十七箇問積若干

答曰二萬五千九百八十四箇

法先以底邊求得尖堆又以上邊減一求得上虛尖堆相減得積

又法上邊加一以上邊乘之得七百五寸[9)]六下邊加一以下邊乘之得三千八十上邊加一以下邊乘之得一千五百四十三數相併得數乃以上下邊相減加一得層數二十九以乘之得十五萬五千九百四箇爲實六歸得積」

삼각반퇴의 밑변에 55개, 윗변에 27개가 있다. 모두 몇 개인가?

답 : 25984개

해법 : 먼저 밑변으로 첨퇴를 구하고, 또 윗변에서 1을 뺀 윗변에 개수 없는 첨퇴를 구하여 서로 빼면 총 개수를 얻는다.
별해 : 윗변에 1을 더하여 윗변을 곱하면 756을 얻고, 밑변에 1을 더하여 밑변을 곱하면 3080을 얻고, 윗변에 1을 더하여 밑변을 곱하면 1543을 얻어 이 세 수를 서로 더하여 수를 얻는다. 이에 위와 밑변을 서로 빼고 1을 더하여 층수 29를 얻어 곱하면 155904개를 얻어 나뉨수로 하여 6으로 나누면 총 개수를 얻는다.

(분석) 삼각타과자의 계산법을 이용한다. 밑변에 놓인 개수 n을 층수로 하면, 삼각타과자의 총 개수 $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 이다. 삼각반퇴의 총 개수 S는 S_n을 이용한다. 즉, 삼각반퇴의 밑변에 n개, 윗변에 m개가 놓여 있을 때,

$$S = S_n - S_{m-1} = \frac{1}{6}\{n(n+1)(n+2)-(m-1)m(m+1)\}$$

8) 반퇴(半堆)는 각뿔대의 퇴타를 의미한다.
9) '寸'字는 '十'의 오자이다.

이다.

해법 : $S = \frac{1}{6}(55\times 56\times 57 - 26\times 27\times 28)$

$= \frac{155904}{6}$

$= 25984$

별해 : $S = \frac{1}{6}\{n(n+1)(n+2) - (m-1)m(m+1)\}$

$= \frac{1}{6}\{m(m+1) + n(n+1) + n(m+1)\}(n-m+1)$

로부터 $S = \frac{1}{6}\{27\times(27+1) + 55\times(55+1) + 55\times(27+1)\}\times(55-27+1)$

$= \frac{1}{6}(756+3080+1540)\times 29$

$= \frac{1}{6}\times 5376\times 29$

$= \frac{1}{6}\times 155904$

$= 25984$

[2] 사각반퇴(四角半堆)

『산학정의(상)』의 퇴타율(堆垜率)

「今有四角半堆底邊四十四箇上邊二十五箇問積若干

答曰二萬四千四百七十箇

法先以底邊求得尖堆又以上邊減一求得上虛尖堆相減得積又法上邊自乘得六百二十五下邊自乘得一千九百三十六上下邊相乘得一千一百三數相倂又加上下邊之半較九箇半得數乃以上下邊相減加一得層數二十以乘之得七萬三千四百十箇爲實三歸得積」

사각반퇴의 밑변에 44개, 윗변에 25개가 있다. 모두 몇 개인가?

답 : 24470개

해법 : 먼저 밑변으로 첨퇴를 구하고, 또 윗변에서 1을 뺀 윗변의 개수가 없는 첨퇴를 구하여 서로 빼면 총 개수를 얻는다.

별해 : 윗변을 제곱하여 625를 얻고 밑변을 제곱하여 1936을 얻는다. 위와 밑변을 서로 곱하여 1100을 얻어 이 세 수를 서로 더하고, 또 위와 밑변의 반의 차 9개 반을 더하여 수를 얻는다. 이에 위와 밑변을 서로 빼고 1을 더하여 층수 25를 얻어 곱하면 73410개를 얻어 나뉨수로 하여 3으로 나누면 총 개수를 얻는다.

(분석) 사각타적을 이용한다. 밑변에 놓인 개수 n을 층수로 하면 사각타과자의 총 개수 S_n는, 즉 $S_n = \frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$이다. 사각반퇴의 밑변에 n개, 윗변에 m개 놓여 있을 때 사각반퇴의 총 개수 S는 즉,

$$S = S_n - S_{m-1} = \frac{1}{3}\left\{n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) - (m-1)m\left(m-\frac{1}{2}\right)\right\}$$이다.

