대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 22 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 22, No. 3, 311 ~ 329. Aug 2012

3학년 학생들의 전체-부분으로서의 분수에 대한 이해 분석[1)]

김 유 경[*] · 방 정 숙[**]

본 연구는 초등학교 3학년 학생들을 대상으로 연속량과 이산량 맥락에서 전체-부분으로서의 분수에 대한 이해를 분석하였다. 동형인 문제에 대해 맥락별로 성취도의 차이를 살펴보았는데 예상과 달리 연속량의 성취도가 이산량의 성취도보다 약간 낮았다. 각 맥락별로 드러나는 전형적인 오류를 분석하고 이에 대한 원인을 살펴본 결과 학생들이 맥락별로 적용하는 전략에 차이가 있었고, 그에 따라 겪는 어려움의 원인이 달랐다. 이와 같은 연구 결과를 바탕으로 본 논문은 각 맥락에 적합한 교과서 구성 및 교수·학습에 대한 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅰ. 서론

전체-부분으로서의 분수는 연속량이나 이산량의 대상을 똑같은 크기로 나누고 부분과 전체의 관계를 통해서 분수를 정의한다(Lamon, 1999). 이러한 분수의 개념은 분수에 대한 초기의 아이디어로서 다른 분수의 의미(몫의 의미, 연산자의 의미, 측정의 의미, 비의 의미)에 비해 일반적으로 선행 되며 다른 분수의 교수·학습과 의미있게 관련된다(Baturo, 2004; Chan, et al., 2007; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). 이러한 관점에 따라 우리나라에서도 전체-부분으로서의 분수 개념을 통해 분수를 처음 도입하는데, 2학년에서 연속량의 등분할 분수를 도입하고, 3학년에서 이산량의 등분할 분수를 가르친다.

이밖에 일본, 중국, 싱가포르 등 많은 나라에서 등분할을 통해 분수를 도입하고 이산량의 등분할을 연속량의 등분할보다 늦게 도입한다(정은실, 2009). 이산량의 등분할은 대상 자체를 전체로 보는 연속량과 달리 대상의 집합이 전체가 되고 이들 묶음 사이의 관계를 통해 분수가 정의되므로 이산량의 등분할이 더 어려울 것이라는 가정이 반영된 결과라 할 수 있다. 현직 교사들도 이산량의 분수를 지도하는 것에 대해 어려움을 느끼고 있으며(김도한 외, 2009), 미국학력평가(NAEP)에서 4학년 학생들을 대상으로 $\frac{3}{4}$의 분수를 연속량과 이산량의 맥락에서 표현하도록 하였을 때, 이산량의 맥락에서 $\frac{3}{4}$을 정확히 표현한 학생들은 절반밖에 되지 않았다(Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith, 2009). 이는 학생들이 이산량의 분수를 어려워 한다는 것을 보여준다고 할 수 있다. 따라서 연속량 맥락과 비교하여 이산량 맥락의 분수에서 나타나는 오류가 무엇이며 학생들이 이산량의 분수를 어려워하는 이유가 구체적으로 무엇인지 심도있게 살펴보는 연구가 필요하다.

---

* 수원 칠보초등학교 (ksk9006@hanmail.net)
** 한국교원대학교 (jeongsuk@knue.ac.kr), 교신저자
1) 본 논문의 일부 분석 내용은 ICME-12에서 포스터로 발표되었음.

그러나 분수의 개념이나 성취도에 대한 연구(예, 한국교육과정평가원, 2004; Chan, et al., 2007; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007)가 많음에도 불구하고 대부분 고학년을 대상으로 하고 있어 저학년 학생들의 초기 분수 개념이나 성취 수준을 파악할 수 있는 연구가 부족하다고 할 수 있다. 고학년을 대상으로 한 연구들은 분수와 관련된 다른 수학 내용을 학습하고 나서 이루어진 것이므로 여러 가지 개념 학습의 영향으로 나타난 복합적인 결과라고 할 수 있으며 이는 저학년 분수 지도에 대한 시사점을 제공하기에 미흡하다. 따라서 연속량과 이산량의 맥락에서 전체-부분으로서의 분수에 대한 학생들의 어려움을 분석하고 초기 분수 개념 지도에 대해 시사할 수 있는 실제적인 연구가 필요하다고 할 수 있다.

이러한 연구 배경에 터해 본 연구에서는 이산량과 연속량의 등분할 분수를 모두 학습한 3학년 학생들을 대상으로 전체-부분으로서의 분수 개념에 대한 이해를 분석하고자 한다. 연속량의 전체-부분으로서의 분수와 이산량의 전체-부분으로서의 분수는 전체-부분으로서의 분수라고 하는 공통점을 가지고 있지만 각각의 다른 특성으로 인해 학생들의 이해에 차이가 존재할 수 있다. 연속량과 이산량 맥락의 동형 문제에 대하여 학생들의 성취도를 비교하고 각각의 맥락에서 학생들이 느끼는 어려움과 그 원인을 파악하여 이를 바탕으로 교육과정 구성 및 교수·학습과정에 시사점을 제공하고자 한다.

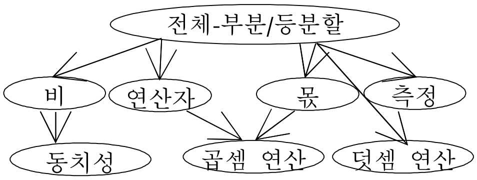
II. 이론적 배경

1. 초기 분수 개념 연구

초기 분수 개념과 관련한 연구들을 살펴보면 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 등분할을 통한 전체-부분으로서의 분수 개념의 중요성을 보고한 연구와 초기 분수에서 다른 분수의 의미를 강조한 연구이다.

먼저 전체-부분으로서의 분수 개념의 중요성을 강조한 연구 결과를 검토해 보면 다음과 같다. Mack(1993), Kieren(1992), Charalambous와 Pitta-Pantazi(2007)는 분할이 초기 분수 개념을 형성하는 핵심적인 활동이라고 주장하면서, 등분과 관련한 직관적이고 비형식적인 지식들은 단위를 확인하고 반복하는 활동과 연계되어 다양한 의미의 분수 개념을 형성한다고 주장하였다. 또한 Behr, Lesh, Post, Silver(1983)는 유리수의 하위 개념 및 연산간의 관련성을 개념도를 통해 제시하였는데, 여기서 분할 및 전체-부분으로서의 분수 개념은 비, 연산자, 몫, 측정의 개념보다 앞서 있으며 분수에 대한 하위 개념들은 덧셈, 곱셈, 동치성, 문제 해결에 관련된다.

Charalambous와 Pitta-Pantazi(2007)는 Behr 외(1983)가 제시한 개념도를 바탕으로 학생들의 분수 개념 및 연산에 대한 성취가 실제적으로도 이러한 연결 관계를 보이는지 연구하였다. 그 결과, 전체-부분으로서의 분수는 비와 연산자의 분수 학습에 각각 96.04%, 94.09%의 영향을 미치며, 몫과 측정의 의미에는 각각 15.21%, 4.84% 영향을 끼치는 것으로 드러났다. 이어 비는 동치성에 72.25% 관련되고, 연산자와 몫의 의미는 곱셈 연산에 각각 12.25%, 38.44% 영향을 주었다. 또한 분수의 덧셈 연산은 전체-부분으로서의 분수 개념과 14.44% 관련성이 있었다. 이를 바탕으로 분수 연산과 관련하여 Behr 외(1983)가 제시한 덧셈, 곱셈, 동치성, 문제해결을 덧셈연산, 곱셈연산, 동치성으로 수정하여 [그림 Ⅱ-1]과 같이 분수의 개념과 연산에 대한 구조모델을 제시하였다. 이러한 연구 결과는 전체-부분으로서의 분수 개념이 분수 학습 전 영역에 깊은 영향을 주며 중요한 개념임을 시사한다고 할 수 있다.



[그림 Ⅱ-1] 분수의 개념과 연산에 대한 구조모델

한편, 초기 분수 개념과 관련된 연구 중 전체-부분으로서의 분수 이외에 다른 의미의 분수를 강조한 연구들이 있다. 예를 들어 Neuman(1993)은 전체-부분을 이해하지 못하는 학생들도 관계적 사고를 할 수 있음을 보여주었고, Streefland (1993) 또한 9세 정도의 어린 학생들도 관계적인 사고를 할 수 있으며 물리적인 대상의 양적인 관계를 통해 관계적 사고를 계발해 나가야 함을 주장하였다. 정은실(2009)은 역사 발생적 관점에서 보았을 때 분배나 측정의 과정에서 분수가 발생되었기 때문에 이를 통해 분수를 도입할 필요가 있음을 주장하였고, 강홍규와 고정화(2003)도 초기 분수에서 측정으로서의 분수를 부각하였다. Moseley(2005) 또한 전체-부분으로서의 분수 위주의 학습보다는 여러 가지 관점의 분수 학습이 필요하다고 주장한다.

