대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 22 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 22, No. 3, 353 ~ 370. Aug 2012

우리나라 중학생의 함수 개념화 특성[1)]

변 희 현[*] · 주 미 경[**]

중학교의 함수 개념 도입과 관련하여 7차 교육과정의 개정 시 종속적인 변화관계에 기반하여 도입하도록 큰 변화를 시도하였고 이러한 방향은 현재 2009 개정 교육과정에서도 유지되고 있다. 이에 본 연구에서는 이러한 교육과정의 변화가 학생들의 함수 개념 이해에 어떤 변화를 가져왔는지 그리고 실제 교수 학습 장면에서 함수가 어떻게 지도되고 있는지를 탐색하였다. 이를 위해 학생들의 경우 과제기반 심층 면담을 통해 함수 개념화의 특성을 살펴보았고 또 다른 한편으로는 학생들의 지도교사들을 대상으로 면담을 실시하여 수업에서 함수를 도입하는 방식에 대해 질문하였다. 연구 결과 학생들은 종속적 변화관계에 기반하여 함수를 인식하는 정도가 매우 미약하며 교사들 또한 종속적 변화관계에 기반하여 함수를 지도하는데 어려움을 겪고 있음을 확인할 수 있었다. 이러한 논의를 바탕으로 학교수학에서 함수 지도와 관련한 몇 가지 제언을 하였다.

Ⅰ. 서론

함수 개념이 학교수학에 도입된 것은 20세기 초 독일에서 Klein이 수학교육 개혁을 주장한 이후이다. Klein은 “함수 개념은 단순히 하나의 수학적 방법이 아니라 수학적 사고의 심장이요 혼이다”라고 하면서 함수 개념이 학교 수학의 중심 관념이 되어야 함을 주장하였다. 수학의 여러 영역 중에 함수 영역은 우리의 생활 주변에서 일어나는 현상을 관찰하여 그 속에 내재된 수학적 법칙이나 형식을 발견하고 이를 구조화함으로써 변화하는 현상을 정리하기 위해 필수적으로 요구되는 지식이다(우정호, 1998).

또한 역사적으로 수학은 ‘대수’와 ‘기하’라는 두 개의 분야로 나뉘어 발전해 왔는데 이 두 분야의 통합을 가능하게 한 것이 함수이다. 이와 같이 함수는 현실 세계의 상황을 좀더 이해할 수 있는 도구가 될 뿐만 아니라 수학의 분야를 통합할 수 있다는 점에서 중요하다고 할 수 있다(Davis, 1982; 김남희 외 5인, 2006)

이러한 함수 지도와 관련하여 우리나라에서는 7차 교육과정에서 큰 변화를 시도하였다. 제 6차 교육과정까지는 함수 개념을 집합 사이의 일대일 대응관계로서 도입하여 왔으나 제 7차 교육과정에서는 함수를 종속적인 변화과정으로 개념화하여 지도하도록 하고 비례 관계를 바탕으로 도입하고 있다. 이러한 변화는 역사적으로 함수 개념이 비례 관계와 같이 함께 변화하는 두 양 사이의 관계로부터 발생된 것이라는 사실에 그

* 한국교육과정평가원(bhhmath@kice.re.kr)
** 한양대학교(mkju11@hanyang.ac.kr)
1) 이 논문은 2011년 한국교육과정평가원에서 수행한 중학교 학생의 수학과 학습 특성 연구의 결과 일부를 재구성한 것이다.

근거를 두고 있다. 그러나 제 7차 수학과 교육과정에서는 함수를 비례관계로 도입하면서 동시에 정의역, 공역, 치역 등의 개념을 함께 사용함으로써 함수 개념을 일관되게 지도하는데 어려움을 가져왔다. 더불어, 초등학교에서 함수라는 용어를 사용하지 않지만 변하는 두 양 사이의 대응 관계를 지도하는 반면, 중학교에서는 '대응'이라는 용어를 사용하지 않고 비례관계로만 도입하여, 고등학교에서 함수를 두 집합 사이의 대응 관계로 정의하게 될 때 동일한 개념에 대한 두 가지 정의 방식이 학생들에게 혼란을 야기하였는데 그 과정에서 초중고등학교에서의 개념 지도 방법 사이의 일관성이 부족하다는 문제점이 지적되었다.

이러한 문제점을 해결하기 위해서 2007년 개정 수학과 교육과정에서는 중학교 수준에서 함수 개념을 '한 양이 변함에 따라 다른 양이 변할 때, 두 양 사이의 대응 관계'로 도입하는 방안을 채택하였고 이러한 기조는 2009 개정 교육과정에서도 변함없이 유지되고 있다. 이 방안은 함수 개념의 핵심인 '종속 관계에 있는 두 양의 관계' 개념을 바탕으로 하고, 종속 관계에 있는 두 양의 대응 관계에 주목하여 두 양 사이의 관계식을 세우기가 용이하며 초등학교에서 학습한 내용의 자연스런 확장이 될 수 있는 것으로 생각되었다. 이와 같은 함수 개념의 도입 방법은 6차 교육과정에서 함수를 두 집합 사이의 대응 관계로 지도하는 방식이 함수 개념의 핵심인 종속성을 명확히 보여주지 못한다는 단점을 보완한 것이며, 동시에 '대응' 개념을 직관적인 수준에서 지도함으로써 이후 고등학교에서 함수를 두 집합 사이의 대응 관계로 지도할 때 문제 상황이 연속적으로 변화하는 두 양에 주목하는지 또는 이산적인 두 양 사이의 관계에 주목하는 것인지를 구분하게 하여 고등학교 함수 개념 사이에 관련성을 인식하는 것을 가능하게 할 것이라고 생각되었다 (신성균 외, 2005).

이 연구에서는 국가 교육과정에서 함수를 종속적인 변화의 관점에서 도입하도록 시도한 것과 관련하여 학생들은 함수를 어떻게 개념화하고 있는지, 그러한 개념화 특성에 대하여 함수의 교수-학습과 관련한 원인이 무엇인지 알아보고자 한다.

Ⅱ. 선행 연구 분석

국내외 많은 연구들에서는 학생들이 함수 개념을 어려워하고 있음을 보고하고 있다.

먼저, 함수 학습과 관련해서 학생들이 겪는 어려움 중에는 특별한 교수 방법의 부족함 때문이 아니라 개념의 의미 그 자체에 기인하는 것으로서 수학을 배우는 과정에서 불가피하게 나타나는 현상으로 학생들이 성장하면서 극복해 나가는 것으로 보는 관점이 있다. 이러한 어려움을 인식론적 장애라 부르고 함수에 대한 인식론적 장애로 변하는 대상의 인식에 대한 어려움, 독립변수와 종속변수의 구분, 함수와 비례 관계의 구분, 함수와 인과 관계의 구분, 함수와 함수 사이의 다양한 표현 사이의 구분, 변수 개념의 확장 등을 들었다(Sierpinska, 1992).

Vinner(1992)는 개념 이미지와 개념 정의의 불일치에서 비롯되는 함수 학습 과정의 어려움을 말하였다. 개념 정의는 수학의 형식적인 정의를 의미하며 개념 이미지는 개념 이름과 더불어 마음속에 연상되는 비언어적 실체를 의미하는 것으로 학생들은 개념 정의보다는 개념 이미지에 의해 많은 영향을 받는 경향이 있다. 학생들의 함수에 대한 개념 이미지는 함수라는 말을 들었을 때 떠오르는 것으로 함수의 관계식일 수도 있고, 함수의 그래프일 수도 있고, 다항함수, 지수함수, 삼각함수 등 특별한 함수일 수도 있다. 따라서 개념 이미지는 개인에 따라 많은 차이를

보이나 Vinner & Dreyfus (1989)의 연구에 나타난 학생들의 함수에 대한 개념 이미지를 정리하면 ‘함수는 대수적인 식이다’, ‘함수는 규칙성이 있어야 한다’, ‘함수는 하나의 규칙에 의해 주어진다’, ‘함수의 그래프는 연속이다’, ‘함수의 그래프는 규칙적이고 체계적이다’ 등이 있다. 그리고 대부분의 학생들은 수학적 개념이 아닌 개념 이미지를 이용하여 개념의 예와 예가 아닌 것들로 구분함을 밝히었다.

