韓國數學教育學會誌 시리즈 C
<初等數學教育>
2012. 8. 제 15권, 제 2호, 59-75

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Aug. 2012, Vol. 15, No. 2, 59-75

구조화 정도가 다른 수학적 동형 문제 사이의 유추적 전이 분석

성 창 근(광주 큰별초등학교)
박 성 선(춘천교육대학교)

본 연구의 목적은 구조화 정도가 다른 수학적 동형 문제 사이의 유추적 전이를 분석하는 것이다. 이를 위해 다음과 같은 연구문제를 설정하여 분석하였다. 첫째, 구조화 정도가 다른 수학 문제를 해결하는데 사용된 전략의 변화 양상은 어떠한가? 둘째, 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 해결하는데 비례식 알고리듬 전략을 사용한 학생과 그렇지 않은 학생의 문제해결 특징은 어떠한가? 연구 결과를 다음과 같다, 첫째, 구조화 정도가 낮은 문제의 해결에서는 곱셈적 전략의 사용빈도가 증가하였으며, 반대로 비례식 알고리듬 전략 사용빈도는 감소하였다. 둘째, 비와 비례에 대해 개념적 이해 수준이 높은 학생은 구조화정도가 다른 문제들 사이의 구조적 유사성을 인식하고, 비례식 알고리듬 전략을 사용해 문제를 성공적으로 해결하였다. 이 연구는 학생들의 유추적 전이 능력을 신장시키기 위해 수학 수업은 어떠한 점에 초점을 맞추어야 하는지와 그리고 유추적 전이 연구에 대한 새로운 방법론적 대안을 제시했다는 점에서 그 의의를 찾을 수 있다.

I. 서론

교육의 주된 목적 중의 하나는 자신의 지식을 환경이 요구하는 새로운 상황에 나름대로 적용할 능력이 있는 학생들을 배출하는 것이다. Perkins와 Salomom (1988)은 교육자들이 기대하는 전이는 기초기능의 전이, 지식의 전이, 사고 기능의 전이로 분류하였다. 이 중 지식의 전이는 학생들이 학교에서 획득한 정보를 다른 학교과목이나 일상생활에 적용하는 것을 의미한다.

인간은 어떤 새로운 문제에 직면할 때, 과거에 성공적으로 해결했던 유사한 상황을 찾고 그 해결 절차를 새로운 문제에 맞게 변화시켜 해결한다. 이때 사용하는 추론이 바로 유추이다(Gick & Holyaok, 1983). English(2004)는 수학교육에서 사용되고 있는 유추를 고전적 유추(classical analogy), 문제 유추(problem analogy), 교수학적 유추(pedagogical analogy)로 분류하였다. 이 중 문제 유추는 현재 직면하고 있는 문제를 이전에 해결했던 유사한 문제와 관련짓고, 이에 기초하여 두 문제간의 유사성을 추론함으로써 주어진 문제를 해결하는 것을 의미한다. 또한 문제 유추는 유추적 전이라고 하는데, 그 이유는 이전의 문제해결에서 습득한 해결방법을 적용하여 새로운 문제를 해결할 때 전이가 일어나기 때문이다(Gentner & Loewenstein, 2003).

유추적 전이가 성립하기 위해서는 새로 해결해야할 목표문제(또는 전이문제)와 과거에 해결해본 경험이 있는 바탕문제가 있어야 하며, 유추적 전이가 성공적으로 일어나기 위한 관건은 두 문제 사이에 존재하는 구조적 유사성을 인식하고, 바탕문제의 해법을 목표문제에 적용하는 것이다(English & Halford, 1995; Reeves & Weisberg, 1994). 그래서 유추적 전이에 관한 많은 연구들은 사람들이 어떻게 바탕문제와 목표문제간의 유사성을 인식하여 유추적 전이에 성공하는지에 관심을 두고, 바탕문제와 목표문제 사이의 유사성을 인식할 수 있는 다양한 학습 조건을 찾는데 주력하였다(이종희・이진향・김부미, 2003; 이종희・김진화・김선희, 2003; Bassok & Olseth, 1995; Bassok, 1997; English, 1997; Gick & Holyoak, 1983; Holyoak & Koh, 1987; Reed, 1999). 이들 연구의 핵심은 피험자들로 하여금 추상성 수준이 높은 스키마를 형성하게 할 수 있는 바탕문제의 학습 조건을 찾는 것이었다. 실험설계는 피험자들에게 처치 조건을 달리하여 바탕문제를 풀게한 후, 각 조건에 따라 구분된 집단이 유추적 전이의 성공률에서 통계적으로 유의한 차이를 보이는지를 비교하는 것이다. 연구 결과, 바탕 문제를 2개 이상 제시하고 그것들을 서로 비교하게 하는 조건, 바탕

* 접수일(2012년 6월 13일), 게재 확정일(2012년 7월 25일).
* ZDM 분류 : C33
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 유추적 전이, 잘-구조화된 문제, 구조화된 문제, 비-구조화된 문제, 개념적 이해

문제의 해결 원리를 그림이나 다이어그램으로 제시하는 조건, 이 두 방법을 결합하는 등의 바탕문제 학습 조건하에서 피험자들은 바탕문제에 관한 더 좋은 스키마를 형성하였으며, 목표문제 성공률 또한 높아졌다. 결과적으로 바탕문제의 해결책(해결 원리)에 대해 더 높은 수준의 스키마를 형성한 피험자들은 목표문제를 해결할 때 두 문제 사이의 표면적 차이점들에 덜 영향을 받고 목표문제를 성공적으로 해결할 수 있었다.

전술한 선행 연구들은 학습자들이 바탕문제와 목표문제의 표면적 특징에 현혹되지 않고 두 문제간의 구조적 유사성을 인식하도록 하는데 도움이 되는 학습조건을 제시했다는 점에서 유추적 전이 연구와 수학학습에 시사하는 바가 크지만, 동시에 연구에서 사용된 바탕문제와 목표문제의 본질에 대한 고려가 미흡하다는 한계 또한 지니고 있다. 즉 기존의 유추적 전이에 관한 연구에서 사용된 바탕문제와 목표문제는 최초상태와 목표상태가 명확하게 진술되고, 단일한 정답이 있는 잘-구조화된 동형 문제(well-structured isomorphic problem) 일변도라는 점이다. 예를 들어, English(1997)가 적용한 바탕문제(이동문제)와 목표문제(물탱크 채우기 문제)는 '$Y=ax$'라는 동일한 해법을 가지며 문제에 진술된 대상, 맥락 등 표면적 특징이 다른 동형문제이면서, 동시에 잘-구조화된 문제들이다. 결국 이 연구는 잘-구조화된 동형문제 사이의 전이에 초점을 맞추고 있다고 볼 수 있다. 또한 Bassok & Olseth(1995)의 연구에서 사용된 바탕문제(거리문제)와 목표문제(급여문제)는 거리방정식 $D=(v_1+v_2)t/2$이라는 동일한 해법을 가지며 표면적 특징이 다른 동형문제이면서, 동시에 잘-구조화된 문제들로써 이 또한 잘-구조화된 동형문제 사이의 전이를 연구했다고 볼 수 있다. 이 외에도 수학교육 분야에서 행해진 연구들(예, 이종희·이진향·김부미, 2003; 이종희·김진화·김선희, 2003; Bassok, 1997; English, 1997; Reed, 1999)은 대부분 잘-구조화된 동형문제 사이의 전이와 바탕문제의 학습 조건을 탐구하는데 주력하였다.

하지만 실제로 유추적 전이라는 현상은 잘-구조화된 문제들 사이에서만 나타나는 것은 아니며, 그것만을 강조해서도 아니 될 것이다. 왜냐하면 학교에서 수학을 공부하는 이유는 수학 수업을 통해 학습한 개념이나 절차를 교과서에서 주로 취급하고 있는 잘-구조화된 문제를 해결하는데 적용하기 위해서라기보다는 그러한 지식을 적용해 일상생활에서 직면하는 문제의 해결을 궁극적으로 지향하기 때문이다. 이러한 점을 감안할 때, 유추적 전이의 연구 초점이 '학교에서 습득한 지식이 일상생활 문제를 해결하는데 전이될 수 있는가?'로 전환할 필요가 있으며, 이를 위해 일상생활에서 학생들이 직면하는 문제의 본질을 규명하는 작업이 선행되어야 할 것이다.

학생들이 학교에서 해결하는 문제와 그들이 현실에서 해결해야할 문제는 구조적으로 동일하지 않다. 문제의 구조화 정도에 대해서 살펴보면, 학생들이 일상생활에서 직면하는 문제는 최초상태(주어진 정보)와 목표상태(구해야할 것)가 잘-정의되지 않으며, 단일한 정답이 존재하지 않는 열린 문제(open-ended problem)이다. 이러한 문제를 비-구조화된 문제(ill-structured problem)라고 한다(Jonassen, 2010). 비-구조화된 문제와 더불어 학생들이 일상생활에서 접하는 문제는 최초상태와 목표상태가 분명하게 제시되지만, 문제를 해결하는 데 소음이 되는 비본질적인 정보가 많이 포함되어 있는 경우도 있다. 이러한 문제는 구조화 정도가 잘-구조화된 문제와 비-구조화된 문제 중간 정도에 위치한 문제로써, 구조화된 문제(moderately-structured problem)라고 한다(Jay & Perkins, 1997).

학교에서 교과서나 교사에 의해 제시되는 문제는 주로 잘-구조화된 문제이지만 학생들이 일상생활에서 접하는 문제는 구조화된 문제 또는 비-구조화된 문제이기 때문에, 학교에서 습득한 지식이 일상생활로 전이되어야 한다는 주장이 설득력을 가지기 위해서는 잘-구조화된 문제 사이의 유추적 전이와 더불어 잘-구조화된 문제에서 구조화 정도가 덜한 문제로의 유추적 전이 즉 구조화 정도가 다른 수학 문제 사이의 유추적 전이를 탐구하는데 연구 역량을 집중할 필요가 있다. 하지만 전술한 바와 같이 기존의 행해진 연구들은 대부분 잘-구조화된 문제 사이의 전이에 주안점을 두었을 뿐 구조화 정도가 다른 수학 문제 사이의 전이에 관한 연구는 거의 이루어지지 않고 있다.