해법 : $S = \frac{1}{3}\left\{44\times(44+1)\times\left(44+\frac{1}{2}\right) - (25-1)\times 25\times\left(25-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$= \frac{1}{3}(88110-14700)$

$= \frac{1}{3}\times 73410$

$= 24470$

별해 : $S = \frac{1}{3}\left\{n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) - (m-1)m\left(m-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$= \frac{1}{3}\left(m^2+n^2+mn+\frac{n-m}{2}\right)(n-m+1)$

이다. 따라서 $S = \frac{1}{3}\left(25^2+44^2+25\times 44+\frac{44-25}{2}\right)\times(44-25+1)$

$= \frac{1}{3}(625+1936+1100+9.5)\times 20$

$= \frac{1}{3}\times 73410$

$= 24470$

[3] 장방반퇴(長房半堆)

『산학정의(상)』의 퇴타율(堆垜率)

「今有長方半堆底長十二箇闊十箇上長八箇闊六箇問積幾何

答曰四百十箇

法以底長闊先求得長方全堆又以上長闊各減一求得上虛長方堆相減得積

又法以上長闊相乘得四十八又以下長闊相乘得一百二十又以上長乘下闊上闊乘下長相併折半得七十六三數併之又加上下長之半較二箇得數乃以上下長相減加一得層數五以乘之得一千二百三十箇爲實三歸得積」

장방반퇴의 밑면의 길이에 12개, 너비에 10개가 있고 윗변이 길이에 8개, 너비에 6개 있다. 모두 몇 개인가?

답 : 410개

해법 : 밑면의 길이와 너비로 먼저 장방전퇴를 구하고 또 윗면의 길이와 너비에서 각각 1을 뺀 윗면에 개수가 없는 장방퇴를 구하여 서로 빼면 총 개수를 얻는다.
별해 : 윗면의 길이와 너비를 서로 곱하여 48을 얻고, 또 밑면의 길이와 너비를 서로 곱하여 120을 얻는다. 또 윗면의 길이와 밑면의 너비를 곱하고 윗면의 너비와 밑면의 길이를 곱하고 서로 더하여 반으로 하면 76을 얻어 이 세 수를 더하고, 또 위와 밑면의 길이의 반의 차 2개를 더하면 수를 얻는다. 이에 위와 밑면의 길이를 서로 빼고 1을 더하여 층수 5를 얻고 곱하면 1230개를 얻어 나뉨수로 하여 3으로 나누면 총 개수를 얻는다.

(분석) 장방퇴의 계산법을 이용한다. 밑면의 길이와 너비로 한 장방전퇴의 총 개수 S_1을 구하고 윗면의 길이와 너비에 각각 1을 뺀 윗면에 개수가 없는 장방퇴의 총 개수 S_2를 빼면 장방반퇴의 총 개수 S를 구한다. 장방반퇴의 밑면 길이에 l개, 너비에 m개 그리고 윗면의 길이에 a개, 너비에 b개를 놓았을 때,

$$S_1 = \frac{m}{3}\left\{\frac{(l-m)(m+1)}{2}+\frac{m+1}{2}+l(m+1)\right\}$$

이고

$$\begin{aligned}S_2 = \frac{(b-1)}{3}\Bigg[&\{(a-1)-(b-1)+1\}\times 1+(a-1)(b-1)\\&+\frac{\{(a-1)-(b-1)+1\}(b-1)+(a-1)\times 1}{2}\\&+\left\{\frac{a-1}{2}-\frac{(a-1)-(b-1)+1}{2}\right\}\Bigg]\end{aligned}$$

이다.

해법 : $$\begin{aligned}S_1 &= \frac{10}{3}\left\{\frac{(12-10)\times(10+1)}{2}+\frac{10+1}{2}+12\times(10+1)\right\}\\&= \frac{10}{3}\left(\frac{22}{2}+\frac{11}{2}+132\right)\\&= 495\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_2 = \frac{6-1}{3}\Bigg[&\{(8-1)-(6-1)+1\}\times 1+(8-1)(6-1)\\&+\frac{\{((8-1)-(6-1)+1\}\times(6-1)+(8-1)\times 1}{2}\\&+\frac{(8-1)-\{((8-1)-(6-1)+1\}}{2}\Bigg]\\= \frac{5}{3}&\left(3+35+\frac{22}{2}+\frac{4}{2}\right)\\= 85&\end{aligned}$$

따라서 $S = S_1 - S_2 = 495 - 85 = 410$

별해 : 장방반퇴의 총 개수 S를 극적술에 의해 구한다. 여기서 층수 n은 $(l-a+1)$이다. 따라서

$$\begin{aligned} S &= \frac{n}{6}\{(2b+m)a+(2m+b)l\}+\frac{n}{6}(l-a) \\ &= \frac{n}{3}\left(ab+lm+\frac{am+bl}{2}+\frac{l-a}{2}\right) \\ &= \frac{l-a+1}{3}\left(ab+lm+\frac{am+bl}{2}+\frac{l-a}{2}\right) \end{aligned}$$

그러므로
$$\begin{aligned} S &= \frac{(12-8+1)}{3}\left\{8\times 6+12\times 10+\frac{(8\times 10)+(6\times 12)}{2}+\frac{12-8}{2}\right\} \\ &= \frac{5}{3}\left\{48+120+\frac{80+72}{2}+2\right\} \\ &= \frac{5}{3}\times 246 \\ &= 410 \end{aligned}$$

Ⅲ. 결론

입체도형의 퇴타율은 Freudenthal의 수학화의 좋은 例이다. 수학화는 수학적 수단에 의해 현상을 정리하고 조직하는 활동이며 현실상황이든 수학적 상황이든 그 현상가운데 정리 수단인 본질을 찾는 활동 즉, 현상에 질서를 부여하는 활동을 의미한다. 현상과 본질은 절대적인 것이 아닌 상대적인 것으로 현상이 본질로 조직되고 나면, 그 본질은 다시 현상이 되어 새로운 본질로 조직되는 과정이 반복된다.([5]) 따라서 입체도형의 퇴타율을 현상과 본질로 다음과 같이 나타낸다.