정리해보면, 많은 연구들이 등분을 통한 전체-부분으로서의 분수를 강조하고 있지만 비, 몫, 측정 등 다른 의미의 분수도 초기 분수에서 중요한 개념임을 제시하고 있다. 그러나 전체-부분의 분수가 초기 분수의 기본적인 관점이라 할 수 있기 때문에 본 연구에서는 전체-부분으로서의 분수에 대한 저학년 학생들의 이해를 연속량과 이산량의 맥락별로 살펴보고, 학생들이 느끼는 어려움의 원인에 대해서도 상세히 분석하고자 한다.

2. 분수 개념 형성과 관련된 스킴

전체-부분으로서의 분수는 연속량과 이산량의 맥락으로 나눌 수 있다. 어린 학생들의 분수에 대한 이해가 연속량의 맥락에 기초한다고 주장하는 학자들도 있지만(Steffe & Olive, 1993), 다양한 물리적인 맥락이 초기 분수 개념 형성에 기여한다는 입장이 보다 보편적이다(Pitkethly & Hunting, 1996). 이산량과 연속량 모델은 서로 관련되지만 서로 다른 특성을 갖고 있다. 연속량 모델은 반복되고 무한히 다양하게 나눌 수 있는 반면에 이산량 모델은 전체가 덜 분명하고 연속량과는 다른 스킴을 요구한다.

분수 개념 형성에 기본이 되는 스킴으로는 범자연수 스킴(whole number schemes), 분할 스킴(partitioning schemes), 측정 스킴(measuring schemes), 동치 스킴(equivalencing schemes), 관계 스킴(relational schemes)이 있다(Pitkethly & Hunting 1996). 범자연수 스킴은 수의 계열을 이해하고 수를 셀 수 있는 능력을 말한다. 자연수에서 1이라는 단위는 셀 수 있고 반복적이고 그룹화 된다. 분수의 단위도 이러한 특성을 가지고 있기 때문에 범자연수 스킴은 초기 분수의 개념 형성에 영향을 미친다(Steffe & Olive, 1993). 그러나 분수의 단위는 분할된 측정의 단위로 자연수와의 차이를 인식하지 못하는 경우, 많은 오류들이 나타나고 분수의 개념 형성에 방해 요인으로 작용할 수 있다(Ni & Zhou, 2005). 이와 관련하여 Pepper(1993)는 범자연수 스킴이 분수의 개념 형성과 관련한 역할을 조사한 결과 세기와 등분 사이에 유의미한 관련성이 없음을 밝혀내기도 하였다.

분할 스킴은 맥락에 따라 1/2 전략(halving), 분배 전략(dealing), 접기 전략(folding or splitting)이 활용된다. 1/2 전략은 연속량이나 이산량 맥락에서 모두 사용할 수 있는 전략으로 반을 나누고 다시 반복적으로 반으로 나누면서 분할하는 전략이다. 분배 전략은 이산량에서 활용되는 전략으로 주어진 것이 사라질 때까지 하나씩 대응시

키며 나누는 전략이다. 접기 전략은 접는 수에 따라 조각의 수는 증가되고 조각의 크기는 작아지는 관계를 인식할 수 있는 연속량에서 많이 활용되는 전략이다.

측정 스킴은 0으로부터의 거리를 인식하는 능력으로 분수 단위를 생성하고 단위 반복으로서 분수를 인식하게 한다. 이 능력은 학생들에게 세기와는 차별화된 묶음이나 측정으로서의 분수를 인식하게 한다.

동치 스킴은 새로운 단위를 생성하는 단위 종합능력이다. 새로운 단위는 이전 단위를 변형하여 형성되며 이러한 능력은 곱셈적 사고의 핵심적인 능력이라 할 수 있다(Steffe & Olive, 1993).

관계 스킴은 부분과 전체 사이의 관계를 포함하는 것으로 셀 수 있는 물리적 대상의 양적 관계를 나타내면서 발전된다(Streefland, 1993).

이러한 여러 가지 스킴 중에서 초기 분수에서 분할의 경험을 통한 분수에 대한 직관적인 사고는 그 중요성이 더욱 강조되었다. 분할의 경험은 부분의 크기와 부분의 수 사이의 관계, 부분과 전체 사이의 관계, 부분과 부분의 관계 등 다양한 관계를 찾아내도록 하며, 다양한 물리적 맥락은 학생들의 분수에 대한 사고를 폭넓게 한다.

Pothier와 Sawada(1983)는 연속량에서 분할활동의 4가지 수준을 제시하였다. 1수준은 단지 조각으로만 나눌 수 있는 수준으로 나누는 개수는 같지만 같은 크기로 분할하지 못하는 수준이다. 2수준은 등분의 개념을 인식하지 못한 채 알고리즘에 의해 나누는 수준이고, 3수준은 '똑같이'라는 개념을 인식하여 분할하는 수준이다. 마지막으로 4수준은 알고리즘에 의해 등분하는 것이 아니라, 3등분이나 5등분처럼 홀수 조각으로 나누기 위해서 새로운 절차를 계발하는 수준이다.

이산량에서는 세기와 분배 전략이 공통적으로 사용된다(Pitkethly & Hunting, 1996). 이는 연속량 맥락에서 활용되는 분할 전략과 다른 것으로 연속량에 한정된 지식은 이산량이 포함된 상황에서 충분히 설명될 수 없음을 알 수 있다. 따라서 연속량과 이산량 각각의 맥락에서 학생들의 이해를 분석하고 지도방법에 대한 시사점을 제공하는 것은 의미 있는 일이라 할 수 있다.

3. 수학 교과서에 제시된 전체-부분으로서의 분수

우선 수학 교과서[2]에 제시된 2·3학년 분수지도 내용은 <표 Ⅱ-1>과 같다. 분수는 2학년 2학기에 전체-부분으로서의 분수가 처음 도입된다(교육과학기술부, 2009a). 기존에 배웠던 자연수와 다른 새로운 수인만큼 6차시로 세분화되어 전체-부분으로서의 분수에 대한 개념들이 상세히 지도되고 있다.

<표 Ⅱ-1> 2, 3학년 차시별 분수지도 내용

차시	2학년 2학기 분수	3학년 1학기 분수
1	똑같이 나누기	(이산량에서) 분수만큼 알아보기
2	똑같게 나누어진 도형 찾기	(이산량에서) 분수로 나타내기
3	전체와 부분의 크기 알기	단위분수가 몇 개인지 알기
4	분수 정의하기	분모가 같은 분수의 크기비교
5	분수만큼 나타내기	단위 분수의 크기 비교
6	분수로 나타내기	

반면에 이산량의 맥락은 3학년 1학기 분수에서 다뤄지고 있으나 2차시에 한정된다(교육과학기술부, 2009b). 후속차시는 연속량 맥락에서 단위분수를 반복하는 측정의 분수와 분모가 같은

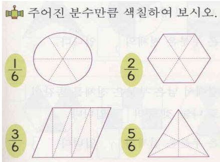
2) 본 연구가 실시된 2011년 12월은 2009 개정 교육과정이 적용되는 시점이었지만 실제 교과서는 2007 교육과정에 근거한 교과서를 사용하였으므로, 여기서는 이를 분석대상으로 하였다.

분수의 크기 비교, 분자가 1인 분수의 크기 비교를 다룬다. 또한 분수 단원 외에서 이산량의 분수와 관련된 내용을 살펴보면, '똑같이 나누기'의 경우 나눗셈 단원에서 등분제와 관련된다고 볼 수 있으나 '전체와 부분의 크기 알기'나 '분수 정의하기'와 관련된 내용은 찾아볼 수 없다. 즉 전체-부분으로서의 분수로서 공통적인 부분이라 할 수 있는 '등분'이나 '전체-부분의 관계'는 중복하여 제시하지 않고 맥락에 따라 문제해결에 큰 차이가 있는 '분수만큼 나타내기', '분수로 나타내기'만 이산량의 맥락에서 별도로 제시하고 있다.

한편, 같은 내용의 학습에 대해서도 맥락에 따라 학습 내용이 조금 차이가 있다. 등분할 때 연속량에서는 점선을 사용하여 분할하지만, 이산량에서는 묶는 활동을 하게 된다. 분수만큼 나타내는 경우에도 연속량에서는 넓이모델에 분수만큼을 색칠하여 나타내지만, 이산량에서는 15의 1/3이 얼마인지 수로 나타낸다. 이것들은 서로 다른 맥락의 특성 때문에 나타나는 차이이다.

그러나 학습이 이루어지는 학년 수준으로 인하여 과제 제시형태가 달라진 경우도 있다. 2학년 연속량의 맥락에서는 [그림 Ⅱ-2]처럼 이미 등분되어 있는 상태에서 분수만큼을 색칠을 하도록 하고 있지만, 3학년 이산량 맥락에서는 [그림 Ⅱ-3]처럼 6을 제시하고 있을 뿐 묶음으로 분할되어 있지 않다. 그러므로 연속량에서는 어떻게 똑같이 6개로 등분할 것인가를 고민하지 않고 분수만큼만 색칠하면 되지만, 이산량에서는 분수가 의미하는 대로 3개의 묶음으로 묶고 그 중 한 묶음을 수로 나타내어야 한다. 이것은 연속량의 경우도 등분되지 않은 도형만 제시하고 분수만큼을 색칠하도록 제시할 수 있으므로 맥락의 특성이라기보다는 학생들의 학년 수준에 맞게 난이 수준을 고려한 것으로 유추할 수 있다.