본 연구는 구조화정도가 동일한 수학적 문제간의 전이를 연구한 선행 연구의 한계를 뛰어넘어 구조화정도가 다른 수학적 동형 문제간의 전이를 실증적으로 탐구하는 것을 궁극적인 목적으로 한다. 이를 위해 비와 비례라는 수학적 지식을 공유하면서 구조화정도가 다른 문제 즉 잘-구조화된, 구조화된, 비-구조화된 수

학 문제를 각각 개발한 후, 6학년 학생들이 수업 중 학습한 비례 문제 해법을 구조화정도가 다른 각각의 수학 문제 해결에 어느 정도 전이할 수 있는지 그 양상을 살펴보고, 해법을 성공적으로 전이한 학생과 그렇지 못한 학생의 문제해결 특징을 조사하였다.

이를 위하여 구체적으로 다음과 같은 연구문제를 설정하였다. 첫째, 6학년 학생들이 수업 중 학습한 비례문제 해법을 구조화 정도가 다른 수학적 동형문제를 해결하는데 전이하는 양상은 어떠한가? 둘째, 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 해결하는데 수업 중 학습한 비례 문제 해법을 적용한 학생과 그렇지 않은 학생은 문제해결 과정에서 어떠한 특징을 보이는가?

본 연구를 통하여 학생들이 수업 중 학습한 수학적 문제의 해결방법을 구조화정도가 다른 3가지 유형의 문제에 어느 정도 전이 할 수 있는지와, 그것에 성공한 학생과 그렇지 못한 학생들의 문제해결 과정에서 보이는 차이점이 무엇인지 밝힘으로써, 학생들의 유추적 전이 능력을 신장시키기 위해 수학 수업은 어떠한 점에 초점을 맞추어야 하는지와 그리고 유추적 전이 연구에 대한 새로운 방법론적 대안을 제시하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 구조화 정도가 다른 문제

문제의 구조화 정도(구조성)는 문제해결자가 취할 수 있는 가능한 조치들의 집합인 문제 공간의 명확성, 안정성 그리고 예측가능성 측면에서 생각해볼 수 있다. Wood(1983)는 문제의 구조성을 문제에 포함된 아이디어 즉 문제해결자가 취해야할 일련의 조작자가 해결자에게 어느 정도 알려졌는지 또는 그가 알 수 있는지의 정도로 정의하고, 구조성을 결정하는 준거를 다음과 같이 제시하였다. 첫째, 문제 상태(최초상태, 목표상태)가 명확하게 또는 모호하게 제시되었는지 둘째, 문제해결을 위해 필요한 규칙이나 원리가 인습적 또는 비인습적인지 셋째, 문제 안에 제약이 제시되었는지 아니면 그렇지 않은지 넷째, 조작자를 예측가능한지 또는 전혀 예측할 수 없는지, 다섯째, 해결책이 유일한지 또는 다양한지, 여섯째, 답의 적절성을 평가할 수 있는 준거가 명확한지 아니면 모호한지이다.

Jonassen과 Hung(2008)은 문제의 구조성 준거를 투명성, 해석의 명확성, 해결책의 다양성, 제시된 답의 합의 가능성으로 제시하였다. 이 중 투명성은 최초상태와 목표 상태가 명확하게 제시되어 어떤 개념이나 원리를 적용할지 쉽게 예측할 수 있는가를 의미하는 것으로써, Wood(1983)의 준거 중 첫 번째와 두 번째를 결합한 의미이다. 해석의 명확성은 최초상태가 명확하게 제시되지 않거나, 정보가 과도하게 제시되어 문제해결에 필수적인 정보를 선택하는데 다양한 해석이 가능한가를 의미한다.

또한 김민경 외(2011)는 우리나라의 수학 교과서의 ‘문제’를 구조성에 따라 분석하였다. 이 연구에서 상정한 문제의 구조성 준거는 실제성, 복잡성, 개방성이었다. 첫째, 실제성은 실생활과 관련성 정도, 둘째, 복잡성은 문제를 해결하기 위해 얼마나 폭넓은 지식이 요구되는지의 정도, 셋째 개방성은 해법의 다양성 정도와 해석의 다양성 정도를 의미한다.

Wood(1983)와 Jonassen과 Hung(2008)이 제시한 구조성의 준거는 문제 해결을 위해 요구되는 정보가 학생들에게 어느 정도 명확하게 제시되었는지에 초점을 맞추고 있으며, 김민경 외(2011)는 이와 더불어 실제성과 복잡성을 포함하였다. 비-구조화된 문제의 본질적 특징은 실세계와의 관련성이므로(Jonassen, 2010), 구조성을 판단하는 준거에 실제성을 포함시킬 필요가 있다. 따라서 이 연구에서 구조성의 준거로서 실제성, 투명성, 해법의 개방성, 해석의 명확성을 사용한다. 이들

<표 1> 구조성의 준거와 조작적 정의

준거 \ 설명	조작적 정의
투명성	최초상태, 목표상태 제시의 명확성 정도
	적용해야할 지식이나 절차의 예측가능성 정도
	적용해야할 지식이나 절차가 인습적/비인습적인지의 여부
해법의 다양성	문제를 해결하기 위해 다양한 방법이 적용 가능한지의 여부
해석의 다양성	과잉의 정보가 제시되어 문제해결에 필요한 정보를 선택하도록 요구하는지의 여부
실제성	아동의 실제(일상생활, 미래 직업, 문화)와의 관련성
해답의 적절성	도출된 해답의 적절성에 대한 평가자의 합의 가능성 정도

각각의 준거와 그에 대한 조작적인 정의를 제시하면 <표 1>과 같다.

이 연구에서는 선행연구 분석을 통해 추출한 구조성의 준거인 투명성, 해법의 다양성, 해석의 다양성, 실제성, 해답의 적절성에 기초해, 각 항목의 구조성 정도에 따라 문제를 잘-구조화된, 구조화된, 비-구조화된 문제로 구분하였다(<표 2>). 더불어 이 틀은 본 연구에서 학생들의 비례 문제 해결을 측정하기 위한 검사도구의 개발 준거로 사용되었다.

<표 2> 구조화 정도가 다른 문제 분류

준거 \ 문제유형		잘-구조화된	구조화된	비-구조화된
투명성	최초상태, 목표상태 제시 여부	모두 제시	모두 제시	최소한 하나가 미 제시
투명성	적용해야할 지식이나 절차의 예측가능성 정도	매우 높음	어느 정도 예측가능	예측이 어려움
해법의 다양성		유일	유일 또는 다양	다양
해석의 다양성		해석 유일	대체로 유일	다양
실제성		교과서 문제의 실제성	실제적임	실제적임
해답의 적절성		즉각적 판단	합의를 통해 판단 가능	합의를 통해 판단 가능

2. 유추적 전이와 개인차

학생들이 학교에서 습득한 지식의 전이를 가능케 하는 인지적 메커니즘은 유추이며(Holyoak & Thagard, 1995), 이러한 현상을 유추적 전이라고 한다. 유추적 전이라는 용어는 유추적 문제해결, 유추 전이, 유추에 의한 추론, 유비추론 등과 혼용되어 사용된다. 이 글에서는 유추적 전이, 유추에 의한 문제해결을 용어 사용의 혼선을 방지하고 일관성있는 사용을 위해 유추적 전이로 통일해 사용한다.

유추적 전이는 목표문제를 해결하기 위해 기억 속에 저장되어 있는 바탕문제를 인출하고 적용함으로써 문제를 해결하는 것을 의미한다(Reed, 1999). 또한 현재의 문제를 이전에 경험했던 유사한 문제에 대한 지식과 관련짓고 이에 기초하여 두 문제간의 유사성을 추론함으로써 주어진 문제를 해결하는 것을 말한다(Chen, 1996a). 따라서 유추 전이는 기존의 아이디어와 현재 직면하는 새로운 문제를 적절히 연결짓고 피상적이고 표면적인 것이 아니라 아이디어 사이의 구조적인 관계를 사상하는 것을 의미하며 수학 학습에서 매우 중요하다(English & Halford, 1995). 수학적 문제해결에서 유추의 중요성을 강조한 Polya는 수학적 문제해결 전략으로 '유사한 문제를 생각해 보아라', '관련된 문제를 생각하고, 활용할 수 있는가?'등의 발견술을 제안하였다. 이는 교사가 학생의 문제해결을 지원하거나 학생 스스로 문제를 해결하려고 노력하는 일반적인 전략이다(우정호·정은실, 1995).

유추적 전이는 일련의 과정을 따른다. Mayer(1992)에 따르면 유추적 전이의 첫 번째 과정은 목표 문제의 정보를 부호화하는 것으로 목표 문제에 대한 표상을 구성하는 과정이다. 두 번째는 기억에서 목표 문제에 맞는 바탕 문제를 인출하는 것이다. 세 번째는 바탕 영역과 목표 영역간의 사상이 이루어진다. 사상은 바탕과 목표 영역의 대상들을 서로 대응시키는 과정이다.