현상(입체도형)	본질(유한급수와 수열)
삼각타과자	삼각타적 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
절적삼각타	절적삼각타적 1) 분적법 $S_n=\sum_{k=m}^{m+n-1}\frac{k(k+1)}{2}$ $=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}+(m-1)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}n$ = (본위삼각타적) + (윗변에서 1을 뺀 것) × (본위교초적) + (윗층면적에서 1을 뺀 것) × (본위 밑변)

	2)삼차법 $S_n = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{k(k+1)}{2}$ $= n\frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}(m+1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \times 1$ = (본위밑바닥의 변에 있는 개수)×(상차) +(전위교초적)×(중차)+(전전위 삼각타적)×(하차)
사각타과자	사각타적 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
절적사각타	절적사각타적 1)분적법 $S_n = \sum_{k=m}^{m+n-1} k^2$ $= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2(m-1)\sum_{k=1}^{n} k + (m-1)^2 \sum_{k=1}^{n} 1$ = (본위사각타적)+2×(윗변에서 1을 뺀 것) ×(본위교초적)+(윗층면적)×(본위밑변) 2)삼차법 $S_n = \sum_{k=m}^{m+n-1} k^2$ $= nm^2 + \frac{n(n-1)}{2}(2m+1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times 2$ = (본위 밑바닥의 변에 있는 개수)×(상차) +(전위교초적)×(중차)+(전전위삼각타적)×(하차)
장방퇴	밑변의 길이에 있는 개수 l, 너비에 있는 개수 m, m층까지의 장방퇴의 총개수 S_m에서 $S_m = \frac{1}{3}lm(m+1) + \frac{1}{3}\left(\frac{l-m}{2} + \frac{1}{2}\right)m(m+1)$ = (사각퇴의 가지율)+(삼각평퇴적)
삼각반퇴	n은 밑면의 한 변에 있는 개수, S_n은 삼각타적 그리고 S는 삼각반퇴의 총개수이면, $S = S_n - S_{m-1} = \frac{1}{6}\{n(n+1)(n+2) - (m-1)m(m+1)\}$
사각반퇴	n은 밑면의 한 변에 개수, S_n은 사각타적 그리고 S는 사각반퇴의 총 개수이면, $S = S_n - S_{m-1} = \frac{1}{3}\left\{n(n+1)(n+\frac{1}{2}) - (m-1)m(m-\frac{1}{2})\right\}$

장방반퇴	밑면의 길이에 있는 개수 l, 너비에 있는 개수 m이고 윗면의 길이에 있는 개수 a, 너비에 있는 개수 b 그리고 장방반퇴의 총개수 S이면, $S=\frac{l-a+1}{3}\left(ab+lm+\frac{am+bl}{2}+\frac{l-a}{2}\right)$

참고문헌

[1] 묵사집산법 지(默思集算法 地), 경선징 저, 유인영·허민 역, 교우사, 2006.
[2] 중국 수학사, 김용운·김용국 저, 민음사, 1996.
[3] 산학정의 상(算學正義 上), 남병길 저, 한국과학시술사자료대계(수학편7), 여강출판사, 1985.
[4] 도형수, 박교식 저, 경문사, 2004.
[5] 각뿔과 각뿔대의 부피에 대한 산학서(『算學正義(上編)』, 『九章術解』)와 한국 중국 수학 교과서와의 내용 비교 연구, 박영식·최길남, East Asian Mathematical Journal, Vol.26, No.4, 2010.
[6] 산학정의(상-6)에 관한 연구, 박영식·최길남, 울산대학교 자연과학논문집 제21권, 1·2통합호, 2012.
[7] 양휘산법(楊輝算法), 양휘 저, 차종천 역, 교우사, 2006.
[8] 익산 하편(翼算 下編), 이상혁 저, 홍성사 역, 교우사, 2006.
[9] 몽계필담(夢溪筆談) 제18권, 심괄 저, 최병규 역, 범우사, 2002.
[10] 산학입문(算學入門) 22권, 황윤석 저, 강신원·정혜원 역, 교우사, 2006.

Park Young Sik
Department of Mathematics
University of Ulsan
Ulsan 680-749, Korea
E-mail address: yspark@mail.ulsan.ac.kr

Choi Kil Nam
Department of Mathematics
University of Ulsan
Ulsan 680-749, Korea
E-mail address: knchoi@mail.ulsan.ac.kr