

비와 비율 학습에서 나타나는 초등학교 학생들의 인식론적 장애 분석

박 희 옥(서울 정릉초등학교)

박 만 구(서울교육대학교)1)

본 연구의 목적은 비와 비율 학습에서 나타나는 초등학교 학생들의 인식론적 장애의 유형을 분류하고 원인을 찾아내어 그에 따른 지도 방안을 제시하는 것이다. 이를 위해 그 동안 연구되어 온 선행 연구의 결과와 수학교과서와 지도서, TIMSS 2003, 2007 등 여러 자료들을 분석하여 비와 비율 검사지를 제작하였다. 이를 위해 서울시내 초등학교 5학년 학생 138명을 여러 지역을 고려하여 선정한 후 설문 및 면담을 하여 인식론적인 장애를 검사하였다. 검사지 결과 분석 및 면담 내용을 토대로 인식론적 장애의 유형을 크게 용어, 계산, 표현과 관련된 것의 세 가지로 분류되었다. 그리고 각 유형에 따른 원인과 지도 방안을 제시하고 비와 비율의 효과적인 학습을 위한 제언을 하였다.

I. 서론

본 연구의 목적은 비와 비율 교수·학습과 관련된 선행 연구를 분석을 바탕으로 초등학교 학생들이 비와 비율 학습에서 보이는 인식론적 장애의 형태를 알아보고 원인을 분석하여 그에 따른 적절한 지도방안을 마련하기 위함이다.

2008년 12월에 발표한 세계 60여 개국이 참여한 TIMSS(Trends in International Mathematics and Science Study) 2007의 결과에서 우리나라는 2위를 차지하며 수학 성취도에서 우수한 성적을 거두었으나 '분수와 소수', '비, 비례식, 비율'과 같은 영역에서는 다른 나라들에 비해 상대적으로 낮은 정답률을 나타

내었다(김선희, 김경희, 2009). 물론 TIMSS 2003의 결과보다 수학 성취도가 향상되었고 상대적으로 다른 나라들에 비해 정수, 방정식 등을 포함한 대부분의 영역에서 높은 점수를 받았지만 특정 영역에서 낮은 점수를 받았다는 것은 이 부분의 교수·학습 과정에 대하여 보다 깊은 연구를 할 필요가 있음을 시사해준다.

김수현, 나귀수(2008)에 의하면 전미수학교사협회(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)에서는 비와 비율 개념을 통합적 주제로서 강조하고 있다. 비와 비율 개념은, 닳음, 정비례와 반비례, 그래프의 기울기, 상대도수, 히스토그램, 확률 등의 학습에서 매우 중요하다. NCTM(2000)에서는 문제해결과 추론에서도 비와 비율 개념을 토대로 하는 비례적 사고가 매우 중요하며, 다양한 수학적 주제들을 연결하고 과학이나 예술과 같은 다른 영역들과 수학을 연결함에 있어서도 비와 비율, 비례가 매우 중요한 주제임을 강조하고 있다.

제7차 교육과정에서 6학년에서 다루던 '비와 비율'을 2007 개정 교육과정에서는 5학년에서 가르칠 수 있도록 조정하였다. 이는 5학년 과학에서 속력 개념을 학습하고 있으므로 타교과 학습과 수학과의 연계성을 강화하기 위한 것이다. 뿐만 아니라, 중학교 1학년 과정이었던 '정비례와 반비례'를 6학년으로 이동하여 '비, 비례식, 백분율'을 5~6학년에 걸쳐 집중적으로 학습할 수 있게 하였다(교육인적자원부, 2008). 또한 2009 개정 교육과정에서는 '비의 값'이라는 용어를 삭제하여 비율과 비의 값 개념의 혼동을 방지하였고, 두 양을 비교할 때 한 양을 기준으로 다른 양의 몇 배가 되는지를 나타낼 필요성을 인식하게 하면서 비의 개념을 도입하도록 명확히 제시하고 있다(교육과학기술부, 2011).

2007 개정 교육과정에서 비와 비율의 도입 시기를

* 접수일(2012년 6월 28일), 수정일(2012년 7월 24일), 게재 확정일(2012년 8월 20일)