학생들은 문제들 사이의 구조적 유사성을 인식하는 것을 어려워한다. 예를 들어, 유추에 관한 고전적 실험인 Gick과 Holyoak(1980)의 연구에서 피험자들에게 군대문제의 해법을 제시했다. 이 군대 문제는 한 부대가 방어가 튼튼한 성을 동시에 여러 방향에서 공격하여 파괴하는 문제이다. 즉 피험자들은 힘을 분산하여 목표의 중심 한 곳으로 수렴하면 강력한 힘을 발휘한다는 것을 학습하였다. 이 해법을 학습한 후 실험 대상자들에게 유사한 의학 문제를 제시하였다. 이 의학 문제는 한 의사가 위에 있는 악성 종양을 제거하기 위해 X 선을 사용하는 것이었다. 종양은 강력한 방사선에 의해 파괴될 수 있지만 한편으로는 종양 주위의 건강한 세포들도 파괴해 버릴 수 있다. 피험자들이 해결해야할 과제는 건강한 조직은 다치지 않게 하면서 종양을 없앨 수 있는 방법을 찾는 것이었다. 연구 결과 대부분의 피험자들 약 70% 정도가 이 문제들이 서로 관련이 있다는 점을 발견하지 못했으며 연구자로부터 두 문제는 서로 관련이 있다는 설명을 들은 후에야 목표문제에 수렴해법을 적용하였다.

이후 많은 연구들이 학생들이 바탕문제와 목표문제

사이의 구조적 유사성을 인식하는데 도움이 되는 바탕문제 학습 조건을 찾는데 주력하였다.(이종희・이진향・김부미, 2003; 이종희・김진화・김선희, 2003; Bassok & Olseth, 1995; Bassok, 1997; English, 1997; Gick & Holyoak, 1983; Holyoak & Koh, 1987; Reed, 1999). 결과적으로 바탕문제의 해결책(해결 원리)에 대해 더 높은 수준의 스키마를 형성한 피험자들은 목표문제를 해결할 때 두 문제 사이의 표면적 차이점들에 덜 영향을 받고 목표문제를 성공적으로 해결할 수 있었다. 따라서 유추적 전이가 효과적으로 일어나기 위해서는 바탕문제 또는 해당영역에 대한 깊이 있는 지식구조 또는 스키마를 형성할 수 있어야 한다.

Weisberg(2006)에 따르면 유추를 통해서 목표문제를 해결하는 데는 3가지 잠재적 어려움이 있다고 하였다. 첫째, 관련된 문제를 과거에 풀어본 적이 없을 수 있다. 이 경우 바탕지식 또는 유추물이 없는 경우이다. 둘째, 목표문제에 적용하거나 전이할 수 있는 바탕지식을 가지고 있지만 그것을 인식하지 못하는 경우이다. 이 경우 바탕 지식은 기억 속에 저장되어 있으므로 이용가능하지만, 문제를 해결하는 동안 접근가능하지 않는 것이다. 목표 문제 제시가 기억으로부터 관련된 바탕 지식을 인출해 주지 않으므로, 피험자는 지식을 소유하고 있지만 그 지식은 비활성이다. 지식의 비활성으로 인한 유추 전이의 실패는 매우 중요하다. 왜냐하면 그것은 문제를 해결하는 동안 정보의 인출에 가해지는 제한을 설명해주기 때문이다. 즉 기억 속에 있는 모든 정보가 모든 상황에서 문제해결에 사용될 수 있는 것은 아니다. 셋째, 설사 문제를 해결하는 동안 이전의 문제에 접근할 수 있다 하더라도 즉 바탕 문제를 인출하더라도 그것 자체가 해결을 보장하지 않는다. 왜냐하면 바탕 문제에서 얻은 해법을 목표에 맞게 변형하여 적용해야하기 때문이다.

결국 유추전이는 목표문제가 제시되었을 때 도움이 될 수 있는 바탕지식에 접근하고 인출할 수 있을 때와 인출된 바탕 문제를 목표문제를 해결하는데 적합하도록 변형하여 적용할 수 있을 때 성공적인 문제해결을 담보할 수 있다. 그렇다면 이러한 두 가지는 어떻게 가능하며, 이를 위해 문제해결자에게 필요한 것은 무엇인가? 많은 연구자들은 이러한 문제의 해답을 문제해결자가 지닌 지식의 질에 주목하고, 해당 분야에서 깊이 있는 지식을 의미하는 전문성의 역할을 조사하였다.

Ericsson(2006)은 전문성과 관련된 문헌 분석을 통해 초보자는 주어진 문제를 표면적 수준에서 관련된 대상을 기초로 문제를 분석하는 반면, 전문가는 해당 분야의 기본 원리를 기초로 분석하는 특징이 있다고 보고하였다. 즉 전문가들은 장기간동안 지식을 쌓아온 덕분에 개념적 수준에서 문제를 분석하고, 그럼으로써 문제의 밑바탕에 깔린 구조 또는 원리를 파악할 수 있다. Chi 외(1981)의 연구에서도 초보자는 바탕문제와 목표문제에 제시된 스프링, 경사면, 진자와 같은 동일한 종류의 대상에 주목하는 반면 전문가들은 문제에 포함된 대상이 그다지 유사하지 않더라도 뉴턴의 제 2 법칙과 같은 동일한 원리를 사용해서 해결될 수 있는 문제들을 함께 범주화하였다. 즉 전문가들은 문제에 제시된 표면적 특징(줄거리나 그림)을 넘어 기본 개념과 원리를 파악할 수 있었다.

또한 English(1997)는 수학적 개념과 규칙에서 낮은 이해수준을 보이는 학생들과 높은 이해수준을 보이는 두 그룹 학생들이 표면적 내용은 다르지만 구조적 관계를 공유하는 문제를 이해하는 방법에서 서로 다르다고 제안했다. 이해수준이 낮은 학생들은 주로 두 문제 간의 비슷한 내용 소재와 구문론적 특징에 주목해 직접적으로 이해하는 반면에, 이해 수준이 높은 학생은 자신들의 개념적 지식을 이용해 문제의 구조를 해석하였다. 즉 낮은 이해 수준의 학생과 높은 이해 수준의 학생이 전이의 수행에서 보이는 차이는 전자의 경우에 문제를 표상할 때 표면적 특징에 초점을 두고, 후자의 경우에 개념적 이해를 바탕으로 문제의 밑바탕에 깔린 구조적 관계를 표상한다는 점이다. Mayer와 Hegarty(1996) 또한 학생들의 문제해결 행동은 지식의 질에 의해 강력하게 영향을 받으며, 특히 많은 학생들이 문제해결에 실패하는 이유는 문제 표상의 질에 달렸다고 주장하였다. 개념적 이해가 낮은 문제해결자는 문제에 제시된 특정 구문(예, 더 많은, 모두, 더 적은 등)에 초점을 맞추어 문제를 표상하는 반면, 개념적 이해가 높은 수준의 학생은 문제의 밑바탕에 깔린 구조적 측면에 초점을 맞추어 문제를 표상하는 특성이 있다.

문제해결과 유추적 전이에 대한 전문가의 초보자 연구와 수학교육 연구에서 개념적 이해가 높은 학생과 낮은 수준의 학생을 비교한 연구는 모두 유추를 사용

해 성공적으로 문제를 해결하기 위한 선결 요건으로 지식의 양 보다는 지식의 질에 주목하고 있음을 알 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

본 연구는 첫째, 6학년 학생들이 수학 수업에서 학습한 비례문제 해결방법을 구조화정도가 다른 수학적 문제를 해결하는데 전이하는 양상을 조사하는 것이다. 이를 위해 잘-구조화된 문제, 구조화된 문제, 비-구조화된 문제로 구성된 질문지를 사용하여 자료를 수집하고, 빈도분석을 사용해 해법의 변화 양상을 분석하였다. 둘째, 해법의 전이에 성공한 학생과 그렇지 못한 학생들이 문제해결과정에서 보이는 특징을 조사하는 것이다. 이를 위해 2명의 사례를 선정하고, 풀이과정 설명, 구조화된 면담을 사용해 두 사례가 문제해결 과정에서 어떠한 차이를 나타내는지 분석하였다.

1. 조사연구

가. 연구대상

조사 연구의 목적은 학교에서 학습한 비례문제 해법을 잘-구조화된 문제뿐만 아니라 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 해결하는데 어느 정도 전이할 수 있는지 그 양상을 분석하기 위한 것이다. 이를 위해 K시에 소재한 초등학교 6학년 154명을 표집 하였다. 이 학교는 도심의 아파트단지에 위치한 학교로서 전반적으로 중류층 가정의 학생들이 많은 편이다. 또한 자료수집 당시 학생들은 초등학교에서 취급하는 비와 비례식 관련 단원을 모두 학습하였다.

나. 검사도구

1) 잘-구조화된 비례문제

비례식 단원에서 전형적으로 사용되는 '미지값 구하기'문제를 검사 영역으로 설정하고 단위비와 변화인수가 정수인지, 비정수인지 그리고 변화의 방향이 증가 또는 감소인지에 따라 하위 문항을 개발하였다.

변화인수: 정수 또는 비정수

$$a : b = c : d$$

단위비: 정수 또는 비정수

먼저 변화 비율과 단위 비가 모두 정수인 경우, 단위비가 정수이고 변화인수가 비정수인 경우, 단위비가 비정수이고 변화인수가 정수인 경우, 단위비와 변화인수가 모두 비정수인 경우로 구별하였다. 이어서 위의 4가지 각각에 대해 변화의 방향이 증가 또는 감소하는지에 따라 구분하여 8문제로 구성하였다.

2) 구조화된 비례문제

구조화된 수학 문제의 해결 능력을 측정하기 위한 문항은 Lesh 외(1988)에서 사용한 문제를 번역한 후, '물가 상승'이라는 맥락은 그대로 유지하고 문제에 제시된 수의 크기를 조정하였다. 전술했듯이 이 문제는 구조화 정도가 잘-구조화된 문제와 비-구조화된 문제 중간 정도에 위치한 문제로써, 최초상태와 목표상태가 비교적 명확하게 제시되지만, 문제를 해결하는 데 소음이 되는 비본질적인 정보가 많이 포함되어 있다는 특징이 있다. 따라서 이 문제를 해결하기 위한 관건은 문제 해결을 위해 필요한 양을 추출하고, 그것들이 곱셈적 또는 비례적으로 변화한다는 점을 추론하는 것이다.

