韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2012. 8. 제 15권, 제2호, 107-134

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Aug. 2012, Vol. 15, No. 2, 107-134

수학적 모델링 학습이 문장제 해결에 미치는 효과

신 현 용 (한국교원대학교)
정 인 수 (서울옥정초등학교)

수학적 모델링은 일반적으로 수학적인 방법으로 해석되고 이해되어야 하는 실제적인 문제 상황을 해결하기 위해 상황에 대한 적절한 수학적 모델을 구성하여 문제를 해결하는 일련의 과정이라고 할 수 있다. 문장제는 실제적인 측면과 형식적인 측면, 모두를 포함하고 있으므로 수학적 모델링 활동에 이상적인 도구가 될 수 있다. 이에 본 연구는 실세계의 맥락을 고려해야 하는 진정성있는 문장제를 바탕으로 한 수학적 모델링 학습이 문장제 해결 행동, 문장제 해결에서 실생활 경험을 활용하는 능력, 문장제에 대한 신념 등에 미치는 영향을 조사하였다. 연구 결과 문장제에 대한 수학적 모델링 학습은 직접번역 접근(DTA) 대신에 의미기반 접근(MBA)으로 문장제 해결 행동을 이끄는데 효과적이었으며, 문장제를 해결하는데 있어서 실생활 맥락을 고려하는 태도에 긍정적인 영향을 미쳤다. 또한 수학적 모델링 학습은 문장제에 대한 긍정적인 신념을 형성하는데 중요한 역할을 했음을 알 수 있었다. 이와 같은 연구 결과를 바탕으로 초등학교에서 문장제를 어떻게 다루어야 하는지에 대한 시사점을 살펴보았다.

I. 서론

1. 연구의 필요성과 목적

수학적 모델링이 초등학교에 많이 적용되어 오지 않은 것이 사실이지만, 최근의 연구들은 초등학생들도 의미있는 모델링 활동에 성공적으로 참여할 수 있음을 보여주고 있으며(김민경・홍지연・김은경, 2009; Doerr & English, 2003; English, 2006; English & Watters, 2005; Wyndhamn & Säljö, 1997), 아동들은 모델링을 할 수 있는 기본적인 능력을 가지고 있으므로 수학적 모델링 활동은 학교 수학 초기부터 도입되어야 한다고 지적하고 있다(Carpenter & Romberg, 2004; Diezmann, Watters, & English, 2002; Lehrer & Schauble, 2003; NCTM, 2000). 수학적 모델링 활동은 본래 사회적인 경험이기 때문에(Zawojewski, Lesh, & English, 2003), 아동의 효과적인 의사소통 능력과 협력 활동, 반성 등을 촉진할 것이며, 이를 통해 학교 수학에 대한 성취 수준뿐만 아니라 수학적 문제해결에 대한 학생들의 태도와 자신감도 향상될 수 있을 것이다.

수학적 모델링이 실생활 맥락에서 수학적인 구조를 파악하는 과정이라면, 문장제는 수학적 모델링을 경험할 수 있는 좋은 기회가 될 것이다. 즉, 실제적인 측면과 추상적이고 형식적인 구조 모두를 가진 문장제는 초등학교에서 수학적 모델링 활동에 이상적인 도구이며(Greer, 1997), 역사적으로도 문장제는 모델링 과정을 지도하는 대표적인 방법으로 인식되어 왔다(Verschaffel, 2002).

그러나 학교 수학에서 사용해왔던 대부분의 문장제가 수학적 모델링에 대한 긍정적인 성향 개발을 촉진하는 도구로 기능해왔는지에 대해서는 회의적이다(Gerofsky, 1996; Reusser & Stebler, 1997; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000). 학교 수학에서 문장제가 주로 연산에 대한 연습으로 다루어짐으로써 문장제에 포함된 수나 핵심 단어에 기초하여 분별없이 계산을 하거나(Schoenfeld, 1991; Sowder, 1988; Pape, 2004) 고려해야 할 실제적인 측면들을 무시하고 답을 하는 등(김민경, 2004; Inoue, 2005; Verschaffel, De Corte, & Lasure, 1994), 여러 가지 문제점이 지속적으로 제기되어 왔다. 이에 대해 Greer(1997)는 모델링 관점이 문장제에 대한 학생들의 피상적인 접근과 잘못된 신념 그리고 문장제를 전형적으로 다루는 교실 문화 등을 개선할 수 있는 좋은 대안이라고 지적하고 있다.

위에서 언급한 것처럼, 학교에서 문장제가 피상적으

* 접수일(2012년 6월 30일), 게재 확정일(2012년 8월 21일)
* ZDM 분류: D41
* MSC2000 분류: 9740
* 주제어: 문장제, 문장제 해결, 수학적 모델링 학습

로 다루어짐으로 인해 많은 아동들이 문장제 해결에 어려움을 느끼고 있다. 문장제에 실패하는 아동들은 주로 직접번역 접근(DTA) 전략을 사용한다고 한다(Hegarty, Mayer, & Monk, 1995; Pape, 2004). 직접번역 접근은 문제에서 선택한 수와 핵심 단어를 기초로 한 해법을 바탕으로 하고, 의미기반 접근(MBA)은 문제에 기술된 상황에 대한 모델을 구성하고 이 모델을 기초로 한 해법을 바탕으로 한다(Hegarty 외, 1995; Pape, 2004). 직접번역 접근이 학교 수학 맥락에서 해결해야 하는 많은 문제에 효과적이고 많은 학교 문장제들이 사칙 연산 중의 하나 또는 그 이상의 조합으로 간단히 해결되기 때문에(Davis-Dorsy, Ross, & Morrison, 1991; Gravemeijer, 1997), 이 전략을 쉽게 포기하지 못하고 있으며, 더 나아가 의미기반 접근 방법의 개발을 방해하고 있다(Hegarty 외, 1995).

문장제 해결과 관련된 또 다른 문제점은 학생들이 문장제와 실생활에 대한 비형식적 이해를 관련짓지 않고 문제를 해결하고 있다는 것이다(김민경, 2004; Hatano, 1997; Inoue, 2005; Palm, 2007; Verschaffel, De Corte, & Lasure, 1994; Wyndhamn & Säljö, 1997). 이러한 경향은 굳건해 보이고 쉽게 극복될 수 없는 것처럼 보인다는 분석들이 제시되어 왔으며(Greer, 1997; Reusser & Stebler 1997; Verschaffel 외, 2000), Verschaffel, De Corte, & Borghart(1997)는 예비교사들도 초등학교 수학에서 실제적 맥락에 대한 고려를 자극하기보다는 무시하는 것이 옳다고 믿고 있는 것으로 보인다는 연구 결과를 제시하였다.

이와 같이, 문장제의 실제적 맥락을 무시하고 비실제적인 해법을 제시하게 만드는 학습 환경 요소로 지적되는 것 중의 하나가 과제 특성이다(Palm, 2007). 실제 교과서에서 사용되는 문장제 대부분은 숫자와 계산이 용이하게 조합될 수 있도록 상황이 단순하게 설정되어 있으며, 이로 인해 문장제는 반드시 답이 하나로 나온다는 인식이 지배적이다(김민경, 2004). 결국 교과서 문장제의 대부분은 실생활 상황에 대한 탈맥락화된 표현으로 재맥락화된 계산을 위한 연습으로 인식되어 왔다(Wyndhamn & Säljö, 1997). 이와 같은 전형적인 문장제는 반성을 요구하지도 않으며, 실제적인 고려를 하지 않도록 만든다. 이에 Palm(2007)은 학교에서 사용하는 문장제를 좀 더 진정성(실제적인 학교 밖 상황에 대한 기술을 포함하는 수학적 과제와 진짜 실생활 상황 사이의 일치 정도)있게 구성하면, 학생들이 좀 더 실생활 맥락을 고려할 것이라고 지적하였다.

전형적인 문장제의 본질과 함께 문장제 해결에 있어 실제적인 고려를 할 수 없게 만드는 또 다른 요인은 문장제가 학교에서 다루어지는 방법 때문이다. Greer(1997)와 Gravemeijer(1997)는 문제에 기술된 상황의 실제성을 무시하는 것은 아동의 인지적 처리 능력 결핍이라기보다는 문장제가 전형적으로 제시되는 교실 문화 때문이라고 언급하면서, 문제의 실제성을 고려했을 때 해법이 의미가 있는지 없는지 분명하게 고려하지 않고 답을 하는 경향이 광범위하게 퍼져있다고 지적하였다. 연산이 강조되고 있는 수학 교실에서, 학생들은 문제의 의미를 파악하거나 문제에 기술된 실제를 모델링하기보다는 기본적인 산술 연산을 이용하여 효과적으로 해법을 찾는 것이 더 중요하다고 믿게 되고 빠르게 답을 찾는 것을 중요하게 생각할 것이다. 또한 학생들은 학교 밖 상황에서 접하는 실세계 문제 상황에서 하듯이 문제 맥락에 관한 실제적 고려와 상식을 사용하는 것은 전형적인 학교 문장제의 정답에 이르는데 도움이 되기보다는 해롭다고 생각한다는 것이다(Inoue, 2005).

Greer(1997)는 학생들 중 상당수가 학교 문장제를 해결할 때의 전통적인 해법과 실제적 상황을 고려했을 때의 적절한 해법 사이에 차이가 있음을 인식하고 있다고 지적하고 있다. 그럼에도 불구하고 학생들이 실제적인 고려를 배제하려고 하는 것은 학교 수학에서 문장제 해결에 대한 암묵적인 가정 즉, '교수학적 계약'에 따라 행동하고 있다고 보이며, 이는 과제 제시와 같은 피상적인 변화만으로는 효과적인 변화를 이끌 수 없을 것이다. 이러한 관행으로 인해 많은 학생들이 문장제 해결에서 직접번역 접근을 사용하게 되고, 문장제는 단 하나의 해법만을 가지며, 문장제 해결에서 실생활을 고려하는 것은 문장제 해결에 도움이 되지 못한다는 신념을 형성하게 되는 것이다.

수학적 모델링은 초등학교에서 문장제를 다루는 본질적인 목적을 실현할 수 있는 이상적인 방법 중의 하나이고, 앞에서 언급한 학교 문장제와 관련된 여러 문제들을 해결할 수 있는 좋은 방안이 될 것이다. 여러 연구자들은 문장제 지도에 여러 가지 문제점이 제기되는 이유가 모델링 관점에 대한 교사들의 체계적인 관심 부족 때문이라고 지적하고 있으며(Greer, 1997;

Inoue, 2005), 초등학교 수준에서 모델링 활동을 실시하는 것이 중요하다고 언급하고 있다(English, 2006; English & Watters, 2005).

이에 본 연구는 수학적 모델링 학습이 학생들의 문장제 해결 행동, 문장제를 해결할 때 학생 자신의 실생활 경험을 활용하는 능력, 그리고 문장제 해결에 대한 신념에 미치는 영향 등을 탐색하여 문장제 교수-학습에 대한 시사점을 얻고자 하였다.

2. 연구 문제

본 연구를 위해 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

1)-1. 수학적 모델링 학습 집단과 전통적인 학습 집단은 문장제 해결 행동에 차이가 있는가?

1)-2. 수학적 모델링 학습 집단과 전통적인 학습 집단은 문장제 해결에서 실생활 경험을 활용하여 해법을 제시하는 능력에 차이가 있는가?

1)-3. 수학적 모델링 학습 집단과 전통적인 학습 집단은 문장제 해결에 대한 신념에 차이가 있는가?

2)-1. 수학적 능력에 따라 문장제 해결 행동에는 어떤 차이가 있는가?

2)-2. 수학적 능력에 따라 실생활 경험을 활용하여 해법을 제시하는 능력에는 어떤 차이가 있는가?

2)-3. 수학적 능력에 따라 문장제 해결에 대한 신념에는 어떤 차이가 있는가?

3. 용어의 정의

1) 수학적 모델링 학습과 전통적인 학습

본 연구에서 문장제에 대한 수학적 모델링 학습은 실세계의 맥락을 고려해야 하는 진정성 있는 문장제를 바탕으로 소집단과 전체 학급 논의를 통한 모델링 활동으로 문장제를 해결하는 학습을 말한다.

수학적 모델링 학습은 3단계의 문장제 해결 과정으로 이루어진다. 1단계는 모델-도출 과정으로 학급 전체 논의를 통한 문제 상황 이해와 소집단 중심의 모델링 활동이 이루어지게 된다. 2단계 문장제 해결 과정은 모델-탐구 과정으로 소집단 활동 중심으로 문장제를 해결하게 되고, 그 다음에 전체 논의를 실시하게 된다. 3단계는 모델-적용 과정으로 개별적으로 문제를 해결하게 된다. 해결 후 앞의 과정과 같이 전체 논의가 실시된다. 각 문장제 해결 과정은 Verschaffel, Greer, & De Corte(2002)가 제시한 일반적인 모델링 활동을 거치게 된다.

a) 상황 모델을 이끄는 문제 상황 정의하기와 이해하기

b) 상황 속의 관련 요소와 관계, 그리고 조건들에 대한 수학적 모델 구성하기

c) 수학적인 방법을 이용하여 결과를 이끌어내기

d) 원래 문제 상황과 관련하여 계산 결과를 해석하기

e) 해석된 수학적 결과가 목적에 적절한지 검토함으로써 모델 과정을 평가하기

f) 얻어진 실생활 해법으로 의사소통하기.

문장제에 대한 전통적 학습은 전형적인 교과서 문장제를 다루는 학습을 말한다. 대부분의 문장제는 몇 번의 연산으로 해결되며, 문장제에 대한 정확한 연산이 강조된다. 교사는 문장제를 제시하여 해결 과정 및 방법을 안내하고 학생들은 교사가 설명하고 보여준 절차와 고정된 표준적인 문제해결 스키마로 문제를 해결한다. 그리고 유사한 문제들을 해결하는 학습을 하게 된다. 전통적인 학습도 3단계의 문제해결 과정을 거친다. 1단계는 도입 과제가 제시되고 교사는 학생들과 함께 문제 해결 과정 및 방법을 알아본다. 2단계는 도입 과제와 유사한 과제를 개별적으로 문제를 해결한 후 문제 해결에 대한 전체 논의를 하게 된다. 3단계는 개별적으로 문제를 해결한 후, 정답 및 해결 방법을 확인하게 된다.

2) 문장제 해결 행동

본 연구에서 문장제 해결 행동이란 문장제의 언어적 진술과 계산 절차가 일치하지 않는 2단계 비교 문장제로 구성된 '문장제 해결 행동 검사'를 이해하고 해결하는 과정에서 나타나는 행동을 말한다. 본 연구에서는 문장제 해결 행동을 직접번역 접근과 의미기반 접근으로 나눈 Hegarty 외(1995)의 분류를 적용하였다.

문장제 해결 과정에 대한 분석을 통해, 문제에 주어진 정보를 기록하여 조직화하거나 관계적 문장에 대한

이해를 통해 문제 상황에 적절한 계산을 이끌어낸 경우에는 의미기반 접근(MBA)으로 코딩하였으며, 문제의 수나 핵심 단어 등에 기초하여 문제 상황에 적절하지 못한 계산을 바로 하는 경우에는 정신적 모델 구성 없이 문제를 해결하는 직접번역 접근(DTA)으로 코딩하였다.