* ZDM 분류 : D43

* MSC2000 분류 : 97D70

* 주제어 : 비와 비율, 인식론적 장애

1) 교신저자

앞당겨 관련된 개념들을 연계시켜 학습할 수 있도록 하고 2009 개정 교육과정 도입에 앞서 비와 비율과 관련된 용어를 명확히 하려는 노력에도 불구하고 학생들은 여전히 비와 비율과 관련하여 인지적으로 어려움을 겪고 있다. 학생들이 가장 흔히 겪는 어려움은 용어의 의미 이해에 대한 부분이다. 기준량과 비교하는 양에 대한 의미를 정확히 이해하지 못한 학생들은 비를 표현할 때 'A에 대한 B의 비'를 A:B로 나타내는 경우가 많다. 또한 학생들은 비와 비의 값, 비율과 비의 값의 의미를 구분하지 못하는 경우가 종종 있다. 예를 들어, 3:5의 경우 비의 값도 $\frac{3}{5}$ 이고 비율도 $\frac{3}{5}$ 이므로 학생들은 비의 값과 비율이 같은 것인지 의문을 갖고, 비의 값 $\frac{3}{5}$ 에서는 기준량이 1이고 비율 $\frac{3}{5}$ 에서는 기준량이 5임을 분명하게 이해하지 못한다(김성희, 방정숙, 2005).

용어의 의미와 관련된 원인 외에도 비나 비율을 표현하는 방법과 같은 여러 가지 장애 요인들이 복합적으로 작용하여 학생들은 비와 비율을 이해하는 데 어려움을 겪을 수 있다. 그런데 여러 원인 중에서도 인식론적인 장애는 수학적 개념의 발달과정 상에서 나타나기 때문에 학생들이 수학 개념을 학습할 때 불가피하게 나타날 수밖에 없고, 따라서 인식론적 장애를 분석하여 그에 따른 적절한 지도방안을 모색하는 것은 매우 중요하다.

본 연구에서는 비와 비율에서 초등학교 학생들이 보이는 인식론적 장애의 형태를 확인하고 그 원인을 분석하였다. 그리고 비와 비율과 관련한 교수·학습에서 초등학교 학생들의 인식론적 장애를 고려한 적절한 지도 방안을 제시하였다.

II. 이론적 배경

그 동안 수학교육에서 인식론적 장애에 대한 연구는 다양한 형태로 있어 왔다. 본 연구에서는 가장 적절하게 관련이 된다고 보이는 Bachelard의 인식론적 장애와 Brousseau의 인식론적 장애에 대한 연구를 중심으로 살펴보았다.

1. Bachelard의 인식론적 장애

Bachelard의 과학 철학의 구조 전체를 떠받치고 있는 일차적인 개념은 '인식론적 장애'이다. 그것은 궁극적으로 과학자 자신의 실천과 관련된 것으로서, 재생적 상상력에 입각하여 일정한 방식으로 상상하게 되는 것이 과학자의 실천에 어떤 효과를 가져오는지를 암시하고 있다. 인식론적 장애는, 인식의 성립의 시기에는 '반-사고'의 형태로 일어나며, 이후의 발전 단계에서는 '사고의 중지'로 일어난다. 그 경우가 어떠한 간에, 장애는 '사고에 대한 사고의 저항'을 드러낸다. 정확히 말하면 과학적 사고가 자신의 재구성성을 통해서만 진보한다면, 인식론적 장애는 현존하는 사고의 구조-그것이 이미 과학적이든 그렇지 않든-가 위험에 처해 있을 때에는-오직 그때에만-언제나 나타난다고 말할 수 있다. 덧붙이면 그것은 단절이 임박해 있는 지점에서 나타난다. 그 외관에만 국한하면, 장애는 이후에 회귀를 통해서 '완고한 오류들의 조직'으로 나타나게 될 특정 사고구조와 연관되어 있다(Bachelard, 1996)

인식론적 장애란 과학 정신의 형성과정에서 그 형성을 가로막는 체계화된 오류들로서 과학적 활동에서의 인식론적 장애물은 사유의 정지를 가져온다. Bachelard가 무엇보다도 문제시하는 것은 바로 이 부분이며, 따라서 그는 인식론적 장애들이 구체적으로 어떻게 작동하고 있는가를 보여주려고 한다(김태훈, 2001).

인식론적 장애물이 생기는 것은, 과학적 인식에서는 모든 것이 구성되어야 하기 때문이다. Bachelard에게는 과학적 인식은 직접적으로 주어지는 것이 아닌, 어떠한 질문에 대한 대답으로서 주어지는 것이다. 우리의 질문에 의해 우리의 경험은 구성되며, 이로부터 다른 유의미한 질문은 억제된다.

수학에서 언어 이외에 아무것도 보지 못하는 '회의적인 철학자들'이 소중하게 생각하는 고정 관념과 단절하는 것이 필요하다. 수학은 사고, 자신의 언어를 갖고 있는 어떤 사고이다. 물리학자는 실험을 이리한 수학적 사고를 가지고 사유한다. 이제부터 과학적 가설들은 그것들의 수학적 형식과 분리 될 수 없다. 그것들은 진정으로 수학적인 사고들이다(Bachelard, 1998).

결국 인식론적 장애란 특정한 맥락에서 성공한 경험이 있고 인지 구조의 일부가 되었다고 할지라도 새

로운 문제 상황이나 다른 맥락에서는 적용하지 못하는 것을 말한다.