● 여러분! 요즘 부모님들께서 물가가 너무 비싸다는 말씀 자주하시죠? 아래 글은 '진실한 신문'의 경제면에 실린 기사의 일부입니다. 기사를 잘 읽어보세요.

김행복씨는 10년전 K시로 이사와 직장생활을 시작하였다. 그와 부인은 중앙로 3188번지에 매달 임대료가 170,000원인 임대아파트에 살았다. 그는 또한 자동차를 4500,000원에 구입하였다. 그의 첫 월급은 1400,000원이였다. 올해, 아들 김소망씨도 광주에서 직장생활을 시작하였다. 그와 그의 신부는 그의 아버지가 10년 전에 살았던 똑같은 임대아파트에 살며, 현재 임대료는 매달 350,000원이다. 아들 김소망씨 또한 그의 아버지가 샀던 모델과 똑같은 자동차를 8,900,000원에 샀다.

● 김행복씨의 아들 김소망씨의 첫 월급은 얼마쯤일까? 해결 과정을 아래에 자세히 적어주세요. 필요하다면 그림, 도표, 그래프 등을 사용해서 설명해주세요.

---

3) 비-구조화된 비례문제

비-구조화된 문제는 국내 모 방송사에서 방영된 거인 'Big Foot'에 대한 프로그램에서 아이디어를 얻어 문항을 개발하였다. 이 검사 도구는 Ⅱ장 문헌연구에서 제시된 바와 같이 목표 상태는 '빅풋의 키는 얼마쯤일까?'로 비교적 명확하게 제시되었으나 빅풋의 키를 어림할 수 있는 수치적 자료 또는 정보가 제시되지 않아 학생들은 빅풋의 키를 어림하기 위해 해결 계획을 수립하고, 그러한 계획에 따라 문제를 해결해야 한다는 특징이 있다.

※아래 글은 신문 기사에 실린 내용을 조금 수정한 글입니다. 잘 읽고 물음에 답하시오.

"전설의 괴물 빅풋(Big Foot) 출몰, 시민들 공포"

– 중봉 근처에서 전설의 괴물 '빅풋(Big Foot)'의 발자국이 발견되어 시민들이 공포에 떨고 있다. 또 괴물을 목격했다는 증언이 잇따르는 가운데 빅풋 발자국이 발견되어 언론에 공개되었다.

언론을 통해 처음 알려진 '정글 빅풋'은 2일 로이터, AP 등을 통해 세계적으로 알려지면서 미국의 한 포털에서는 '가장 많이 본 뉴스' 부문 상위권에 오르는 등 화제를 낳고 있다.

이러한 소식을 접한 국립공원 측은 '빅풋'의 키가 얼마쯤인지를 알아보기 위해, 국립과학수사 연구소에 수사 의뢰를 하였다.

• 당신은 괴물 '빅풋'의 키를 조사하기 위해 만들어진 국립과학수사연구소 소속 팀장입니다. 시민들의 공포를 하루라도 빨리 덜어주기 위해 지금 바로 '빅풋'의 키가 얼마쯤인지를 밝혀내야 합니다. 그리고 기자들을 만나 그동안의 수사 결과를 이야기해야 합니다. 각자 '빅풋'의 키는 얼마인지를 구해봅시다. 그리고 기자회견에서 기자들의 질문에 답해봅시다.

다. 자료 수집 및 분석

먼저 잘-구조화된 문제, 구조화된 문제, 비-구조화된 문제에 대해 제시한 답을 기준으로 정답을 제시한 학생과 오답을 제시한 학생으로 분류하였다. 둘째, 정답 반응을 전략 유형에 따라 곱셈적 전략(몇 배)과 비례식 알고리듬 전략으로 분류하였다(<표 3>). 셋째, 잘-구조화된, 구조화된, 비-구조화된 문제를 해결하기 위해 사용된 전술한 두 전략 사용의 빈도와 비율을 구해 전략의 변화 양상을 분석하였다.

<표 3> 문제 유형에 따른 전략 분류

잘-구조화된	구조화된 문제	비-구조화된 문제	비고
덧셈적 비교전략	덧셈적 전략	단순 추측	오답
곱셈적 전략[2] -Within 비교 -Between 비교 -단위비율	곱셈적 전략	곱셈적 전략	정답
비례식 알고리듬전략	비례식 알고리듬전략	비례식 알고리듬전략	정답

2. 질적사례연구

가. 연구대상

질적 사례 연구는 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 해결할 때, 수업 중 학습한 비례식 알고리듬 전략을 사용한 학생과 그렇지 않은 학생이 문제해결에서 보이는 특징은 어떠한지 분석하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 해결하기 위해 비례식 알고리듬 해법을 일관되게 사용한 학생과 그 외의 전략을 사용한 학생들 중 무선으로 2명씩 총 4명을 선정한 후, 담임의 조언을 받아 비교적 표현력이 우수한 학생 1명씩을 추천받아 참여에 동의한 학생 2명을 최종 사례로 선정하였다.

나. 자료수집 및 분석

관찰과 면담을 통해 자료를 수집하였으며, 방송실에서 연구자와 일대일 방식으로 이루어졌다. 학생들은 먼저 자신들이 해결했던 구조화된 문제와 비-구조화된 문제에 대한 지필풀이를 눈으로 읽은 후 각각에 대한 해결 방법을 설명하였다. 이어서 비와 비례에 대한 개념적 이해 정도와 문제들 사이의 구조적 유사성의 인

2) 'Within 비교' 전략은 측정단위가 동일한 양들을, 그리고 'Between 비교'전략은 측정단위가 다른 양들을 비교하는 것을 의미한다. 예를 들어 "어떤 자전거가 5분에 15km를 달릴 때, 20분에는 몇 km를 달리겠는가?"라는 문제에 대해 어떤 학생이 '20분은 5분의 4배이므로 15km의 4배는 60km이다'라고 해결했다면 동일한 양(시간과 시간, 거리와 거리)을 비교하였으므로 'Within 비교'에 해당되며, 만약 "5분에 15km를 갔으니, 20분에는 60km를 갈 것이다"라고 해결했다면 다른 양(시간과 거리)을 비교하였으므로 'Between 비교' 전략이라 할 수 있다.

식 정도에 대한 자료를 수집하기 위한 면담이 이루어졌다. 전체 시간은 학생 1명당 50분에서 1시간 정도 소요되었다.

구체적인 자료 수집 절차는 다음과 같다. 첫째, 학생들에게 면담 실시의 의미와 목적 그리고 방법을 안내하였다. 둘째, 학생들은 자신들이 해결했던 구조화된 문제와 지필 풀이를 눈으로 읽어본 후, 잠시 후 해결 방법을 설명하였다. 면담자는 학생들이 해결 방법을 설명하는 동안 개입하지 않았다. 셋째, 해결 방법에 대한 설명이 끝난 후 면담자는 피험자의 비와 비례에 대한 개념적 이해를 조사하기 위해 면담을 실시하였다. 이를 위해 특정한 연산을 사용한 이유와 사용된 용어나 개념 등에 대해 질문하였다. 비-구조화된 문제에 대해서도 동일한 절차로 이루어졌다. 넷째, 문제들 사이의 구조적 유사성을 인식하는 정도를 조사하기 위해 추가적인 면담을 실시하였다.

이러한 일련의 절차를 통해 문제에 대한 지필 풀이, 해결 방법 설명, 그리고 구조화된 면담에서 얻어진 자료가 수집되었다. 해결 방법에 대한 설명과 면담 과정은 비디오로 녹화한 후 전사하였고 학생들의 비와 비례에 대한 개념적 이해가 문제를 해결하는데 어떻게 기여하는지를 분석하는데 주안점을 두었다.

수집된 자료는 각 문제 유형에 따라 분석의 수준을 달리하여 분석되었다. 구조화된 문제와 비-구조화된 문제에 대한 지필 풀이와 그에 대한 학생들의 설명을 통해, 학생들의 문제 해결 전략과 문제해결 행동을 분석하였으며, 면담을 통해 비와 비례에 대한 개념적 이해와 문제 유형 사이의 관련성 인식 정도를 조사하였다. 구체적인 분석 수행 절차는 다음과 같다.

먼저 구조화된 문제와 비-구조화된 문제에 대한 학생들의 지필 풀이와 지필 풀이에 대한 학생들의 설명을 분석하였다. 분석은 학생들의 문제해결 행동과 설명의 질에 초점을 맞추었다. 문제해결 행동은 Mayer와 Hegarty(1996)의 직접번역 접근과 문제모델접근 대한 연구를 그리고 해결 방법에 대한 설명의 질은 Chi와 VanLehn(1991)의 분석틀을 참고하여 분석 준거를 마련하였다(<표 4>)

<표 4> 지필 풀이와 해결 방법 설명에 대한 분석 틀

자료 수집	분석 준거	문제해결 행동에 대한 조작적 기술
지필 풀이 및 설명	문제 해결 행동과 설명의 질	• 문제모델접근 - 특정한 숫자나 키워드 보다는 양과 변수에 초점을 맞추고, 일상적 지식과 수학적 지식을 사용해 문제 상황을 추론하는 흔적이 보임. - 해법을 설명하는 과정에서 수학적 개념, 원리가 사용됨. - 양적인 표현에 의미를 부여함.
		• 직접번역접근 - 문제에 제시된 수와 키워드에 초점을 맞추어 문제를 해결하고, 설명은 지필 계산 과정을 되풀이하는 수준에 머물러 있는 증거가 보임. - 설명에서 수학적인 개념, 원리의 사용이 나타나지 않음.