국내에서도 학생들이 함수와 관련한 수학적 내용을 개념적으로 이해하는데 많은 어려움을 겪는다는 많은 연구 결과가 보고되었다. 연구 결과들은 크게 학생들의 함수 개념 이해, 그래프 이해, 방정식과 함수의 관계의 이해라는 세 부류로 나누어 생각할 수 있다.

먼저 함수 개념의 이해와 관련해서 오윤희(2006)는 중학교 2학년 학생들이 겪는 인지적 장애로 ‘함수는 대수적인 식이다’, ‘함수는 ‘y= ’ 꼴이다’와 같이 함수를 대수적 방법에 집착하여 생각하는 경향을 확인하였다. 우미령(2005)은 중학교 3학년 학생들을 대상으로 연구한 결과 함수를 하나의 규칙이나 공식으로 보는 경향이 강하며 특별히 ‘y=어떤 대수식’과 같은 기호 표현을 함수로 보는 경우를 확인하였다.

그래프 이해와 관련하여 성종기(2000)는 중학교 3학년 학생들이 이차함수 그래프 영역에서 범하는 오류를 분석한 결과 수학적 정리나 정의 등이 잘못 이해되어 사용되는 오류가 가장 많았으며 상수준의 학생들조차 축의 방정식을 이용한 그래프의 대칭성을 활용하지 못하는 경우가 많음을 확인하였다. 최은형(2004)은 중학교 2학년 학생들을 대상으로 학습 수준에 따라 함수의 그래프 이해 정도를 파악한 결과 학생들은 함수의 그래프 정의를 이해하기보다는 그래프의 모양을 중시하며 그래프를 성립시키는 관계식을 구할 수 있어야 함수라고 생각하는 경향을 확인할 수 있었다. 함수의 그래프에 대한 문제 풀이 과정에서 모든 학습 수준에서 공통적으로 가장 많이 나타난 오류로는 정리나 정의를 제대로 이해하지 못하고 부적절하게 사용하는 오류를 가장 많이 범하는 것으로 나타났다. 그리고 대부분의 학생들은 기호나 식을 그래프로 나타낼 때 또는 그래프를 기호나 식으로 낼 때에 많은 어려움을 나타내었음을 보고하였다. 이나현(2009)은 중학교 2학년 학생을 대상으로 일차함수 그래프의 과제 해결능력과 해결과정에서 나타나는 반응특성을 알아보았다. 연구 결과 학생들은 다른 과제에 비해 여러 가지 그래프를 보고 일차함수임을 판별할 수 있는지를 알아보는 분류과제에서 높은 해결능력을 보였으나 일차함수를 판별하는데 일차함수의 개념정의 보다는 일차함수의 그래프가 직선 모양이라는 개념이미지에 의해 많은 영향을 받고 있었다. 많은 학생들은 비례관계, 함수, 일차함수에 대한 관계를 이해하지 못하고 개념들 사이에서 혼동을 하고 있음을 확인하였다. 또한 학생들은 그래프 과제를 해결할 때 전체적으로 접근하지 못하고 한 점 근방에서 국소적으로만 보는 경향과 그래프에 제시된 독립변수와 종속변수에 대한 이해가 부족하여 그래프를 해석할 때 어려움을 겪고 있음을 확인하였다.

또한 수학적 연결성의 관점에서 함수와 방정식 사이의 관계에 대한 연구로 손혜진(2011)은 중학교 3학년 학생들의 경우 방정식과 함수의 관계에 대한 이해 유형을 분석함으로써 대부분의 경우 방정식과 함수의 개념을 분리시켜서 서로 연결짓지 못함을 보고하였다. 함수의 그래프에서 특정한 점을 구하기 위해 방정식의 풀이를 이용하는 것은 의미를 부여하지 못한 채 알고리즘적인 계산 방식에 따른 결과였다. 또한 중학교 2학년에서 일차방정식과 일차함수의 관계, 연립방정식의 해가 두 일차함수의 교점이 됨을 학습

하나 3학년에서는 이차방정식과 이차함수를 관계를 다루지 않음으로서 학생들이 방정식과 함수 사이의 관계를 이해하지 못하는 하나의 원인으로 분석하였다. 이소정(2009)은 중학교 3학년 학생들을 대상으로 함수와 방정식 사이의 관계 인식에 관한 오류 유형을 조사한 결과 필수적인 사실·개념의 부족이 눈에 띄게 높은 비율로 나타났고, 관계적 해석과 판단에서의 장애로 인한 오류, 기술적 오류 등이 뒤를 이음을 확인할 수 있었다.

위에서 살펴본 바와 같이 함수와 관련한 선행 연구에서는 주로 함수를 학습하는 데 학생들이 나타내는 인지적 장애 또는 수학적 오류를 분석하고 그 유형을 분류하는 경향을 보이고 있다. 이에 본 연구에서는 우리나라 수학과 교육과정이 특별히 함수를 변수 사이의 대응 관계로 개념화하는 방법에서 변수 사이의 종속적 변화 관계로 개념화하는 방법으로 방향을 전환하는 맥락에서 중학생들이 함수를 개념화하는 방식과 관련한 특성을 분석하여 함수 관련 교육과정의 실행 및 개발을 위한 기초자료를 제공하고자 한다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구대상

본 연구는 국가 수준의 학업성취도 결과를 기준으로 '보통' 수준에 해당하는 학생들을 대상으로 실시한 과제 기반 심층 면담 자료를 기반으로 진행되었다. 본 연구의 면담은 2011년 7월에 이루어졌으며 이 시기는 국가 수준 학업성취도 평가를 치르기 이전이었다. 따라서 일반적으로 학교의 평가 결과는 해마다 크게 변동되지 않는다는 점을 고려하여 해당 학교의 이전 몇 년간 성취도 결과에 비추어 '보통'에 해당하는 학생들이 학교에서 차지하는 성적 등위를 고려하여 면담학생을 선정하였다. 면담 대상 학생은 먼저 서울과 경기도 지역에서 사회 경제적 배경과 학업 성취도 등이 평균적인 지역의 학교를 지역별로 각각 두 곳씩 선정한 후 해당 학교의 수학교과 담임교사에게 수학의 학업성취도를 기준으로 3학년 학생 중 4명의 학생을 선정해 줄 것을 요청하였다. 남자 중학교인 한 학교를 제외하고는 모두 남학생과 여학생을 2명씩 선정하였다. 따라서 면담에 참여한 학생은 여학생 6명, 남학생 10명으로 총 16명이었다.

2. 연구방법

가. 과제기반 면담 문항 개발

본 연구의 과제 기반 심층 면담에 사용된 문항은 피면담자인 중학생들이 함수를 개념화하는 양상을 탐구하기 위한 것으로 함수와 관련된 다양한 상황을 수식, 일상적 언어, 표, 다이어그램, 그림 등의 다양한 표현을 통해 제시하고 학생으로 하여금 각각이 함수적 상황으로 성립할 수 있는지 여부를 판별하고 그 판별의 근거를 설명하도록 하였다. <표 Ⅲ-1>에 제시된 바와 같이 면담 문항은 모두 7개로 구성되었으며 각 문항의 특징을 간략히 소개하면 다음과 같다.