2. Brousseau의 교수학적 상황

Brousseau가 말하는 ‘수학 교수학적 상황’이란 학생이 어떤 수학적 지식을 학습하도록 하는 것을 목표로 하는 교사, 학생, 환경 사이의 관계 상황이며, 교사가 교수학적 의도가 담긴 문제 상황 속에서 학생과 상호작용 하는 상황(우정호, 2000)이다. 교사는 형식적인 수학적 지식을 보다 의미 있게 가르치기 위해서 그 지식의 근원, 의미, 동기, 쓰임새를 알게 해주는 일련의 활동을 교실 문맥으로 구성하려는 시도를 하지 않을 수 없게 된다.

교수학적 상황론에서 보면, 학습자는 상황에 적응하는 과정에서 수학적 개념의 의미를 구성하기 위해 지도 상황에서 제시된 문제 상황과 끊임없이 상호작용을 한다. 새로운 개념 형성을 위한 상호작용의 과정에서 학생들 머릿속에서는 인지적인 장애가 불가피하게 발생할 수밖에 없고 이런 현상은 비와 비율 학습에서도 나타난다.

3. Brousseau의 인식론적 장애

수학 학습에서의 인식론적 장애는 Brousseau가 제안한 것으로, 그의 교수학적 상황론의 핵심적인 개념의 하나이다. 인식론적 장애는 학습하고자 하는 지식의 본성에 기인하는 것이므로 피할 수 없으며, 새로운 지식이 성장·발달하기 위해서는 반드시 극복해야 하는 장애이다(이종희, 1999). 수학의 역사적 발생 과정에서 나타난 인식론적 장애가 학생들에게도 매우 유사하게 나타난다는 것이 확인되고 있다. 인식론적 장애 형성에 영향을 주는 요인으로는 일상어, 직관, 과도한 일반화, 은유 등을 생각할 수 있다. 그러나 이 요인은 지식의 본질과 밀접히 관련된 불가피한 것으로 피할 수도 없고, 피해서도 안 되는 것이다. 대신 이를 조절하고 제어하는 능력을 개발하는 것이 필요하다(우정호, 2000).

이와 같은 맥락에서 학생들은 실생활과 관련된 비와 비율 문제는 제대로 해결하면서도 교과서 속 문장제 문제에서는 이미 배운 비와 비율의 개념이 적용되

지 않아 문제 해결에 실패할 수 있다. 또한 우리나라의 교과서에서는 ‘비’ 개념 도입할 때 곱셈을 중심으로 한 승법적 사고를 이끌어 내는 것이 아니라 가법적 사고를 하게 만들기 때문에 학생들이 어려움을 겪는다(김경희, 백희수, 2010). 이 밖에도 학생들은 학습과 일상생활의 경험을 통해 많은 선행 지식을 가지고 있으며 이러한 선행 지식은 새로운 지식을 받아들이는데 부적합한 기존의 인지 구조에 대하여 조절을 일으켜야 하나, 기존의 인지 구조의 변화는 쉽게 일어나지 않는 데서 장애가 발생할 수 있다(이종희, 2002).

다양한 원인으로 인해 학생들은 장애를 겪게 되는데, 본 연구에서는 인식론적 장애의 형태와 원인을 찾아내어 그에 따른 지도 방안을 제시하였다.

4. 비와 비율

가. 비와 비율의 개념

비와 비율은 일상생활에서 혼용하여 사용하는 경우가 많고 나라마다 의미를 다르게 사용하기도 한다. 미국에서 비는 같은 성질을 갖는 양 사이의 비교(예: 파운드 대 파운드)이고, 비율은 다른 성질을 갖는 양 사이의 비교(예: 거리 대 시간)의 의미로 가르친다면 우리나라는 비는 양의 순서쌍을 포함하는 이항관계이며, 비율은 내포량으로서 곧 한 양과 다른 양의 한 단위 사이의 관계의 의미로 지도한다(정은실, 2003a). 따라서 먼저 우리나라 수학 교과서에서 다루고 있는 비와 비율의 개념을 명확히 할 필요가 있다.

비는 $b \neq 0$ 일 때 $a:b$ 로 쓰여지는 수들의 순서쌍이다(배종수, 2005). 두 수를 비교할 때 처음에 ‘A는 B보다 얼마나 더 많다(적다), 혹은 크다(작다)’로 비교하기도 하고 ‘A는 B의 몇 배다.’로 표현한다. A와 B를 비교할 때, ‘:’의 기호를 사용하여 ‘A:B’로 표현하며, 읽을 때는 ‘A대 B’로 읽는다. A, B가 두 수이거나 같은 종류의 양 일 때 A가 B의 몇 배인가의 관계를 ‘B에 대한 A의 비’ 또는 ‘A와 B의 비’라고 한다.