학생들이 지필 풀이에 대한 설명을 마친 후, 비와 비례에 대한 개념적 이해 정도를 알아보기 위해 구조화된 면담을 실시하였다. 이는 지필 풀이에서 사용한 특정한 수학적 연산 또는 절차를 사용한 이유를 설명하게 함으로써 절차에 대한 개념적 이해의 정도를 알아보는데 초점을 두었다. 구체적으로 '왜 곱셈을 사용했습니까?', '왜 뺄셈을 사용했습니까?'라고 질문하고, 이 질문에 대한 반응을 통해 사용한 절차에 대해 유의미한 설명을 제시하는지를 분석하고, 그 결과를 개념적 이해 수준의 증거로 사용하였다(<표 5>).

또한 구조화 정도가 다른 세 가지 유형의 문제 사이에 존재하는 구조적 유사성(비례 관계)을 인식할 수 있는지에 알아보기 위해 추가적인 면담을 실시하였다. 이를 위해 '이 문제를 전에 풀어본 일이 있습니까?'와 '학교에서 배운 내용 중 이 문제해결과 관련된 내용은 무엇입니까?'라는 질문을 사용하였다.

<표 5> 면담 분석 틀

분석 준거	분석 내용과 질문
개념적 이해	· 절차의 유의미한 사용, 절차와 개념의 연결 예) "왜 뺄셈을 사용했지?, 왜 곱셈을 사용했지?" 등
문제 유형 사이의	· 바탕지식으로의 접근가능성 및 바탕지식의 이용가능성

구조적 유사성 인식	예) "교과서 내용 중 이 문제를 푸는데 도움이 되거나 관련된 내용은 무엇이라고 생각하니?", "이 문제를 전에 풀어본적 있습니까?"
	· 잘-구조화된, 구조화된, 비-구조화된 문제 사이의 관련성 인식 예) "이 문제(잘-구조화된 문제) 해결 방법과 이 문제(구조화된 문제)의 해결 방법은 서로 관련이 있다고 생각하니?"

학생들의 사고 과정에 대한 사후 설명은 최초의 문제 해결 당시에 수집된 프로토콜에 비해 정확성이 덜 할 수 있다(Erricson, 2006). 즉 문제를 해결한 후 학생들이 제시한 설명으로는 그들이 문제를 해결하기 위해 어떤 지식을 사용하는지에 대해 정확하게 판단할 수는 없다. 이 점에서 학생들의 설명은 해석하는데 한계를 지닐 수 있다. 그러나 해결 방법 설명과 구조화된 면담을 통해 수집된 자료는 연구문제 1에서 수집된 양적 자료들을 보완하고, 개념적 이해 수준과 해법의 전이를 비교해 볼 수 있는 의미있는 자료가 될 수 있다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 비례문제해법이 구조화정도가 다른 문제에 전이되는 양상 분석

<표 6>을 보면, 잘-구조화된 문제에 대한 전체 반응 1232개 중 정답률은 82.6%(1011)이고, 정답 반응 중 곱셈적 전략 사용 빈도와 비율은 각각 151명, 15%, 비례식 알고리듬 전략의 빈도와 비율은 각각 860명, 85%였으며, 전체 반응 중 곱셈적 전략 사용 비율은 12.2% 비례식 알고리듬 사용 비율은 69.8%로 나타났다. 결과적으로 많은 학생들이 비례식 알고리듬전략을 사용해 교과서에서 접했던 문제와 유사한 잘-구조화된 문제를 해결하였음을 알 수 있다. 이를 통해 많은 학생들이 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 해결하는데 요구되는 바탕지식은 지니고 있다고 판단할 수 있다.

그리고 구조화된 문제에 대한 전체 반응 중 정답률은 62.9%(97명)이고, 이 중 곱셈적 전략 사용 빈도와 비율은 각각 71명, 73%, 비례식 알고리듬 전략의 사용 빈도와 비율은 각각 26명, 26.9%였다. 그리고 전체 응답자 중 곱셈적 전략 사용 비율은 46.1%, 비례식 알고리듬 전략 사용 비율은 16.8%로 나타났다. 잘-구조화된 문제에 비해 곱셈적 전략 사용 비율은 약 60% 정도 증가하였으며, 비례식 알고리듬 전략의 사용 비율은 약 60% 정도 급감했음을 알 수 있다. 이를 통해 잘-구조화된 문제를 해결하기위해 비례식 알고리듬 전략을 사용했던 대다수의 학생들이 구조화된 문제를 해결하는데 비례식 알고리듬을 적용하지 못하고 곱셈적 전략을 사용했음을 알 수 있다.

마지막으로 비-구조화된 문제에 대한 전체 반응 중 정답률은 37%(57명)이고, 이 중 곱셈적 전략 사용 빈도와 비율은 46명, 80.7%, 비례식 알고리듬 전략의 사용 빈도와 비율은 각각 11명, 19.3%로 나타났다. 그리고 전체 응답자 중 곱셈적 전략 사용 비율은 29.8%, 비례식 알고리듬 전략 사용 비율은 7.1%였다.

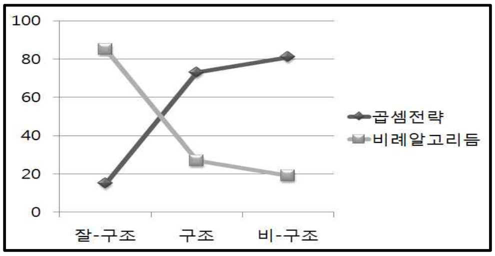
<표 6> 정답률과 전략(%)

문제 유형	빈도 (정답률)	곱셈적 전략		비례식 알고리듬	
		정답자	전체	정답자	전체
잘-구조 (n=1232)	1011 (82.6%)	15%	12.2%	85%	69.8%
구조 (n=154)	97 (62.9%)	73.1%	46.1%	26.9%	16.8%
비-구조 문제 (n=154)	57 (37.0%)	80.7%	29.8%	19.3%	7.1%

이러한 결과를 통해 다음과 같은 사실을 알 수 있다. 첫째 구조화정도가 다른 문제의 성공률을 살펴보면, 많은 학생들이 잘-구조화된 문제는 성공적으로 해결하였지만(82.6%), 구조화된 문제(62.9%)와 비-구조화된 문제(37.0%)는 잘 해결하지 못하였다. 둘째, 각 문제를 해결하는데 학생들이 사용한 전략을 살펴보면, 많은 학생들은 수업 중 해결해본 문제와 구조적으로 매우 유사한 잘-구조화된 문제를 해결하기 위해서 비례식 알고리듬 해법을 사용했지만, 점차 구조화 정도가 약화된 두 문제의 해결에서는 그러한 전략의 사용빈도는 감소하고, 대신에 비례식 알고리듬의 비형식적 전략이라 간주할 수 있는 곱셈적 전략의 사용빈도는 증가하였다. 특히 비-구조화된 문제를 해결하는데 비례식 알고리듬 사용 비율은 전체 참여자 154명 중 11

명(7.1%)로 매우 저조하였다. 이를 통해 많은 학생들이 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 해결하기 위한 바탕지식은 가지고 있지만 그것을 이 두 문제를 해결하는데 전이하지 못하였다고 판단할 수 있다.

<그림 1>은 구조화정도가 다른 문제를 성공적으로 해결하는데 사용된 전략의 변화 양상을 나타낸 그림이다. 곱셈전략 사용 빈도는 비-구조화된 문제로 갈수록 증가하였지만, 비례식 알고리듬 전략 사용 빈도는 비-구조화된 문제로 갈수로 감소하고 있음을 알 수 있다.



<그림 1> 곱셈전략과 비례식 알고리듬전략 변화 양상

이러한 결과가 나타나게 된 이유를 두 가지 관점에서 예상할 수 있다. 첫 번째는 전이에 대한 인지주의자의 관점으로, 유추적 전이에 실패한 이유를 학생들의 인지적 능력이 부족하기 때문이라고 보는 관점이다(박성선, 1998). 즉 학교에서 학습한 비례식 알고리듬 전략을 구조화된 문제와 비-구조화된 문제에 적용하지 못한 근본적인 이유는 학생들이 비와 비례에 대한 개념적 이해를 구성하지 못했기 때문이며, 따라서 잘-구조화된 문제와 구조화된 문제 그리고 잘-구조화된 문제와 비-구조화된 문제 사이의 구조적 유사성 즉 비례구조를 인식하지 못하고 결과적으로 비례식 알고리듬이 아닌 곱셈적 전략을 사용했다고 예상해볼 수 있다.

두 번째는 유추적 전이에 대한 상황인지 관점이다. 상황인지 이론의 기본적인 가정은 지식은 특정한 맥락에 상황화되어 있다는 점이다. Lave(1988)의 연구에서 보듯이 사람들은 슈퍼마켓에서 물건 값을 계산하기 위해 학교에서 학습한 사칙연산 알고리듬을 사용하지 않는다. 이러한 현상에 대해 그녀는 사칙연산 알고리듬은 학교라는 상황에서 달성해야할 목적이지만 슈퍼마켓에서는 그것은 목적이 아니라 물건을 사기위한 도구이기 때문이라고 설명하였다. 결국 학생들이 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 해결하기 위해 비례식 알고리듬을 사용하지 않는 이유는 상황 자체의 본질에 기인한 것이라 예상할 수 있다. 즉 본 연구에서 사용한 구조화된 문제와 비-구조화된 문제 자체가 비례식 알고리듬 해법을 적용할 필요가 없도록 상황화된 문제이기 때문에 학생들은 비례식 알고리듬 전략을 사용하지 않았다고 예상해볼 수 있다.

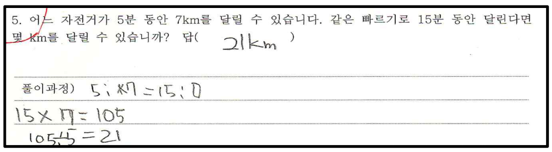
이상 두 가지 예상 중 어느 관점이 더 타당하지를 판단하는 것은 시기상조이다. 하지만 두 문제에 대해 답을 제시했더라도 만일 비례식 알고리듬 전략을 사용해 구조화된 문제나 비-구조화된 문제를 해결한 학생들이 곱셈적 전략을 사용한 학생들보다 개념적 이해 수준이 높다는 것을 증명할 수 있다면, 첫 번째 주장이 더 타당하다고 결론지을 수 있다. 다음 절에서 이러한 가설을 검증한다.