문항 1은 반지름(x)과 원의 넓이(y)와 같이 변화하는 두 양 x, y 사이의 관계를 대수식으로 표현한 것으로 교과서나 문제집 등에서 다루어지는 함수의 대표적인 사례이다. 문항 2는 1과 같이 변화하는 두 양과 관련되어 있으나 대수식 없이 일상적인 언어 표현을 사용하고 있다는 점과 사람 수와 피자 양 사이에 반비례 관계가 성립한다는 특징이 있다. 문항 3은 변화하는 두 양을 표를 이용하여 표현하였으며 앞의 두 문항과 달리 변화 패턴에서 규칙성이 부족한 사례이다. 문항 4는 하나의 자연수에 여러 개의 약수가 대

<표 Ⅲ-1> 과제기반 면담용 문항

※ 다음 중 함수로 볼 수 있는 것을 모두 고르고 그렇게 답한 이유를 쓰시오.

1. 반지름 길이 x(㎝)에 대한 원의 넓이를 y(㎠)라고 하면, $y=\pi x^2$

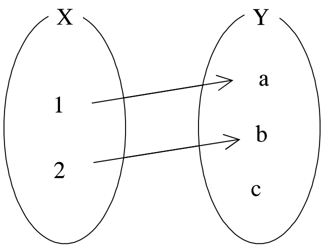
2. 피자 한 판을 여러 친구들과 똑같이 나누어 먹을 때 한 사람이 먹을 수 있는 피자의 양

3. 다음은 민수의 출생 후 키와 발의 크기를 기록한 표이다.

	출생시	1세	2세	3세	4세	5세	6세	7세	8세
키(cm)	51	75	86	93	100	107	113	118	123
발길이 (㎜)	60	95	115	125	130	140	145	170	180

4. 자연수와 그 약수

5.



6. 다음은 연간소득에 대한 세율을 나타낸 표이다.

연간 소득(단위 : 만원)	세율(%)
0 초과 ~ 1200 이하	6
1200 초과 ~ 4600 이하	15
4600 초과 ~ 8800 이하	24
8800 초과 ~	35

7. 다음은 2011년 4월 10일 신문에 실린 날씨정보이다.

응하는 경우를 사례로 들고 있다. 이 문항은 학생들이 함수를 일대일 대응 관계로 파악하는 정도를 조사하기 위하여 추가되었다. 문항 5에서는 변화하는 두 양 사이의 관계보다는 임의의 대응의 관점에서 파악되는 일대일 대응 관계로서 함수를 다이어그램으로 표현하였다. 문항 6은 소득 수준별로 변화하는 세율을 나타내는 표를 제시하여 다대일의 불연속적 대응관계를 함수의 관점에서 어떻게 파악하는 지 조사하고자 하였다. 문항 7은 지역별 날씨 정보를 그림으로 표현한 상황을 제시하여 이를 어떻게 함수로 이해하는 지 조사하기 위한 것이다.

나. 면담 진행

면담은 반구조화된 과제 기반 면담의 형식으로 진행되었다. 면담에 참여한 학생은 개별적으로 <표 1>의 문항을 해결한 뒤 면담과정에서 풀이를 기반으로 해결방법을 설명하도록 하였고 면담자는 학생이 설명하는 해결방법에 대하여 불분명한 부분이 등장하거나 연구와 관련하여 중요한 이슈가 등장하는 부분에서 부가적인 질문을 제기하였다. 면담과정에서는 학생들이 각각의 상황에서 함수적 상황 여부를 정확히 인식하고 있는지를 조사하기 보다는 주어진 상황과 함수 개념 사이의 관련성을 판단하는데 어떤 개념적 이해를 적용하고 있는지에 초점을 맞추었다. 설문지 과제에 대한 해결방법과 더불어 해결방법과 관련된 수학적 아이디어나 방법을 어디서, 어떻게, 왜 학습하게 되었는지를 추가적으로 질문하였다. 면담 시간은 한 학생당 대략 1시간 정도 소요되었으며 학생의 동의를 받아 모두 비디오로 녹화하였다. 녹화내용은 모두 녹취하여 담화분석을 위한 자료로 활용하였다.

다. 면담 내용 분석

학생과의 면담 내용은 전 과정의 녹화와 전사과정을 거쳐 분석하는 방법을 사용하였다. 2명의 연구자가 독립적으로 전사 및 녹화자료에서 드러나는 특성을 추출한 다음 이에 대한 연구자간의 공통점과 차이점에 대해 논의를 하였다. 논의 결과를 토대로 함수 개념화의 특성에 대한 근거를 상세하게 구체화하고 이를 근거로 면담자료에서 드러나는 학생들의 특성을 다시 살펴보고 검토하는 과정을 반복함으로써 연구자간의 일치도를 추구하였다.

Ⅳ. 결과 분석

함수 개념에는 종속성, 그래프, 공식, 행동, 과정, 대응, 순서쌍, 대상 등과 같이 다양한 측면이 존재하는데(Selden & Selden, 1992; 김남희 외 5인, 2006 재인용) <표 Ⅳ-1>에 나타난 바와 같이 면담과정에서 학생들이 함수 판단의 근거로 주로 사용한 것을 빈도순으로 나열하면 함수식, 과정, 규칙성, 대응 순이었고 변화하는 두 양 사이의 종속적 관계를 인식하여 함수를 판단하는 학생은 극히 드물었다[2].

선행연구를 기초로 본 연구에서 학생들의 함수판단 근거 분류를 설명하면, ‘종속성’은 변화하는 현상에서 두 변수 사이의 종속 관계를, ‘함수식’은 변수 사이의 종속 관계를 독립변수를 포함한 대수식으로 나타내는 것을, ‘과정’은 함수를 입력, 변환, 출력의 처리 과정으로 생각하는 것으로 독립변수를 택하여 어떤 행동을 취하여 결과를 얻는 과정으로 보는 것을, ‘대응’은 두 집합 X, Y가 있을 때 임의의 $x \in X$에 대하여 유일한 y가 존재하는 것을 의미한다. ‘과정’은 x에 대한 y의 값의 관계를 동적인 측면에서 파악하는 것이라면 ‘대응’은 정적인 측면에서 파악하는 것으로 비교할 수 있다. ‘규칙성’은 변화의 관계가 규칙적이어야 함수라는 생각을 분류한 것으로 함수의 본질적인 측면이 아님에도 불구하고 많은 학생들이 함수 판단의 근거로 사용하고 있음을 확인할 수 있다. 아래에서는 함수 개념화와 관련하여 면담에서 확인할 수 있었던 학생들의 특성을 범주별 빈도순으로 살펴보겠다.

2) 학생들의 답변에는 몇 개의 측면이 서로 연결되어 있는 것을 확인할 수 있었으나 함수여부를 판단한 기준을 중심으로 하나의 범주에 속하도록 분류하였다.

<표 Ⅳ-1> 문항별 학생 답변과 판단근거

문항	함수 여부	판단근거					
		종속성	함수식	과정	규칙성	대응	기타
1	이다	1	9	3	·	2	1
	아니다	·	·	·	·	·	·
2	이다	2	6	2	·	1	·
	아니다	·	4	·	·	1	·
3	이다	·	·	·	·	1	·
	아니다	·	4	·	11	·	·
4[3)]	이다	·	·	1	·	1	·
	아니다	·	3	2	3	2	1
5	이다	·	3	7	·	2	4
	아니다	·	·	·	·	·	·
6	이다	1	4	1	·	2	·
	아니다	·	1	·	1	·	6
7	이다	·	·	1	·	1	·
	아니다	·	5	·	2	·	7

1. 함수식

<표 Ⅳ-1>에 나타난 바와 같이 학생들은 함수 여부를 판단하는데 함수식을 기준으로 삼은 경우가 많았다. 학생들의 생각을 보다 면밀히 살피기 위해 학생들의 답변 중 특징적인 것을 발췌하였다. 먼저 문항 1은 문제에 식이 주어져 있는 경우로 식을 근거로 함수라고 답한 경우가 대부분이다. 다만 함수식을 일차함수나 이차함수와 같은 형태의 것으로 한정하여 생각하는 경향을 확인할 수 있다.

학생7 : 함수는 Y=aX 라는 식으로 나와야 하잖아요. 그렇게 나와 있어야 하는데 마지막에 보면, Y=πx²이라는 식이 나와 있으니까 이거는 확실히 함수라는 게 맞게 되는 거예요.