본 연구는 동일한 평가 내용에 대해 맥락별로 성취도의 차이를 비교하고 각 맥락별로 어떠한 부분에 어려움을 느끼는지를 상세히 분석하고자 한다. 그러므로 교과서 분석 결과를 바탕으로 평가 내용을 결정하고 맥락의 특성에 따라 달라지는 표현이나 활동에는 차이를 두지만, 과제 제시형태는 동일하게 하여 학생들의 맥락에 따른 이해의 차이를 분석하고자 한다.



[그림 Ⅱ-2] 연속량에서의 교과서 제시형태

[그림 Ⅱ-3] 이산량에서의 교과서 제시형태

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 서울, 경기, 대구, 대전, 제주 지역에서 학력 수준과 가정의 사회 경제적 수준이 중간 정도에 속하는 학생들이 있는 곳으로 6개 학교를 임의로 선정하고 이들 학교 각각에서 1학급씩을 선정하여 총 174명을 연구 대상으로 하였다. 연구 대상 중 검사에 불성실하게 대응한 학생 12명을 제외하여 162명을 분석의 대상으로 하였다. 이 학생들은 2학년 2학기에 연속량의 등분할, 3학년 1학기에 이산량의 등분할을 학습한 학생들로 3학년 2학기에 본 연구가 실시되었다.

2. 검사 도구

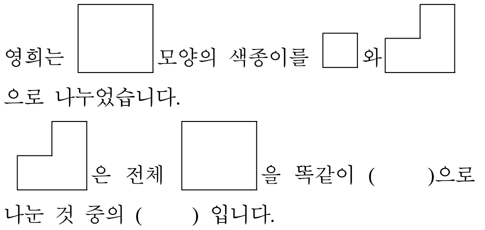
교과서의 내용은 <표 Ⅱ-1>처럼 이산량의 차시가 세분화되지 않아 연속량의 내용과 이산량의 내용에 차이가 있다. 본 연구는 연속량과 이산량 맥락에 대해 맥락만 다를 뿐 동일한 평가 내용에 대한 성취도의 차이를 분석하고자 하므로 동형의 평가 문항이 필요하다. 따라서 교육과정 차시별 주제에 따라 평가 문항을 계발하지만,

<표 Ⅲ-1> 교과서 차시별 내용에 따른 검사문항

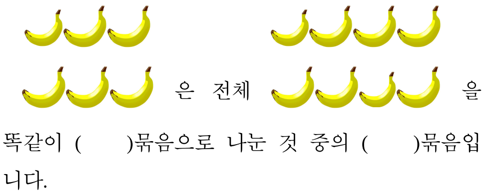
평가 요소	연속량, 이산량 평가 내용*	문항수 연속량	문항수 이산량	문항수 합계
등분	똑같이 나누어진 도형 찾기	3	3	6
	똑같이 나누었을 때의 부분이 될 수 있는 모양(묶음의 모양) 찾기			
	똑같이 3등분하기			
전체-부분의 관계	전체와 부분의 크기 알기	3	3	6
	전체-부분의 관계를 통해 분수 정의하기			
	전체, 부분, 분수에 대한 올바른 설명 찾기			
분수만큼 나타내기	단위 분수만큼 색칠한 것 찾기 (자연수의 단위 분수만큼을 그림에 나타내기)	3	3	6
	비단위 분수만큼 색칠한 것 찾기 (자연수의 비단위 분수만큼을 수로 나타하기)			
	분수의 크기 비교하기 (자연수의 분수만큼을 비교하기)			
분수로 나타내기	남은 양을 단위분수로 나타내기 (부분이 전체의 얼마인지 단위분수로 나타내기)	3	3	6
	남은 양을 비단위 분수로 나타내기 (부분이 전체의 얼마인지 비단위 분수로 나타내기)			
	전체가 달라질 때 부분을 분수로 나타내기			

* 연속량, 이산량의 평가내용은 동형의 문제로 이루어졌으나 맥락의 특성상 차이가 있는 경우 ( ) 안에 이산량의 평가 내용을 설명하였음

연속량에만 제시되어 있는 '똑같이 나누기', '똑같이 나누어진 도형 찾기', '전체와 부분의 크기 알기', '분수 정의하기'에 대해서도 이산량의 맥락에서 평가 문항을 계발하였다(<표 Ⅲ-1> 참조). 예를 들어 [그림 Ⅲ-1]과 [그림 Ⅲ-2]는 전체-부분 사이의 관계에 대해 동형으로 제작된 문항이다.



[그림 Ⅲ-1] 전체-부분의 관계에 대한 연속량 문제



[그림 Ⅲ-2] 전체-부분의 관계에 대한 이산량 문제

한편, 연속량과 이산량의 맥락에 따라 교과서 제시 형태가 달랐다. [그림 Ⅱ-2]의 연속량은 똑같이 등분된 상황에서 분수만큼을 색칠하도록 하고 있지만 [그림 Ⅱ-3]의 이산량은 묶어져 있지 않은 상황에서 분수만큼을 알아보도록 하고 있다. 본 연구는 연속량의 맥락과 이산량의 맥락에서 학생들의 전체-부분으로서의 분수에 대한 성취도가 어떻게 차이가 나는지 살펴보고 어떤 부분에서 어려움을 느끼는지 상세히 파악하고자 하므로 맥락의 특성으로 인한 차이를 제외하고는 문제 제시 형태를 동형으로 하였다.

또한 검사문항의 내·외적인 부분에서 동형성을 유지하고 내용의 타당도를 높이기 위해 초등수

학교육 석·박사과정 중의 10명의 교사들에 의하여 검사도구가 여러 차례 검토되었으며 예비 검사를 통해 문제의 난이도, 검사 시간의 적절성, 실시상의 유의점 등을 확인하였다. 검사도구의 신뢰도는 Cronbach alpha(α) 값이 0.822로 신뢰성이 있는 것으로 밝혀졌다.

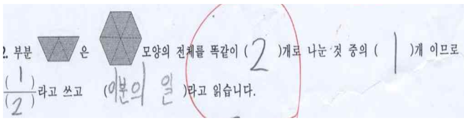
3. 자료 수집

본 연구는 조사 연구로서 검사지를 통한 지필 평가와 면담으로 구성되었다. 예비검사는 본 검사 대상으로 선정된 경기도의 한 초등학교 다른 학급의 학생들에게 실시되었고 본 검사는 연구 대상으로 선정된 6개 학교, 174명의 학생들에게 80분 동안 실시되었다. 본 검사는 학교의 실정을 고려하여 2011년 12월 중에 적당한 날짜, 적당한 시간에 실시되었으며 문제 해결 과정을 상세히 기술할 것을 학생들에게 주지시킨 후 최대한 자유로운 분위기에서 실시하였다.

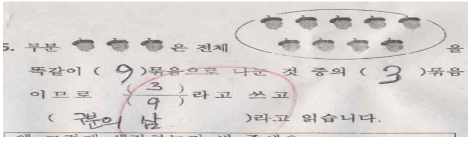
면담은 학생들의 문제 해결 과정을 심층적으로 살펴보고 오답의 원인을 찾기 위해서 면담 실시가 용이한 경기 지역의 본 검사 대상 학교 학생들 중 10명을 선정하여 실시하였다. 지필 검사 결과 정답률이 60%이하인 문항에 대해서 전형적인 오답을 보인 학생들 중에서 자신의 의견을 말로 잘 표현하는 학생들을 담임교사의 추천을 받아 면담 대상 학생으로 선정하였다. 면담의 전 과정은 오디오로 녹음되고 분석을 위해 전사되었다.

4. 자료 분석

검사문항에 대한 채점은 '모두 고르시오'와 같이 답이 여러 개 있는 문항의 경우 모두 맞아야 정답으로 처리하였다. 그러나 [그림 Ⅲ-3]에서처럼 하나를 6개로 나눈 것 중 3개가 아니라, 2개로 나눈 것 중 1개라고 답한 경우 맞았다고 채점하였고, [그림 Ⅲ-4]처럼 3묶음으로 나눈 것 중의 1묶음이라고 답하지 않고 9묶음으로 나눈 것 중 3묶음이라고 답한 것도 맞았다고 하였다. 또한, [그림 Ⅲ-5]의 문항에 대해 1/3만큼 색칠된 것을 모두 고르면 3번과 4번이지만, 3개 중에 1개만 색칠한 보기 4번만 선택한 경우도 맞았다고 채점을 하였다. 이는 본 연구 대상인 3학년 학생들이 아직 동치 분수를 형식적으로 학습하지 않은 상황이므로 이를 감안하여 동치분수와 관련된 오답인 경우, 정답으로 처리하였다. 이는 본 연구 결과를 해석하는데 참조될 필요가 있다.