2. 문제해결 과정에서 보이는 특징 분석

가. 학생 (A)의 문제해결 특징

1) 잘-구조화된 문제의 해결

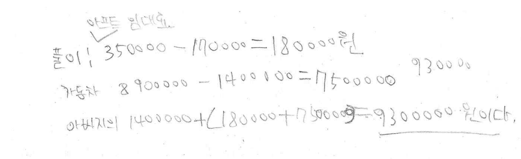
학생 (A)는 잘-구조화된 문제 총 8문제 중 7문제에 대해 정답을 제시하였다. 또한 정답을 제시한 모든 문항에 대해 <그림 2>와 같이 비례식 알고리듬 전략을 사용하였다.



<그림 2> 학생 (A)의 잘-구조화된 문제에 대한 해법-비례식 알고리듬 전략

2) 구조화된 문제의 해결

<그림 3>은 학생 (A)의 풀이과정과 해결방법에 대한 설명을 나타낸 것이다. 학생 (A)는 ‘덧셈적 전략’을 사용해 구조화된 문제를 해결하였다. 임대료의 차 180,000원, 자동차 가격의 차 7,500,000원을 합한 후, 10년 전의 월급 1,400,000(원)에 더해서 문제를 해결하였다.



먼저 아들의 아파트는 35만원이니까 17만원을 빼면 18만원, ① 자동차는 890만원에서 140만원을 빼면 750만원이므로, 아버지의 월급은 140만원 이었으므로, 여기서 더하기 (18만원 +750만원)을 하면 930만원이 됩니다. ② 아.. 너무 많은 것 같은데.. 그냥 930만원이네.. 물가가 엄청 올랐네..

<그림 3> 학생 (A)의 구조화된 문제에 대한 풀이방법 및 설명

학생 (A)는 해결 방법을 설명하는 내내 문제에 제시된 수가 어떤 양을 나타내는지에 대해 추론하지 못한 채 제시된 수 사이의 연산에 초점을 맞추고 있음을 알 수 있다. 이러한 문제 해결 특징으로 인해 자동차 10년 월급 14만원을 자동차 가격으로 잘못 생각해 10년 자동차 가격 8,900,000만원에서 1,400,000원을 빼는 오류를 범하였다(①). 또한 주어진 문제 상황을 이해하려는 시도를 찾아볼 수 없으며 단지 문제에 주어진 숫자에만 주목할 뿐 변화하는 상황에 대한 이해의 흔적은 나타나지 않는다. 이러한 문제 해결 행동은 ‘직접 번역 접근’으로 볼 수 있다. 또한 구해진 결과가 지나치게 큼에도 불구하고 그것의 타당성을 제시하지 못하였다(②).

구조화된 문제에 대한 해결을 설명한 후 문제 풀이에 사용된 연산에 대한 개념적 이해 정도를 알아보기 위해 면담을 실시하였다. 다음은 학생 (A)와 면담 내용이다.

교사: 왜 현재 임대료에서 10년 전 임대료를 뺐지?

학생: ① 물가가 얼마가 올랐는지를 알려면 빼야되요.

교사: 왜 8,900,000에서 1,400,000을 뺐지?

학생: 자동차 가격이 4,500,000만원에서 8,900,000으로 올랐으니까요. 어 근데 왜 1,400,000을 뺐지.. 제가 잘못 뺀 것 같아요. 4,500,000을 빼야되는데 1,400,000을 뺐어요.

교사: 그랬구나, 괜찮아. 왜 여기서 (1,400,000+180,000+4,500,000) 더했지?

학생: ② 네. 물가가 올랐어요.. 아들 김소망씨의 첫 월급을 구해야 하니까, 임대료는 18만원 오르고, 자동차는 750만원 오르고.. 그러니까 김소망씨 월급에다 임대료와 자동차가 오른 것 만큼 더해주어야 해요.

교사: ③ 임대료는 170,000에서 350,000에서 오르고 자동차는 4,500,000만원에서 8,900,000만원으로 올랐잖아. 임대료와 자동차 가격 중 어느 것이 더 많이 올랐다고 생각해?

학생: ④ 당연히 자동차죠. 자동차는 4,400,000만원 오르고 임대료는 170,000원 올랐으니까요.

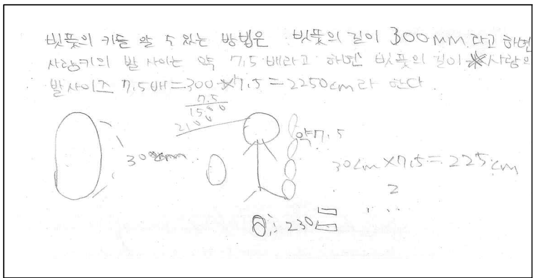
문제를 풀기위해 사용한 연산의 의미를 고려하지 않은 채 뺄셈(①)과 덧셈(②) 연산을 반복하였다. 구조화된 문제는 두 양의 곱셈적 변화 관계가 비교적 명확함에도 불구하고 덧셈적 전략을 사용하고 있어 문제를 깊이 있게 표상하지 못하고 문제에 제시된 표면적 특징에 기반해 표상을 구성했음을 알 수 있다.

변화하는 상황에서 곱셈적(상대적) 변화에 대한 학생 (A)의 이해를 알아보기 위한 질문을(③) 하였다. 학생 (A)는 두 양이 관련을 맺으며 변화하는 상황에 대해 곱셈적(상대적)으로 이해하기 보다는 덧셈적(절대적)인 측면에서 이해하고 있음을 알 수 있다.

학생 (A)의 구조화된 문제에 대한 해결에서 보이는 특징을 요약하면 첫째, 덧셈적 전략을 사용해 문제를 해결하였으며, 둘째 지필 풀이와 해결 방법에 대한 설명은 Mayer와 Hegarty(1996)가 분류한 문제해결행동 중 직접번역접근에 해당되며, 마지막으로 자신이 사용한 연산(절차)에 대해 의미있는 설명을 제시하지 못하였으며 또한 두 양의 곱셈적 또는 상대적 변화를 이해하지 못하였다.

2) 비-구조화된 문제 해결

학생 (A)는 앞의 구조화된 문제의 해결과 달리 비-구조화된 문제 해결에서는 곱셈적 관계에 기초해 문제에 접근하였다(<그림 4>).



빅풋의 키를 알 수 있는 방법은 빅풋의 키를 어림하면, 빅풋의 길이는 100아니 300mm라고 하면 사람의 키의 발 사이즈는 약 7.5배라고 하면, 빅풋의 길이+사람의 발사이즈 7.5배를 더하면 아닌데..곱하기를 해야 된다 7.5를 하면 225cm. 아 너무 작나.

<그림 4> 학생 (A)의 비-구조화된 문제에 대한 풀이방법 및 설명

학생 (A)가 비-구조화된 문제를 해결하기 위해 사용한 문제해결 전략은 곱셈적 전략 유형 중 Between 비교 전략이다. 즉 사람의 발 크기와 키는 7.5배의 관계가 있으므로, '빅풋'의 발사이즈가 약 300mm(30cm) 정도 이므로 7.5배를 하면 약 225cm 정도라고 어림하였다. 또한 사람의 키가 발의 크기의 몇 배인지를 구하는 과정에서 'Build-up 전략'을 사용한 흔적인 보인다.

학생 (A)의 비-구조화된 문제 해결 전략과 개념적 이해 정도를 조사하기 위해 면담을 실시하였다. 학생 (A)는 자신의 키가 발 크기의 몇 배(7.5배)인지를 구하기 위해 수(값)를 사용하지 않았다. 대신에 발 크기를 손 뼘으로 재어 손 한 뼘과 발 크기는 거의 같다는 사실을 이용하여, 손 한 뼘을 단위로 하여 발꿈치부터 머리까지 반복하여 세는 전략을 사용하였다(①). 이러한 전략은 길이를 측정할 때 기준단위를 활용해 두 물체의 길이를 비교하는 전형적인 간접 비교 방법으로서 측정활동 등의 선행 학습 경험에 의해 영향을 받은 전략으로 추측된다. 또한 이 전략은 비례 추론 문제 해결 전략 중 전형적인 'Build-up 전략'에 해당된다.

다음은 학생 (A)와 면담 내용이다.

교사: 7.5배는 어떻게 구했지.
학생: 제가요 직접 해보았어요.
교사: 직접 해보았다는 게 무슨 뜻이지?
학생: (문제에 제시된 그림을 가리키며) ① 제 발이 만약 이 정도라면 내 키는 발 크기의 약 7.5배정도에요. 아 그럼 엄청 큰데.. 먼저 제 발 사이즈를 손으로 어림하니까, 7.5배는 손을 이렇게 해서요. 발꿈치부터 머리까지 해서 7.5배가 나와서 곱하기 빅풋의 발을 곱했어요. 그랬더니 2m 25가 됐어요.

위의 면담에서 알 수 있듯이 학생 (A)의 경우 구조화된 문제는 성공적으로 해결하지 못했지만 비-구조화된 문제는 성공적으로 해결하였다. 이러한 원인은 무엇일까? 그것은 문제 자체의 본질에 기인한 것으로 예상할 수 있다. '물가 상승' 문제(구조화된 문제)는 상황 자체가 구체적인 측정 활동을 수반하지 않는 특징이 있어, 순전히 변화하는 두 양 사이의 곱셈적 관계의 이해를 통해서만 해결될 수 있는 것이다. 그러나 '빅풋' 문제의 경우 문제 자체는 비-구조화된 것이었지만 문제를 해결하는데 필수적인 요소가 발의 크기라는 사실만 파악한다면 구체적인 측정 활동(Build up)을 통해 자신의 발 크기와 키가 몇 배인지를 구하고, 그러한 관계를 '빅풋'의 발 크기와 키의 관계에 적용함으로써 문제를 해결할 수 있다.