3) 실생활 경험을 활용하여 해법을 제시하는 능력

본 연구에서 실생활 경험을 활용하여 해법을 제시하는 능력이란 '실생활 경험 활용 검사'에서 문제 해결에 필요한 피상적인 연산 결과를 그대로 해법으로 제시하는 것이 아니라 문장제에 제시된 상황과 관련있는 실생활의 경험이나 비형식적인 지식을 바탕으로 적절한 해법을 제시하는 능력을 말한다. 다음은 문장제에 대한 실생활 경험을 활용한 해법과 그렇지 않은 해법의 예이다.

<문장제 예>
철이는 2.5m짜리 목판을 4개 가지고 있습니다. 이 목판에서 1m짜리 목판을 몇 개 얻을 수 있습니까?

<실세계 상황을 고려하지 않은 해법>
4×2.5=10. 따라서 1m짜리 10개를 얻을 수 있다.

<실세계 상황을 고려한 해법>
2.5m에서 1m짜리 2개씩 얻을 수 있으므로 2×4=8. 모두 8개를 얻을 수 있다.

문장제 해결 과정을 분석하여, 크게 비실제적인 반응(UR)과 실제적인 반응(RR)으로 구분하였다.

4) 문장제 해결에 대한 신념

본 연구에서 문장제 해결에 대한 신념이란 학교 수학의 맥락에서 문장제에 대한 경험을 통해 형성된 신념을 말한다. Verschaffel, De Corte, & Vierstraete(1999)의 문장제에 대한 태도와 신념 검사지, Verschaffel 외(2002)의 문장제 해결에서 학생들이 사용하는 규칙과 가정에 대한 분석, Depaepe, De Corte, & Verschaffel(2010)의 문장제 해결에 대한 교사들의 접근법 등에 대한 연구를 바탕으로 문장제의 본질, 문장제 해결 과정, 문장제 교수-학습 과정에 대한 신념으로 구성하였다.

5) 수학적 능력

본 연구에서 수학적 능력이란 '문장제 해결 검사'의 사전 검사에 대한 점수를 바탕으로 상, 중, 하로 구분된 능력을 말한다. 상, 중, 하 수준의 구분은 검사 점수에 대한 백분위수(Q1, Q3)를 기준으로 하였다. 상 수준은 75% 이상, 중 수준은 75% 미만 ~ 25% 이상, 하 수준은 25% 미만인 학생들이다.

4. 연구의 제한점

본 연구는 다음과 같은 몇 가지 제한점을 지닌다.

첫째, 본 연구는 실험 처치를 위해 특정한 영역(수와 연산)의 과제를 선정했기 때문에, 다른 영역에도 동일한 연구 결과가 나올 것이라고 일반화하는데 제한점을 갖는다.

둘째, 본 연구는 서울의 특정한 지역 학생들을 대상으로 선정하였기 때문에, 다른 지역의 학생들에게도 동일한 연구 결과가 나올 것이라고 일반화하는데 제한점을 갖는다.

셋째, 문장제 해결 검사, 문장제 해결 행동 검사, 실생활 경험 활용 검사에 대한 점수는 연구자에 의해 행해졌기 때문에, 채점자에 따라 약간의 측정오차가 있을 수 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

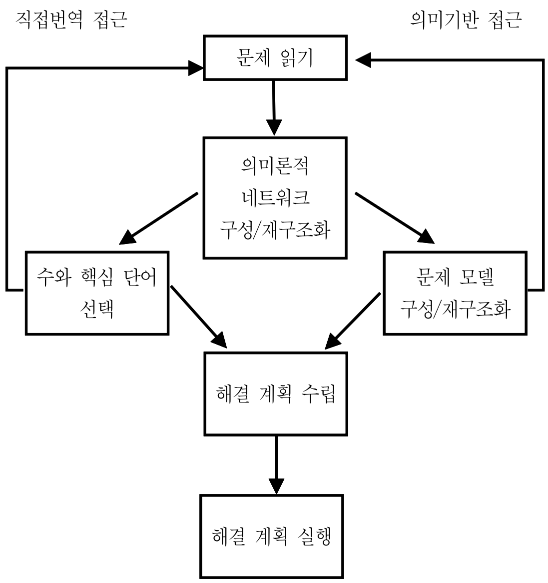
1. 문장제 해결 행동

문제해결 연구에서, 전문가-초보자에 대한 관찰은 문제해결 행동이 전문성의 수준에 따라 다를 수 있음을 설명해주고 있다. 초보자는 문제에 대한 양적인 답을 계산하는데 초점을 두는 반면에 전문가는 양적인 관계에서 해법을 찾기보다는 문제에 대한 질적인 이해에 더 초점을 둔다는 것이다. 문장제 해결에 대한 연구에서도 문장제 해결에 성공적인 학생들과 그렇지 못한 학생들 사이에는 이와 유사한 행동 특성이 나타나고 있음을 보여주고 있다.

Hegarty, Mayer, & Green(1992)은 수학적 문장제 해결에서 나타나는 두 가지의 일반적인 접근 방법을 관찰하였다; 단축(short-cut) 접근과 의미기반 접근. 단

축 접근(직접번역 전략 – Hegarty 외, 1995)을 사용하는 아동들이 수와 핵심 단어에만 초점을 맞추고 중요하지 않다고 생각하는 가치 있는 정보를 무시함으로써 문제해결에 실패하는 반면에 의미기반 접근(문제 모델 전략 – Hegarty 외, 1995)을 사용하는 아동들은 문제 상황에 대한 정신적 모델을 구성하려고 노력하며 이를 바탕으로 적절한 계산을 성공적으로 이끈다는 것이다.

Hegarty 외(1995)는 직접번역 접근과 의미기반 접근은 문장제를 이해하고 해결하는 과정에서 서로 다른 정신적 모델을 구성한다고 언급하면서, <그림 Ⅱ-1>과 같이 문장제 해결 과정을 설명하고 있다.



<그림 II-1> 문장제 해결 과정 모델 (Hegarty 외, 1995)

Pape(2004)는 지속적인 비교 분석 방법을 통해, Hegarty 외(1995)가 제시한 직접번역 접근과 의미기반 접근 범주를 아우르는 5가지의 하위 범주를 제시하였다(<그림 Ⅱ-2> 참조). Pape(2004)의 연구를 보면, 거의 90%의 학생들이 지배적인 행동 패턴을 보였다. DTA-limited context에 속하는 학생들이 40%, DTA-proficient와 MBA-full context에 속하는 학생들이 각각 16%, DTA-not proficient가 6%, MBA-justification이 7% 정도였다.

행동 범주	특성
DTA -proficient	A. 자동성(문제를 읽고 바로 계산하는 행동 특성) B. 해결 과정이나 계산에 맥락을 이용하지 않는다. C. 문제를 다시 읽지 않는다. D. 답을 진술할 때 맥락이 사용될 수 있다. E. 계산하기 전에 문제를 다시 읽지 않는다. F. 계산에 대한 설명이 없다.
DTA -not proficient	A. 주저함이나 계산에 어려움을 보인다. 문제를 다시 읽어도 수학적인 연산을 실행하지 못한다. B. 해결 과정이나 계산에 맥락을 이용하지 않는다. C. 다시 읽기 후 계산이 따르지 않는다. 맥락을 이용하지 않는다. D. 답을 진술할 때 맥락이 사용될 수 있다. E. 계산하기 전에 문제를 다시 읽지 않는다. F. 계산에 대한 설명이 없다.
DTA -limited context	A. 자동성이 나타날 수도 아닐 수도 있다. B. 계산에 제한적인 맥락 사용; 맥락은 하나의 단어로 통합된다. C. 다시 읽은 후에 곧바로 계산할 때 맥락을 이용하기도 한다. D. 답을 진술할 때 맥락이 사용될 수 있다. E. 다시 읽기는 계산을 이끌고 지원한다. F. 제한된 설명이 제시되기도 한다.
MBA -full context	A. 자동성이 나타날 수도 아닐 수도 있다. B. 맥락이 계산을 지원한다는 증거가 보인다. C. 다시 읽은 후에 곧바로 계산할 때 맥락을 이용하기도 한다. D. 답을 진술할 때 맥락이 사용될 수 있다. E. 다시 읽기는 계산을 이끌고 지원한다. F. 계산에 대한 정당화가 아닌 설명이 제시된다.
MBA -justification	A. 자동성이 나타날 수도 아닐 수도 있다. B. 맥락이 계산을 지원한다는 증거가 나타난다. C. 다시 읽은 후에 곧바로 계산할 때 맥락을 이용하기도 한다. D. 답을 진술할 때 맥락이 사용될 수 있다. E. 다시 읽기는 계산을 이끌고 지원한다. F. 모든 계산에 대한 설명과 정당화가 제시된다.

<그림 II-2> 5가지 행동 범주의 특성(Pape, 2004)

MBA-full context와 MBA-justification에 속하는 학생들이 전반적으로 표준 성취도 검사와 문장제 해결 성공률이 높았으며, 수학 관련 오류와 읽기 관련 오류가 적고 문제 회상 능력도 더 우수하였다. 주어진 정보를 기록하고 문제의 맥락을 더 많이 이용하고 해결 단계에 대한 설명과 정당화를 제시한 학생들이 이해

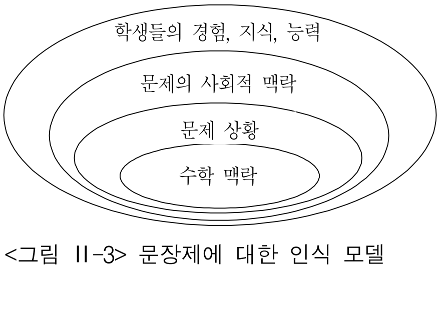
과정에서 오류를 적게 보였고, 문제를 회상할 때 문제의 구성 요소와 구조를 잘 보존한다는 것을 관찰하였다. 즉, 의미기반 접근 전략을 사용하는 학생들이 문장제 해결에서 더 높은 성취도를 보여주었음을 알 수 있다. Pape(2004)는 이런 연구 결과를 바탕으로 문장제 지도는 의미기반 접근을 촉진하도록 바뀌어야 한다고 지적하였다.

2. 문장제 지도 유형

앞에서 살펴본 학생들의 문장제 해결 행동 유형은 교사들의 문장제에 대한 인식 및 지도 방법과 밀접한 관련이 있다. Chapman(2003)은 20명의 1학년 ~ 12학년 교사들에 대한 수업 관찰과 인터뷰를 통하여 교사들이 가지고 있는 문장제와 문장제 교수-학습에 대한 인식을 조사하였다. 이 연구는 문장제에 대한 교사들의 인식이 문장제의 교수-학습에 영향을 미칠 것이라는 가정하에 수행되었다. 조사를 통하여 교사들이 다음의 8가지 형태로 문장제를 인식하고 있다고 정리하고 있다.

① 계산과 알고리즘으로서의 문장제
② 문제로서의 문장제
③ 수수께끼로서의 문장제
④ 목표로서의 문장제
⑤ 맥락화된 수학으로서의 문장제
⑥ 경험으로서의 문장제
⑦ 도구로서의 문장제
⑧ 텍스트로서의 문장제

Chapman(2003)은 문장제에 대한 교사들의 인식과 교실에서의 행동으로부터 문장제에 대한 인식 모델을 <그림 Ⅱ-3>과 같이 제시하고 있다.



<그림 Ⅱ-3> 문장제에 대한 인식 모델

이 모델은 수학 맥락과 사회적 맥락 관점에서 문장제를 고려한다고 할 수 있다. 수학 맥락은 문제 상황에 상황화되어 있고, 문제 상황은 사회적 맥락에, 사회적 맥락은 학생들의 경험, 지식, 능력에 상황화되어 있어야 한다. 문제 상황은 문제의 사회적 맥락의 특수한 경우이고, 문제의 개인적인 측면과 일반적인 측면 사이의 다리로서 역할을 한다고 할 수 있다.

Chapman(2003)은 교사들에 대한 조사를 바탕으로 문장제에 대한 교수 유형을 4가지로 구분하였다(<그림 Ⅱ-4> 참조). 이들 구분은 분명하지는 않지만, 전반적인 관점을 이해하는데 도움을 줄 것이다.

구조 지향적 (Pa)	• 일반적인 해석 • 수학적 해법 • 문장제의 사회적 맥락은 개인 경험과 일치할 수도 있고 아닐 수도 있다. • 문장제의 사회적 맥락을 학생들이 이해하도록 강요
구조— 맥락 지향적 (PaN)	• 일반적인 해석 • 수학적 해법 • 문장제의 맥락은 경험을 반영한다. • 개인의 이야기를 공유하기 위해 문장제의 사회적 맥락을 이해하기: 사회화하기
현상학적 (Ph)	• 주관적인 해석 • 문장제의 수학적이고 사회적인 해법 • 문장제의 사회적 맥락은 경험과 직접적으로 관련된다. • 문장제 해법의 기초로 문장제의 사회적 맥락을 이해하기
구조— 현상학적 (PaPh)	• 주관적인 해석 • 수학적 해법 • 사회적 맥락은 개인적 경험을 반영한다. • 비판적으로 맥락을 보고, 맥락을 수정하고, 가정을 검토하고, 문장제의 사회적 해법을 제거하기 위해 문장제에서 사회적 맥락을 이해하기

<그림 Ⅱ-4> 문장제에 대한 교수적 관점

대부분의 PaPh 교사는 Pa로 시작하고 학생들에 대한 인식을 바탕으로 그들을 자극하고 학습을 도울 수 있는 방향으로 나아간다. Pa와 PaN 교사는 그들이 해결한 방법대로 가르치는 반면에, Ph와 PaPh 교사는 학생들이 문장제와 상호작용할 수 있는 방법에 초점을 둔다. 일반적으로 Ph와 PaPh 교사는 좀 더 융통성 있고, 학생 중심의 그리고 탐구 중심 지향적이라고 지적하였다.

또한 Chapman(2006)은 교사들이 수학 문장제를 어떻게 인식하고 있고 다루고 있는지에 대해 논의하기 위해, Bruner의 이론[2)]에 근거하여 문장제를 다루는 상보적인 접근법을 제시하였다; 구조 지향적 방식, 맥락 지향적 방식(<그림 Ⅱ-5> 참조).

지도 유형	설명
구조 지향 방식 1	맥락을 나누어 수학적 표현으로 바꾸기.
구조 지향 방식 2	수학적 구조가 맥락과 어떻게 독립적인지 알 수 있도록 돕기.
구조 지향 방식 3	문제의 의미를 설명해주거나 이해시키기. 발문, 안내, 토의를 이용하여 스스로 맥락을 수학적으로 해석할 수 있도록 촉진하기. 수학적 해법에 이르도록 맥락을 분석할 수 있는 기초를 마련하기.
맥락 지향 방식 1	문제해결 과정과 동떨어져 사회적 맥락을 고려하기.
맥락 지향 방식 2	맥락이 수학적 해법 또는 비수학적 해법을 이끌 것인지 개의치 않고 맥락을 고려하기.
맥락 지향 방식 3	맥락에 비판적이거나 호기심이 있다면 맥락의 특별한 측면에 대해 논의하기 위해 맥락을 고려하기.
맥락 지향 방식 4	문제 이해나 의미를 결정하기 위해 맥락을 고려하기. (1) 문제에 들어가기; 맥락을 해석하기 위해 실생활 경험을 사용하기. (2) 문제에서 나오기; 해법이 적절한지 설명하기 위해 실생활 경험을 사용하기.

<그림 Ⅱ-5> 문장제 지도 유형과 설명

문장제에 대한 구조 지향적 방식은 보편적이고 탈맥락화된 수학적 모델과 구조에 초점을 두고 있다. 반면에, 맥락 지향적 방식은 문장제의 상황적 측면을 다루고 맥락에 민감하다. Chapman(2006)은 교사들이 구조 지향적 방식을 주로 사용하고 있으나 맥락 지향적 방식도 다양한 형태로 통합하여 사용하고 있다고 지적하였다.