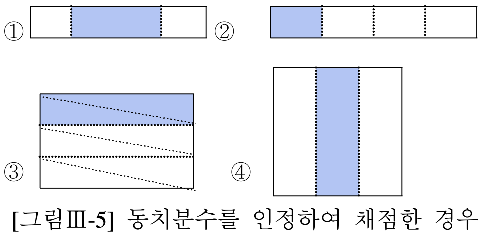


[그림 Ⅲ-3] 동치분수를 인정하여 채점한 경우



[그림 Ⅲ-4] 동치분수를 인정하여 채점한 경우

$\frac{1}{3}$만큼을 색칠하였습니다. 바르게 색칠한 것을 <u>모두</u> 고르시오. (3, 4)



[그림Ⅲ-5] 동치분수를 인정하여 채점한 경우

검사지 분석은 연속량과 이산량의 각 문항별로 평균을 비교하였고 이러한 평균의 차이가 유의미한지 알아보기 위해 독립표본 T 검정을 실시하였다. 또한 왜 그렇게 생각하였는지에 대해

학생들이 기술한 내용을 바탕으로 오답의 원인 및 학생들의 이해 정도를 파악하였다. 특히 정답률이 60%이하인 문항에 대해서는 같은 평가 요소 내에 있는 다른 문항들의 성취도나 문제 해결 과정을 비교하여 학생들이 어려움을 느끼는 원인을 파악하였다.

면담은 학생들이 문제 해결 과정을 설명하는 방식으로 이루어졌으며 이를 통해 검사지의 문제 해결 과정 기술이 명확하지 않은 경우에도 학생들의 사고과정을 파악할 수 있었고 검사지를 통해서 파악한 오답의 원인과 일치하는 경우 더욱 신뢰롭게 결과를 받아들일 수 있었다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 연속량과 이산량 맥락에서 성취도 비교

연속량과 이산량의 맥락에 따라 3학년 학생들의 전체-부분으로서의 분수에 대한 성취도 차이를 하위 요소별로 살펴보면 다음과 같다.

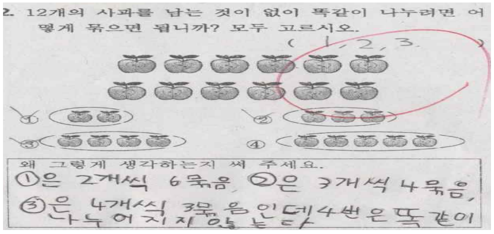
가. 똑같이 나누기

똑같이 나누기는 분수의 가장 기초적인 개념으로 문항별로 차이는 있으나 연속량보다 이산량에서 등분에 대한 성취도가 약간 높았다(<표 Ⅳ-1> 참조). 이러한 차이가 유의미한지 여부를 살펴보기 위해 실시한 T검정 결과, 똑같이 나누었을 때 부분이 될 수 있는 모양 찾기 문항에 대해서 유의수준 5% 내에서 유의미한 차이가 나타났다. 이는 [그림 Ⅳ-1]처럼 이산량의 경우, 수를 세어서 똑같은 수만큼 묶여졌는지를 확인할 수 있고 곱셈을 활용하여 전체의 관계를 점검할 수 있기 때문에 도형의 넓이를 비교해야 하는 연속량보다 정답률이 높았던 것으로 여겨진다.

<표 Ⅳ-1> 등분에 대한 성취도 (N=162)

평가 내용	맥락	평균 %	표준편차	t	p
똑같이 나누어진 도형 찾기	연속량	88.9	.32	.55	.583
	이산량	90.7	.29		
똑같이 나누었을때 부분의 모양 찾기	연속량	54.9	.50	2.78	.006*
	이산량	69.8	.46		
똑같이 3등분하기	연속량	79.6	.40	.27	.786
	이산량	78.4	.50		

* P<.05



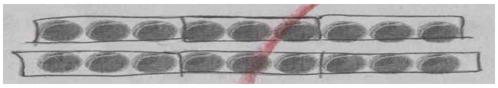
[그림 Ⅳ-1] 등분할 때 부분이 될 수 있는 것 찾기

하위 문항별로 정답률을 살펴보면, 첫째 똑같이 나누어진 도형을 찾는 문항은 연속량, 이산량 모두 90%에 가까운 정답률을 나타내었다. 이는 본 연구의 검사문항 중 가장 높은 성취를 보인 것으로 학생들이 똑같이 나누어졌는지 아닌지를 구분하는 것은 대체로 잘한다고 할 수 있다.

둘째, 똑같이 나누었을 때 부분이 될 수 있는 모양이나 개수 찾기 문항은 교과서에 제시되지 않는 형태로 똑같이 나누기나 똑같이 나누어진 도형 찾기 문항보다 정답률이 낮았다. 하지만 몇 개씩 묶어야 남는 것이 생기지 않고 똑같이 묶을 수 있는지, 어떠한 모양으로 나누어야 똑같이 나누어지는지 직관적으로 아는 것은 후속 분수 학습에서 중요한 부분이라 할 수 있다. 따라서 본 문항에 대한 낮은 정답률은 후속 학습에 좋지 않은 영향을 미칠 수 있다.

셋째, 똑같이 3등분하기에서는 이산량의 경우 [그림 Ⅳ-2]처럼 3등분하지 않고 3개씩 묶는 오

류가 많았다. 이는 실수로 인한 결과일 수도 있으나 학생들이 묶음의 수나 묶음 내의 수를 명확히 구분짓지 않고 혼동하고 있음을 알 수 있다.



[그림 Ⅳ-2] 묶음의 수와 묶음 내의 수를 혼동하는 예

나. 전체-부분의 관계

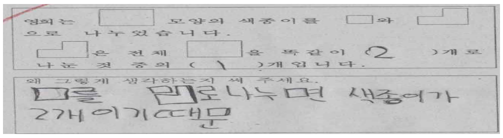
전체-부분의 크기를 이해하고 이들 사이의 관계를 통해 분수를 정의하는 것은 전체-부분으로서의 분수의 핵심적인 개념이다. 이에 대한 연속량과 이산량의 성취도와 T검정 결과는 <표 Ⅳ-2>와 같다. 등분되지 않은 상황에서 전체-부분의 관계를 이해하고 전체, 부분, 분수에 대한 올바른 설명을 찾는 문항은 5% 유의수준 내에서 맥락별로 성취도에 유의미한 차이가 나타났지만, 등분된 상황에서 분수를 정의하는 문항은 유의미한 차이를 나타내지 않았다. 또한 등분된 상황과 등분되지 않은 상황에서 전체-부분의 관계를 파악하는 문항 사이에도 연속량은 성취도의 차이가 많이 나타났지만, 이산량의 경우는 큰 차이를 나타내지 않았다.

하위 문항별로 정답률을 살펴보면, 첫째 등분되지 않은 상황에서는 이산량보다 연속량의 성취도가 56.2%로 매우 낮았다. 교과서에서는 연속량의 경우, 등분된 상황만 제시가 되어 똑같이 나누어졌는지 확인해 볼 필요가 없었으나 본 연구의 문항에서는 '똑같이'를 고려하지 않고 나누어진 것 그대로 전체-부분의 관계를 생각하였기 때문에 많은 오류를 낳았다. [그림 Ⅳ-3]처럼 똑같이 나누어졌는지 비교하지 않고 나누어진 부분의 수만을 세어서 1/2라고 답한 경우가 많았으며, [그림 Ⅳ-4]처럼 전체와 부분간의 관계가 아니라, 부분과 부분 사이 관계를 통해 1/3이라고 답한 학생들도 있었다. 이에 반해 이산량에서는 교과서에서도 묶음짓지 않고 제시되고 있어 몇 개씩 묶을 것인가에 대해 학생 스스로 생각하게 함으로써 등분된 문제 상황이나 그렇지 않은 상황의 정답률이 큰 차이를 보이지 않았다.

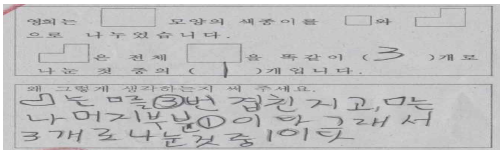
<표 Ⅳ-2> 전체-부분의 관계 성취도 (N=162)

평가 내용	맥락	평균 %	표준 편차	t	p
등분되지 않은 상황에서 전체-부분의 관계	연속량	56.2	.498	3.17	.002*
	이산량	72.8	.446		
등분된 상황에서 전체-부분의 관계를 통해 분수 정의하기	연속량	74.1	.440	.00	1
	이산량	74.1	.440		
전체, 부분, 분수에 대한 올바른 설명 찾기	연속량	63.0	.484	2.25	.03*
	이산량	51.2	.501		

* P<.05



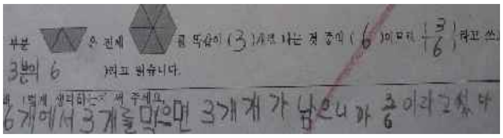
[그림 Ⅳ-3] 등분되지 않은 상황에서 오답의 예1



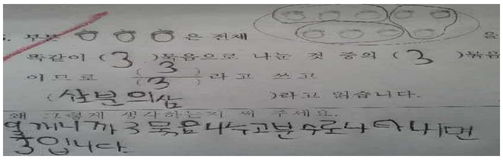
[그림 Ⅳ-4] 등분되지 않은 상황에서 오답의 예2

둘째, 등분된 상황에서 전체-부분의 관계를 이해하고 분수를 정의하는 문항에 대해서는 맥락에 따라 성취도의 차이가 없었다. 또한 [그림 Ⅲ-3], [그림 Ⅲ-4]처럼 동치분수로 답한 경우 정답으로 처리한 결과 정답률도 높아졌다. 그러나 전체와 부분의 관계를 제대로 이해하지 못하고

[그림 Ⅳ-5]처럼 문제에 부분이 먼저 제시되었다고 똑같이 3개로 나눈 것 중에 6개라고 답한 학생들이 있었고, [그림 Ⅳ-6]처럼 묶음의 수와 묶음 내의 수를 혼동하는 경우도 있었다.