문항 2에서는 함수식을 근거로 함수라고 답한 학생들의 경우 식을 바르게 세운 학생은 단 한 명도 없었다. 식을 바르게 세우지는 못하였으나 자신이 세운 식을 근거로 함수라고 답하였다. 문제의 상황은 사람의 수에 따라 한 사람이 먹는 양이 변하는 상황이므로 변수는 사람의 수와 한 사람이 먹는 양이 되어야 하고 특별히 사람의 수가 독립변수가 된다. 그러나 아래에 제시된 학생 1과의 대화에서와 같이 변수와는 무관한 피자 한판을 y로 둠으로써 변수에 대한 기본적인 이해가 매우 미약함을 나타내는 것으로 볼 수 있다. 즉, 학생들은 변수를 설정할 때 변화 현상에 주목하지 못한 채 무심히 임의로 정하는 것으로 보였다. 또, 학생들이 세운 함수식 중에는 대수적으로 성립하지 않는 식이 대부분인 점을 확인할 때 변수를 설정하는 것과 설정한 변수 사이의 관계를 식으로 표현하는 것에 어려움을

3) 문항 4의 경우 3명의 학생이 함수여부를 판단하지 못함에 따라 전체 답변 학생수가 13명으로 표시된다.

겪는 것으로 볼 수 있다.

연구자 : 2번을 함수라고 한 이유가 뭐죠?

학생 1 : 음... 그냥 피자 한 판을 y라 하고 먹을 수 있는 양을 x라 하고 $y=x$ 했는데, 뭔가 이상했는데 $y=x$ 뒤에 뭔가 더 상세하게 나올 것 같은데, 헷갈려서 그냥 일단 동그라미 쳤어요.

한편, 문항 2에서 함수식을 근거로 함수가 아니라고 답한 학생들과의 면담 내용을 살펴보면 '함수는 식으로 표현되어야 하는데 주어진 상황을 식으로 표현하는 것이 어렵다'는 이유와 '분수식은 함수식이 아니다'라는 이유를 확인할 수 있었다.

문항 3에서도 학생들은 함수식을 세우기 어렵다는 이유로 함수가 아니라고 판단하였으며 특별히 학생 7과 같이 하나의 식으로 표현할 수 없다는 점을 함수가 될 수 없는 주요 이유로 생각하는 경향도 확인할 수 있었다.

학생 7 : 그러니까 만약에 $y=ax$ 라는 식을 썼을 경우... 잠시 만요. 이게, 이 숫자랑 이 숫자랑(출생시의 키와 발) 연관이 있을 거예요. 이렇게 다음 나이로 넘어갔으면, 이 수랑, 이 수랑(1살 때 키와 발) 연관이 있어요. 그런데 출생시랑 1살 때는 연관이 없어요. 그러면 식을 또 다른 거를 써야 되죠. 그러면 안 돼요.

문항 4에서도 함수식을 기준으로 함수를 판단한 경우 문항 3과 유사하게 '식을 세우기 어렵다'와 '하나의 식으로 표현할 수 없다'는 점을 이유로 들어 함수가 아니라고 답하였다.

문항 5에서 함수식을 기준으로 답변한 학생들의 경우 특이한 점은 모두 함수식을 $y=x$ 또는 $y=x^2$로 임의로 설정한 후 함수로 파악하며 나아가 함수식에 1, 2를 대입하여 a, b의 값을 구하는 문제로 이해하였다.

연구자 : 5번은 왜 함수가 된다고 생각했어요?

학생 10 : 음.. 함수식을 $y=x^2$이라고 해놓으면, x에 1을 대입한다고 하면 y값을 알 수 있어서.

연구자 : 이 그림은 무슨 뜻이에요? 화살표로 연결된 이러한 것이.

학생 10 : x에 이거를 넣으면 y값에는 이거.

(중략)

학생 10 : a, b 구하는 거 아니였어요?

문항 6에서 학생들은 연간소득과 해당 세율을 알면 세금에 관한 식을 세울 수 있으므로 함수라고 답하였다.

학생 3 : 6번은 와이의 범위에 따라서 와이를 와이의 범위를 여기 있는 만큼 정해놓고 세율을 엑스만큼 곱해 주면은 함수식을 세울 수 있어요.

연구자 : 함수식을 써봐주시겠어요?

학생 3 : $0<y<1200=6x$

연구자 : 이 식은 어떻게 세운 것이죠?

학생 3 : 음... 세율이 6퍼센트인데... x만큼 곱한다는 것은 내는 세금 양이잖아요 . 그니까 만약에 와이가 천만원이면은 세율은 천만원 중에 6프로니까 곱해주는 거....

한편, 한 명의 학생은 세율의 의미를 파악하지 못함에 따라 연구자가 세율의 의미를 설명한 후에 문제에서 제시된 표가 많이 벌수록 세율이 높아짐을 나타내는 표임을 설명하고도 함수식을 세울 수 없기 때문에 함수가 아니라고 생각하였다. 즉, 소득에 따른 세율의 변화관계를 파악하

고도 이보다는 함수식의 여부가 함수판단의 주요근거가 됨을 나타낸다. 이 때 함수식을 세울 수 없는 이유는 무엇을 x, y로 두어야 할지를 알지 못하기 때문이었다.

연구자 : (세율의 의미 설명 후) 6번은 함수로 볼 수 있나요?
학생 7 : 없는 것 같아요.
연구자 : 왜 없어요?
학생 7 : 그러니깐 규칙적인 관계를 가진 식이 안 나와서요. y를 뭐로 둘지, x를 뭐로 둘지..

즉, 함수식을 변화하는 두 변수인 연간소득과 세율사이의 관계를 식으로 표현하는 것으로 이해하는 정도는 매우 미약하며 주어진 상황에서 변수와 무관하게 하나의 식을 도출할 수 있으면 그것이 함수식이고 이로부터 함수라고 판단하는 경향을 확인할 수 있다.

문항 6을 통해서 드러난 것 중 주목할 만한 학생들의 생각은 변화의 종속관계를 식으로 표현한 것으로 함수식으로 이해하지는 못하며 단지 주어진 상황에서 변수와 무관하게 하나의 식을 도출할 수 있으면 그것이 함수식이고 이로부터 함수여부를 판단하는 경향이 있다. 덧붙여 위의 두 대화내용에서 확인할 수 있듯이 학생들은 변수 x, y를 설정하는 것에 어려움을 겪음을 확인할 수 있다. 이는 두 변수 사이의 종속적인 변화관계에 대한 이해가 취약함과 밀접한 관련이 있는 것으로 보인다.

문항 7과 같이 임의의 대응 관점에서 파악되는 지역별 날씨 정보를 그림으로 표현한 상황에서도 함수식을 세울 수 있느냐 없느냐가 두 번째로 빈도가 높은 함수 판단의 주요 근거가 됨을 확인할 수 있다.

학생 7 : 식으로 나타내는 게 어려워요. 그래서 (함수로 볼 수) 없을 것 같아요.

함수식을 근거로 함수를 판단한 학생들은 이러한 생각을 갖게 된 하나의 이유가 다음과 같이 교과서에 제시된 함수 기호 $y=f(x)$를 식으로 파악했기 때문임을 알 수 있다.

연구자 : 왜 함수가 아니라고 했죠?
학생 15 : 식을 못 쓸 거 같아요.
연구자 : 함수이려면 식이 세워져야 되는 건가요?
학생 15 : 네.
연구자 : 그런 생각은 어디서 갖게 되었을까?
학생 15 : 교과서에서 (함수는) $y=f(x)$ 뭐 이렇게 나오니까

면담 문항 중 문항 3-7은 두 양 사이의 관계를 하나의 관계식으로 표현하는 것이 어려움에도 불구하고 학생들은 모든 문항에 걸쳐 식의 존재 여부를 기준으로 함수를 판단하는 경향이 강함을 확인하였다. 면담과정에서 학생들은 교과서에 제시된 함수 기호 $y=f(x)$ 가 이러한 생각의 한 원인으로 작용하였음을 말하였다. 이와 관련하여 교과서의 전개 방식이 함수의 다른 개념적 측면의 이해가 충분히 이루어지기 전에 성급하게 함수식이 도입되고 이후 교과서에서 함수식을 중심으로 함수를 다루는 것은 아닌지 살펴볼 필요가 있다.