학생 (A)가 구조화된 문제는 해결하지 못했지만 비-구조화된 문제를 해결한 근본적인 원인이 무엇인지를 조사하기 위해 비-구조화된 문제에 대한 면담을 마친 후 추가적인 면담을 실시하였다. 비-구조화된 문제인 '빅풋' 문제를 푸는 방법과 구조화된 문제 풀이 방법 사이의 유사점을 인식하는지를 알아보기 위한 대화에서, 문제에 기술된 표면적 특징(문제의 길이, 구해야 할 대상)에 주목할 뿐 두 문제 간의 구조적인 유사점에 대해 전혀 인식하지 못하고 있음을 알 수 있다.

교사: '빅풋' 문제를 푸는 방법은 이 문제들을(잘-구조화된 문제) 푸는 방법과 관련이 있니?
학생: 관련이요?
교사: 도움이 될 수 있는지 묻는거야?
학생: 도움이 되는거요?
학생: ① 빅풋 문제와 이 문제들은 다른거 같은데요.
교사: 어떤 점이 다른데..(1번 문제를 가리키며) 이 문제와 비교해서 말해볼래.
학생: ② 이 문제(잘-구조화된 문제)는 짧은데 빅풋 문제는 엄청 길잖아요.
교사: 또
학생: ③ 음..이 문제는 사탕의 값을 구해야 되는데 '빅

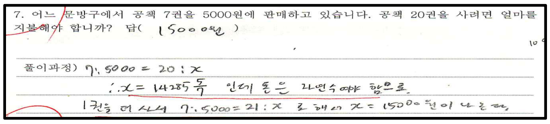
퐁' 문제는 키를 구하는 거고.. 많이 다르네요.

또한 위의 면담 결과를 보면, 잘-구조화된 문제와 구조화된 문제의 해결 방법이 관련이 있다는 점을 인식하지 못하였다(①). 두 문제가 관련이 없는 이유는 문제의 길이(②)와 구해야 할 것(③)이 다르기 때문이라고 말하였다. 이러한 발화를 통해 문제들 사이의 외형적인 차이가 이 학생이 두 문제간의 구조적 유사성을 인식하는데 간섭요인으로 작용하고 있음을 알 수 있다.

나. 학생 (B)의 문제 해결 특징

1) 잘-구조화된 문제 해결

학생 (B)는 잘-구조화된 문제 8문항 모두에 대해 정답을 제시하였다. 더불어 모든 문제에 대해 비례식 알고리듬을 일관되게 사용하였다. 특히 주목할 점은 <그림 5>에서 책 20권을 사기 위한 금액은 정수가 될 수 없다고 판단한 후 책 한 권을 더 산다고 가정하여 정수비를 만든 후 공책 20권을 사는데 필요한 금액을 구하는 유연함을 보였다. 이는 비와 비례에 대해 깊이 있게 이해한 결과로 해석할 수 있다.


7. 어느 문방구에서 공책 7권을 5000원에 판매하고 있습니다. 공책 20권을 사려면 얼마를 지불해야 합니까? 답(15000원)

풀이과정) 7:5000 = 20:x

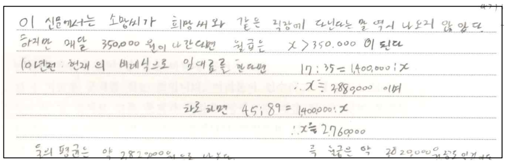
∴x = 14285 인데 돈은 자연수여야 함으로,

1권을 더 사서 7:5000=21:x 로 해서 x=15000원이 나온다.

<그림 5> 학생 (B)의 잘-구조화된 문제 해결

2) 구조화된 문제 해결

지필 풀이와 해결 방법 설명에서 학생 (B)는 구조화된 문제인 '물가 상승'문제를 '비례식' 알고리듬을 사용하여 해결하였다. 구조화된 문제는 학교에서 전형적으로 학습하는 '미지값 구하기' 문제와 표면적인 특징과 구조화 정도에서 차이를 보인다. 하지만 학생 (B)는 표면적인 특징 밑바탕에 놓인 수학적 구조인 비례 관계를 표상하고 그러한 표상에 기반해 문제를 해결하였다.


이 신문에서는 소망씨가 희망씨와 같은 직장에 다닌다는 말 역시 나오지 않았다. 하지만 매달 350,000 원이 나간다면 월급은 x>350,000 이 된다

10년전 : 현재의 비례식으로 임대료를 한다면 17:35=1,400,000:x

∴x≒2880,000 이며

차로 하면 45:89=1,400,000:x

∴x≒2760,000

둘의 평균은 약 2820,000원으로 나온다. 즉 월급은 약 2820,000원 정도일 것이다.

김소망씨는 ① 매달 임대료로 35만원을 내어야 하므로 월급은 x>35 만원이 된다. 10년 전과 현재의 ② 임대료를 비례식으로 나타낸다면 17:35=1,400,000:x, 따라서 x=2,880,000원 이며, 자동차로 비례식을 구하면, 45:89=1,400,000:x , x=2,760,000원이다. 이 둘의 평균은 약 2,820,000원으로 나온다. 즉 월급은 약 2,820,000원 정도일 것이다.

<그림 6> 학생 (B)의 구조화된 문제에 대한 풀이방법 및 설명

자신의 해결 방법을 설명하는 과정에서 문제에 제시된 정보와 일상적 지식을 결합하여 문제 상황을 추론하였고(①), 수학적 기호, 문자, 그리고 수학적 용어를 매우 자연스럽게 사용하고 있음(②)을 알 수 있다. 예컨대, x>350,000(원), 비례식, 17:35=1,400,000:x, 평균 등. 결국 문제의 진술 내용의 추가적인 문제 상황을 추론하고 양적인 표현에 의미를 부여하고 있음을 알 수 있다. 이러한 문제 해결 행동은 면담을 통해서도 확인할 수 있었다.

교사: 왜 비례식을 사용해 문제를 풀었지?

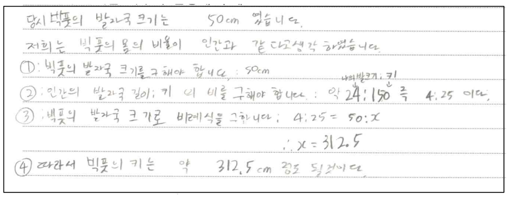
학생: 임대료가 17만원에서 35만으로 올랐으니까, 그 비율만큼 월급도 140만원에서 오르게 되니까요. 그리고 자동차로 해도 마찬가지에요.

비례식을 사용한 이유를 설명하는 과정에서 임대료의 곱셈적 관계를 월급의 관계에 적용하고 있음을 알 수 있다. 이는 비례 추론의 이해를 위한 핵심인 두 양 사이에 존재하는 비의 일정성에 대한 이해를 보여주고 있다.

3) 비-구조화된 문제 해결

비-구조화된 문제 해결은 구조화된 문제에 대한 지필 풀이와 해결 방법 설명에서 나타난 특징과 마찬가

지로 비례식 알고리듬을 사용하여 문제를 해결하였다. 또한 해결 설명에서 비율, 비, 비례식이라는 수학적 용어를 매우 명시적으로 사용하였으며 해결 절차 역시 매우 논리적이었다.



발견당시 빅풋의 발자국은 50cm 였다고 하면, 빅풋의 몸의 비율이 인간과 같다고 생각할 수 있습니다. 인간의 발자국의 길이: 키의 비를 구해야 합니다. 그것은 약 24(나의 발 크기): 150(나의 키) 즉 4:25이다. 빅풋의 발자국 크기로 비례식을 세우면 $4:25=50:x$, $x=312.5$입니다. 따라서 빅풋의 키는 약 312.5 cm 정도 될 것입니다.

<그림 7> 학생 (B)의 비-구조화된 문제의 풀이방법 및 설명

Ⅴ. 결론

본 연구는 수업 중 학습한 비례문제 해법을 구조화정도가 다른 세 가지 유형의 문제를 해결하는데 전이하는 양상과 개인차를 분석하는 것을 주된 목적으로 하였다. 이를 위해 첫째, 구조화정도가 다른 문제를 해결하는데 사용되는 해법을 크게 곱셈적 전략과 비례식 알고리듬 전략으로 구분하고, 각 문제를 해결하는데 사용된 전략의 변화 양상을 분석하였으며 둘째, 사용된 전략의 종류 따라 구분된 집단이 문제해결과정에서 어떠한 특징을 보이는지를 분석하였다.

먼저 학생들이 사용한 전략의 변화 양상에 대한 연구 결과에 따르면, 많은 학생들이 바탕 문제 즉 잘-구조화된 문제를 해결하기 위해 사용했던 해법인 비례식 알고리듬 전략을 목표 문제 즉 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 해결하는데 적용 또는 전이하지 못하였다. 이러한 연구 결과는 바탕문제와 목표문제간의 자발적 전이의 어려움을 보고한 선행연구 결과와 일치한다(예, Gick & Holyoak, 1983; English, 1997; Reed, 1999). 또한 잘-구조화된 문제에 대한 정답자중 85%의 학생들이 비례식 알고리듬 전략을 적용하고 있어, 많은 학생들이 구조화된 문제와 비-구조화된 문제해결에 필요한 바탕지식을 소유하고 있다고 볼 수 있다. 따라서 많은 학생들이 구조화정도가 점차로 약화된 두 가지 유형의 동형문제를 해결하는데 비례식 알고리듬 해법을 적용하지 못하는 근본적 이유는 이용가능한 지식은 장기기억에 저장되어 있으나 그러한 지식에 접근하지 못함으로써 인출에 실패했다는 주장(Bassok, 1997; English, 1997; Weisberg, 2006)과 궤를 같이 한다.