[그림 Ⅳ-5] 부분과 전체를 거꾸로 인식하는 오류



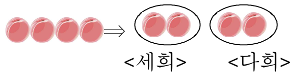
[그림 Ⅳ-6] 묶음의 수와 묶음내의 수로 분수를 정의하는 오류

셋째, 전체, 부분, 분수에 대해 알맞은 설명을 고르는 [그림 Ⅳ-7]의 문항에서 대표적인 오답 유형은 1, 2, 3 모두를 선택하거나 1, 3을 선택한 경우이다. 연속량의 경우는 전체가 1이지만, 이산량에서는 전체가 1이 아니라, 여러 개가 될 수 있음에도 불구하고 전체를 1로 인식하는 오개념을 가지고 있음을 알 수 있었다.

다. 분수만큼 나타내기

연속량에서 분수만큼을 나타내는 것과 이산량에서 자연수의 분수만큼이 얼마인지 아는 것은 평가 내용상 유사한 것 같지만 각각의 맥락의 성격상 다른 문제 해결 과정을 요구한다. <표 Ⅳ-3>은 분수만큼 나타내기의 맥락별 성취도와 T검정 결과이다. 분수만큼 나타내기는 단위분수만큼, 비단위 분수만큼을 나타내는 문항에서 유의미한 차이를 나타냈으며 다른 평가 요소와 달리 연속량의 평균이 이산량의 평균보다 높았다.

세희와 다희는 그림처럼 복숭아를 똑같이 나누어 먹었습니다. 다음 중 옳은 설명을 모두 고르세요.



① 세희가 먹은 양은 전체 1개를 똑같이 두 묶음으로 나눈 것 중 한 묶음이다.
② 다희가 먹은 양은 전체 4개를 똑같이 두 묶음으로 나눈 것 중 한 묶음이다.
③ 세희는 4의 $\frac{1}{2}$만큼을 먹었다.
④ 다희가 먹은 양은 1개이다.

[그림 Ⅳ-7] 전체, 부분, 분수에 대한 올바른 설명 찾기 문항

<표 Ⅳ-3> 분수만큼 나타내기 성취도 (N=162)

평가 내용	맥락	평균 %	표준 편차	t	p
단위분수만큼 나타내기	연속량	72.2	.449	2.25	.03*
	이산량	60.5	.490		
비단위 분수만큼 나타내기	연속량	63.6	.483	2.03	.04*
	이산량	52.5	.501		
분수의크기 비교하기	연속량	48.2	.501	2.22	.83
	이산량	49.4	.502		

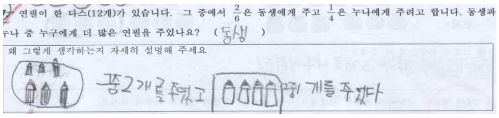
* P<.05

하위 문항별로 문제 해결 과정을 살펴보면, 첫째, 단위 분수만큼 나타내는 문항에 대해 맥락별로 다른 오류가 나타났다. 연속량의 대표적인 오류는 크기를 다르게 하여 3개로 나눈 것 중 하나를 색칠한 것도 1/3만큼 나타낸 것이라고 선택하는 경우이며, 이산량의 대표적인 오류는 15의 1/6만큼을 그림에 나타낼 때 15를 6묶음으로 나누는 것이 아니라 6개씩 묶는 경우이다. 이들 오류는 모두 등분하는 과정에서 나타나는 오류이지만 맥락의 속성상 연속량은 넓이를 고려해야 하고 이산량은 묶음의 수와 묶음 내의 수를 혼동할 수 있기 때문에 오류가 나타났다.

둘째, 비단위 분수만큼 나타내는 문항의 성취도(63.6%, 52.5%)는 단위분수만큼 나타내는 문항(72.2%, 60.5%)보다 성취도가 낮았으며 맥락별로도 다른 오류가 드러났다. 연속량의 경우 4/6만

큼 색칠한 것을 고르는데 전체를 6개로 나누지 않고 10개로 나누어 졌어도 4개가 색칠되면 4/6라고 하는 오류들이 있었다. 이산량의 대표적인 오류는 18의 8/9를 알아보는 문항에 대해 단위분수 문제처럼 9×2=18이기 때문에 2라고 답하는 오답들이 있었다.

셋째, 분수만큼을 나타내어 크기를 비교하는 문항에 대해서는 연속량, 이산량 모두 정답률이 낮았다(각각 48.2%, 49.4%). 이는 분수만큼도 나타내어야 하고 크기도 비교해야 하는 복합적인 문제이기 때문에 나타난 결과이다. 특히 '12개의 2/6를 동생에게 주고 12개의 1/4을 누나에게 주었을 때 누가 더 많이 가지는가?'라는 문제에 대해서 [그림 Ⅳ-8]처럼 6개 중에 2개를 동생이 받고 4개 중 1개를 누나가 받아서 동생이 더 많이 받는다고 답하였다. 이것은 연속량에서처럼 분모의 수만큼으로 나누는 것으로 12라는 전체를 고려하지 않고 문제를 해결하고 있음을 알 수 있다. 그러나 연속량의 문제해결과 차이점은 하나를 6 또는 4등분 하지 않고 6개의 연필 중 2개, 4개의 연필 중 1개를 비교함으로써 12개라는 전체를 고려하지 않았다.



[그림 Ⅳ-8] 분수의 크기 비교 오답의 예

라. 분수로 나타내기

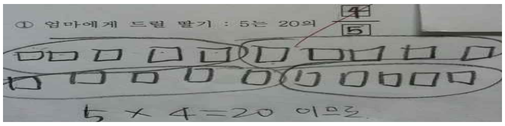
분수로 나타내기는 전체-부분으로서의 분수의 하위 평가 요소 중 가장 성취도가 낮았다(<표 Ⅳ-4> 참조). 또한 맥락별로 성취도의 차이가 커서 분수로 나타내기에 해당하는 모든 문항에서 평균의 유의미한 차이가 나타났다. 분수로 나타내기 문항들은 대체로 등분이나 전체-부분의 관계, 분수만큼 나타내기 등을 할 수 있어야 해결가능한 난이 수준이 높은 문항으로 성취도가 낮은 원인을 다른 요소의 성취수준과 관련하여 파악할 필요가 있다.

<표 Ⅳ-4> 분수로 나타내기 성취도 (N=162)

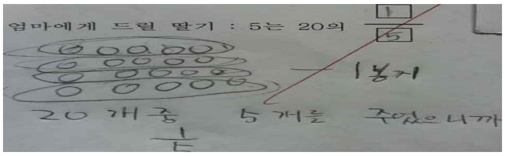
평가 내용	맥락	평균 %	표준 편차	t	p
부분을 단위분수로 나타내기	연속량	80.3	.40	5.16	.00*
	이산량	54.3	.50		
부분을 비단위분수로나타내기	연속량	8.6	.28	3.70	.00*
	이산량	23.5	.43		
전체가 달라질 때 부분을 분수로 나타내기	연속량	46.3	.50	2.70	.007*
	이산량	61.1	.49		

* P<.05

하위 문항별로 정답률을 살펴보면, 첫째, 우유 반 컵을 마시고 남은 양을 분수로 나타내는 연속량의 문제는 80.3%의 높은 정답률을 나타냈다. 그러나 5는 20의 얼마인지를 분수로 나타내는 이산량의 문제는 54.3%의 낮은 정답률을 나타내었다. 5가 20의 얼마인지를 알려면 5개씩 묶어 생긴 4개의 전체 묶음의 수와 5를 나타내는 1개의 묶음의 수 사이의 관계를 분수로 나타내어야 한다. 즉 이산량 맥락에서 전체-부분의 분수는 전체 묶음의 수와 부분 묶음의 수 사이 관계를 분수로 나타내는 것이다. 그러나 학생들은 [그림 Ⅳ-9]처럼 전체 묶음의 수와 묶음 내의 수를 사용하여 분수로 나타내기도 하고 [그림 Ⅳ-10]처럼 부분 묶음의 수와 묶음 내의 수로 분수를 나타내는 오류를 보였다.