Depaepe 외(2010)은 Chapman(2006)의 분석에서 '맥락 지향 방식 4'의 '문제에 들어가기'와 '문제에서 나오기' 부분에 영감을 받아 문장제 해결 과정을 도입 단계와 정리 단계, 두 단계로 나누어 교사들의 문장제 해결 접근 방식을 비교하였다. <그림 Ⅱ-6>은 각각의 접근 방식에 따른 지도 내용을 정리한 것이다.

<도입 단계>
1) 상황 모델을 이끄는 문제 상황 정의하기와 이해하기
2) 상황에 내재된 관련 요소와 관계, 그리고 조건들에 대한 수학적 모델 구성하기
3) 수학적인 방법을 이용하여 결과를 이끌어내기

<정리 단계>
4) 원래 문제 상황과 관련하여 계산 결과를 해석하기
5) 해석된 수학적 결과가 목적에 적절한지 검토함으로써 모델 과정을 평가하기
6) 얻어진 실생활 문제 해법으로 의사소통하기

Depaepe 외(2010)가 관찰한 두 교사도 약간의 차이는 있지만 Chapman(2006)의 관찰과 같이, 맥락 지향 방식보다는 구조 지향 방식을 더 많이 사용하였다. 이것은 두 교사가 맥락보다는 문장제의 전형적인 본질에 더 초점을 두었다는 점을 설명하고 있다. 또한 '문제에서 나오기' 단계보다는 '문제에 들어가기' 단계에서 두 접근법을 더 많이 사용하였는데, 이는 문제해결 후 다양한 논의가 부족했다는 점을 보여주고 있다. Depaepe 외(2010)는 구조 지향 접근과 맥락 지향 접근이 서로 완벽하게 분리되지 않으며, 통합적으로 적절하게 사용되어야 한다고 지적하고 있다. 중요한 점은 맥락적 요소를 놓치지 않으면서 의미있는 수학적 지식을 개발하기 위한 문제 상황과 지도 방법을 정교하게 하는 것이다.

3. 문장제 해결에 있어 실제성의 고려

실생활 지식은 수학적 사고에서 중요한 역할을 하며(Inoue, 2005), 수학적 개념은 일상적 활동의 비형식적이고 개인화된 지식과 관련하여 발달된다(Greeno, 1991). 이 과정을 촉진하기 위해 교과서는 학생들이 문제에 제시된 실생활 상황과 관련지어 수학적 아이디어

2) Bruner(1985, 1986)는 앎(knowing)의 방식을 두 가지로 제시하였다; 구조적(paradigmatic) 앎과 맥락적(narrative) 앎. 구조적 앎은 논리-과학적이고 맥락으로부터 자유로우며 일반적인 설명에 대한 것이고, 맥락적인 앎은 맥락에 민감하고 특수한 설명에 대한 것이다. 문장제와 관련하여, 구조적인 앎은 일반적이고 맥락과 떨어진 수학적인 모델이나 수학적인 구조에 초점을 두는 반면에, 맥락적인 앎은 문제의 사회적인 맥락에 초점을 둔다(Chapman, 2006).

접근 방법	단계	코드	지도 내용	설명
구조 지향적	도입	P1	관련없는 정보와 관련있는 정보 구분하기	문제 해법에 필요한 것과 필요하지 않은 것을 구분하기. 그리고/또는 주어진 조건을 수학적인 용어로 번역하기.
		P2	전형적인 스키마 적용하기	문제 맥락에 주어진 정보를 문제해결자가 문제 해결이 가능하도록 표상 또는 해법 스키마로 변환하기.
		P3	문제의 수학적 구조 제시하기	주어진 문제와 유추 문제의 구조적 유사성 강조하기. 그리고/또는 문제를 특정한 명칭으로 분류하기.
	정리	P4	해법에 대한 확실한 증거 찾기	실수가 없는지 그리고/또는 모든 질문에 답했는지 확인하기.
		P5	문제의 수학적 구조 제시하기	주어진 문제와 유추 문제의 구조적 유사성 강조하기. 그리고/또는 문제를 특정한 명칭으로 분류하기. 그리고/또는 일반적으로 어떤 종류의 문제가 해결될 수 있는지 검토하기.
맥락 지향적	도입	N1	문제를 재진술하기	문제에 주어진 정보를 바탕으로 문제를 자신의 표현으로 재진술하기.
		N2	문제에 포함된 개념을 정의하기	문제에 언급된 대상, 사람, 직업, 상황의 의미를 명확히 하기.
		N3	학생들의 실생활 경험과 사전 지식을 이용하기	문제를 개인의 경험, 그리고/또는 실세계에서 일어나는 관련된 사건과 관련짓기. 그리고/또는 문제 텍스트에 기술된 대상과 관련하여 학생들의 경험을 정교화하기. 그리고/또는 학생들의 사전 지식을 토대로 하기.
		N4	문제 맥락의 실제성을 분명하게 고려하기	문제해결자가 상황을 수학화하기 위해 집중해야 할 실세계 맥락에 대한 조건이나 가정을 확인하기. 이것은 최초에 제시된 문장제를 비판적으로 재구성하도록 만든다.
	정리	N5	결과를 해석하기	실생활 상황과 관련하여 결과를 해석하기. 그리고/또는 획득한 해법에 대한 실생활 설명을 찾아보기.
		N6	대응되는 실생활 상황 생각하기	대응되는 실세계 적용을 알아보기. 그리고/또는 특정한 문제 유형 해결 학습을 위한 관련성을 파악하기.
		N7	문제 맥락의 실제성을 분명하게 고려하기	문제해결자가 상황을 수학화하기 위해 집중해야 할 실세계 맥락에 대한 조건이나 가정을 확인하기. 이것은 최초에 제시된 문장제를 비판적으로 재구성하도록 만든다.

<그림 Ⅱ-6> 문장제 접근 방식에 따른 지도 내용 (Depaepe 외, 2010)

를 고려할 수 있도록 다양한 문장제를 제시하고 있다. 그러나 많은 문헌들은 학생들이 문장제와 실생활에 대한 비형식적 이해를 관련짓지 않고 문장제를 해결하고 있다고 지적하고 있다(김민경, 2004; Greer, 1993; Hatano, 1997; Inoue, 2005; Palm, 2007; Verschaffel 외, 1994; Verschaffel 외, 2000; Wyndhamn & Säljö, 1997).

문장제 해결에서 실생활 지식이나 경험을 배제하려는 경향을 잘 보여준 연구가 Greer(1993)와 Verschaffel 외(1994)의 연구이다. Greer(1993)은 13~14세 학생 100명을 대상으로 8쌍으로 구성된 문항들에 대한 반응을 조사하였다. 각 쌍의 문제 중 한 문제는 문제에 주어진 수에 정확한 산술 연산을 적용하면 곧바로 해결되는 문항이었고, 다른 문제는 맥락의 실제성을 고려했을 때 단순한 산술 연산만으로는 적절한 해답을 제시할 수 없는 문항이었다. 예상대로, 직접적인 연산으로 해결되는 문제에는 실수가 없었다. 그러나, 많은 학생들이 문제의 실제적 맥락을 고려해서 해법이나 설명을 제시해야 하는 문항에 대해서도 실제적인 고려없이 직접적인 연산 결과를 제시하였다.

Verschaffel 외(1994)도 Greer(1993)와 유사한 연구를 수행하였다. 10~11세 학생 75명을 대상으로, 문장제에 주어진 수에 바로 연산을 적용하여 문제없이 해결되는 전형적인 문장제(S-형)와 맥락의 실제성을 신중히 고려해야 하는 문장제(P-형)를 이용하여 학생들이 문장제를 이해하고 해결할 때 얼마나 실제성을 고려하는가를 조사하였다. 학생들의 해법과 설명 부분에 대한 분석을 통하여 학생들의 반응을 실제적인 반응(RR)과 비실제적인 반응(NR)으로 구분하였다.

Verschaffel 외(1994)는 빈약한 표준적인 문장제에 대한 광범위한 경험과 수학 교실에서 수학적 모델링 관점에 대한 체계적인 관심의 부족으로 인해, 학생들이 P-형 문항을 해결할 때 실세계 지식과 맥락적 고려사항을 배제하려는 강력한 경향이 있을 것이라고 가정하였다. <표 Ⅱ-1>은 각 P-형 문항에 대한 실제적인 반응(RR)의 비율을 보여주고 있다.

<표 Ⅱ-1> P-형 문항에 대한 실제적인 반응의 비율

문항	RR의 반응 비율(%)
P1	11
P2	14
P3	17
P4	49
P5	3
P6	5
P7	59
P8	3
P9	0
P10	4
계	17

<표 Ⅱ-1>은 Verschaffel 외(1994)의 가정을 강력하게 지지하고 있음을 보여준다. 예상한 대로, 학생들은 실세계 지식과 실제적인 고려를 배제하려는 강력한 경향이 있음을 보여주었다. 전체적으로 750개의 반응 중 128개(17%)만이 실제적인(RR) 것으로 분석되었다. 2개의 문항(P4, P7)에서만 상당한 수의 실제적인 반응을 보였다. <표 Ⅱ-2>는 실제적인 반응 수에 대한 학생 수를 보여준다.

이러한 결과는 다른 여러 나라의 연구(Verschaffel 외, 2000)뿐만 아니라 우리나라 5, 6학년 학생들을 대상으로 한 김민경(2004)의 연구에서도 매우 유사한 결과가 제시되었다.

이러한 경향은 예비 교사에게서도 광범위하게 발견되고 있으며(Verschaffel 외, 1997), 비실제적인 해법을 제시하는 이러한 경향은 굳건해 보이고 힌트에 의해 쉽게 극복될 수 없을 것처럼 보인다(Greer, 1997; Reusser & Stebler 1997; Verschaffel 외, 1999).

<표 Ⅱ-2> 실제적인 반응 수에 대한 학생 수

실제적인 반응 수	학생 수(명)	실제적인 반응 수	학생 수(명)
0	17	6	1
1	18	7	0
2	24	8	1
3	10	9	0
4	2	10	0
5	2	계	75

여러 연구자들은 문장제에 대한 학생들의 비실제적인 행위에 책임이 있는 학습 환경의 중요한 요소 중의 하나가 문장제의 과제 특성이라고 지적하고 있다(Inoue, 2005; Palm, 2007; Verschaffel 외, 1994; Verschaffel 외, 2000; Wyndhamn & Säljö, 1997). 전형적인 문장제는 삶 속에서 부딪치는 문제들과 공통점을 거의 가지지 않는 실세계 연결이라는 얇은 막으로 싸인 “학교 문제”이다. 실제 교과서에서 사용되는 문장제 대부분은 현실적으로 있음직한 상황보다는 수와 계산이 용이하게 조합될 수 있도록 상황이 단순하게 설정되어 있으며, 이로 인해 문장제는 반드시 답이 하나로 나온다는 인식이 지배적이다(김민경, 2004). 결국 탈맥락화된 문장제는 계산 연습일 뿐이다(Wyndhamn & Säljö, 1997).

Palm(2007)은 학교에서 사용하는 문장제를 좀 더 진정성(실제적인 학교 밖 상황에 대한 기술을 포함하는 수학적 과제와 진짜 실생활 상황 사이의 일치 정도)있게 구성하면 학생들이 좀 더 실세계의 지식과 경험을 고려할 것이라고 지적하였다.

전형적인 문장제의 본질과 함께 문장제 해결에 있어 실제적인 고려를 할 수 없게 만드는 또 하나의 요인은 문장제가 학교에서 다루어지는 교실 문화(교수 관행)이다. Greer(1997)는 문제에 기술된 상황의 실제성을 무시하는 것은 아동의 인지적 처리 능력 결핍이 아니라 문장제가 전형적으로 제시되는 교실 문화 때문이라고 언급하면서, 문제의 실제성으로 고려했을 때 답이 의미가 있는지 없는지 분명하게 고려하지 않고

답을 하는 경향이 광범위하게 퍼져있다고 지적하였다. 또한 Scheonfeld(1991)는 비실제적인 해법이 주로 학생들이 수학 및 문장제에 대해 가지고 있는 교육적인 신념에 기인한다고 지적하였다. 문장제 해결에서 학생들이 사용하는(암묵적으로) 규칙과 신념들을 정리하면 다음과 같다.

① 교사나 교과서가 제시하는 모든 문제는 풀 수 있고 이해된다.
② 모든 문장제에는 정확한 하나의 정답만이 존재하고 이 답은 정확하고 수치적인 것이다.
③ 이 유일하고 정확한 수치적인 답은 문제에 제시된 수에 하나 또는 그 이상의 산술 계산이나 공식을 적용하면 얻을 수 있다.
④ 과제들은 학생들이 접근할 수 있는 수학을 적용하여 해결할 수 있다. 사실, 대부분의 경우에 최근에 수학 교실에서 접한 공식이나 알고리즘, 수학적인 개념을 적용하는 것이다.
⑤ 최종 답 그리고 심지어 중간 결과는 '분명한' 수들을 포함한다.
⑥ 문장제는 문제 해법과 정확한 수학적인 해석에 필요한 모든 정보를 포함하고 있다. 문제에 필요없는 정보는 찾아볼 수 없다.
⑦ 보통 학교 문장제는 실세계에서의 사람, 목적, 장소, 계획 등과는 다르지만 실생활 세계에 관한 지식이나 직관이 문제 상황에 기술된 상황에 위배되더라고 너무 걱정할 필요는 없다.

수학 교실에서, 대부분의 활동은 일상적인 경험과 관련하여 수학적 아이디어를 이해하기보다는 알고리즘 절차의 반복적인 연습이다. 이것이 학생들로 하여금 수학 활동에서 행동에 대한 실생활 관련 유의미성을 고려하는 것보다 기계적인 계산을 수행하는 것이 더 중요하다고 믿도록 길들이고 있다. 결과적으로, 학생들이 문제 해결에 대한 이해를 쉽게 포기하게 되고, 현실에 대한 비형식적 이해를 근간으로 하지 않고 수학적 문제를 해결하게끔 만들고 있다.

학생들의 비실제적인 해법은 문장제 해결 활동에 관한 자신들의 인식에 기인하는 것으로 볼 수 있다. Cooper(1994)에 의하면, 학생들의 문장제 해결 접근 방법은 학교에서 강조되고 있는 접근법을 적용하려는 의지와 학교 학습의 사회-문화적 관계에 의해 규정할 수 있다. 그렇다면, 학생들의 비실제적인 답은 전혀 비실제적인 것이 아니라 학교 교육의 사회-문화적 규범에 적응하려는 실제적인 노력에 기인한다고 볼 수 있다. 대학생들을 대상으로 문장제 해결에 대해 연구한 Inoue(2005)는 학생들이 비실제적임에도 기계적으로 계산함으로써 문장제를 해결하는 경향이 있었지만, 이 반응들의 일부는 단순히 잘못된 것이라기보다는 문제 상황에 대한 나름대로의 이해에 기인하기도 하고, 일부는 학교 교육의 문화를 의도적으로 따르는 것에 기인한다고 밝혔다. 이 접근은 생각 없는 계산 접근법과는 다르다. 왜냐하면 학생들은 학교 수학에 관한 이해를 바탕으로 그들의 계산 결과를 비판적으로 이해할 수 있기 때문이다. 즉, 비실제적인 해법은 수학 자체에 대한 이해에 기인하는 것이 아니라, 학교 수학에 대한 신념에 기인한다고 볼 수 있다. 이런 의미에서, 이 순응적 접근은 수학적 활동의 본질을 비판적으로 고려하지 않는 이해 없는 계산적 접근과는 구분되어야 할 필요가 있다.