두 번째 연구 결과에 따르면, 전반적으로 학생들의 개념적 이해 수준, 문제 해결 전략, 각 문제들 사이의 구조적 유사성을 인식하는 수준은 서로 관련이 깊었다. 즉 비와 비례에 대한 개념적 이해 수준이 높은 학생은 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 해결하는데 비례식 알고리듬 전략을 사용해 문제를 해결하였으며, 문제들 사이의 구조적 유사성을 자발적으로 인식하였다.

결과적으로 본 연구에 참여한 많은 학생들은 학교에서 학습한 해법을 구조화정도가 덜한 친숙하지 못한 문제의 해결에 자발적으로 전이하지 못하였으며, 그러한 원인은 바탕문제 해결에 요구되는 비와 비례에 대해 개념적으로 이해하지 못했기 때문이었다.

이러한 연구결과에 기초해 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

첫째, 학생들에게 학교에서 학습한 수학적 개념과 알고리듬을 적용해보는 기회를 제공하기 위해서 학습한 지식을 일상생활과 관련된 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 적극 활용할 필요가 있다. 특히 이 연구에서 많은 학생들이 학교에서 학습한 선행학습 지식과 더불어 일상적인 경험에서 습득한 지식을 사용해 비-구조화된 문제를 해결하였다. 이는 비-구조화된 문제 자체가 일상 경험이나 선행학습을 통해 습득한 비형식적, 형식적 지식을 통합할 수 있는 교수학적 장치로 기능할 수 있다는 가능성을 내포하고 있음을 보여주는 예라 할 수 있다.

둘째, 학생들의 유추적 전이 능력을 신장시키기 위해서 수학 수업은 학생들의 개념적 이해에 주안점을 둘 필요가 있다. 특히 초등학교에서 비와 비례 학습은 주로 잘-구조화된 미지값 비례 문장제를 통해 이루어진다. 하지만 이 연구에서 밝혔듯이 많은 학생들이 비례식 알고리듬을 적용해 미지값 문장제를 성공적으로

해결하였지만 동형문제인 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 해결하는 데는 잘못된 덧셈적 전략을 사용하는 오류를 범하였다. 이는 학생들이 알고리듬을 왜 사용하는지 그 이유를 이해하지 못한다면 비록 미지값 문제를 성공적으로 해결했더라고 진정한 비례추론을 했다고 볼 수 없다는 주장(Lamon, 2005; Lesh 외, 1988 등)을 직접적으로 반영한 결과로 해석할 수 있다. 따라서 초등학교 비와 비례 학습에서 미지값 문제에 대한 반복적인 연습에만 만족할 것이 아니라 일상생활과 관련된 문제해결 경험을 제공함으로써 비례적으로 변화하는 상황을 수학화하는 경험을 제공할 필요가 있다. 더불어 비와 비례에 대한 평가에 있어서도 미지값 문장제 해결뿐만 아니라 개념적 이해의 깊이를 평가할 수 있는 방법을 모색할 필요가 있다.

셋째, 기존에 이루어 유추적 전이에 관한 연구들은 대분의 연구들이 동형문제간의 유추적 전이에 관심을 둔 반면, 본 연구는 구조화정도라는 과제 변인을 추가하여 구조화정도가 다른 동형문제간의 유추적 전이에 초점을 맞추었다. 특히 구조화된 문제와 비-구조화된 문제는 학생들의 일상생활에서 직면할 수 있는 문제로써, 이러한 문제를 활용한 유추적 전이의 연구는 학교에서 학습한 지식이 일상생활로 전이되어야 한다는 수학교육 목표에 부합되며, 그러한 목표를 달성하기 위한 경험적 증거를 제시하였다는 점에서 그 의의를 찾을 수 있을 것이다. 따라서 후속된 경험적 연구는 이 연구에서 얻어진 결과를 더욱 확장하여 다른 영역에 일반화될 수 있는 조사할 필요가 있다.

참 고 문 헌

김민경・이지영・홍지연・김은경(2011). 초등학교 수학 교과서에 나타난 문제의 비구조성에 관한 연구. 학습자중심교과교육연구, 11(2), 1-21.

박성선(1998). 수학학습에서 상황인지론 적용과 전이에 대한 연구. 한국교원대학교 박사학위논문.

우정호・정은실(1995). Polya의 수학적 발견술 연구. 대한수학교육학회 논문집, 5(1), 99-117.

이종희(2003). 수학 문장제 해결과 유추. 교과교육학연구, 7(2), 63-79.

이종희・김진화・김선희(2003). 중학생을 대상으로 한 대수 문장제 해결에서의 유추적 전이. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 42(3), 353-368.

이종희・이진향・김부미(2003). 중학생들의 유추에 의한 수학적 문제 해결 과정: 사상의 명료화를 중심으로. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 16, 245-267.

Bassok, M. (1997). Two types of reliance on correlation between content and structure in reasoning about word problem. In L. D. English(Ed.), *Mathematical reasoning: Anlogies, metaphors, and images* (pp. 221-246). Mahwah, NY: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Bassok, M., & Olseth, K. L. (1995). Object-based representations: Transfer between cases of continuous and discrete models of change. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 21(6), 354-367.

Chen, Z. (1996). Children's analogical problem solving: The effect of superficial, Structural, and procedural similarity. *Journal of Experimental Child Psychology*, 62(3), 410-431.

Chi, M. T. H. (2006). Laboratory method for assessing experts' and novices' knowledge. In K. A. Erricsson, N. Charness, P. J. Feltovich, & R. R. Hoffmann(Eds.), *The Cambridge handbook of expertise and expert performance* (pp. 167-184). NY: Cambridge University Press.

Chi, M. T. H., & Vanlehn, K. A. (1991). The content of physics self-explanations. *Journal of the Learning Science*, 1(1), 69-105.

Chi, M. T. H., Feltovich, P., & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problem by experts and novices. *Cognitive Science*, 5(2), 121-152.

English, L. D. (1997). Children's reasoning process in classifying and solving computational word problem. In L. D. English(Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 191-220). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

English, L. D. (2004). Mathematical and analogical reasoning in early childhood. In L. D. English(Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 1-22). Mahwah, NY: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Model and processes*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education*. Mahwah, NY: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Erricson, K. A. (2006). Protocol analysis and expert thought: Concurrent verbalizations of thinking during experts′ performance on representative tasks. In K. A. Erricson, N. Charness, P. J. Feltovich, & R. R. Hoffmann (Eds.), *The Cambridge handbook of expertise and expert performance* (pp. 223-242). NY: Cambridge University Press.

Gentner, D., & Loewenstein, J. (2003). *Learning: Analogical reasoning*. Encyclopedia of Education. NY: Macmillian.

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology*, 12, 306-355.

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 1-38

Holyoak, K. J., & Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition*, 15(4), 332-340.

Holyoak, K. J., & Thagard, P. (1995). *Mental leaps: Analogy in creative thought*. Cambridge, MA: MIT Press.

Jay, E. S., & Perkins, D. N. (1997). Problem finding: The search for mechanism. In M. A. Runco (Ed.), *The creativity research handbook*. Cresskii, NJ: Hampton Press Inc.

Jonassen, D. G. (2010). *Research issue in problem solving*. Paper presented at the 11th International Conference on Education Research(Seoul, Korea).

Jonassen, D. G., & Hung, W. (2008). All problems are not equal: Implications for problem-based learning. *The Interdisciplinary Journal of Problem Based Learning*, 2(2), 6-28.

Lamon. S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teacher*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. NY: Cambridge University Press.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert, & M. Behr(Eds.), *Number concept and operations in the middle grades* pp. 93-118). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. NY: Freeman and Company.

Mayer, R. E., & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. In R. J. Sternberg, & T. Ben-Zeev(Eds.), *The nature of mathematical thinking*(pp. 5-29). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Perkins, D. N., & Salomon, G. (1988). Are cognitive skill context-bound? *Educational Researcher*, 18(1), 16-25.

Reed, S. K. (1999). *Word problems: Research and curriculum reform*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Reeves, L. M., & Weisberg, R. W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Bulletin*, 115(3), 381-400.

Weisberg, R. W. (2006). Expertise and reason in creative thinking. In J. C. Kaufman, & J. Bear(Eds.), *Creativity and reason in cognitive development*, (pp. 7-42). NY: Cambridge University Press.

Wood, P. K. (1983). Inquiring systems and problem structure: Implications for cognitive development. *Human Development*, 26(5), 249-265.

Analysis on Analogical Transfer between Mathematical Isomorphic Problems with Different Level of Structuredness

Sung, Chang-Geun
Keunbyul Elementary School, Gwangju 506-307, Korea.
E-mail: doway7668@hanmail.net

Park, Sung-Sun
Chuncheon National University of Education, Chunceon 200-703, Korea.
E-mail: starsun@cnue.ac.kr

This study aims to find whether the solutions for well-structured problems learned in school can be transferred to the moderately-structured problem and ill-structured problem. For these purpose, research questions were set up as follows: First, what are the patterns of changes in strategies used in solving the mathematics problems with different level of structuredness? Second, From the group using and not using proportion algorithm strategy in solving moderately-structured problem and ill-structured problem, what features were observed when they were solving that problems? Followings are the findings from this study. First, for the lower level of structuredness, the frequency of using multiplicative strategy was increased and frequency of proportion algorithm strategy use was decreased. Second, the students who used multiplicative strategies and proportion algorithm strategies to solve structured and ill-structured problems exhibited qualitative differences in the degree of understanding concept of ratio and proportion. This study has an important meaning in that it provided new direction for transfer and analogical problem solving study in mathematics education.

* ZDM Classification : C33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : analogical transfer, problem solving, well-structured problem, structured problem, ill-structured problem, conceptual understanding