비율은 둘 이상의 수를 비교하여 나타낼 때, 그 중 한 개의 수를 기준으로 하여 나타낸 다른 수의 비교값이다. 즉 B에 대한 A의 비는 B를 단위로 보았을 때 A는 얼마인가를 나타내는 것이다. A의 크기를 B로 제어보는 것을 의미하므로 B를 단위로 한 A의 측도를 의미하며, $A/B=C$ 라고 하면 C를 A:B의 ‘비율’이

라고 한다.

나. 비와 비율의 특징

Piaget et al(1997)은 아동들의 비례 관계의 발달을 비수량적 사고 단계, 서수적 단계, 초서수적 단계, 비례적 단계의 4단계로 구분하였다. Piaget의 연구에 따르면 학생들의 비례 개념은 가법적 사고 이후에 발달한다. 그러나 문제는 학생들이 가법적 사고에서 배 개념에 근거한 비례적 추론으로 발달해가는 데서 어려움을 느낀다는 것이다. 다시 말해서, 많은 학생들이 비례적 추론이 필요한 상황에서 비례적 추론을 하지 못하고 여전히 덧셈적 추론을 한다는 것이다. 따라서 교사는 비와 비율의 개념을 학습하는데 학생들이 이런 어려움을 겪는다는 것을 인식해야 한다. 비와 비율의 개념 이해는 그것이 가지고 있는 내재된 특징을 파악하고 있는지를 포함한다. 내재된 특징에는 3가지를 들 수 있는데 순서적 관계, 곱셈적 관계, 고정된 관계로 특징지어 볼 수 있다(Baroody & Coslick, 2006).

1) 순서적 관계 : 비나 비율에 있어서 두 양을 특정한 순서에 따라 비교해야 함을 말하고 있다.

2) 곱셈적 관계 : $\frac{3}{5}$ 에서 두 양 사이의 관계를 나타낼 때 '3보다 2가 많은 것이 5'라거나 '5는 3보다 2가 더 크다'는 덧셈적 관계 표현과는 다른 '3은 5의 $\frac{3}{5}$ ($3=5 \times \frac{3}{5}$)이고, 5는 3의 $\frac{5}{3}$ 이다'라는 관계를 말한다.

다. 비율 $\frac{3}{5}$ 에서 두 양 사이의 관계는 덧셈적 관계가 아니라 곱셈적 관계이다.

3) 고정된 관계 : 정해진 요금이나 고정된 속도와 같은 관계로 가령 반지름이 2배가 되면 커진 원의 원주도 처음 원주의 두 배가 되는 것은 고정된 관계로 성립한다. 그러나 정사각형의 변이 길이를 두 배로 하여도 그 정사각형의 넓이는 두 배가 아니고 네 배가 되어 버린다. 이것은 비율이 아니다.

다. 비율과 분수(부분-전체 의미의 분수)의 개념 차이

비율 개념에 있어서 비율을 분수 개념의 하위 개념

으로 보는 견해가 있다. 그러나 비율과 분수는 차이점이 있고, 명확한 개념 이해가 필요하다.

<표 1> 비율과 분수의 비교 (Baroody & Coslick, 2006)

명칭 관점	비율	분수
서로 다른 유형의 관계	<ul style="list-style-type: none"> • 전체에 대한 부분의 비율 • 부분에 대한 전체의 비율 • 부분에 대한 부분의 비율 • 어떤 양에 대한 다른 양의 비율 	<ul style="list-style-type: none"> • 전체에 대한 부분의 비율
하나의 수로 표현	• 수 하나로 나타내기도 함	• 수 하나로 나타내지 못함
다양한 표현	• 분수가 아닌 다른 기호로 나타낼 수 있음	• 분수 형식으로만 나타냄
0의 존재 유무	• 축구 경기에서 5:0으로 나타냄	• 0으로 나눌 수 없기 때문에 분모에 0이 오는 것이 불가능함
수의 범위	• 유리수가 아닌 수로 비를 만들 수 있음	• 모든 비율을 분수로 만들수는 없음
수의 비교	• 두 분수의 전체가 같을 필요 없이 비교 가능함	• 전체의 크기가 같아야 분수의 크기를 비교 할 수 있음
결합	• 2:5와 3:7을 결합하여 5:12로 사용함	• 2:5+3:7≠5:12로 결합 할 수 없음

III. 연구방법

본 연구는 성북교육청 소속의 A, B초등학교, 북부교육청 소속의 C초등학교, 강서교육청 소속의 D초등학교, 강동교육청 소속의 E초등학교 5학년 중 한 학급씩을 대상으로 하였다. 지역에 따른 차이를 최소화하기 위해 여러 교육청의 초등학교에서 연구 대상을 선정하였으며, A초등학교 28명, B초등학교 30명, C초등학교 27명, D초등학교 26명, E초등학교 27명, 총 138명을 대상으로 연구를 진행하였다. 2주의 간격으로 3번의 검사를 실시하고 그 결과를 바탕으로 지속적인

오류를 보이는 학생 중 A초등학교의 3명을 면담 대상으로 선정하였다.