2. 과정

학생들은 함수여부를 판단하는데 '함수식'에 이어 '과정'의 관점을 많이 사용하는 것을 <표 2>에서 확인할 수 있다. '과정'의 측면에서 함수를 이해하는 학생들의 생각은 무엇인지를 확인하기 위해 먼저 문항별 답변의 특징을 살펴보기로 한다. 먼저 문항 1의 경우 문제에 주어진 식

의 x에 어떠한 값을 대입하면 y값이 산출되므로 함수라고 이해하는 것으로 이 때 함수식은 하나의 입력에 대하여 하나의 출력을 가능하게 하는 매개체의 역할을 하는 것으로 이해한다.

연구자 : 1번 문항은 왜 함수라고 생각했어요?

학생 6 : x값에 뭐를 넣으면 y값에 뭐가 나오는 게 함수잖아요. 그러니깐 x값에 1을 넣으면 y값은 π가 나오고 이런 식이니까…

이와 같이 함수식을 매개로 함수를 과정의 측면에서 개념화한 학생의 생각은 다음 두 학생과의 대화에서도 확인할 수 있었다.

연구자 : 4번 문항은 함수가 아니라고 한 건가요?

학생 10 : 함수는 x값에 이렇게 뭘 대입하면 y값이 나와야되는데, 안 나오는 걸 수도 있는데.. y값이 안나오면 함수가 아니라서..

연구자 : 그럼 4번은 안 나오는 거라고 생각한 거에요? 왜 그렇죠?

학생 10 : 식을 잘 못 세우겠어요. 이런 거는 식을 어떻게 세워야 할지...

연구자 : 5번은 왜 함수라고 생각했어요?

학생 8 : 무슨 식에 1을 넣어서 y에서 a가 나온거자나요. 그러니까 함수가 맞다고 생각했는데

연구자 : 그러면 2는?

학생 8 : 2도 똑같은 식을 거쳐가지고 b가 나온거라고 그렇게 생각해서 함수라고 ...

연구자 : 그럼 그 식을 구할 수 있나요?

학생 8 : 음.... 이거는 a하고 b하고 c가 어떤 특정한 값으로 나오지 않았잖아요 그래서 5번같은 식을 세울 때에는 음... a나 b같은걸 모르니까 세울 수 있다고 생각한 것 같아요

또한, 문항 6에서 '과정'의 관점에서 함수를 파악한 학생들의 답변은 '모든 연간 소득에 대해 세금이 산출된다는 점을 이유로 들고 있는데 이는 세금을 구하는 식을 세울 수 있기 때문으로 설명한다'는 점이다.

과정 관점이 'x에 무엇을 대입할 때 하나의 y가 나온다'와 같이 입력과 출력의 순차적이고 동적인 측면에서 함수를 이해하는 것이라면 대응 관점은 'x에 대하여 유일한 y가 존재'한다는 관계에만 주목하는 것으로 과정 관점보다 추상적이고 정적인 측면의 이해이다. 학생들은 문항 5와 같이 대응 관점에서 함수를 정의할 때 사용되는 전형적인 다이어그램의 표현에서도 과정관점으로 이해하는 경향이 높음을 확인할 수 있다. 이 때 학생들은 과정 관점에서 함수를 해석하기 위해 함수식을 구하려 한다는 점에서 과정관점의 이해와 함수식은 밀접하게 연결되어 있음을 확인할 수 있다. 즉, 함수는 하나의 입력에 대해 하나의 출력을 얻는 것인데 이러한 입, 출력을 가능하게 하는 변환의 매개체가 함수식인 것으로 이해하는 것이다.

3. 규칙성

규칙성을 근거로 함수가 아니라고 판단한 경우는 문항 3에 집중적으로 나타남을 확인할 수 있다(<표 2>참조). 규칙성을 근거로 답변한 학생들의 생각을 살펴보면 함수는 x, y값의 변화가 규칙적인 것으로 한정하여 이해하는 경향을 확인할 수 있다.

연구자 : 문항 3을 함수가 아니라고 보았네요?

학생 9 : 처음에는 그냥 키가 증가할 때 발길이가 증가했으니까 함수인 것 같았은데… 옛날에 배운 것 생각해보니까 이렇게 들쭉날쭉하게 변하는 거는 함수가 아닐 것 같아요.

연구자 : (3)을 함수가 아니라고 보았네요?

학생 1 : 제가 지금까지 본 함수는 x값이 일정하게 늘어나면 y값도 일정하게 늘어나고 그런건데, 키나 발의 크기는 일정하지 않고 불규칙적으로 계속...발이 만약 10mm커졌다면 키는 갑자기 24cm 커지기도 하고, 그리고 올해 그렇게 커졌다면 내년에는 22cm커지고 예를 들어 12mm가 커지고 그런다고 해서 ... 볼 수가 없을 것 같아요.

문항 4는 함수의 일가성에 대한 이해를 측정하려 했던 것이나 이를 근거로 함수가 아니라고 판단한 학생들은 많지 않았다. 문항 4를 규칙성의 관점에서 함수가 아니라고 답한 학생은 3명으로 자연수와 그 약수를 생각할 때 자연수가 커짐에 따라 대응하는 약수가 규칙적이지 않다는 점을 들어 함수가 아니라고 판단한 것이다.

위에 제시한 학생들의 답변을 잘 살펴보면 '옛날에 배운 것을 생각해보니까... ' '지금까지 본 함수는 ...' 등의 이유를 들어 규칙성을 함수 판단의 근거로 사용함을 확인할 수 있다. 즉, 규칙성을 근거로 함수 여부를 판단하는 원인은 학생들이 이전의 학습에서 주로 규칙적인 변화를 다룬 경험에 기인한 것임을 알 수 있다. 즉, 함수를 판단하는 기준으로 규칙성을 사용하는 것은 이전의 학습 경험과 밀접하게 연결된 것임을 알 수 있다.

4. 대응

대응의 측면에서 함수를 개념화한 학생들의 생각은 특정 문항에 집중되어 드러나기 보다는 전체 문항에 걸쳐 고르게 나타났다. 대응의 관점에서 함수를 개념화한 학생들의 특성을 살펴보면 문항 1의 경우 아래의 면담내용에서도 알 수 있듯이 대응 관점의 함수 정의를 알고 있으며 이러한 정의에 따라 함수 여부를 판단함을 확인할 수 있다.

연구자 : 1번이 함수라고 생각한 이유는 무엇이지요?

학생 5 : x값에 대한 y값이 일정.... 아 ... 어..... 하나여서

연구자 : x값에 대한 y값이 하나여서? 좀 더 구체적으로 설명을 해주시겠어요?

학생 5 : 함수의 정의가요. 제가 알고있는 거로는 x값에 대한 y값이 하나로 떨어지는게

연구자 : 하나로 떨어진다?

학생 5 : 그니까 네. x값 하나에 대한 y값이 하나 밖에 없다... 그게 각각의 x값에 대한 y값이 하나밖에 없다는 걸로 알고 있는데요.