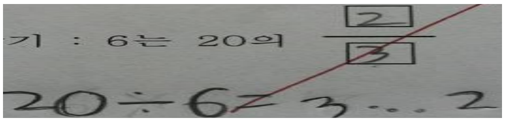


[그림 Ⅳ-9] 전체 묶음의 수와 묶음 내의 수로 나타내는 오류

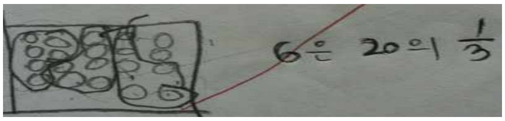


[그림 Ⅳ-10] 부분 묶음의 수와 묶음 내의 수로 나타내는 오류

둘째, 비단위 분수로 나타내는 문항의 경우 정답률이 아주 낮았다. 연속량의 경우 1/2컵의 반을 먹고 남은 양을 분수로 나타내는데, 많은 학생들이 1/2만큼 남았다고 답하였다. 이는 1/2을 기준으로 다시 1/2만큼을 생각하지 않고 문제 그대로 1/2이나 반을 분수로 나타낸 결과라 할 수 있다. 이산량 또한 6은 20의 얼마인지와 같이 비단위 분수로 나타내는 문항에 대해 23.5%의 낮은 정답률을 나타냈다. 대표적인 오류 유형으로는 [그림 Ⅳ-11], [그림 Ⅳ-12]와 같다. [그림 Ⅳ-11]은 분수로 나타내는데 있어 나눗셈을 사용하였고 몫과 나머지의 관계를 분수로 나타내었다. [그림 Ⅳ-12]는 대수적으로 계산하지 않고 묶었으나 묶여지지 않는 부분이 생겼음에도 문제 해결 과정을 반성하지 않고 답을 작성한 것이다.



[그림 Ⅳ-11] 비단위 분수로 나타내는 오답유형



[그림 Ⅳ-12] 비단위 분수로 나타내는 오답유형

6이 20의 얼마인지를 알려면 6과 20을 공통적으로 묶을 수 있는 수를 찾아야 하고 이들 관계를 분수로 나타내어야 한다. 즉 묶음의 수를 비교하고 전체와 부분의 관계를 분수로 나타내는 것이 필요하다. 그러나 학생들은 묶음짓기나 전체-부분의 관계를 분수로 정의하기보다는 <에피소드 1>에서 알 수 있듯이 분수로 나타내려면 나누어야 한다고 생각하였다. 또한 분수로 나타내는데 있어 묶여지지 않는 부분이 없이 똑같이 나누어졌는지를 확인하고 그렇지 않았을 경우 답을 수정하거나 문제 해결 과정을 반성하지 않았다. 즉 분수로 나타내는데 있어 등분을 연결지어 생각하지 못한 것이다. 묶여지지 않는 부분이 없이 똑같이 나눌 수 있는 수를 찾아야 한다는 결론에 도달하고도 공통으로 등분할 수 있는 수를 찾는데 한참의 시간이 소요되었다(<에피소드 1 참조>). 이는 똑같이 나누었을 때 부분이 될 수 있는 개수를 찾는 문항의 정답률이 69.8%로 낮았던 것과 관련되며, 본 문제는 6과 20을 공통적으로 남는 부분 없이 나눌 수 있는 수를 찾아야 하기에 학생들은 더욱 어려움을 느꼈다.

<에피소드 1> 이산량에서 비단위 분수로 나타내는 문제 해결 과정

교사 : 6은 20의 얼마인지 알아볼 때 왜 나누기를 했지? 나누라는 말이 없는데?
학생 : 분수는요 나누는 거예요.
교사 : 왜?
학생 : 20개 중에서 6개를 동생에게 줬어요. 동생에게 준 것이 몇 분의 몇인지 알려면 동생에게 주는 6개씩으로 나누어야 해요.
교사 : 그럼 남는 2개는 어떻게 하지?
학생 : 그러네요. 어쩌지?
교사 : 그런데 나머지가 있으면 안 돼?
학생 : 네. 나머지가 있으면 안 될 것 같기는 해요.
교사 : 그럼 왜 나머지가 있는데 1/3이라고 했니?
학생 : (당황하며) 모르겠어요.
교사 : 그럼 나머지 없이 나누어서 분수로 나타내면 어떻게 될까?
학생 : (머뭇거림)
교사 : 20을 6으로 나누니까 나머지가 있었잖아? 몇

개씩 나누면 나머지가 없이 묶을 수 있을까?

학생 : 5개씩 묶어서…… 2/4인 것 같아요.
5개씩 묶으면 4묶음이 되고 동생이 받은 딸기는 6개니까 4묶음 중에 2묶음인 것 같아요.

교사 : 4묶음 중에 2묶음은 5개씩 두 묶음이니까 10개잖아. 동생은 6개이고. 여기서는 4개 남는데, 되요?

학생 : (머뭇거림) 몇 개로 묶어야 될지 모르겠어요.

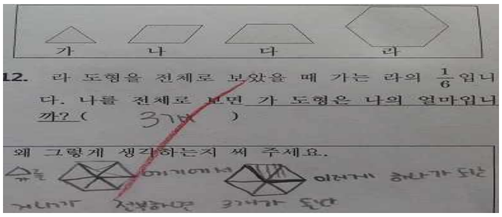
교사 : ([그림 Ⅲ-2], 이산량의 전체-부분의 관계 문제는 맞았음. 이를 가리키며) 바나나 6개는 바나나 8개를 4묶음으로 나눈 것 중에 3묶음이니? 왜?

학생 : 왜냐하면 2개씩 묶으면 4묶음이잖아요. 6은 3묶음이고 그래서 6은 전체를 4묶음으로 나눈 3묶음 이예요.

교사 : 그러면 이것도(6은 20의 얼마인가?) 묶을 수 있는 수를 찾아보세요.

학생 : (한참을 생각함) 모르겠어요. (확신 없이) 이것도 2로 묶나? (계산한다.) 2로 묶으면 20은 10개로 묶을 수 있고 6은 3개로 묶을 수 있어서 10분의 3인 것 같아요.

셋째, 전체가 달라질 때, 분수로 나타내는 문항도 연속량 46.3%, 이산량 61.1%로 정답률이 낮았다. [그림 Ⅳ-13] 문항에 대해 학생들은 6, 2, 3, 1/3 등의 답을 하였다. [그림 Ⅳ-13]처럼 '가'는 '나'에 2개 포함되도록 바르게 표현하였으나, 전체가 달라진 것을 이해하지 못하여 여전히 '라' 도형을 전체로 보고 3이라는 답변을 하였다. 또 분수로 답변하지 않고 자연수로 답변하는 오류도 많이 보였다.



[그림 Ⅳ-13] 전체가 달라짐을 인식하지 못하는 오류

2. 연속량 맥락에서 학생들의 어려움

각 문항별로 오류 유형을 분석하고 특히 연속량에서 정답률이 60%가 안 되는 문항(똑같이 나눈 부분의 모양 찾기, 전체-부분의 관계, 분수만큼을 알고 크기 비교하기, 부분을 분수로 나타내기, 전체가 달라질 때 분수로 나타내기)에 대한 오류를 상세히 분석한 결과, 연속량 맥락에서 학생들이 느끼는 어려움을 찾아낼 수 있었다.

첫째, 똑같이 나누기나 똑같이 나누어진 것을 찾는 것은 잘 하지만 똑같이 나누었을 때 부분의 모양을 찾는 능력은 부족함을 알 수 있었다. 물론 등분되었을 때의 모양 찾기는 교과서에 명시적으로 도달해야 할 학습목표로 제시된 것은 아니다(<표 Ⅱ-1> 참조), 그러나 교과서에서도 다양한 방법으로 2등분, 4등분을 하도록 하고 있으며 삼각형, 원, 육각형 등 다양한 도형을 등분한 것을 찾도록 하고 있다. 그리고 전체의 모양에 따라 어떻게 나누어야 똑같이 나누어지는지 아는 것은 다양한 방법으로 등분하는데 있어 필요한 능력이라 볼 수 있다. 또한 이러한 능력이 전체-부분으로서의 분수를 정의하고 후속 학습하는데 등분하기, 등분된 것 찾기 보다 더 중요하다고 볼 수 있다. 한편, 이산량의 경우, 수를 셀 수 있으므로 곱셈을 활용하여 어떠한 묶음이 전체를 똑같이 나눌 수 있는 묶음인지를 연속량보다 쉽게 파악할 수 있었다. 그러나 연속량은 양에 대한 비교가 이루어져야 하고 곱셈과 같은 특수한 전략이 없으므로 어떠한 모양의 부분이 모여 전체가 되는지 파악하는데 어려움이 있었다.

둘째, 똑같이 나누기 개념을 분수의 문제 해결 과정에서 연결지어 생각하는 능력이 부족하였다. 이는 등분에 대한 평균 성취도가 74.5%로 높고 등분된 상황에서 전체-부분의 관계를 이해한 학생들이 74.1%로 많지만, 등분되지 않은 상황에서 전체-부분의 관계를 이해한 학생들이 56.2%

로 낮은 것을 통해서 알 수 있다(<표 Ⅳ-1>, <표 Ⅳ-2> 참조). 정답률뿐만 아니라 오답 유형에서도 살펴볼 수 있는데 등분되지 않은 상황에서는 [그림 Ⅳ-3], [그림 Ⅳ-4]처럼 등분과 관련한 오류를 많이 보였다. 또한 1/3만큼 색칠하는데 똑같이 3등분하지 않고 3개로 나누어진 것 중 1개만 색칠한 것도 1/3이라고 하는 것은 분수에서 등분의 개념을 고려하지 않는다는 것을 알 수 있다.