비와 비율에서 나타나는 학생들의 인식론적 장애를 분석하기에 앞서 문헌 연구를 실시하였다. 문헌연구 결과를 바탕으로 비와 비율에 관해 학생들이 알아야 할 기본적인 내용 지식으로써 비와 비율에 대한 개념 이해, 비의 표현 방법, 비를 읽는 방법, 비율의 변화(소수, 분수), 비의 특성, 비율의 특성을 선정하였다. 검사지는 학습 목표를 바탕으로 평가 내용을 선정한 후 TIMSS 2003, TIMSS 2007에서 비와 비율 관련 문제, 수학 교과서와 수학 익힘책에 나와 있는 문제 중 기본적인 개념들이 들어있고 평가 내용과 부합하는 10개의 문항을 선정하였다. 선정된 문항은 타당도를 높이기 위해 수학교육 전문가 1명과 수학교육 석사 학위를 가진 초등학교 교사 2명의 협의를 통해 수정, 보완하였다. 또한 지필 검사에 앞서 서울특별시 성북구에 소재하고 있는 J초등학교 6학년 학생들 2반을 대상으로 예비 검사를 실시하고 검사 결과를 바탕으로 내용을 수정·보완하였다. 본 검사에서는 5학년 학생들을 대상으로 2주 간격으로 총 3번의 검사를 실시하고 검사 결과를 바탕으로 지속적으로 오류를 보이는 학생 3명을 선정하여 인식론적 장애의 유형과 그 원인을 분석하고자 면담을 실시하였다.

IV. 연구결과

1. 인식론적 장애의 유형

본 검사 및 면담 내용의 문항별 분석을 간단히 종합하면 다음과 같다.

<표 2> 문항별 분석의 종합

문항	평가내용	주요 장애 유형
1	두 수를 비로 나타내기	<ul style="list-style-type: none"> • 기준량에 대한 이해 부족 • 그림의 개수 세기에서 발생하는 장애
2	비율의 뜻 이해하기	<ul style="list-style-type: none"> • 기준량에 대한 이해 부족 • 비를 분수로 나타낼 때 기준량을 분자에 적음 • 분수를 소수로 바꾸는 과정에서 발생하는 장애

3	비교하는 양, 기준량, 비율의 관계 구분하기	<ul style="list-style-type: none"> • 기준량에 대한 이해 부족 • 기준량, 비교하는 양, 비, 비율의 용어 혼동 • 비나 비율의 표현 과정에서 발생하는 장애
4	비율을 분수와 소수로 나타내기	<ul style="list-style-type: none"> • 기준량에 대한 이해 부족 • 분수를 소수로 바꾸는 과정에서 발생하는 장애
5	같은 값의 비율 찾기	<ul style="list-style-type: none"> • 비와 같은 값의 분수를 찾지 못함 • 분수와 같은 값의 소수를 찾지 못함
6	전체에 대한 부분의 비를 백분율로 나타내기	<ul style="list-style-type: none"> • 그림의 개수 세기에서 발생하는 장애 • 백분율 계산 과정에서 발생하는 장애 • 백분율 표현 과정에서 발생하는 장애
7	백분율을 분수와 소수로 나타내기	<ul style="list-style-type: none"> • 백분율 계산 과정에서 발생하는 장애 • 비율을 분수와 소수로 나타낼 때 기준량에 대한 이해 부족
8	소수와 분수를 백분율로 나타내기	<ul style="list-style-type: none"> • 백분율 계산 과정에서 발생하는 장애 • 백분율 표현 과정에서 발생하는 장애
9	할푼리의 뜻 이해하기	<ul style="list-style-type: none"> • 할푼리 계산 과정에서 발생하는 장애 • 비율을 할푼리로 표현하는 과정에서 발생하는 장애
10	문장제 문제 해결하기	<ul style="list-style-type: none"> • 조건을 활용해 비를 구하지 못함 • 유추로 인한 장애

초등학생이 비와 비율 학습에서 나타나는 인식론적 장애의 유형은 위 표의 내용을 바탕으로 크게 세 가지로 나눌 수 있었다. 먼저 '용어'에 대한 부분이다. 비와 관련된 용어에서는 '~에 대한 ~의 비'와 '~과 ~의 비'에 대한 개념은 있으나 적용하는 과정에서 기준량과 비교하는 양의 위치를 바꾸어 적은 학생들이 많았다. 할푼리와 관련된 용어에서는 할이 의미하는 것이 0.1, 푼이 0.01, 리가 0.001이지만 0.23을 푼이 23개 모인 것으로 생각하는 등의 장애가 발생하였다.