많은 학생들이 학교 수학의 맥락에서 요구되는 전통적인 답과 실제적 상황에 적절한 답 사이의 차이를 인식하고 있다고 생각한다. 그럼에도 불구하고 학생들이 실제적인 고려를 배제하려고 하는 것은 학교 수학에서의 문장제 해결에 대한 암묵적인 가정 즉, 교수학적 계약에 따라 행동하고 있다고 보이며, 이는 과제 제시와 같은 피상적인 변화만으로는 효과적인 변화를 이끌 수 없다는 것이다(Greer, 1997). 이러한 교수 관행으로 인해 많은 학생들이 직접번역 전략을 주로 사용하게 되고, 문장제는 단 하나의 해법만을 가지며, 문장제에서 실제성을 고려하는 것은 문제해결에 도움이 되지 못한다는 신념을 형성하게 된다.

4. 모델링 관점에서의 문장제 지도

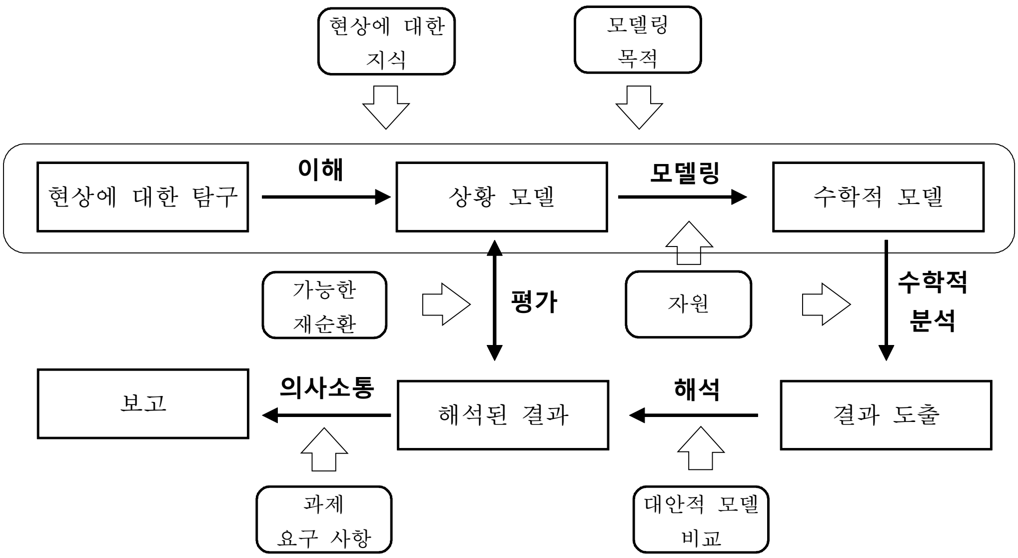
앞에서 언급했듯이, 문장제가 학교 수학에서 다루어지는 중요한 이유 중의 하나는 수학적 모델링을 연습할 기회를 제공하기 위함이다. 문장제는 본질적으로 실제적인 측면과 형식적인 수학 두 측면을 모두 가지고 있는 모델링의 중요한 도구이기 때문에, 많은 연구자들은 문장제를 수학적 모델링의 연습을 위해 사용해야 한다고 지적하고 있다(Greer, 1993, 1997; Hatano, 1997; Verschaffel 외, 2000). 문장제를 모델링 관점에서 다루는 것은 앞에서 지적한 문장제 교수-학습 과정에서 나타나는 여러 가지 문제점(예; 학생들의 피상적인 문제해결 전략, 문장제에 대한 잘못된 신념, 문장제를 전형적으로 다루는 교실 문화 등)을 개선할 수 있는 중요한 방법 중의 하나일 것이다. Greer(1997)는 모델링 관점이 피상적인 접근법을 극복하는 좋은 대안이

될 것이라고 지적하면서 문장제에 대한 모델링 관점의 유용성을 다음과 같이 정리하고 있다.

① 모델링 관점은 전형적인 학교 문장제가 피상적인 방법으로 해결될 수 있다는 생각에 변화를 가져올 것이다.
② 학교 문장제의 암묵적인 가정에 의문을 제시하고 대안적인 모델에 대해 논쟁하는 활동은 학생들이 좀 더 융통성있는 담화와 문제 이해자가 될 수 있게 도와줄 것이다.
③ 모델링 관점은 학교 수학과 학교 밖 수학 사이를 연결시켜 줄 것이다.
④ 모델링 관점의 조기 도입은 학생들의 수학적 성향에 긍정적인 영향을 미칠 것이다.
⑤ 모델링 과정과 사회적 현상에 대한 수학적 모델이 구성되고 해석되는 방법에 대한 비판적인 이해는 책임 있는 시민 교육의 중요한 일부분이다.

Verschaffel 외(2002)는 <그림 Ⅱ-7>과 같이 모델링 과정에서 유의해야 할 내용들을 보충하여 정교화된 모델링 과정을 제시하였다. <그림 Ⅱ-7>은 문장제 해결에서 적절한 정신 모델(표상) 구성이 매우 중요함을 의미하며, 이를 바탕으로 추론과 기존의 스키마 탐색을 통한 적절한 수학적 모델을 구성할 수 있는 것이다. 만약 학생이 관계적 구조가 부족한 모델을 가지고 있다면, 기존의 스키마를 바탕으로 유추할 적절한 방법을 갖지 못하게 될 것이다. 따라서 문장제 지도는 적절한 상황 모델을 구성할 수 있도록 의미기반 접근을 촉진하도록 바뀌어야 할 것이다. 키워드를 강조하거나 스키마(문제 유형)를 반복 학습하는 대신에 문장을 재진술하게 하거나 상황을 수직선이나 그림 등으로 나타내보기 등을 통해 문제에 기술된 상황에 대한 진정한 이해 및 적절한 표상을 구성할 수 있도록 도와야 할 것이다.

Hatano(1997)는 학교에서 사용되고 있는 전통적인 문장제는 수학적 모델링을 지도하는데 유용하지 않다고 지적하고 있다. 즉, 사칙연산을 적용하여 바로 답이 계산되는 문장제로는 모델링을 지도하기 어렵다는 지적이다. 학교에서 제공되는 빈약한 표준적인 문장제는 실제적인 모델링에 주목할 수 있도록 좀 더 진정한 그리고 복잡한 상황으로 대체되거나 최소한 수정되어야 한다. 그렇게 함으로써 문제에 두 수가 있으면 답은 두 수를 더하거나, 빼거나, 곱하거나, 나누면 답을 구할 수 있다는 것을 학습하지 않도록 해야 한다(Greer, 1993). 그러나 단순히 복잡하고 진정한 문제 상황을 학생들에게 제시하는 것만으로는 충분하지 않다. 이 문제들은 문제 상황에 대한 실제적 모델링과 진정한 수학적 성향의 일부분으로써 산술 연산 결과에 대한 실



제적인 해석을 위해 필요한 적절한 개념, 기능과 태도 개발을 목적으로 하는 강력한 교수적 환경 속에서 다루어져야 한다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구를 위해 서울특별시 종로구 H 초등학교 5학년 2개 반을 임의로 선정하여 실험 집단과 통제 집단으로 구성하였다. 본 연구의 처치 내용이 단원과 일치하지 않는 것이어서 학교장과 담임교사의 동의와 협조를 구하였다. H 초등학교는 역사와 전통을 자랑하는 학교로, 교육열이 높으며 사회경제적으로 중산층이 밀집되어 있고 상업지구가 가까우나 지역적으로 안정되어 있는 곳에 위치하고 있다. 실험집단의 학생 수는 30명(남 16명, 여 14명)이고 통제 집단의 학생 수는 29명(남 16명, 여 13명)이었다. 두 집단은 2010년 3월 한국교육과정평가원에서 실시한 '2010년 초등학교 교과학습 진단평가'의 수학 영역에서 84.9점(통제 집단)과 85.0점(실험 집단)으로 유사한 성취도를 보였다. 다만 통제 집단에서 수학 부진아로 판별된 학생이 한 명이 반면 실험 집단은 세 명으로 약간의 차이를 보였다.

실험 집단과 통제 집단의 담임교사는 4년제 교육대학을 졸업한 여교사로 경력에서 차이가 있었지만(14년과 2년), 인터뷰를 통해 두 교사 모두 학습 내용을 중심으로 한 설명식 수업을 주로 실시하고 있었으며, 수학 수업에 수학적 모델링 활동과 소집단을 활용하는 경우는 거의 없다고 하였다.

담임교사의 경력 차이를 고려하여 경력 14년인 교사의 교실은 통제집단에, 경력 2년인 교사의 교실은 실험집단에 배정하였다.

2. 연구 설계

본 연구의 목적은 수학적 모델링 학습이 문장제 해결에 미치는 영향을 조사하기 위한 것으로, 비대등 통제 집단 설계(nonequivalent control group design)를 적용하였다. 실험 연구의 전반적인 설계는 <그림 Ⅲ-1>과 같다.

$O_1 O_2 O_3 O_4$	X_1	$O_1 O_2 O_3 O_4$	O_5
$O_1 O_2 O_3 O_4$	X_2	$O_1 O_2 O_3 O_4$	

<그림 Ⅲ-1> 실험 설계

* 처치; X_1: 수학적 모델링 학습, X_2: 전통적인 학습
* O_1: 문장제 해결에 대한 신념 검사 O_2: 문장제 해결 검사
O_3: 문장제 해결 행동 검사 O_4: 실생활 경험 활용 검사
O_5 : 실생활 경험 활용 파지 검사

3. 검사 도구

1) 문장제 해결 검사

문장제 해결 검사는 교과서에서 주로 사용되는 일반적이고 전형적인 문장제에 대한 해결 능력을 검사하기 위한 것이다. 본 검사의 문장제는 4-나의 자연수 혼합 계산과 5-가, 5-나의 분수의 덧셈과 뺄셈, 분수의 곱셈과 나눗셈, 소수의 곱셈과 나눗셈으로 해결되는 문항들로 구성하였다. 모든 문항은 교과서와 익힘책을 바탕으로 연구자가 직접 작성하였으며, 모두 주관식으로 구성하였다. 난이도를 상, 중, 하로 나누어 각각 3문제, 6문제, 3문제로 구성하였고, 난이도가 '하'인 문제는 일단계 문제로, 난이도가 '중', '상'인 문제는 다단계 문제로 구성하였다.

본 검사는 문장제에 대한 수학적 능력에 있어서 두 집단이 동일한가를 알아보기 위한 것이면서 실험 집단에서 수학적 능력을 상, 중, 하로 구분하기 위해 사용하였다. 문장제 해결 검사의 신뢰도는 Cronbach α = .724이었다.

2) 문장제 해결 행동 검사

문장제 해결 행동 검사는 문장제를 이해하고 해결하는 과정에서 나타나는 행동 유형을 검사하기 위한 것이다. 문장제 해결 행동 검사의 사전 검사와 사후 검사 결과는 수학적 능력에 따른 분석을 위한 기초 자료로 사용되었다. 본 검사의 신뢰도는 Cronbach α = .819이었다. 각 문항의 평가 요소는 <그림 Ⅲ-2>와 같다.

본 검사의 문항은 문장제의 언어적 진술과 계산 절차가 일치하지 않는 2단계 문장제로 구성되었으며, 각

문항은 문장제 기술에 대한 Mayer (1981)의 분석을 따라 아래와 같이 3개의 문장으로 기술하였다; 할당(Assignment) 문장, 관계(Relation) 문장, 질문(Question) 문장.

(할당 문장) 학교 앞 가게는 음료수 하나에 650원에 팝니다.
(관계 문장) 이것은 집 앞 가게의 음료수보다 30원이 쌉니다.
(질문 문장) 4개의 음료수가 필요하다면, 집 옆 가게에서는 얼마를 내야 합니까?

본 검사는 분석에 사용될 '목표' 문제 7문항과 반응 패턴의 획일성을 피하기 위한 '여과' 문제 3문항으로 구성되었으며, 사전 검사와 사후 검사의 문항 순서는 다르게 하였다.

문항	언어적 진술	계산 절차
1	$(a-b)\div c$	$(a+b)\div c$
2	$(a+b)\div c$	$(a-b)\div c$
3	$(a+b)\times c$	$(a-b)\times c$
4	$(a\times\frac{1}{b})\times c$	$(a\times b)\times c$
5	$(a+b)\times c$	$(a-b)\times c$
6	$(a\times b)\times c$	$(a\times\frac{1}{b})\times c$
7	$(a-b)\times c$	$(a+b)\times c$

<그림 III-2> 문장제 해결 행동 검사의 문항 구성

3) 실생활 경험 활용 검사

실생활 경험 활용 검사와 실생활 경험 활용 파지 검사는 문장제에 기술된 상황을 바탕으로 실생활 경험을 활용하여 해법을 제시하는 능력을 검사하기 위한 것이다. 사전 검사와 사후 검사의 결과는 수학적 능력에 따른 분석을 위한 기초 자료로 사용하였다.

본 검사지는 '목표' 문제 6문항과 '여과' 문제 2문항으로 구성되어 있다. 6개의 '목표' 문항은 실험 집단에서 다루는 모델링 활동과 유사한 모델링 맥락과 난이도를 갖는 문항으로 이루어져 있다. 실생활 경험 활용 파지 검사의 문항들은 실생활 경험 활용 검사와 동형으로 구성되었다. 또한 각 검사의 문항 순서는 다르게 하였다. <그림 Ⅲ-3>은 실생활 경험 활용 검사에서 사용된 '목표' 문항의 유형들이다.

4) 문장제 해결에 대한 신념 검사

문장제 해결에 대한 신념 검사는 학교 수학의 맥락에서 문장제에 대한 경험을 통해 형성된 신념을 검사하기 위한 것이다. 본 검사지를 구성하기 위해, Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerenbergh, Bogaerts, & Ratinckx(1999)의 문장제에 대한 태도와 신념 검사지, Verschaffel 외(2002)의 문장제 해결에서 학생들이 사용하는 규칙과 가정에 대한 분석, 학생과 교사에 의해 암묵적으로 사용되는 숨겨진 규칙(Verschaffel, 2002) 등, 여러 문헌에서 제시하고 있는 문장제에 대한 신념들을 조사하였다. 이 신념들을 문장제 해결에 대한 교사들의 접근법을 구조-중심(수학적 구조 초점) 지도와 맥락-중심(문장제의 실생활 맥락 초점) 지도로 나눈 Depaepe 외(2010)의 틀을 기준으로 분류하였고, 각 지도 유형에 서로 대응되는 문항들을 개발하였다.

분류한 신념들을 범주화하여 문장제 본질에 관한 신념, 문장제 해결 과정에 대한 신념, 문장제 교수-학습 과정에 대한 신념으로 나누어 검사지를 구성하였으며, 지도 교수와의 논의를 거쳐 수정·보완하였다. 본 검사지의 신뢰도는 Cronbach α = .734이었다.