셋째, 전체-부분으로서의 분수에서 핵심 개념이라 할 수 있는 전체-부분의 관계를 인식하는 능력도 부족함을 알 수 있었다. [그림 Ⅳ-4]처럼 부분과 부분을 비교하여 분수로 나타내는 경우나 [그림 Ⅳ-5]처럼 문제에 부분이 먼저 제시되었다고 부분과 전체를 바꾸어 분수로 표현하는 것은 전체-부분의 관계를 이해하고 있다고 볼 수 없다. 또한 전체를 6개로 나누고 그 중 4개를 색칠한 것뿐만 아니라, 10개로 나누고 4개를 색칠한 것도 4/6라고 하는 것은 전체-부분으로서의 분수 개념에 의한 문제 해결이라기보다는 시각적으로 반응한 결과라고 볼 수 있다.

넷째, 분수를 그림으로 나타내거나 그림을 분수로 나타내는 것은 대체적으로 잘 하였으나, 분수가 상대적인 수임을 인식하는 것은 어려움이 있었다. 오렌지 주스 1/2의 반을 먹었을 때 1/2이 기준이 되어 다시 생각해 보아야 함에도 불구하고 바르게 문제 해결을 한 학생은 8.6%에 불과하였다. 또한 전체가 달라졌을 때 분수로 나타내는 문제에 대해서도 정답률이 46.3%로 낮았으며 심지어 분수로 나타내지 않고 자연수로 나타낸 오류들도 많았다([그림 Ⅳ-13] 참조). 그러므로 전체-부분으로서의 분수에 대한 개념을 확고히 심어주고 이를 토대로 비로서의 분수나 분수가 상대적인 관계를 나타내는 수임을 알 수 있도록 지도할 필요가 있다.

3. 이산량 맥락에서 학생들의 어려움

각 문항별로 오류 유형을 분석하고 특히 연속량에서 정답률이 60%가 안 되는 문항(전체, 부분, 분수에 대한 알맞은 설명 찾기, 비단위 분수만큼 나타내기, 단위분수로 나타내기, 비단위분수로 나타내기)에 대한 오류를 상세히 분석한 결과 이산량 맥락에서 학생들이 느끼는 어려움을 찾아낼 수 있었다.

첫째, 교과서에 제시된 이산량 맥락의 전체-부분으로서의 분수(분수만큼 나타내기, 분수로 나타내기)의 정답률이 매우 낮았다. 이에 대한 원인을 찾아본 결과, 연속량에서처럼 분수 문제 해결 과정 중에 등분을 고려하는 능력, 전체-부분의 관계와 연결짓는 능력이 부족함을 알 수 있었다. 이산량에서 등분에 대한 평균 성취도는 79.6%이고 전체-부분의 관계에 대한 평균 성취도는 66.0%로 각각의 성취도는 낮다고 볼 수 없다. 그러나 <에피소드 1>이나 [그림 Ⅳ-11], [그림 Ⅳ-12]처럼 묶여지지 않는 부분이 생기도록 나누어졌음에도 불구하고 똑같이 나누지 못했다는 인식을 하지 못했고 답을 수정하려는 노력을 적극적으로 하지 못했다. 이와 마찬가지로 전체와 부분이 각각 주어져서 몇 묶음으로 나눈 것 중의 몇 묶음인지를 쉽게 파악할 수 있는 문항의 경우 정답률이 높았다. 그렇지만 문제 해결 과정 중에 무엇이 전체이고 무엇이 부분인지 학생 스스로 판단해야 하는 경우, 전체-부분의 관계를 제대로 파악하지 못하고 나눗셈을 하여 생긴 몫이나 제수, 피젯수 등을 적당히 분자, 분모에 사용하여 분수로 나타내는 오류들을 보였다.

둘째, 전체-부분의 관계를 통해 분수로 나타내는 데 있어 묶음의 수와 묶음 내의 수를 혼동하는 경우가 많았다. 이산량의 전체-부분으로서의 분수는 나머지가 없이 똑같이 묶음 짓고 전체와 부분의 묶음의 수로서 분수를 나타낸다. 그러나

많은 학생들이 3등분으로 나누지 않고 3개씩 묶는 오류를 보였고([그림 Ⅳ-2] 참조), 전체 묶음의 수와 묶음 내의 수로 전체-부분의 관계를 이해하고 있었다([그림 Ⅳ-6] 참조). 이 밖에도 5는 20의 얼마인지를 분수로 나타낼 때 묶음 내의 수와 전체 묶음의 수를 사용하여 분수로 나타내기도 하고([그림 Ⅳ-9] 참조) 묶음 내의 수와 부분 묶음의 수로 분수를 나타내는 오류를 보이기도 하였다([그림 Ⅳ-10] 참조).

셋째, 연속량과 이산량 사이에 가장 핵심적인 차이인 전체의 수에 있어서 차이를 인식하지 못하는 오류를 보였다. [그림 Ⅳ-7]의 문항에 대해 세희가 먹은 양은 전체 4개의 1/2임에도 불구하고 전체 1개를 2묶음으로 나눈 것 중에 1묶음이라는 것도 옳은 설명이라고 답하였다. 또한 누나와 동생이 가진 연필의 수를 비교할 때 전체 12의 2/6인 4개와 전체 12의 1/4인 3개를 비교하지 않고 6개중 4개와 4개중 1개를 비교하여 4가 1보다 크다고 답한 학생들이 많았다([그림 Ⅳ-8] 참조). 이는 전체가 1개가 아니라 여러 개인 이산량의 특성을 제대로 파악하지 못한 결과이다.

넷째, 분수 문제를 해결하는데 있어 학생들은 묶음을 짓기 보다는 세기 전략에 기반하여 곱셈이나 나눗셈 연산을 하였다. 세기 전략과 곱셈, 나눗셈 연산은 문항에 따라 연속량에 비해 이산량의 정답률을 높이는 현상을 낳기도 하였다. 그러나 전체-부분으로서의 분수에 대한 확고한 개념을 정립하지 않은 채 단순히 세기 전략의 활용은 많은 오류를 나타냈다. 묶음의 수 사이의 관계를 파악하기 보다는 묶음의 수와 묶음 내의 수를 혼동하고 <에피소드 1>, [그림 Ⅳ-11]처럼 6과 20을 공통적으로 묶을 수 있는 수를 찾기보다는 나눗셈을 하고 나눗셈 연산 결과 생긴 몫과 나머지로 분수를 나타내었다.

Ⅴ. 논의 및 결론

본 연구는 연속량과 이산량 맥락에서 학생들이 어떻게 전체-부분으로서의 분수를 이해하는지 살펴보고 특히 두 맥락에서 경험하는 어려움이 무엇인지 분석하고자 하였다. 주된 연구 결과를 토대로 시사점을 논의해보면 다음과 같다.

첫째, 연속량과 이산량 맥락에서 전체-부분으로서의 분수에 대한 성취도는 그리 고무적이지 않았다. 고학년 학생들을 대상으로 분수의 여러 하위 개념의 성취도를 비교 분석한 선행 연구에서(예, 권성룡, 2003; Charalambous 외, 2007) 공통적으로 전체-부분으로서의 분수에 대한 성취도가 가장 높았고 측정, 연산자, 비, 몫으로서의 분수에 대한 이해가 낮았다. 이와 같은 측면에서 전체-부분으로서의 분수에 대한 이해가 상대적으로 쉽다고 여겨질 수 있으나, 본 연구에서 하위 요소별로 상세하게 분석한 결과 50%의 정답률에도 미치지 못하는 요소들이 드러났다. 물론 선행 연구는 고학년을 대상으로 하였고, 분수에 대한 이해 역시 학년이 높아짐에 따라 향상된다고 기대해 볼 수 있으나, 전체-부분으로서의 분수 학습을 마친 3학년 학생들의 전반적인 성취도가 그다지 높지 않다는 점은 재고의 여지가 많다고 여겨진다.

특히, 전체-부분으로서의 분수는 초기 분수의 핵심적인 개념으로(Kieren, 1992; Mack, 1993) 다른 의미의 분수를 개념적으로 이해하는 데 영향을 끼친다(Behr et al., 1983; Charalambous et al., 2007). 또한 우리나라의 경우는 다른 분수의 의미에 비해 전체-부분으로서의 분수가 분수 개념 학습의 상당부분을 차지하고 있다. 이에 저학년 학생들이 어떻게 분수 개념을 형성하는지 그리고 그 과정에서 겪는 어려움은 무엇인지와 관련한 더 많은 연구가 필요하다고 여겨진다.

둘째, 본 연구에서 살펴본 평가 요소별로 전반

적인 학생들의 성취도를 비교해 보면, 등분, 전체-부분의 관계, 분수만큼 나타내기, 분수로 나타내기의 순서로 나타났다. 특히 분수만큼 나타내기와 분수로 나타내기의 성취도가 상대적으로 낮았다는 결과를 주목해 볼 필요가 있다. 구체적으로 살펴보면, 등분되지 않은 상황이나 전체와 부분이 명시적으로 드러나지 않은 문제 상황에서는 분수만큼을 나타내거나 분수로 나타내는데 많은 오류를 보였다. 이는 학생들의 등분이나 전체-부분의 관계에 대한 이해가 그만큼 확고하지 못하다는 단면을 드러낸다고 생각된다.