두 번째는 '계산'과 관련된 부분이다. 비로 나타낼 때 그림을 보고 수로 표현할 때 그림의 개수를 잘못 센다거나 비율에서 같은 값의 분수와 소수를 찾지 못한다거나 분수를 소수로 바꾸는 과정에서 장애가 발

생하였다. 또한 백분율의 계산과정에서 기준량이 100이 아닌 다른 수로 주어진 경우 분수의 기준량을 100으로 바꾸는 과정에서 오류가 발생하거나 할푼리로 나타내기 위해 소수로 나타내는 과정에서 장애가 나타내기도 하였다.

마지막은 '표현'과 관련된 부분이다. 비를 나타낼 때 :의 기호를 사용하여 3:5와 같이 수로 나타내야 하지만 숫자가 아닌 그림에 제시된 도형으로 적은 경우가 있었으며 비율을 나타낼 때는 분수나 소수, 백분율로 나타내어야 하는데 비의 기호(:)를 써서 나타내거나 분수에서 기준량과 비교하는 양의 위치를 바꾸어 적은 경우가 있었다. 백분율의 표현에서는 기준량을 100으로 하는 것이기 때문에 비교하는 양에만 %기호를 사용해야 하는데 분수 전체에 % 기호를 사용하여 나타낸 경우가 있었다.

본 연구에서 나타난 초등학교 학생들이 비와 비율 학습에서 보이는 인식론적 장애 유형을 간단히 종합하면 다음과 같다.

<표 3> 초등학생이 비와 비율 학습에서 나타내는 인식론적 장애 유형

인식론적 장애 유형	장애가 나타나는 모습
용어와 관련된 장애	<ul style="list-style-type: none"> • 기준량과 비교하는 양에 대한 혼동 • 할푼리 개념에 대한 혼동
계산과 관련된 장애	<ul style="list-style-type: none"> • 그림의 개수 세기에서 발생하는 혼동 • 비율을 분수, 소수로 나타내는 과정에서 발생하는 장애 • 백분율, 할푼리로 나타내기 위해 분수, 소수로 나타내는 과정에서 발생하는 장애
표현과 관련된 장애	<ul style="list-style-type: none"> • :, % 등 기호에 대한 혼동

2. 인식론적 장애의 원인

가. 용어와 관련된 장애의 원인

용어와 관련된 장애의 원인은 먼저 비를 도입하기 위한 생각열기에 제시된 맥락이 충분하지 않다는 점이다. 학생들에게 두 양 사이에 비 관계가 성립하는 다양한 현상(맥락)을 제공하고 학생들을 그러한 현상(맥락)을 정리하고 조직하기 위한 수단으로서 비 개념

을 인식하도록 하는 것이 중요하다(Streefland, 1985). 비율을 도입하는 문제에서도 남자 선생님과 여자 선생님의 수를 비교하며 남자 선생님의 수가 여자 선생님의 수의 얼마인지를 묻고 있지만 현실에서 남자 선생님의 수가 여자 선생님의 수의 몇 배인지 구해야 하는 필요성을 학생들이 느끼기엔 적절하지 않다. 비는 처음으로 학습하는 개념이므로 축척이나 야구 등 학생들의 실생활과 관련된 충분한 사례를 제공할 필요가 있다.

두 번째로 약속에 제시되어 있는 정의가 지나치게 형식적이다. 할푼리는 교과서에 '비율을 소수로 나타낼 때, 그 소수 첫째 자리를 할, 소수 둘째 자리를 푼, 소수 셋째 자리를 리라고 합니다. 8에 대한 5의 비율을 소수로 나타내면 0.625이고 할푼리로 나타내면 6할 2푼 5리라고 읽습니다.'라고 정의되어 있다. 할은 기준량을 10으로 할 때 비교하는 양을 나타내는 비율, 푼은 기준량을 100으로 할 때 비교하는 양을 나타내는 비율, 리는 기준량을 1000으로 할 때 비교하는 양을 나타내는 비율임을 설명하지 않은 채 소수의 자리에 따라 할푼리를 설명하는데서 그쳤기 때문에 학생들은 625푼과 같은 인지적인 장애를 겪을 수 있다.