4. 검사 실시와 자료 수집

1) 검사의 시행 절차

(1) 예비 검사

본 연구에 사용될 검사 문항들을 작성하고 검사 시간, 검사 문항의 수 및 난이도 등을 결정하기 위해 예비 검사를 실시하였다. 예비검사는 2010년 10월 26일 ~10월 27일에 본 연구의 실험 집단과 통제 집단과 유사한 H 초등학교 5학년 4개 반을 대상으로 문장제 해결 검사, 문장제 해결 행동 검사, 실생활 경험 활용 검사, 문장제 해결에 대한 신념 검사를 실시하였다. 모든 검사는 각 교실에서 담임교사에 의해 일상적인 분위기에서 실시되었다. 문장제 해결에 대한 신념 검사와 문장제 해결 검사는 26일 오전에, 문장제 해결 행동 검사와 실생활 경험 활용 검사는 27일 오전에 실시되었다.

예비 검사 결과, 문장제 해결 검사의 평균은 8.69(12점 만점)이었다. 고득점에 많은 학생들이 몰려 있어 전반적으로 난이도가 낮은 것으로 판단되어, 난이도 '하'

유형	문제
나머지가 있는 나눗셈의 결과를 적절하게 해석해야 하는 문장제 (버스문제)	11280명의 군인들이 버스를 타고 훈련장으로 이동하려고 합니다. 각 버스는 36명의 군인이 탈 수 있습니다. 필요한 버스는 모두 몇 대입니까? (Carpenter, Lindquist, Matthews, & Silver, 1983)
두 집합의 합과 차를 구할 때 두 집합의 공통된 원소를 고려해야 하는 문장제(친구 문제)	Carl은 5명, George는 6명의 친구가 있습니다. Carl과 George는 같이 파티를 하기로 하고 모든 친구를 초대하기로 했습니다. 파티에는 모두 몇 명의 친구가 왔겠습니까?(Verschaffel 외, 1994)
계산 결과에 1을 더하거나 빼야 하는 문장제 (±1 문제)	1994년 제 5회 학교 파티가 열렸다. 학교 파티가 처음으로 열린 해는 몇 년인가?(Verschaffel 외, 1999)
선형적인 비례 추론이 적절하지 않은 문장제 (달리기 문제)	John의 100m 달리기 최고기록은 17초입니다. 1km를 달린다면, 얼마나 걸리겠습니까?(Greer, 1993)
계산 결과보다 여분의 양을 고려해야 하는 문장제 (끈 문제)	12m 떨어져 있는 두 기둥을 이을 수 있는 충분한 끈이 필요합니다. 그러나 1.5m짜리 끈들만 가지고 있습니다. 두 기둥 사이를 잇기 위해서는 몇 개의 끈이 필요합니까?(Greer, 1993)
두 지점의 위치에 따라 결과가 달라지는 문장제(거리 문제)	Anna와 Berra는 같은 학교에 다닌다. Anna의 집은 학교에서 50m 떨어져있고 Berra의 집은 300m 떨어져 있다. Anna와 Berra의 집은 얼마나 떨어져 있는가?(Wyndhamn & Säljö, 1997)

<그림 III-3> 실생활 경험 활용 검사 문항 유형

로 분류된 1단계 문제 수를 5문항에서 3문항으로 줄이고, '중'과 '상' 난이도의 문제를 한 문항씩 추가하였다. 또한 부분점수를 부여하여 총점을 24점으로 수정하였다.

문장제 해결 행동 검사의 경우에는 지필 검사뿐만 아니라 각 반에서 무작위로 뽑은 2명의 학생을 대상으로 'think aloud protocol' 방법으로 인터뷰를 실시하였다. 이는 본 검사에서의 인터뷰 상황을 고려한 것이었다. 인터뷰는 연구자에 의해 방과 후에 '교과연구실'에서 실시되었다. 예비 검사 결과, 문항 수가 적고 (a±b)×c 또는 (a±b)÷c 형태의 2단계 비교 문장제만 제시되어 있어, 고정된 효과(set effect)가 나타나는 것으로 판단되어 '목표' 문항 수를 4문제에서 7문제로 늘리고, (a×b)×c 또는 (a÷b)×c 형태의 2단계 비교 문장제를 추가하였다.

실생활 경험 활용 검사의 문항 수와 난이도는 적절한 것으로 판단되었으나 '목표' 문제인 2번 문항과 4번 문항은 약간의 수정을 하였다. 2번 문항은 나눗셈의 나머지에 대한 해석 문제인데, 현 교과서에 유사한 형태가 제시되어 있어 나머지를 버려야 하는 상황으로 수정하였다. 4번 문항의 경우는 수가 너무 커서 계산에 오류가 발생하는 경우가 있어 수를 다루기 쉬운 것으로 대체하였다. 그리고 검사지에 제시한 <유의 사항>이 <설명>에 힌트를 제시하는 것으로 판단되어, 본 검사지에서는 삭제하였다. 혹 이에 대한 질문을 하는 학생이 있으면, 교사가 안내해 주는 것으로 하였다.

문장제 해결에 대한 신념 검사의 경우에는 내용이 중복되는 문항과 반응이 서로 일치하지 않는 문항을 조정하여 25문항을 18문항으로 줄였다.

(2) 사전 검사

사전 검사로는 문장제 해결 검사, 문장제 해결 행동 검사, 실생활 경험 활용 검사, 문장제 해결에 대한 신념 검사가 실시되었다. 검사 실시 전에 각 집단의 담임교사에게 미리 사전 검사 일정과 유의 사항에 대한 안내문을 제공하였다. 모든 검사는 각 교실에서 담임교사에 의해 최대한 일상적인 분위기에서 실시될 수 있도록 하였다.

문장제 해결에 대한 신념 검사와 문장제 해결 검사는 2010년 11월 29일(화) 오전에 실시되었으며, 검사 시간은 각각 20분과 30분이었다. 문장제 해결 행동 검사는 2010년 11월 10일(수) 오전에, 실생활 경험 활용 검사는 2010년 11월 12일(금) 오전에 실시되었으며, 검사 시간은 25분씩이었다.

문장제 해결 행동 검사에서는 지우개를 사용하지 않도록 하였다. 다시 써야 할 경우에는 이전 풀이에

'×' 표시를 하고 다시 쓰도록 하였다. 이는 학생들의 문장제 해결 행동이 중간에 바뀔 수 있음을 보여주기 때문이다. 문장제 해결 행동 검사 후 문장제 해결 행동 유형을 분석하기 어려운 학생들(3명)에 대해서 방과 후에 교과연구실에서 연구자가 인터뷰를 실시하여 그 결과를 행동 유형 분석에 반영하였다.

실생활 경험 활용 검사에서 이전에 해결했던 문장제와 다르게 느끼는 경우가 많아 '문제를 풀 수 없어요.', '문제가 이상해요.'라는 반응이 있는 경우에는 그 이유를 <설명>란에 쓰도록 안내하였다. 이는 실생활 경험에 비추어 답을 하기에 곤란하여 주저하는 행동으로, 학생들이 실생활 경험을 문장제 해결에 활용하고 있는 증거로 받아들였다.

(3) 사후 검사

사후 검사는 처치가 끝난 직후에 실시되었으며, 사전 검사지와 동형인 검사지로 동일한 방법과 과정으로 실시되었다. 문장제 해결에 대한 신념 검사와 문장제 해결 검사는 2010년 12월 6일(월) 오전에 실시되었으며, 검사 시간은 각각 20분과 30분이었다. 문장제 해결 행동 검사와 실생활 경험 활용 검사는 2010년 12월 7일(화) 오전에 실시되었으며, 검사 시간은 각각 25분씩이었다.

(4) 실생활 경험 활용 파지 검사

실생활 경험 활용 파지 검사는 실험 집단만을 대상으로 실시되었다. 파지 검사는 실생활 경험 활용 검사의 사후 검사와 동형으로 구성되어 있기 때문에 사후 검사의 영향을 최소한으로 하기 위해, 사후 검사 실시 후 2달 뒤인 2011년 2월 7일(월) 오전에 검사가 이루어졌다. 파지 검사도 실험 집단의 교실에서 담임교사에 의해 최대한 일상적인 분위기에서 실시되었다.

2) 실험 처치 내용 및 일정

연구 대상으로 선정된 5학년 2개 반을 담임교사의 경력을 고려하여 실험 집단과 통제 집단에 배정하였다. 각 집단은 담임교사에 의해 운영되었다. 실험 집단 교사는 수학적 모델링 학습에 대한 이해와 경험이 거의 없었기 때문에, 수학적 모델링 학습에 대해 준비시킬 필요가 있었다. 이에 실험 집단 교사를 위해 다음과 같은 지원을 실시하였다.

- 연구자와의 만남을 통해 모델과 모델링의 의미, 수학적 모델링 과정, 모델링 활동을 위한 교실 환경, 모델링 활동에서의 교사의 역할 등 수학적 모델링 학습에 대한 포괄적인 안내를 제공하였다.
- 수업 전에 연구자와 함께 각 수업에 대한 자세한 논의를 실시하였다. 수업에서 사용할 활동지 초안을 바탕으로 수업에서 다루는 문장제의 특징, 예상되는 학생들의 반응, 이들 반응들을 처리하는 방법 등에 대한 논의가 이루어졌다. 이 과정에서 실험 집단의 상황을 고려한 교사의 의견을 반영하여 활동지를 수정하였다.
- 교사와의 논의를 통해 완성된 학생들을 위한 구체적인 자료(활동지, 문제해결과 관련된 조작 자료 등)를 제시하였다.
- 수업 중에 연구자는 수업을 관찰하고 촬영을 실시하였다. 연구자는 관찰 동안 수업에 어떤 영향도 주지 않았다. 수업 후 연구자와 교사는 전반적인 모델링 활동 과정에 대한 간단한 협의를 실시하였다. 이러한 사후 협의는 교사에게 차후 수업을 준비하는데 도움을 주었다.

실험 집단과 통제 집단은 각 교실 기본 시간표의 수학 시간을 활용하여 수업을 진행하였다. 본 연구를 위해 학교와 담임교사의 협조를 받아 계획된 교육과정 이외에 6차시의 수학 시수를 활용하였다. <그림 Ⅲ-4>는 실험 집단의 처치 일정이다. 통제 집단도 실험 집단 처치 기간 중에 6차시의 수학 시간을 이용하였다.

처치 일정	활동 내용
11월 24일	나눗셈의 나머지를 적절하게 해석해야 하는 문장제
11월 26일	두 집합의 공통 원소들을 고려해야 하는 문장제
11월 30일	두 지점의 위치 선정에 따라 결과가 달라지는 문장제
12월 1일	선형적인 비례추론이 적절하지 않은 문장제
12월 3일	여분의 길이를 고려해야 하는 문장제
12월 4일	계산 결과에 ±1을 해야 하는 문장제

<그림 Ⅲ-4> 실험집단 처치 및 내용

(1) 수학적 모델링 학습 집단

본 연구에서 적용한 수학적 모델링 학습은 좀 더 실제적이고 진정성 있는 문장제를 이해하고 해결하는 과정에서 문제 상황에 대한 모델과 이를 바탕으로 수학적 모델을 구성하고, 모델을 해석하고, 정당화하는 수학적 모델을 다루는 능력을 신장시키기 위한 모델링 활동 과정을 따르는 것이다. 수학적 모델을 다루는 능력에는 a) 모델을 정당화하고, b) 그것을 비판적으로 분석하고, c) 모델과 그 결과를 평가하고, d) 모델을 가지고 의사소통하는 능력 등을 포함한다(Blum, 2002). 일반적으로 모델링 활동은 상황에 대한 이해와 상황에 포함된 관련 요소들의 관계 및 조건들에 대한 탐구를 통해 상황 모델과 수학적인 모델을 구성하여 문제를 해결하고 원래 문제에 비추어 해법을 검토하고 모델링 과정을 반성해보는 과정으로 이루어진다.

수학적 모델링 학습에서는 전통적인 수학 교실에서 사용하는 문장제보다 좀 더 실제적인 비정형 문제를 사용하였다. 이들 문제들은 학생들이 문제에 기술된 실생활 상황의 맥락을 고려하여 전형적인 해법과 좀 더 실제적인 해법을 구분할 수 있도록 자극하고 수학적인 모델링에 포함된 복잡성에 주목할 수 있도록 하기 위해 설계되었다. 또한 학생들이 그들의 비형식적이고 개인적인 지식을 활용할 수 있고 수학적인 아이디어 개발을 자극하고 자신들의 수학적 이해를 나타낼 수 있는 상황을 포함하였다.

수학적 모델링 학습은 소집단 활동과 전체 학급 논의를 통한 상호작용 학습과 협동 학습을 강조하였다. 이 소집단 활동과 의사소통 과정은 학생들이 구성한 모델에 대한 반성과 수정 등 인지적 변화를 이끌 중요한 기회를 제공해 주었다. 먼저, 도입 모델링 과제를 4~6명으로 구성된 소집단에게 제시하였다. 교사는 과제에 대한 이해를 돕기 위해 과제와 관련된 실제적인 맥락을 발표하게 하고 과제의 여러 요소와 관계 파악을 도왔다. 그 후에 개별적으로 문제를 해결한 후 소집단에서 해법을 정리하였다. 이후에 도입 과제에 대한 전체 논의가 실시되었는데, 논의에서 각 소집단의 정답 및 해법 과정, 아이디어 등이 비교되고, 여러 해법에 대한 수학적 모델의 적절성에 대한 논의 등이 이루어졌다. 논의 후에, 각 모둠에게 도입 모델링 과제와 유사한 1~2개의 모델-탐구 과제가 제시되었고 이 소집단 활동 뒤에도 다시 전체 논의가 실시되었다. 마지막으로 개별적으로 모델을 적용해 볼 수 있는 문제 만들기 또는 문제 해결 과제를 제시하였다.

수학적 모델링 학습에서 교사의 역할은 매우 중요하였다. 교사의 중요한 역할 중의 하나는 기존의 문장제 교수-학습에서의 그것과는 다른 교실 문화를 확립하는 것이었다. 수업에서 교사와 학생의 역할, 어떤 아이디어가 좋은지, 어떤 해법과 설명이 좋은지 등에 관한 새로운 사회-수학적 규범을 형성하기 위해 노력하였다.

(2) 전통적인 학습 집단

전통적인 학습 집단에서는 연구자가 제시한 전형적인 문장제 해결 활동을 수행하였다. 이들 문장제들은 5-가, 5-나 단계의 분수와 소수 사칙연산으로 해결되는 문장제들이었다. 먼저, 도입 과제(같이 해 보아요)를 제시한 후 교사는 학생들을 도와 도입 문제를 함께 해결하였다. 도입 문제를 해결한 후에, 도입 과제와 유사한 문장제(혼자 할 수 있어요)를 개별적으로 해결해 보게 하고 해법 과정을 설명해 보도록 하였다. 마지막으로 도입 과제와 유사한 문장제 두 문항을 개별적으로 제시하였으며, 문제해결이 끝나면 교사는 해결 과정과 답이 맞는지 확인해주었다.

5. 자료 수집 및 코딩 절차

본 연구를 위한 자료는 사전 검사, 사후 검사, 파지 검사뿐만 아니라 실험집단의 6차시에 대한 비디오 촬영 전사 자료와 수업 시간에 활용한 학생들의 활동지, 실험 집단을 관찰하면서 작성한 연구자의 필드 노트 등을 통해 수집되었다.

1) 문장제 해결 검사

문장제 해결 능력을 분석하기 위해 <그림 Ⅲ-5>의 기준을 바탕으로 부분 점수를 부여하였다.