문항 2에서도 'x에 대한 y가 하나로 정해진다'라는 대응 관점에서 함수여부를 판단하였으나 학생 5는 친구들의 수가 바뀜에 따라 한 사람이 먹는 양이 바뀐다는 점을 하나로 정해지지 않는다고 판단하여 함수가 아니라고 하였다. 즉, 학생 5는 대응 관점의 함수 개념을 말로 비교적 정확히 표현할 수는 있으나 이러한 개념을 상황에 적용하여 해석하는 데는 성공하지 못하였다. 이는 대응을 변화하는 두 양 사이의 관계에서 파악하지 못한 채 함수의 일가성 의미를 잘못 적용한 것으로 변화하는 양 사이의 관계에서 친구수에 따른 한 명당 먹을 수 있는 양이 하나로 정해진다는 측면의 이해가 부족했기 때문이다.

또한 대응의 관점에서 함수를 개념화하는 과정에서 대응의 일가성을 단사함수로 잘못 이해하는 현상도 확인할 수 있었다. 예를 들어, 문항 6에서 여러 개의 x에 대해 하나의 y가 대응된다는 점을 들어 함수가 아니라고 답하거나 문항 7에서 지역별 최고・최저 기온을 파악하였으나 지역별로 온도가 동일한 것이 있어서는 곤란하다고 답한 학생의 생각이 이에 해당한다.

5. 종속성

7차 교육과정 개정시 이전에 대응을 바탕으로 도입하던 함수 개념을 종속적인 변화 관계에 기반하여 개념화하도록 한 것이 함수 영역에서 가장 큰 변화였고 현재의 교육과정에서도 그 기조는 계속 유지되고 있다. 그런데 <표 2>에 나타난 바와 같이 종속성의 관점에서 함수를 판단하는 정도는 매우 미약한 것으로 나타났다. 특별히 종속성의 관점에서 함수라고 판단한 문항 1, 2, 6의 답변은 모두 한 명의 학생에 의한 것으로 다음과 같다.

> 연구자 : 1번을 함수라고 생각한 이유는 뭐에요?
> 학생 2 : 원의 반지름이 늘어나면 늘어남에 따라 원의 넓이도 늘어나기 때문에 그를 함수로 나타낼 수 있다고 생각했거든요.
> (중략)
> 학생 2 : 저는 이게 얼마큼 변하는 거에 따라 그 결과도 어떻게 따라 변해지면 그걸 함수로 생각하거든요 저는.
>
> (1번 문항에 대한 면담 중)

> 학생 2 : 여러 친구들이 똑같이 나눠 먹는다고 했잖아요? 친구들이 많으면 많아질수록 한 사람이 먹을 수 있는 피자양이 점점 줄어들 수 있다하기 때문에 그것도 이제 많아질수록 여기도 적어지기 때문에 함수로 나타낼 수 있다고 생각했어요.
>
> (2번 문항에 대한 면담 중)

> 학생 2 : 이게 연간소득이 이 만큼일 때 세율이 이 정도잖아요. 그니까 이 연간소득에 따른 세율이 얼마인지 나와 있기 때문에 이게 얼마 늘어나면 세율이 이만큼 늘어난다. 뭐 그래서 뭐라고 해야 되지 이만큼이 늘어나니까 세율이 이만큼 늘어난다. 그래서 세율이 이만큼 늘어남에 따라서 아, 아니 연간소득이 이렇게 늘어남에 따라서 세율도 늘어난다. 그래서 함수로 볼 수 있다 이렇게 보았어요.
>
> (6번 문항에 대한 면담 중)

종속적 변화관계를 근거로 함수를 판단한 학생은 비록 전체 면담자 가운데 한 명이었으나 비교적 일관된 이해를 보였다는 점에서 주목할 만하다. 이에 함수를 이렇게 생각하게 된 이유를 질문하였다.

> 학생 2 : 학교 선생님이 그렇게 설명하셨던 것 같아요. 함수는 무엇이 변함에 따라 다른 하나가 따라 변하는 것으로...

비록 면담 학생 가운데 단 한명만이 종속성의 관점에서 함수를 판단하였으나 이것이 학교 선생님으로부터 지도받은 것이라고 한다면 같은 학교의 다른 학생들에게 종속성 개념이 자주 등장하지 않는 것은 학교 수업이외에 다른 요소, 예를 들어 사용하는 교재나 학교 밖의 수업 등이 영향을 미친 것으로 볼 수도 있다. 이와 관련하여 실제 학교 수업에서 함수가 어떻게 지도되는지를 파악하는 것이 필요하다고 판단하였고 본 연구에서는 교사와의 면담을 통해 자료를 수집하였고 그 내용은 Ⅴ장에서 다루었다.

6. 종합 논의

학생과의 면담 결과 분석을 종합하면 첫째, 함수 개념의 다른 측면에 비해 종속성에 대한 이해는 매우 미약한 것으로 볼 수 있다. 종속성에 기반한 함수의 도입은 7차 교육과정의 개정 시 가장 중요하고 커다란 변화 중의 하나였고 이는

2007 개정 교육과정에 이어 2009 교육과정에서도 계속 유지된다. 그럼에도 불구하고 이러한 교육과정에 따라 학습한 많은 학생들이 종속적인 변화 관계로부터 함수를 인식하는 정도가 미약함은 주목할 만 하다.

둘째, 학생들은 함수식의 존재로부터 함수를 판단하는 경향이 여러 문항에 걸쳐 드러났으며, 학생들은 함수를 식으로 표현하는 것이 부적절한 상황에서도 함수식을 세우려고 시도하거나 주어진 관계를 식으로 표현하는 것이 아니라 임의로 함수식을 설정한 후에 그로부터 관계를 설명하는 본말이 전도된 양상도 나타났다. 이와 같이 함수식의 존재 여부가 함수 판단의 중요한 근거로 생각하게 된 데에는 교과서에서 함수를 $y=f(x)$로 표현하는 것을 수식으로 이해한 것이 하나의 원인임도 알 수 있었다.

셋째, 과정 관점이 'x에 무엇을 대입할 때 하나의 y가 나온다'와 같이 입력과 출력의 순차적이고 동적인 측면에서 함수를 이해하는 것이라면 대응 관점은 'x에 대하여 유일한 y가 존재함'을 이해하는 것으로 과정 관점보다 추상적이고 정적인 측면의 이해이다. 그러나 학생들은 대응보다는 과정 관점으로 함수를 이해하는 경향이 높음을 확인할 수 있었다. 그리고 함수식은 과정 관점의 해석을 위한 변환의 매개체로 인식하는 경향도 보였다.

넷째, 함수 개념의 본질적인 측면은 아님에도 불구하고 학생들은 규칙성을 함수 판단의 주요 근거로 사용하는 특성을 보였는데, 이는 함수 학습에서 학생들이 경험한 사례들이 주로 규칙적인 변화를 다루었다는 점이 영향을 미쳤음을 알 수 있었다. 이는 학생들이 함수 여부를 판단하는데 다루어본 경험이 없다는 점을 들어 함수가 아니라고 생각하는 답변과도 연결되는 것으로 학생들이 함수를 판단할 때 경험한 사례를 중심으로 함수 개념을 유추하는 경향이 있는 것으로 해석할 수 있다.

Ⅴ. 함수 지도와 관련한 수업의 실제

지금까지 살펴본 학생들의 함수 개념화 특성을 교육과정 실행 측면에서 파악하기 위해 함수가 지도되는 실제 학교수업은 어떤 모습인지 알아보았다. 수업에 관한 자료는 심층면담의 시기가 이미 함수를 배우고 난 후여서 수업관찰 대신 면담 대상 학생의 수학 지도 교사 5명과의 면담을 통해 얻는 방식을 택하였다.

첫째, 교육과정의 변화에도 불구하고 학생들의 종속적인 변화관계에서 함수를 이해하는 정도가 매우 낮음과 관련하여 교실 수업에서 함수를 도입할 때 주로 사용하는 예가 무엇인지 그리고 그러한 예를 주로 다루는 이유가 무엇인지를 질문하였다. 이는 수업에서는 함수가 어떤 방식으로 다루어지는지를 확인하기 위한 것이다.