나. 계산과 관련된 장애의 원인

비와 비율 학습에서 계산과 관련된 장애의 원인은 첫 번째로 비 개념에서 핵심적인 사고방식인 승법적인 사고가 교과서에 제시된 예시나 문제에서 충분히 사용되지 않았다는 점이다. 활동1의 문제에서 남학생 3명과 여학생 2명을 비로 나타내도록 하였는데 이는 승법적인 사고를 유도하기에 적절하지 않다. 학생들은 3과 2라는 양에서 승법적인 사고를 하기보다는 3이 2보다 많다는 가법적인 사고를 할 것이다. 이런 가법적인 사고를 하다보면 학생들이 비를 보고 여학생은 남학생의 $\frac{2}{3}$ 라는 승법적인 사고를 자연스럽게 이끌어내기 쉽지 않다.

두 번째로 2007 개정 교육과정을 따르는 교과서에서 비율의 의미 이해보다는 비의 값을 분수나 소수로 나타내는 기능 습득 측면을 지나치게 강조하고 있다는 것이다(Streefland, 1985). 이외에도 그림을 보고 단순히 수를 세어 비로 나타내는 문제, 분수와 소수를 제시하고 백분율을 구하는 문제 등 맥락 없이 단순하

계 계산하는 문제들이 교과서에 적지 않게 제시되어 있다. 또한 Freudenthal(1983)은 비례 관계에 대한 인식은 '한 대상에서의 곱셈적인 변화(내적비)'만큼 '다른 대상에서의 곱셈적인 변화(외적비)'가 있다는 것을 인식하는 것, 다시 말해 두 내적비 간의 불변성을 인식하는 것으로부터 시작되어 외적비의 일정성으로 나아가간다고 본다(유현주, 1995 재인용). 그런데 교과서에서는 내적비의 일정함을 충분히 경험하기 전에 외적비가 일정함을 제시하고 있어 비례적인 관점이 필요한 상황에서 안목을 갖기보다는 알고리즘을 익혀 식을 능숙하게 해결하는데만 중점을 두고 있다. 학생들은 이해 없이 암기에 의해 반복적인 계산을 하다 보니 현실과 관련 있는 맥락이 적용된 문제에서는 인식론적인 장애를 보이게 된다.

다. 표현과 관련된 장애의 원인

비를 처음 배우는 학생들은 두 수의 상대적인 크기 변화를 비교하는 방법으로 비가 필요하고 이것을 : 의 기호를 사용하여 (비교하는 양) : (기준량)로 나타냄을 서서히 알아야 한다. 하지만 교과서에서는 1차시에 바로 약속을 하기 때문에 학생들이 비의 개념 이해하고 기호를 사용해 비를 나타내기에 어려움을 겪는다.

백분율의 약속 또한 학생들에게 혼란을 줄 수 있다. '기준량을 100으로 할 때 비교하는 양 80의 비율 $\frac{80}{100}$ 을 백분율이라고 합니다. 백분율 $\frac{80}{100}$ 을 %를 써서 80%라 나타내고 80퍼센트라고 읽습니다.'라고 정의되어 있다. 백분율 $\frac{80}{100}$ 이라 읽지 않고 기호를 사용하여 80%로 나타내기 때문에 $\frac{80}{100}$ 과 80%가 같은 표현이라는 것에 대해 헷갈려하는 학생들이 있다.

3. 인식론적 장애의 지도방안

비와 비율에 대한 선행연구 및 문헌연구를 토대로 각 인식론적 장애의 원인에 따라 지도방안을 살펴보았다.

가. 용어와 관련된 장애의 지도방안

용어와 관련된 첫 번째 장애의 원인은 교과서에 비

와 비율을 도입하기 위한 현실적인 맥락이 부족하다는 점이었다. 이러한 장애의 원인을 해결하기 위해 다양하고 실제적인 실생활의 사례를 들어 비, 비율, 백분율, 할푼리 개념을 도입해야 한다. 우리는 학생들에게 현실과 관련이 없는 비의 값, 비례식, 그저 비뿐만 아니라 산술 등과 같은 수학적 대상을 가지고 연습시킴으로써 개념형성을 하도록 하고 있다(정은실, 2003b). 이것은 비 개념 학습에 장애가 된다.

MIC 교과서(나은교육연구소, 2004)에서는 비와 비율과 관련된 개념을 '백분율은 100을 좋아해', '달은 얼마나 높이 있을까?', '신문 속의 분수', '늘었다 줄었다', '비와 비율'에서 다양한 현실 사례와 관련지어 도입하고 있다. 예를 들어 '백분율은 100을 좋아해'에서는 주차장의 전체 공간에서 주차된 공간이 얼마나 되는지 비교하거나, 야구 경기장에 사람들이 어느 정도 있는지 퍼센트를 이용하여 어렵을 한다가나, 세일, 예산안 등 다양한 사례 속에 문제를 제시하고 개념을 알 수 있도록 하였다. 또한 '비와 비율'에서는 연비나 해가 떠 있는 낮에 키와 그림자의 길이의 비, 지도의 축척 등과 관련지어 개념을 도입하고 있다. 이와 같이 우리나라 교과서에서도 보다 다양한 현실적인 맥락 속에서 개념을 도입하고 문제를 제시해야 한다.