점수	평가 기준
2점	◦문제해결 과정과 정답에 올바르게 제시되어 있는 경우 ◦해결 전략에 따라 논리적으로 설명한 경우
1점	◦ 적절한 계산 방법을 적용하였으나 기능적인 오류가 있는 경우 ◦ 정답은 나와 있으나 과정에 대한 설명이 부족하거나 표현이 잘 안된 경우
0점	◦ 백지인 경우 ◦ 문제에 있는 수가 그대로 복사되어 있으나 아무런 진척이 없는 경우

<그림 Ⅲ-5> 실험집단 처치 및 내용

2) 문장제 해결 행동 검사

검사지 분석과 인터뷰를 바탕으로 문장제 해결 행동 유형별 특성에 비추어 각 문항별로 학생들의 문장제 해결 행동 유형을 결정하였다; 의미기반 접근과 직접번역 접근.

의미기반 접근으로 분류된 문항에 대해 ‘1’점을 부여하고, 직접번역 접근으로 분류된 문항에 대해서는 ‘0’을 부여하여 전체 문항에 대한 의미기반 접근 점수를 산정하였다. 문장제 해결 행동을 깊이 있게 파악하기 위해 각 문항에 대한 학생들의 반응 비율을 고려하여 4가지 유형으로 세분하였다; 강력한 의미기반 접근(Pm), 강력한 직접번역 접근(Pd), 약한 의미기반 접근(Wm), 약한 직접번역 접근(Wd). '강력한‘은 어느 한 쪽의 문제해결 행동이 75%이상인 경우(7문항 중 6~7문항), '약한‘은 어느 한 쪽의 문제해결 행동이 50% 이상인 경우(7문항 중 4~5문항)에 해당한다. 예를 들어, 강력한 직접번역 접근은 6~7문항에 대해 직접번역 접근 전략을 사용한 것으로 분석된 경우이다. 또한 각 학생의 지배적인 문장제 해결 행동은 목표 문항의 75%에서 동일한 문제해결 접근을 사용한 경우를 말하며, 이는 전형적인 문장제 해결 능력과 실생활 경험 활용 검사와의 관련성을 분석하기 위해 사용되었다.

3) 실생활 경험 활용 검사

실생활 경험 활용 검사와 실생활 경험 활용 파지 검사의 모든 문항에서 두 종류의 자료를 수집하였다; (1) <답>란에 기록한 답, (2) <설명>란에 기록한 계산 과정이나 실생활 경험을 고려한 내용. 학생들의 반응은 <그림 Ⅲ-6>과 같이 5가지 범주로 분류하였다.

범주	코드	설명
실제를 고려한 답	RA	해법 과정에서 문장제의 맥락과 관련 있는 실생활 지식과 경험을 활용한 경우
전형적인 답	SA	문제에 주어진 수를 이용하여 무비판적으로 바로 연산을 실행하여 답을 하는 경우
계산 오류	TE	무비판적으로 바로 연산을 실행하지만 기능적인 오류가 있는 경우
무응답	NOA	문제에 답을 하지 않은 경우
기타	OA	다른 범주에 속하지 않는 경우

<그림 Ⅲ-6> 실생활 경험 활용 검사 반응 범주

<설명>란의 반응 분석은 문장제를 해결하면서 실생활 지식이나 경험으로 인해, 즉각적인 연산 실행을 주저하는 경우를 조사하기 위함이다. <설명>란의 반응 중에 이러한 주저함이 보인 경우에 ‘+’ 기호를 추가하였고, 그런 반응이 안 보이지 않을 때는 ‘−’ 기호를 추가하였다. ‘+’ 기호는 5개의 범주(RA, SA, TE, NOA, OA)에서 모두 관찰될 수 있다. SA로 분류된 반응에서 문제 진술에 대해 비판하거나 질적인 의견을 제시한 경우는 SA+, 단순히 전형적인 연산만 보일 경우는 SA−로 분류하였다.

실생활 경험을 활용하는 학생들의 능력을 좀 더 폭넓게 분석하기 위해 모든 반응을 실제적인 반응(RR)과 비실제적인 반응(UR)로 구분하였다. 실제적인 반응은 <답>란에 실생활 상황과 관련지어 답을 한 경우(예; RA+, RA−) 또는 <설명>란에 실생활 지식과 관련된 진술이 보이는 경우(예; SA+, TE+, NOA+, OA+)를 포함하였다. 비실제적인 반응은 <답>란이나 <설명>란 어디에서도 실생활 지식의 활성화가 보이지 않는 반응을 말한다(예; SA−, TE−, NOA−, OA−).

4) 문장제 해결에 대한 신념 검사

문장제 해결에 대한 검사지는 5단계 평정법(매우 그렇다, 그렇다, 보통이다, 아니다, 전혀 아니다)을 사용하였다. 각 반응은 1에서 5점까지 점수가 부여되었으며, 점수가 낮을수록 수학적 모델링 관점과 일치하는 신념을 가지고 있다는 것을 보여준다. 총점은 90점(18×5)이고, 문장제의 본질에 대한 신념은 20점(4×5), 문장제 해결 과정에 대한 신념은 45점(9×5), 문장제 교

수 · 학습 과정에 대한 신념은 25점(5×5)이다.

Ⅳ. 결과 및 논의

1. 실험 연구 결과

사전 검사에서 두 집단이 문장제 해결 능력, 문장제 해결 행동, 실생활 경험 활용 능력, 문장제 해결에 대한 신념에 있어 동질인 집단임이 확인되었다. 실험 처치 후 수학적 모델링 학습의 효과를 밝히기 위하여 사후 검사로써 사전 검사와 동질인 문장제 해결 검사, 문장제 해결 행동 검사, 실생활 경험 활용 검사와 사전 검사와 동형인 문장제 해결에 대한 신념 검사를 실시하였다.

1) 연구 문제 1)-1

수학적 모델링 학습 집단과 전통적인 학습 집단은 문장제 해결 행동에 차이가 있는가?

수학적 모델링 학습 집단과 전통적인 학습 집단이 문장제 해결 행동에 있어 유의한 차이를 보이는지 알아보기 위하여 문장제 해결 행동 검사에 대한 t-검정을 실시하였다. <표 Ⅳ-1>은 각 학생의 의미기반 접근 점수에 대하여 t-검정한 결과이다. t-검정 결과 $t(57)=2.238$ 이고 유의 확률 $p=.029<.05$ 로 문장제 해결 행동에 있어 두 집단 사이에는 유의한 차이가 있는 것으로 나타났다. Cohen의 효과 크기(effect size) $d=0.58$ 이다. 이는 수학적 모델링 학습이 문장제 해결 행동에 유의한 효과를 보였다는 것을 의미한다. 즉, 수학적 모델링 학습은 학생들이 문장제를 해결하는데 좀 더 의미기반 접근을 사용하도록 영향을 끼쳤음을 알 수 있다.

<표 Ⅳ-1> 문장제 해결 행동 검사에 대한 t-검정

집단	N	평균a	표준편차	df	t	p
실험집단	30	5.60	1.694	57	2.238	.029*
통제집단	29	4.38	2.441			

a ; 7점 만점 * p<.05

학생들의 문장제 해결 행동 변화를 4가지 행동 유형(Pm, Wm, Pd, Wd)으로 나누어 좀 더 자세히 살펴보면, 실험 집단에서 강력한 의미기반 접근 학생이 12명에서 19명으로 7명이 증가했고 강력한 직접번역 접근 학생이 5명에서 1명으로 현저하게 줄어들었음을 볼 수 있다(<표 Ⅳ-2> 참조).

<표 Ⅳ-2> 지배적인 문장제 해결 행동 유형 변화

집단 / 검사 / 행동 유형	실험 집단		통제 집단	
	사전 검사	사후 검사	사전 검사	사후 검사
Pm	12	19	9	12
Pd	5	1	4	6
Wm	10	7	9	7
Wd	3	3	7	4
총계(명)	30	30	29	29

통제 집단에서도 강력한 의미기반 접근 학생이 9명에서 12명으로 3명 정도 늘어났으나 강력한 직접번역 접근 학생 수는 오히려 4명에서 6명으로 늘어났음을 볼 수 있다.

2) 연구 문제 1)-2

수학적 모델링 학습 집단과 전통적인 학습 집단은 문장제 해결에서 실생활 경험을 활용하여 해법을 제시하는 능력에 차이가 있는가?

수학적 모델링 학습 집단과 전통적인 학습 집단이 문장제를 해결할 때 실생활 경험을 활용하는 능력에 차이가 있는지 알아보기 위해 실생활 경험 활용 검사의 실제적인 반응 점수에 대해 t-검정을 실시하였다(<표 Ⅳ-3> 참조). t-검정 결과 $t(57)=7.926$ 이고 유의 확률 $p=.000<.05$ 이었다. Cohen의 효과 크기(effect size) $d=1.43$이었다. 즉, 실제적인 반응 수에 있어 수학적 모델링 집단이 전통적인 학습 집단보다 높게 나타났다. 이는 수학적 모델링 학습이 상황의 실제적인 맥락을 더 많이 고려하게 했음을 의미한다고 할 수 있다.

<표 Ⅳ-4>는 6문항으로 구성된 각 검사에서 학생들의 실제적인 반응수를 정리한 것이다. 사전검사에서 실험 집단과 통제 집단의 학생들 대부분은 실세계 지식이나 실제적인 맥락에 대한 고려를 배제하려는 경향

을 보이고 있다. 전반적으로 실제적인 반응은 약 30% 정도였다.

<표 Ⅳ-3> 실생활 경험 활용 검사에 대한 t-검정

집단	N	평균a	표준편차	df	t	*p*
실험집단	30	4.30	1.765	57	7.926	.000***
통제집단	29	1.34	.974			

a; 6점 만점 *** p<.001

사후 검사를 보면, 전통적인 학습 집단은 오히려 실제적인 반응이 28%에서 22%로 줄어들었다. 반면에 수학적 모델링 학습 집단은 33%에서 72%로 상당한 증가를 보였음을 알 수 있다. 또한 실험 집단에서 두 달 뒤에 실시된 파지 검사의 반응은 56%로 사전 검사의 반응보다 높은 수준을 유지하고 있었다.

<표 Ⅳ-4> 검사별 실제적인 반응의 수와 백분율

집단	실제적인 반응(RR)					
	사전검사		사후검사		파지검사	
	N	%	N	%	N	%
실험집단(n=30)	59	33	129	72	102	56
통제집단(n=29)	49	28	39	22		

3) 연구 문제 1)-3

수학적 모델링 학습 집단과 전통적인 학습 집단은 문장제 해결에 대한 신념에 차이가 있는가?

문장제 해결에 대한 신념은 3개의 범주로 구성되어 있다; 1) 문장제 본질에 관한 신념, 2) 문장제 해결 과정에 관한 신념, 3) 문장제 교수-학습 과정에 대한 신념. 실험 처치 후 실험 집단과 비교 집단이 문장제에 대한 신념에 차이가 있는지 알아보기 위해서 문장제 해결에 대한 신념 검사에 대한 반응을 총화척도로 재구성한 점수를 바탕으로 t-검정을 실시하였다. t-검정한 결과 문장제 해결에 대한 신념에 있어 두 집단 사이에는 유의한 차이가 있음을 알 수 있다(각각 p=.000 < .001, p=.000 < .001, p=.000 < .001).

4) 연구 문제 2)-1

수학적 능력에 따라 문장제 해결 행동에는 어떤 차이가 있는가?

수학적 모델링 학습 집단에서 수학적 능력이 문제 해결 행동에 미치는 영향을 분석하기 위해, 집단(실험 집단, 통제 집단)과 수학적 능력(상, 중, 하)을 모수 요인으로, 사후 문장제 해결 행동 점수를 종속 변수로 하여 이원 분산분석을 실시하였다.

수학적 모델링 학습의 효과가 상, 중, 하 수준에 따라 다르게 나타나는지에 대한 통계적 유의성을 검증한 분산분석 결과는 <표 Ⅳ-5>와 같다. 수학적 능력이 문장제 해결 행동에 영향을 주는지에 대한 검정 결과는 F(2)=8.429 이고, p=.001 < .05 로 상, 중, 하 수준에는 유의한 차이가 있는 것으로 분석되었으나, 집단과 수학적 능력 수준간의 상호작용 효과는 F(2)=1.755, p=.183 > .05 로 문장제 해결 행동에 대한 상호작용 효과가 유의하지 않은 것으로 나타났다. 즉 상, 중, 하 수준에 따라 문장제 해결 행동 패턴이 다르다고 할 수 없다.

<표 Ⅳ-5> 문장제 해결 행동에 대한 분산분석

분산원	제곱합	자유도	평균제곱	*F*	유의확률
집단	14.803	1	14.803	4.998	.030*
수학성취도	49.932	2	24.966	8.429	.001**
집단×수학성취도	10.396	2	5.198	1.755	.183
오차	156.984	53	2.962		
합계	1650.00	59			

* p<.05 ** p<.01

5) 연구 문제 2)-2

수학적 능력에 따라 실생활 경험을 활용하여 해법을 제시하는 능력에는 어떤 차이가 있는가?

수학적 모델링 학습에서 수학적 능력이 실생활 경험을 활용하여 해법을 제시하는 능력에 미치는 영향을 분석하기 위해, 집단(실험 집단, 통제 집단)과 수학적 능력(상, 중, 하)을 모수 요인으로, 사후 실생활 경험 활용 검사 점수를 종속 변수로 하여 이원 분산분석을 실시하였다. 수학적 모델링 학습의 효과가 상, 중, 하

수준에 따라 다르게 나타나는지에 대한 통계적 유의성을 검증한 분산분석 결과는 <표 Ⅳ-6>과 같다.

수학적 능력이 실생활 경험 활용 능력에 영향을 주는지에 대한 검정 결과는 $F(1)=76.970$, $p=.001<.05$로 집단 사이에, $F(2)=19.552$, $p=.001<.05$로 상, 중, 하 수준 사이에 유의한 차이가 있는 것으로 분석되었다. 또한 집단과 수학적 능력 수준간의 상호작용 효과를 보면, $F(2)=7.416$이고, $p=.001<.05$로 실생활 경험 활용 능력에 대한 상호작용 효과가 유의한 것으로 나타났다.

<표 Ⅳ-6> 실생활 경험 활용 능력에 대한 분산분석

분산원	제곱합	자유도	평균 제곱	*F*	유의 확률
집단	87.736	1	87.736	76.970	.000***
수학성취도	44.573	2	22.287	19.552	.000***
집단×수학성취도	16.906	2	8.453	7.416	.001**
오차	60.413	53	1.140		
합계	724.000	59			

**p<.01 ***p<.001

6) 연구 문제 2)-3

수학적 능력에 따라 문장제 해결에 대한 신념에는 어떤 차이가 있는가?

수학적 모델링 학습에서 수학적 능력이 문장제 해결에 대한 신념에 미치는 영향을 분석하기 위해, 집단(실험 집단, 통제 집단)과 수학적 능력(상, 중, 하)을 모수 요인으로, 사후 문장제 해결에 대한 신념 검사 점수를 종속 변수로 하여 이원 분산분석을 실시하였다. 분산분석 결과는 <표 Ⅳ-7>, <표 Ⅳ-8>, <표 Ⅳ-9>와 같다. 문장제의 본질에 대한 신념과 문장제 해결에 대한 신념은 검정 결과, 각각 $F(2)=.608$, $p=.548>.05$와 $F(2)=.863$, $p=.428>.05$로 상, 중, 하 수준 유의한 차이가 없는 것으로 분석되었다. 즉, 수학적 모델링 학습의 효과가 상, 중, 하 수준에 다르게 나타나지 않았다는 것을 의미한다(<표 Ⅳ-7>, <표 Ⅳ-8> 참조). 그러나 문장제 교수-학습 과정에 대한 신념은 $F(2)=4.255$, $p=.019<.05$로 상, 중, 하 수준에 상호작용 효과가 있는 것으로 나타났다(<표 Ⅳ-9> 참조).