교사 1 : 자판기나 소개팅. 함수를 그렇게 설명하지 말라고 하는데 실은 그 방법이 아이들에게 적절한 것 같아요. x가 들어가서 y가 나오게 되는 개념이 초등학교 때 나오더라고요. 처음에 함수가 상자그림에 x가 들어가서 초등학교 때 했던 방법대로 x+5가 되어 y값이 나온다. 그거 설명하고 자판기나 여러 가지 예를 통해서 함수인 경우와 아닌 경우를 설명하죠.

교사 2 : 자판기라든가, 함수 정의 내릴 때 어떻게 쉽게 이해 접근 할까 하다가 자판기도 많이 하고 예전에 TV 프로그램 사랑의 스튜디오라든지 그런 거 예를 들면 호기심에 잘 따라해요.

교사 4 : 저는 벤다이어 그램을 사용한 대응의 관점으로 주로 설명해요. 다른 관점으로 설명을 하면 더 많은 혼돈을 해서 아예 다른 수업으로... 차시가 다른 수업으로 접근해 들어가야지 같은 차시에서 같이 연결해서 하면 혼돈스럽고 7차 때 보면 혼돈스러워서 이것도 아니고 저것도 아니고 교과서가 왔다갔다 쓰여져서 아예 교과서를 제끼고 수업하지 않으면 더 혼돈스럽더라고요. 다음 차시에 교과서적 접근이나 다른 접근으로 들어가져야지 저는 그렇게 하는 게 효과적이지 않았나 싶어요.

교사들과의 면담을 통해 대부분의 교사들은 수업에서 자판기, 함수 상자, 남녀 짝짓기, 두 집합 사이의 대응 등의 예를 사용하여 함수를 도입하고 있음을 확인할 수 있었다. 이는 교육과정의 변화에도 불구하고 실제 교실수업은 변수 사이의 종속적 변화관계보다는 대응의 관점에서 함수를 도입하는 것이 우세한 것으로 볼 수 있다. 이는 학생들이 변화의 맥락에서 종속적인 변화 관계로 함수를 인식하는 정도가 미약한 하나의 원인으로 볼 수 있다.

또한 함수 도입 시 주로 사용하는 예인 자판기, 함수 상자 등은 하나의 입력에 대한 하나의 출력 과정이 두드러진 것으로 학생들의 과정 관점 이해가 높은 것과 밀접한 관련이 있는 것으로 파악된다.

둘째, 함수 도입과 관련하여 교육과정의 변화에도 불구하고 이러한 예를 주로 사용하는 이유를 질문한 결과 교육과정 변화의 의미가 교사들에게 충분히 전달되지 못한 경우와 함수의 도입과 관련하여 교육과정의 개정 내용을 인식하고 변화를 시도하였으나 수업을 실행하는 과정에서 학생들이 보였던 어려움과 혼란스러움 등의 경험 때문에 다시 대응을 중심으로 도입하는 경우로 분류할 수 있었다. 후자의 경우 대응으로 도입을 하고 종속적인 변화 관점의 이해가 필요한 경우 별도의 차시에 따로 지도하는 방법을 선택함도 확인할 수 있었다.

그러나 면담이 진행되는 중간에 한 교사는 함수를 변화관계보다 대응의 관점에서 지도하는 이유가 교사 자신이 대응 관점의 이해가 익숙하기 때문이라는 생각이 든다고 답하였다.

교사 4 : 제가 드는 생각이 교사의 문제일 수도 있다는 생각이 드네요. 중고등학교 때 대응으로만 배웠어요 함수를. 변화하는 관계로 함수를 제가 이해한 적이 없는 거죠. 교사가 되고 교육과정이 7차로 되면서 처음 본거에요. 저도, 이걸 가르칠 때 제가 대응이 쉬운 거예요. 당연히 제가 이해하는 걸로, 이해를 잘 하고 있는 걸로 설명하는게 제일 쉽죠. 본인이 설익게 이해한 걸 가지고 애들을 이해시키려고 하는게 더 어려워지는것 같아요. 교사가 이해가 제대로 안 된 상태에서 설명하면 애들은 너무나 혼돈스러워 할 수 있는것 같아요. 정비례 반비례 봤을 때 저 자신도 함수 개념을 변화하는 양들의 관계로 설명하는 것이 훨씬 더 추상화된 거에요. 교사 입장에서도 이게 더 어렵다고 생각해서 어렵게 다가갈 수 있고 교과서나 점점 추세가 변화관계를 확실히 하라고 하니까 그런 문제들도 많이 나오고 학생들은 접목이 안 될 수 있다는 생각이 들어요. 교사한테 배운 거와 실제 문제간의 연결이 안 되는, 그래서 문제의 핵심이 교사한테 있을 수도 있다는 생각도 들었어요.

즉, 교육과정은 함수 지도와 관련하여 커다란 변화를 시도하였으나 교사들에게는 그러한 교육과정의 변화가 충분히 전달되지 않거나 전달된

다 하더라도 교사들은 변화의 의미를 충분히 공감하지 못하며 대응 관점의 도입이 익숙하므로 실제 교실 수업의 변화로 연결되지는 못함을 확인할 수 있었다.

셋째, 국가 교육과정의 변화가 수업 및 학생들의 함수 개념의 이해에 실제적인 변화로 이어지기 위해서는 교사입장에서 어떠한 부분의 지원이 절실한지를 질문하였다.

교사 1 : 충분한 실제 예 현실세계에서 일어날 수 있으며 애들이 쉽게 받아들일 수 있는 구체적인 예가 필요한 것 같아요. 그림으로 표현된다든지... 근데 현실 생활에서 그 변화의 양이 일정한 변화인 게 별로 없잖아요. 그렇기 때문에 아무래도 우리도 설명하기 어렵고 물론 충분히 이해가 안 됐기 때문에 아까 말씀드렸던 그런 면도 없지않지만 그 안에서만 생각하니까.. 충분한 예가 필요하죠. 또는 교육도 굉장히 필요한 것 같아요. 교사가 수학 교과내용을 가르치기 위한 교육도 저는 많이 느꼈어요. 제가 교직생활하면서 가르치는 내용이라든지 수학 교과에 대해서 어떻게 가르쳐야 할 지에 대한 연수는 별로 없었죠. 일정 연수를 제외하고는 재교육을 받아본 적은 없었죠.

교사 5 : 변화관계 가르치기에 중학교 1학년 아이들은 아직도 추상적인 사고를 그 정도까지는 못할 거 같아요. 왜냐하면 변화 관계라는 게 시간이 지남에 따라 식물이 성장한다거나, 햇빛이 어느 정도 되면 광합성이 잘 된다던가, 한 쪽의 양이 변하면 또 다른 쪽의 양이 변한다는 것을 말로 설명을 해야 되는 거잖아요. 두 가지 상황이 서로 관계가 있으면서 변화한다는 것을 말이나 글을 통해서 전달한다는 것은 쉬운 일이 아닌 것 같아요. 결국은 모든 상황들을 눈으로 보여주고 움직임이 있는 무언가를 통해서 그 관계가 시각화되야 할텐데 그런 자료를 만드는 것도 어렵고... 찾기도 어렵고..

면담한 교사들은 교육과정의 변화 의도를 충분히 알 수 있도록 하는 것 뿐만 아니라 변화 의도를 파악한다 하더라도 종속적인 변화관계로부터 함수를 의미있게 지도할 수 있는 풍부한 자료와 수학 교과 내용의 실제 지도와 관련한 교사 재교육 등이 필요함을 언급하였다.

Ⅵ. 결론 및 제언

이상의 연구 결과는 한정된 범위의 학생과 그 지도교사들을 대상으로 한 면담을 통해 얻은 자료를 수집, 종합하여 공통적으로 나타나는 특징을 추출한 것이다. 따라서 본 연구에서 얻어진 결과를 우리나라의 중학생들의 일반적 특징이라고 보기는 어려우나 한정된 범위의 연구 결과를 토대로 하여 함수 이해와 관련한 우리나라 중학생들의 후속 연구 또는 체계적인 정량적 연구를 위한 단초를 제공할 수 있을 것이다.