등분이나 전체-부분의 관계에 대한 이해는 전체-부분으로서의 분수를 이해하는 데 가장 기본적인 개념이다. 따라서 연속량과 이산량 맥락 모두에서 등분이나 전체-부분의 관계에 대한 이해를 보다 강조할 필요가 있다. 특히 분수의 크기를 비교하거나 전체가 달라지는 경우에 부분을 분수로 나타내 보는 활동과 같이 보다 복잡한 맥락에서도 등분이나 전체-부분의 관계를 생각해 보는 기회를 제공하는 것이 필요하다고 생각된다.

셋째, 연속량 맥락에서 학생들의 성취도가 60%이하로 나타났던 평가내용은 교과서에 제시되어 있지 않은 형태이거나 교과서의 ‘탐구활동’ 또는 익힘책의 ‘문제해결’에 제시된 형태의 문항이었다. 예를 들어 등분의 경우 교과서에 제시된 형태인, 똑같이 나누어진 것 찾기나 똑같이 나누기와 같은 문항에 대해서는 성취도가 높았던 반면에, 역으로 전체를 보고 등분하였을 때의 모양을 찾는 문항에서는 성취도가 낮았다. 전체를 등분할 수 있는 부분의 모양은 부분의 개수와 자연스럽게 연결되므로 전체-부분의 수 사이 관계를 분수로 정의하고 나타내는 데에 용이하다고 볼 수 있다. 따라서 학생들이 등분을 하면서 전체의 모양을 고려하여 부분의 모양을 스스로 결정해 보고 그에 따라 등분된 조각의 개수를 찾아보는 활동이 교과서에 포함될 필요가 있다고 생각된다.

한편, ‘탐구활동’이나 ‘문제해결’의 경우 본 차시에서 학습한 내용을 바탕으로 학생들의 탐구능력이나 문제해결 능력을 신장하기 위해 새롭게 구성된 코너임에도 불구하고, 본 연구 결과 학생들의 이해 정도는 의외로 낮았음에 주목할 필요가 있다. 따라서 이에 대한 지도나 학생들의 이해 정도를 보다 면밀히 살펴볼 필요가 있다고 생각된다.

넷째, 연속량보다 이산량 맥락에서 전체-부분으로서의 분수에 대한 성취도가 낮을 것으로 예상하였으나 세기 전략의 영향으로 이산량의 성취도가 높은 문항이 다수 있었다. 이는 범자연수 스킴이 분수의 개념 형성에 기초가 된다는 선행연구 결과와 일치한다고 볼 수 있다(Steffe & Olive, 1993). 그러나 묶음 짓기나 전체와 부분의 관계에 대한 개념이 확고하지 않았을 때에는 단순히 수를 세어 분수로 나타내는 오류를 보였다. 구체적으로 살펴보면, 묶음의 수와 묶음 내의 수를 사용하여 분수로 나타내는 오류를 보였고, 개념이 바탕이 되지 않은 형식화로 인해 곱셈, 나눗셈 연산을 통해서 나온 수로 분수를 나타내는 오류를 보이기도 했다. 이는 범자연수 스킴이 분수의 개념 형성을 방해할 수 있다는 선행 연구와 관련된다(Neuman, 1993; Ni, et al., 2005). 따라서 이산량 맥락에서 전체-부분으로서의 분수 개념을 확고히 심어줄 필요가 있으며 이 때 세기 전략, 곱셈, 나눗셈 연산 등과도 의미 있게 지도될 필요가 있다.

다섯째, 이산량 맥락에서의 성취도를 평가 요소별로 살펴보면, 교과서에 제시되어 있는 ‘분수만큼 나타내기’와 ‘분수로 나타내기’의 성취도가 교과서에 제시되어 있지 않은 ‘등분’과 ‘전체-부분의 관계’에 대한 성취도보다 더 낮은 것에 유의할 필요가 있다. 이에 학생들이 이산량 맥락에

서 겪는 어려움을 감안하여 교과서의 내용을 제고할 때, 어떤 내용을 추가·보완할 것인지에 대한 논의가 필요하다.

본 연구 결과에 따르면 이산량과 연속량은 각각의 맥락별로 오류 유형이 다르고 맥락별로 느끼는 학생들의 어려움이 달랐다. Pitkethly와 Hunting(1996)에 따르면, 다양한 물리적 맥락으로 인해 학생들의 이해에 차이가 생기며, 이러한 차이를 인식함으로써 분수에 대한 개념을 보다 폭넓게 이해할 수 있다고 하였다. 그러므로 연속량에 제시되어 있는 교과서 구성을 그대로 따라 이산량의 분수를 지도하는 것은 지양해야 하며 각각의 맥락의 특성에 맞는 선행 개념을 찾아 구성할 필요가 있다. 예를 들어 이산량에서의 전체-부분의 관계는 연속량과 달리 보다 명확하게 제시되어야 한다. 연속량에서는 전체와 부분 사이의 수 관계가 한가지이지만 이산량에서는 전체의 수, 묶음 내의 수, 전체 묶음의 수, 부분 묶음의 수 등 다양한 수가 존재한다. 실제 본 연구에서 학생들은 이러한 다양한 수 사이의 관계를 제대로 이해하지 못하여 오류를 범하는 경우가 많았다. 따라서 이산량 맥락에서 전체-부분으로서의 분수를 나타낼 때, 어떠한 수 관계를 사용해야 하는지 그리고 그 의미는 무엇인지와 관련하여 학생들이 보다 명확히 이해할 수 있는 구성이 필요하다고 할 수 있다.

본 연구는 부족하나마 3학년 학생들을 대상으로 연속량과 이산량 맥락에서 전체-부분으로서의 분수에 대한 이해를 면밀히 살펴보았다. 본 연구를 토대로 여러 가지 맥락에서 학생들의 초기 분수 개념의 이해와 관련한 후속 연구가 지속되기를 기대한다.

참고 문헌

교육과학기술부 (2009a). **수학 2-2**. 서울: 두산동아(주).

____________ (2009b). **수학 3-1**. 서울: 두산동아(주).

강흥규, 고정화(2003). 양의 측정을 통한 자연수와 분수 지도의 교수학적 의의. **학교수학**, 5(3), 385-399.

권성룡(2003). 초등학생의 분수이해에 관한 연구. 학교수학, 5(2), 259-273.

김도한 외(2009). **창의 중심의 미래형 수학과 교육과정 모형 연구**. 한국과학창의재단.

정은실 (2009). 싱가포르와 우리나라 교과서의 비교 분석을 통한 분수 개념 지도 방안 탐색. **수학교육학 연구**, 19(1), 25-43.

한국교육과정평가원(2004). **수학·과학 성취도 추이변화 국제비교연구-TIMSS 2003 결과 보고서-**. 한국교육과정평가원.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2. pp.* 95-102. Bergen, Norway.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Chan, W. H., Leu, Y. C., & Chen, C. M. (2007). Exploring group-wise conceptual deficiencies of fractions for fifth and sixth graders in Taiwan. *The Journal of Experimental*

Education, 76(1), 26-57.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on theoretical to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293-316.

Kieren, T. E. (1992). Rational and fraction numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. In R. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetics for mathematic teaching* (pp. 323-371). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 85-106). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: The effect of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 37-69.

Neuman, D. (1993). Early conceptions of fraction: A phenomenographic approach. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2, pp. 170-177. Tsukuba, Japan.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational psychologist*, 40(1), 27-52.

Steffe, L. P., & Olive, J. (1993). *Children's construction of the rational numbers of arithmetic. International study group on the rational numbers of arithmetic*, University of Georgia, Athens, GA.

Streefland, L. (1993). Fraction: A realistic approach. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 289-325). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Pepper, K. L. (1993). *Preschoolers' knowledge of counting and sharing in discrete quantity settings. thesis for the degree of master of education*. La Trobe University. Bundoora. Australia.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 30(1), 5-38.

Pothier, Y., & Sawada, D. (1983). Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(5). 307-317.

Reys, R., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009). *Helping children learn Mathematics*. NY: John Wiley & Sons Inc, 박성선, 김민경, 방정숙, 권점례 공역 (2012). **초등 교사를 위한 수학과 교수법**. 서울: 경문사.

An Analysis of Third Graders' Understanding on the Part-Whole Fraction Concept

Kim, Yu Kyung (Chilbo Elementary School)
Pang, Jeong Suk (Korea National University of Education)

This study analyzed third graders' understanding on the part-whole fraction concept in both the continuous and the discrete contexts. A set of problems were developed as an equivalent form to compare and contrast students' understanding of fraction in the two contexts. Unexpectedly, the results of this study showed that students' performance in the continuous contexts was slightly lower than their performance in the discrete contexts. Students tended to use different strategies depending on the contexts and they had difficulties in applying what they knew in the new contexts. On the basis of the detailed analyses about students' difficulties and their sources, this paper provides information on how to construct curricular materials and how to teach the basic concepts related to the part-whole fraction.

key words : part-whole fraction(전체-부분으로서의 분수), continuous context(연속량), discrete context (이산량), equal partitioning(등분)

논문접수 : 2012. 6. 26
논문수정 : 2012. 7. 27
심사완료 : 2012. 8. 20