<표 Ⅳ-7> 문장제의 본질에 대한 신념 - 분산분석

분산원	제곱합	자유도	평균 제곱	*F*	유의 확률
집단	154.287	1	154.787	28.696	.000***
수학성취도	9.167	2	4.583	.850	.433
집단×수학성취도	6.562	2	3.281	.608	.548
오차	285.883	53	5.394		
합계	474.169	59			

*** p<.001

<표 Ⅳ-8> 문장제 해결 과정에 대한 신념 - 분산분석

분산원	제곱합	자유도	평균 제곱	*F*	유의 확률
집단	517.808	1	517.808	45.342	.000***
수학성취도	16.868	2	8.434	.739	.483
집단×수학성취도	19.704	2	9.582	.863	.428
오차	605.258	53	11.420		
합계	1196.542	59			

***p<.001

<표 Ⅳ-9> 문장제의 교수-학습에 대한 신념 - 분산분석

분산원	제곱합	자유도	평균 제곱	*F*	유의 확률
집단	501.183	1	501.183	72.294	.000***
수학성취도	11.625	2	5.812	.838	.438
집단×수학성취도	58.995	2	29.497	4.255	.019*
오차	367.429	53	6.933		
합계	942.847	59			

*p<.05 ***p<.001

2. 수업 관찰 분석

본 연구의 수학적 모델링 학습은 <그림 Ⅳ-1>과 같이 6개의 활동(TLU; Teaching and Learning Unit)으로 구성되어 있다.

수학적 모델링 학습	모델링 활동에 사용된 문장제 유형
TLU-1	나눗셈의 나머지를 적절하게 해석해야 하는 문장제
TLU-2	두 집합의 공통 원소들을 고려해야 하는 문장제
TLU-3	두 지점의 위치 선정에 따라 결과가 달라지는 문장제
TLU-4	선형적인 비례 추론이 적절하지 않은 문장제
TLU-5	여분의 길이를 고려해야 하는 문장제
TLU-6	계산 결과에 ±1을 해야 하는 문장제

<그림 Ⅳ-1> 수학적 모델링 학습별 문장제 유형

TLU-1은 다른 활동을 위한 도입 성격으로 구성하였다. TLU-1 활동에는 학생들이 기존의 교과서에서 접해 본 상황이 포함되었다. 나머지 활동들은 수학적 연산보다는 실세계 지식과 맥락을 고려해야 하는 문장제 상황으로 구성되었다.

모델링 활동은 모델 도출 과정, 모델 탐구 과정, 모델 적용 과정으로 구분될 수 있으며, 각 과정은 Verschaffel 외(2002)의 모델링 과정을 거치게 된다. 모델 도출 과정에서는 도입 과제를 제시한 후 문제 이해를 위한 교사와 학생들간의 전체 논의를 실시하고 각 소집단별로 문장제 해결을 위한 모델링 활동을 하였다. 활동 후에, 소집단별로 모델과 해법 과정에 대한 논의를 실시하였다. 모델 탐구 과정은 모델 도출 과정에서 제시한 모델링 활동과 유사한 2~4개의 과제를 소집단별로 제시하였다. 먼저 개별적으로 해결해 보게 한 다음, 소집단별로 논의를 하게 하였으며 논의가 끝난 후에 각 문항에 대한 전체 논의를 실시하였다. 마지막으로 모델 적용 과정에서는 각 TLU의 수학적 모델링 활동과 관련하여 문제 만들기 및 문제해결 과제를 제시하였으며, 앞의 과정과 마찬가지로 해결 후 전체 논의를 실시하였다.

상황 모델과 수학적 모델을 관련짓는 과정은 수학적 모델링의 핵심적인 과정(Verschaffel 외, 2002; Depaepe 외, 2010)이므로, 여기에서는 각 수학적 모델링 학습 과정에서 문제 이해를 통해 모델을 구성하고 이를 수정, 정련해가는 과정과 모델 구성 과정의 특징을 살펴보았다.

6차시에 걸친 모델링 학습은 기본적으로 다음과 같은 요소를 포함하도록 구성하였다. a) 상황 모델을 도출하는 문제 상황을 이해하고 정의하기, b) 상황 속의 관련 요소, 관계 그리고 조건 등에 대한 수학적 모델 구성하기, c) 수학적 모델을 바탕으로 수학적 결과를 이끌어 내기, d) 원래 문제 상황에 비추어 계산 결과를 해석하기, e) 해석된 결과가 목적에 적절한지, 합리적인지 검토함으로써 모델링 과정을 평가하고 검증하기, f) 원래의 실세계 문제에 대한 해법으로 의사소통하기. 이러한 요소와 함께 모델을 개발하는 과정, 개발된 모델을 탐구하고 적용하는 과정이 통합되도록 하여 유사한 모델링 과정을 반복 경험할 수 있도록 하였다.

본 연구에서 수학적 모델링 학습은 실세계 맥락을 고려해야 하는 진정성 있는 문장제를 바탕으로 소집단과 전체 논의를 통한 모델링 활동으로 문장제를 해결하는 학습이었다. 문제를 읽자마자 전형적인 상황 모델이 구성되고, 상황 모델이 수학적 모델로 순식간에 변환되는 전통적인 문장제는 모델링 활동을 하기에 부적절하기 때문에, 단순한 연산으로는 적절한 해법을 제시할 수 없는 즉, 전형적인 해법과 실제적인 해법의 구분을 자극할 수 있고 다양한 모델이 제시될 수 있으며, 실제적 맥락을 고려해야 하는 진정성 있는 문장제(Palm, 2007)를 사용하였다. 이러한 문장제는 모델-도출 활동을 자극하는 역할을 하였다. 모델 도출 활동은 a) 학생들이 모델을 개발해야 할 필요성이 요구되는 상황, b) 주어진 문제 상황에 관한 현재의 사고 방법을 수정하고 정련해야 할 필요가 분명하게 인식되는 상황, c) 학생들 스스로 점검하고 필요할 때마다 수정하고 자신들의 이해를 표현해야 하는 상황, d) 다른 학생들과 공유할 수 있고 다른 문제 상황에 적용할 수 있는 모델을 개발해야 하는 상황을 포함하였다. 이와 함께 실생활에 대한 경험을 공유하고 제시된 다양한 모델에 대해 의사소통할 수 있는 환경을 조성하기 위해 소집단 활동과 전체 논의를 통한 상호작용 활동이 활발하게 이루어지도록 하였다.

수학적 모델링 학습의 첫 번째 절차는 제시된 문장제를 이해하는 것이었다. 문제 상황을 이해하는 출발점은 문장제와 관련된 실생활 경험과 지식을 공유하는 과정이었다. TLU-1에서는 캠프에 참여했던 경험들을, TLU-2는 무엇인가를 수집했던 경험들을, TLU-3에서는 친구 집에 갔던 경험이나 도로표지판에 대한 경험

들을, TLU-4에서는 수영을 해 보았거나 수영 경기를 본 경험을, TLU-5에서는 그네를 타고 놀았던 경험을, TLU-6에서는 도서관을 이용했던 경험을 발표하고 공유할 수 있는 기회를 제공하였다. 이러한 접근은 Depaepe 외(2010)가 구분한 맥락-중심 지도의 도입 단계에서 N3로 코딩된 '학생들의 실생활 경험과 사전 지식을 이용하기'와 일치하는 활동이라고 볼 수 있다. 실제로 이러한 실생활 경험의 활성화는 다양한 모델을 이끄는 역할을 하기도 했다.

문제 상황을 이해하기 위해 문제에 주어진 정보를 바탕으로 문제를 자신의 언어로 재진술하게 하거나 문제에 언급된 대상, 상황의 의미를 명확히 하도록 하였다. 이 과정은 Mousoulides, Christou, & Sriraman(2008)이 지적한 것처럼 문제 상세화와 단순화의 과정이라고 할 수 있다. 문제의 여러 조건이나 가정, 관계들을 파악하는 과정은 학생들이 문제해결과 관련이 없거나 적은 정보를 배제하고 문제를 단순화하도록 돕는다.

문제 상황이 파악되면, 학생들은 소집단별로 적절한 해법을 찾기 위한 탐구 활동을 하였다. 각자 상황에 대한 이해를 바탕으로 협력하여 수학적인 모델을 통해 결과를 도출하거나 서로 다른 모델을 제시하고 모델의 적절성이나 타당성에 대한 논의를 하였다. 이 과정 속에서 계산 결과를 원래 문제 상황에 비추어 해석해 보거나 논의 과정을 통해 모델을 정교화하였다.

본 연구에서 사용된 모델링 과제의 대부분은 수학적 모델을 구성하는데 어려움은 없지만, 도출된 결과를 원래 상황에 비추어 해석하고 판단해야 하는 상황들이었다. 이는 전형적인 해법(단순히 문제에 주어진 수들에 연산을 적용하여 결과를 얻는 과정)이 잘 들어맞지 않는 문장제를 경험하게 하기 위한 것이었다. 또한 전형적인 해법을 제시하기에는 분명하지 않은(빠진) 부분이 있음으로 인해, 문제해결자가 다양한 모델을 제시할 수 있는 기회를 제공해주었다. TLU-3에서 두 마을이 도로의 일직선상에 있는 모델, 일직선상은 아니지만 직선으로 연결된 모델, 도로가 곡선으로 연결된 모델 등 다양한 형태의 모델이 제시되고 있음을 볼 수 있다. 이러한 모델들은 소집단 활동과 전체 논의를 거치면서 점차 정교화되었다. 수학적 모델링 학습에서 소집단 활동과 전체 논의는 모델을 구성하고, 모델을 정당화하고, 모델을 정교화해가는 중요한 교실 환경을 제공했다고 할 수 있다.

모델링 학습의 마지막 과정은 탐구된 모델을 다시 실생활에 적용해보고, 관련된 문제를 해결해보는 것이었다. 탐구된 수학적 모델 또는 그래프 모델과 관련있는 실생활 이야기 상황을 구성해보거나, 탐구된 모델과 유사해 보이나 다른 접근이 필요한 과제를 해결해보도록 하였다. 많은 학생들이 앞에서 다루었던 문장제 맥락과 유사한 맥락으로 문제를 구성하는 것을 볼 수 있었다. 비록 유사한 상황을 구성하기는 했지만, 자신들의 경험을 반영한 맥락으로 구성하는 것을 볼 수 있었다. 문제를 해결해보는 적용 과제에서는 모델 도입이나 탐구 과정에서의 논의보다 좀 더 정교한 논의가 이루어지는 것을 관찰할 수 있었다. TLU-3에서, 모델링 학습의 초기에는 중심에서 두 거리를 합하거나 빼서 '~사이'로 해법을 제시하는 것이 타당한 것으로 생각되었으나, 교통표지판에 나와 있는 두 마을 사이의 거리를 구하는 모델 적용 과정에서, 같은 맥락이라도 상황에 따라 단순히 더하거나 빼서 그 결과를 제시하면 잘못될 수도 있음을 분명하게 인식하게 되었다.

소집단 활동과 전체 논의가 끝나면, 교사는 모델링 활동과 관련된 반성적 논의를 실시하였다. 반성적 논의는 수학적 모델링 학습 전반에 걸쳐 학생들의 경험을 공유하는 과정이었다. 교사는 다음과 같은 질문을 통해 학생들의 반성적 사고를 이끌었다; '문제를 풀면서 느낀 점은 무엇인가?', '이 문제는 어떤 점에서 좋다고 생각하는가?', '이 문제는 교과서의 문제와 무엇이 다른가?', '문제를 해결하면서 어려웠던 점은 무엇인가?', '문제를 해결하면서 배운 점은 무엇인가?', '문제를 풀면서 내가 무시했던 점은 무엇인가?', '실생활 경험이나 지식이 문제해결에 어떤 도움이 되었는가?'.

수학적 모델링 학습을 위한 교사의 노력은 매우 중요한 교수-학습 환경을 만들어냈다. 교사는 문제 도입 과정에서 문장제와 관련된 개인 경험을 공유할 수 있도록 유도하였으며, 모델을 표현하게 하고 검토하게 하고 수정해보도록 지속적으로 자극하였고 직접적인 지도보다는 적절한 안내와 힌트를 제공함으로써 학생들 스스로 문제에 대한 해법을 구성하도록 격려했다.

앞에서 살펴본 문장제에 대한 수학적 모델링 과정은 수학적인 방법으로 해석되고 이해되어야 하는 진정한 상황을 중심으로 소집단 활동과 전체 논의를 통한 공유된 모델들의 개발, 그리고 그 모델의 정련과 적용

의 과정이었다.

3. 논의

본 연구의 목적은 문장제에 대한 수학적 모델링 학습과 전통적인 학습을 비교해 보고, 수학적 모델링 학습이 문장제 해결 행동과 실생활 경험을 활용하는 능력 및 문장제에 대한 신념에 어떤 영향을 미치는지 밝히고, 문장제에 대한 수학적 모델링 과정을 분석하여 문장제 교수-학습에 대한 시사점을 얻고자 하는데 있다. 앞에서 살펴본 수학적 모델링 학습의 효과와 수학적 능력에 따른 영향 등에 대한 결과를 바탕으로 몇 가지 논의해 보고자 한다.

첫째, 본 연구에서 수학적 모델링 학습 집단(실험집단)과 전통적인 학습 집단(통제 집단)의 처치는 모델링 학습/전통적 학습, 소집단 학습/개별 학습 등 다중적인 측면이 있어, 문장제 해결 능력의 결과가 수학적 모델링 학습에 국한된다고 하기에는 연구 방법에 제한점이 있을 수 있다. 그러나 수학적 모델링 활동은 본래 사회적인 경험이어야 하기 때문에(Zawojewski, Lesh, & English, 2003), 본 연구의 수학적 모델링 학습에 소집단 활동과 전체적인 논의 과정을 포함한 것이다.

수학적 모델링 학습은 주어진 상황에 대한 경험을 공유하는 과정, 자신의 아이디어(모델)를 발표하고 논의하는 과정, 또는 수학적 이해를 표현하는 과정 등 의미 있는 양질의 학습 경험을 제공해 주었다. 이러한 경험은 문제 상황에 대한 풍부한 상황 모델 구성을 돕고, 수학적 모델에 대한 적절한 해석을 가능하게 하였다.

그리고 본 연구의 암묵적인 가정 중의 하나는 수학적 모델링 학습 집단이 5학년 수준의 전형적인 문장제 해결과 적용을 주로 연습한 전통적인 학습 집단에 비해 문장제 해결 능력이 약화되지 않을 것이라는 점이었다. 본고에서는 따로 결과를 제시하지 않았지만 실제로 전형적인 문장제 해결 검사에서 두 집단 사이에는 유의미한 차이가 없었다.

둘째, 문장제 해결 행동은 문장제의 성공에 영향을 미친다는 점이다. 문장제 해결 행동에 대한 사전 검사를 보면 두 집단 모두에서 상 수준의 대부분 학생들이 강력한 의미기반 접근(Pm)이나 약한 의미기반 접근(Wm) 전략을 사용하고 있음을 알 수 있다. 하 수준의 학생들은 직접번역 접근 전략 사용이 우세하였다. 사후 검사의 결과에서도 유사한 결과를 보여 주고 있다. Hegarty 외(1995)는 눈 고정(eye fixation) 실험을 통해, 성공적이지 못한 문제해결자는 직접 번역으로 문제를 이해하고 성공적인 학생들은 문제 모델 구성을 통해 이해한다고 지적하였으며, 문장제 해결 행동을 5개의 범주로 분석한 Pape(2004)는 문제에 주어진 정보를 기록하고 관계와 같은 맥락을 사용하는 의미기반 접근 전략을 바탕으로 문제를 해결하는 학생들이 수학 성취도가 더 높다고 하였다. 본 연구도 위의 연구들과 유사한 결과들을 보여주고 있다.