이 장에서는 연구 결과를 종합하고 이를 토대로 몇 가지 제언을 하고자 한다.

본 연구에서는 우리나라 수학과 교육과정이 함수를 종속적 변화 관계로 도입하는 것으로 개정한 것과 관련하여 현재 중학생들이 함수를 어떻게 개념화하는지 그 특성을 조사하였다. 연구 결과 교육과정의 의도와는 달리 학생들이 변화와 종속적 관계를 파악하는 정도는 매우 미약하였다. 이러한 현상은 교실수업에서도 일부 그 원인을 확인할 수 있었는데 교육과정의 변화와 그 의도가 교사들에게는 충분히 전달되지 않아서 또는 전달이 되었더라도 지도할 수 있는 구체적

인 방법이나 자료가 부족함에 따라 교사들도 새로운 접근 방식으로 지도하는데 많은 어려움을 겪고 있음을 확인할 수 있었다. 이에 따라 수업에서 함수 도입은 여전히 대응 관점에서 이루어지며 이러한 부분이 학생들의 함수 개념화 특성에 영향을 미친 것으로 보여진다.

덧붙여, 학생들이 대수식을 기준으로 함수를 판단하는 경향이 높은 것은 선행연구 결과와도 일치하는 것이긴 하나 학생들이 함수 기호 $y=f(x)$를 식으로 인식했다는 면담결과와 관련하여 차후 연구에서는 함수를 전개하는 과정에서 우리나라 교과서에서 함수식을 도입하는 시기와 함수의 다른 개념적 측면과 조화롭게 다루어지는 정도에 관해 면밀하게 점검해 볼 필요가 있다.

이상의 연구 결과에 따라 함수 지도와 관련한 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 국가 교육과정에서 함수를 종속적인 변화관계에서 개념화하도록 한 것은 함수가 물리적, 사회적, 정신적인 변수들 사이에 존재하는 종속 관계를 조직하는 수단으로 생겨난 개념이나 현대적 함수 개념에 따라 대응을 강조하는 함수의 학습지도는 함수의 종속성에 대한 이해를 간과하게 되는 결과를 가져온다는 문제인식에 기초한 것으로 판단된다. 그러나 교육과정의 개정을 통해 함수 개념의 도입과 관련한 내용 변화의 시도가 종국적으로 수업을 통한 학생들의 학습 지도에서 의미있게 반영되려면 교육과정의 주요 내용 변화와 그 교육적 의미와 필요성을 교사들이 충분히 인식하고 공감할 수 있는 장이 마련되어야 할 것으로 보인다.

둘째, 교사가 교육과정의 내용 변화를 이해하고 공감하더라도 수업에 직접 활용할 수 있는 자료의 부족이 수업 내용을 변화시키지 못하는 주요 원인이 되고 있었다. 교육과정의 내용을 이해하고 이를 수업에 반영하기 위해 자료를 개발하는 일련의 모든 과정을 교사 개인이 해결하기는 매우 어려우므로 교육과정의 취지에 맞는 다양한 자료를 개발하여 교사에게 제공하는 것이 필요한 것으로 보인다. 이러한 자료의 제공은 교사가 교육과정의 내용 변화를 기존의 내용과 차별화하여 이해하는데도 도움이 되며 본질적으로는 교육과정의 취지에 맞도록 수업 내용이 변화되는 효과를 가져올 것으로 생각된다.

셋째, 함수 개념 지도와 관련하여 교과서의 내용과 전개 방식이 교육과정 개정 이전과 비교하여 어떻게 달라졌는지를 분석하는 연구와 다른 나라의 교과서에서 함수를 다루는 내용 및 전개 방식과 우리나라의 것을 비교 분석하는 연구가 이루어질 필요가 있다. 전자의 경우는 교육과정의 변화 의도에 걸맞게 교과서가 의미있게 구성되었는지를 확인하는 것이며, 후자의 경우는 다른 나라와의 비교를 통해 우리나라에서 강조되거나 미약하게 다루어지는 개념적 측면이 무엇인지 이것이 학생들의 개념화 특성에 영향을 주는 것은 아닌지를 파악하기 위한 것이다. 우리나라와 같이 학교 수업에서 교과서가 주교재로 사용되는 비율이 높은 경우에는 학생들의 개념화 특성의 많은 부분이 교과서의 전개 방식에 기인할 것으로 판단되기 때문이다.

넷째, 교육과정의 개정이 교수 학습 실제의 내용 변화를 담보하지는 못하므로 교육과정 개정의 후속작업으로 교수 학습 실제에 대한 연구가 체계적으로 이루어져야 하며 이에 따라 필요한 부분의 지원이 적절히 이루어질 수 있도록 연구와 지원이 유기적으로 연계되는 것이 필요한 것으로 생각된다.

참고문헌

교육인적자원부(2007). 수학과 교육과정. 교육인적

자원부 고시 제2007-79호. 교육인적자원부.

김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤(2006). **수학교육과정과 교재연구**. 경문사

성종기(2000). **이차함수의 그래프에 대한 오류 분석에 관한 연구 -중학교 3학년 함수 단원 중심-**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

손혜진(2011). **중학교 3학년과 고등학교 1학년 학생들의 방정식과 함수의 관계에 대한 이해 유형 분석**, 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

신성균, 박선화, 이대현, 이봉주, 최승현, 강완, 박경미, 조영미(2005). **수학과 교육과정 개정 시안 연구**. 한국교육과정평가원 연구보고 CRC 2005-4.

오윤희(2006). **중학교 2학년 학생들이 함수 학습에서 겪는 인지적 장애에 대한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

우미령(2005). 중**학생의 함수 개념 이해에 관한 연구: 함수의 표현방법에 따른 문제해결의 차이 비교**. 고려대학교 대학원 석사학위논문.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울대학교 출판부.

이나현(2009). **중학교 2학년 학생들의 일차함수 그래프 과제 해결능력**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

이소정(2009). **함수와 방정식 사이의 관계 인식의 오류에 대한 기호학적 분석-중학교 3학년 학생을 중심으로-**. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

최은형(2004). **함수의 그래프에 대한 이해와 오류 분석에 관한 연구-중학교 2학년을 대상으로-**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

Davis, R. B.(1982). Teaching the concept of function: Method and reason. *Conference of functions report 1*(pp. 47~55). Enschede: SLO Foundation for curriculum development.

Selden, A., & Selden, J.(1992). Research perspectives on conceptions of function summary and overview. In E. Dubinsky, & G. Harel(Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*(MAA Notes No. 25, pp. 1-24). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sierpinska. A.(1992). On understanding the notion of function. In E. Duvinsky, & G. Harel(Eds.), T*he concept of function : Aspects of epistemology and pedagogy*(MAA Notes No. 25, pp. 25-58). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Vinner, S. & Dreyfus, T.(1989). Image and Definition for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In E. Dubinsky, & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes No. 25, pp. 195-214). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Korean middle school students' conception of function

Byun, Heehyun (KICE)
Ju, Mi Kyung (Hanyang University)

Since the 7th revision of national mathematics curriculum, it has been recommended that the concept of function be introduced based on the dependent relation between variables. The 2009 revision of national mathematics curriculum shares this way of conceptualizing function. In this context, this study analyzes the effect of this revision of the mathematics curriculum on middle school students' conceptualization of function. To be specific, this study investigates the characteristics of students' conceptualization of function through task-based in-depth interviews. It also investigates how teachers introduce function through interview. The analysis show that the middle school students had a lack of understanding about dependent relation in function. The teachers also had difficulties in teaching concept of function based on dependent relation. In the conclusion, this study makes some suggestions for teaching the function in middle school classes.

* Key Word : revision of curriculum (교육과정 개정), introducing the concept of function (함수 개념 도입), dependent relation (종속적 관계)

논문접수 : 2012. 7. 1
논문수정 : 2012. 7. 27
심사완료 : 2012. 8. 20