셋째, 수학적 모델링 활동은 실생활 경험 활용 능력에 큰 영향을 미쳤다. 사전 검사에서는 전통적인 학습 집단뿐만 아니라 실험 집단도 문장제의 실생활 맥락을 배제하려는 강한 경향을 보였다. 이러한 경향이 광범위하게 퍼져 있다는 기존의 연구들과 유사한 결과이다(김민경, 2004; Greer, 1993; Verschaffel 외, 1994). 그러나 사후 검사 결과를 보면, 전형적인 문장제를 연습한 전통적인 학습 집단은 실생활 경험을 활용하는 능력이 더 악화되었지만, 수학적 모델링 학습 집단은 문장제를 해결할 때 실생활 맥락을 고려하는 능력이 상당한 향상되었음을 알 수 있다. 사전 검사에서 실생활 맥락을 고려하는 비율이 30% 정도였는데, 사후 검사에서는 70%까지 향상되었다. 이러한 결과는 학교 수학에서 다루는 문장제가 실생활 맥락을 고려하지 못하게 만들고 있으며, 좀 더 진정성있는 과제가 이러한 문제점을 개선할 수 있다는 지적들(Inoue, 2005; Palm, 2007; Verschaffel 외, 2000)과 일치한다.

수학적 모델링 학습이 실생활 맥락을 고려하는 능력에 미치는 영향을 살펴보면, 중, 상 수준 학생들이 하 수준의 학생들보다 더 많은 효과를 얻었음을 알 수 있다. 하 수준의 학생들이 모델링 활동의 영향을 적게 받은 것은 하 수준의 학생들이 소집단 활동에 적극적으로 참여하지 못한 영향이 큰 것으로 보인다. 그럼에도 불구하고 사후검사에서 전통적인 학습 집단의 학생들은 실생활 경험 활용 검사 점수가 하락했지만 수학적 모델링 학습 집단의 학생들은 오히려 향상되었다. 따라서 하 수준의 학생들이 좀 더 능동적으로 참여할 수 모델링 환경이 조성된다면 더 좋은 효과를 얻을 수 있을 것이다.

넷째, 본 연구에서의 수학적 모델링 활동은 전통적인 수학 교실에서 사용하는 문장제보다 좀 더 실제적인 비정형 문제를 사용하였고, 소집단 활동과 전체 학급 논의를 통한 상호작용 학습과 협동 학습을 강조하였으며, 기존의 문장제 교수-학습에서의 그것과는 다른 교실 문화를 형성하기 위해 노력하였다. 기존의 문장제와는 다르게 단순한 연산만으로는 올바른 해법을 제시할 수 없을 뿐만 아니라 다양한 모델 제시가 가능한 과제는 학생들이 활발하게 논의에 참여하도록 만들고 있지만, 한편으로는 비실제적인 반응을 고집하기도 하고, 과장된 실제(예, 나눗셈의 나머지에 대한 해석 과제에서 남은 2개의 풍선에 대해 '풍선 2개를 터뜨려요.'라는 반응)를 언급하기도 했다. 교사는 이러한 행동을 실세계 지식의 활성화로 인정해주기도 했지만 주어진 문제 상황과 관련하여 제한하기도 했다. 소집단 활동이나 전체 학급 논의가 상, 중 수준의 일부 학생들을 중심으로 이루어지는 경우가 종종 있어 모든 학생들에게 능동적이거나 생산적이지 못한 면이 있었다. 이것은 성취 수준이 상, 중인 집단이 하 수준의 학생들보다 수학적 모델링 학습에서 더 좋은 효과를 얻고 있는 이유라고 할 수 있을 것이다.

V. 결론

본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 수학적 모델링 학습은 문제 상황에 대한 이해 없이 수나 키워드에 기초하여 문장제를 해결하는 직접 번역 접근보다 문제 상황에 대한 풍부한 상황 모델을 구성하려는 의미기반 접근을 더 많이 사용하게 하는 효과적인 방법이 될 수 있다. 직접번역 접근에서 의미기반 접근으로의 문장제 해결 행동의 변화는 한두 번의 연산으로 해결되지 않는 실제적인 문제 상황에 대한 이해와 적절한 상황 모델 구성, 그리고 모델에 대한 논의와 정교화 과정을 통해 이루어질 수 있다. 이러한 관점에서 수학적 모델링 학습은 학생들의 문장제 해결 행동을 변화시킬 수 있는 방안이 될 것이다.

둘째, 수학적 모델링 학습은 문장제 해결에서 문장제의 실생활 맥락을 고려하는 태도 육성에 기여할 수 있다. 비록 하 수준의 학생들이 좀 더 능동적으로 참여할 수 있는 환경 조성이 필요한 것으로 보이지만 수학적 모델링을 학습한 집단이 문장제의 맥락과 관련있는 실생활 경험과 지식을 바탕으로 실제적인 해법을 제시하는 능력이 향상되었음을 볼 수 있었다. 초등학교에서 문장제는 수학이 실제에 어떻게 적용되는지를 보여주는 중요한 맥락이다. 이러한 문장제의 본질이 단순한 연산의 연습으로 다루어져서는 안 된다. 또한 실생활 맥락을 고려해야 하는 문장제를 통해 문장제의 해법은 유일하지 않을 수 있고 해석에 따라 다양한 해법이 제시될 수 있음을 인식할 수 있으며, 실세계를 수학적으로 볼 수 있는 안목을 기를 수 있을 것이다.

셋째, 수학적 모델링 학습은 문장제 해결에 대한 학생들의 긍정적인 신념 형성에 기여할 수 있다. 문장제 해결에 대한 신념 검사에서 수학적 모델링 학습 집단과 전통적인 학습 집단 간에 유의한 차이를 보이고 있다. 수학적인 연산과 구조만을 강조하는 문장제 지도는 수학과 수학 학습에 대한 올바른 신념 형성에 기여할 수 없다. 신념은 장기간에 걸친 학습 경험으로 형성된다. 따라서 수학적 모델링 활동이 초등학교에서 조기에 도입되는 것이 바람직하다.

넷째, 문장제에 대한 수학적 모델링 학습은 다양한 역동적인 노력이 필요하다. 문제를 읽자마자 수학적 모델로 변역되는 피상적인 문제로는 본질적인 모델링 활동을 할 수 없다. 하지만 문장제를 개선한다고 모델링 학습이 잘 이루어지는 것은 아니다. 수학적 모델링 활동은 협력 활동과 논의의 과정 등 사회적인 경험을 통해 더 많은 효과를 얻을 수 있으므로 자신의 모델을 정당화할 수 있고 다른 학생의 모델을 비판적으로 분석하기 위해서는 수학적으로 의사소통할 수 있는 능력과 그런 환경이 조성되어야 한다. 따라서 문장제를 다루는 교실 풍토에 대한 개선 노력이 요구된다. 문장제가 개념이나 기능에 대한 연습으로 사용되고 문장제에 대한 실생활 맥락에 대한 이해보다는 형식적인 연산의 옳고 그름에 초점을 두는 문장제를 다루는 교실 문화에 대한 변화가 필요하고 하겠다.

본 연구에서는 모델과 모델링 관점을 바탕으로 수학적 모델링 학습이 문장제 교수-학습에 미치는 영향을 고찰하였다. 수학적 모델링 학습은 수학적인 개념과 절차를 구성하는 것뿐만 아니라 실제적인 측면에서의 수학과 추상적이고 형식적인 수학의 발달 사이를 연결하는 한 방법이기도 하다. 문장제는 이러한 두 측

면을 모두 가진 모델링 활동에 중요한 도구임에 틀림이 없다. 따라서 문장제를 수학적 모델링을 연습하는 과정으로 인식하고, 초등학교 수학 교실에서 적극적으로 그 방법이 모색되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

김민경 (2004). 현실적인 문장제에 관한 초등학생의 반응 분석. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 6(2), 135-151.

김민경·홍지연·김은경 (2009). 수학적 모델링 사례 분석을 통한 초등 수학에서의 지도 방안 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 48(4), 365-385.

Blum, W. (2002). ICMI 14 study: Applications and modeling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1-2), 149-171.

Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Matthews, W., & Silver, E. A. (1983). Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary school. *Mathematics Teacher,* 76(9), 652-659.

Carpenter, T. P., & Romberg, T. A. (2004). *Powerful practices in mathematics & science: Research-based practices for teaching and learning*. Madison: University of Wisconsin.

Chapman, O. (2003). *Teachers' conceptions of mathematical word problems: A basis for professional development*. Paper presented at the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference, Honolulu, Vol. 2, (pp. 197-194). ED No. 500-938.

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62(2), 211 -230.

Cooper, B. (1994). Authentic testing in mathematics? The boundary between everyday and mathematical knowledge in national curriculum testing in english schools. *Assessment in Education*, 1(2), 143-166.

Davis-Dorsey, J., Ross, S. M., & Morrison, G. R. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problems. *Journal of Educational Psychology,* 83(1), 61-68.

Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2010). Teacher's approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education*, 26(2), 152-160.

Diezmann, C., Watters, J. J., & English, L. D. (2002). *Teachers behaviours that influence young children's reasoning*. In A. Cockbum & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th International PME Conference (pp. 289-296). Norwich: University of East Anglia.

Doerr, H., & English, L, D. (2003). A modeling perspective on student's mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematical Education*, 34(2), 110-136.

English, L. D. (2006). Mathematical modelling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 303-323.

English, L. D., & Watters, J. (2005). Mathematical modeling in the early school years. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), 58-79.

Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 16(2), 36-45.

Gravemeijer, K. (1997). Solving word problems: A case of modelling? *Learning and Instruction*, 7(4), 389-397.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 170-218.

Greer, B. (1993). The mathematical modeling perspective on wor(l)d problems. *Journal of*

Mathematical Behavior, 12(3), 239-250.

Greer, B. (1997). Modeling reality in the mathematics classroom: The case of word problems. *Learning and Instruction*, 7(4), 293-307.

Hatano, G. (1997). Commentary: Cost and benefit of modeling activity. *Learning and Instruction*, 7(4), 383-387.

Hegarty, M., Mayer, R., & Green, C. (1992). Comprehension of arithmetic word problems: Evidence form student's eye fixation. *Journal of Educational Psychology*, 84(1), 76-84.

Hegarty, M., Mayer, R., & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87(1), 18-32.

Inoue, N. (2005). The realistic reasons behind unrealistic solutions: The role of interpretive activity in word problem solving. *Learning and Instruction*, 15(1), 69-83.

Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Origins and evolutions of model-based reasoning in mathematics and science. In R. A. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 337-358). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mousoulides, N. G., Christou, C., & Sriraman, B. (2008). A modeling perspective on the teaching and learning of mathematical problem solving. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(3), 293-304.

NCTM, (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Palm, T. (2007). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37-58.

Pape, S. J. (2004). Middle school children's problem-solving behavior: A cognitive analysis from a reading comprehension perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*. 35(3), 187-219.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution: The social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction*, 7(4), 309-327.

Scheonfeld, A. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. Voss, D. Perkins, & J. Segal (Eds.), *Informal reasoning and educations. Hillsdale*, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Sowder, L. (1988). Children's solutions of story problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 7(3), 227-238.

Verschaffel, L. (2002). *Taking the modeling perspective seriously at the elementary school level: Promises and pitfalls*. Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (26th, Norwich, England, July 21-26).

Verschaffel, L., De Corte, E., & Borghart, I. (1997). Pre-service teacher's conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction*, 7(4), 339-359.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4(4), 273-294.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, G., & Ratinckx, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems; A design experiment with fifth grades. *Mathematical Thinking and learning*, 1(3), 195-229.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Vierstraete, H. (1999). Upper elementary school pupils' difficulties in modeling and solving nonstandard additive word problems involving ordinal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30(3), 265-285.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger Publishers.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tools use in mathematics education* (pp. 257-276). Dordrecht, Netherlands; Kluwer Academic Publishers.

Wyndhamn, J., & Säljö, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning; A study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction*, 7(4), 361-382.

Zawojewski, J. S., Lesh, R., & English, L. D. (2003). A models and modelling perspective on the role of small group learning. In R. A. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 337-358). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Effects of the Mathematical Modeling Learning on the Word Problem Solving

Shin, Hyun Yong
Dept. of Mathematics Education, Korea National University of Education, Chungbuk, 363-791, Korea
E-mail : shin@knue.ac.kr

Jeong, In Su
Seoul Ok-Jeong Elementary School, Oksu-Dong, Seongdong-Gu, Seoul, 133-102, Korea
E-mail : smfcjung@hanmail.net

The purpose of this study is to investigate the effectiveness of two teaching methods of word problems, one based on mathematical modeling learning(ML) and the other on traditional learning(TL). Additionally, the influence of mathematical modeling learning in word problem solving behavior, application ability of real world experiences in word problem solving and the beliefs of word problem solving will be examined.

The results of this study were as follows:

First, as to word problem solving behavior, there was a significant difference between the two groups. This mean that the ML was effective for word problem solving behavior.

Second, all of the students in the ML group and the TL group had a strong tendency to exclude real world knowledge and sense-making when solving word problems during the pre-test. but A significant difference appeared between the two groups during post-test. classroom culture improvement efforts.

Third, mathematical modeling learning(ML) was effective for improvement of traditional beliefs about word problems.

Fourth, mathematical modeling learning(ML) exerted more influence on mathematically strong and average students and a positive effect to mathematically weak students. High and average-level students tended to benefit from mathematical modeling learning(ML) more than their low-level peers. This difference was caused by less involvement from low-level students in group assignments and whole-class discussions.

While using the mathematical modeling learning method, elementary students were able to build various models about problem situations, justify, and elaborate models by discussions and comparisons from each other. This proves that elementary students could participate in mathematical modeling activities via word problems, it results form the use of more authentic tasks, small group activities and whole-class discussions, exclusion of teacher's direct intervention, and classroom culture improvement efforts.

The conclusions drawn from the results obtained in this study are as follows:

First, mathematical modeling learning(ML) can become an effective method, guiding word problem solving behavior from the direct translation approach(DTA) based on numbers and key words without understanding about problem situations to the meaningful based approach(MBA) building rich models for problem situations.

Second, mathematical modeling learning(ML) will contribute attitudes considering real world situations in solving word problems. Mathematical modeling activities for word problems can help elementary students to understand relations between word problems and the real world. It will be also help them to develop the ability to look at the real world mathematically.

Third, mathematical modeling learning(ML) will contribute to the development of positive beliefs for mathematics and word problem solving. Word problem teaching focused on just mathematical operations can't develop proper beliefs for mathematics and word problem solving.

Mathematical modeling learning(ML) for word problems provide elementary students the opportunity to understand the real world mathematically, and it increases students' modeling abilities. Futhermore, it is a very useful method of reforming the current problems of word problem teaching and learning. Therefore, word problems in school mathematics should be replaced by more authentic ones and modeling activities should be introduced early in elementary school eduction, which would help change the perceptions about word problem teaching.

* ZDM Classification : D41
* 2000 Mathematics Classification : 9740
* Key Words : word problem, word problem solving, mathematical modeling learning