용어와 관련된 두 번째 장애의 원인은 교과서 '약속'에 제시되어 있는 정의가 지나치게 형식적이고 단편적이라는 점이다. 현행 교과서에서 비의 도입은 학생들이 이전에 학습한 어떠한 수학적 개념과도 연결되지 않는 문제점이 있다(김수현, 나귀수, 2008). 비율을 소수와 분수 등으로 표현가능하다면 분수를 도입할 때와 같이 연속적인 양, 이산적인 양에서의 비 등을 예시로 들고 그것을 통하여 학생들의 혼란을 불러일으키지 않는 정의가 필요할 것이다(김경희, 백희수, 2010).

MIC 교과서 '백분율은 100을 좋아해'에서는 퍼센트(백분율)를 이용하여 비교하는 방법을, '달은 얼마나 높이 있을까?'에서는 크기와 축척을, '신문 속의 분수'에서는 균등 분할된 띠그래프와 원그래프를 사용하여 분수, 소수 및 백분율 사이의 연결성을, '늘었다 줄었다'에서는 분수, 소수, 퍼센트가 서로 어떤 관계를 가지고 있는지를, 마지막 '비와 비율'에서는 비와 비율이 무엇인지에 대해 자세히 학습한다. MIC 교과서와 같이 우리나라 교과서에서도 '비와 비율'이라

는 새로운 수학적 개념에 대해 학습할 때 관련되는 개념을 함께 지도할 필요가 있다. 5학년 2학기 3단원 '도형의 대칭'에서 점대칭의 위치에 있는 도형을 학습할 때 비와 비율의 개념을 가볍게 도입하거나 비와 비율 단위를 배울 때 점대칭 위치에 있는 도형을 문제의 자료로 활용하여 수학적 개념 사이의 연관성을 높일 필요가 있다. 또한 6학년 1학기 6단원 '비율그래프'의 지도시기를 앞당겨 띠그래프와 원그래프에 대해 먼저 학습하고 '비와 비율'을 배운다면 학생들이 그래프라는 수학적 개념과 분수와 소수, 백분율 사이의 연결성을 찾아 새로운 수학적 개념을 학습하는데 도움이 될 것이다.

나. 계산과 관련된 장애의 지도방안

계산과 관련된 장애의 첫 번째 원인은 비 개념에서 핵심적인 사고방식인 승법적인 사고가 교과서에 제시된 예시나 문제에 충분히 사용되지 않았다는 것이다. 현재 수학교과서에는 남학생은 3명, 여학생은 2명 있을 때 남학생과 여학생의 수를 비로 나타내는 문제라던가, ○와 △의 개수를 세어 비(7:9)로 나타내는 것과 같은 문제들이 제시되어 있다. 3:2나 7:9는 두 수를 곱셈적 관계로 생각하기 보다는 가법적인 관계로 생각하게 하는 비이다. 교과서에 학생 수와 공책의 수(한 학생이 가지고 있는 공책의 수가 4권)처럼 승법적인 사고가 요구되는 문제들도 있지만 충분하지 않아 학생들이 비례적인 사고를 익히기도 전에 비율과 백분율, 할푼리 학습을 하게 된다.

싱가포르 교과서에는 가장 간단한 정수비 2:1을 통해 비를 도입하기 때문에 가볍적으로 비를 비교할 소지가 더 적다(김경희, 백희수, 2010).

또한 MIC 교과서 '비와 비율'에는 연비를 구하기 위해 비례표를 사용하거나, 전화 대수와 인구를 표로 나타내거나, 지역에 따라 과속한 차량 수와 과속하지 않은 차량 수를 표로 나타낸다. 그리고 물체의 높이와 그림자 길이의 비를 표로 나타내기, 확대된 밭과 원래의 밭 크기 제어 비례표로 나타내기 등 표와 비례표를 적극 활용하고 있다. 따라서 우리나라 교과서에서도 비와 비율 학습에서 핵심적인 요소인 승법적인 사고를 도울 수 있는 비례표 등을 적극 활용해야 한다.

계산과 관련된 장애의 두 번째 원인은 현행 교과서에서 비율의 의미를 이해하고 분수나 소수 등으로 나

타내기 보다는 비의 값을 분수나 소수로 나타내는 기능 습득 측면을 강조하고 있다는 것이다. 직관적이고 개념적인 방법으로 여러 경험을 한 다음에 기호나 기계적 방법은 나중에 도입하도록 한다(정은실, 2003a). 비례적인 관점이 필요한 상황에서 안목을 갖은 후 기능을 습득하는 것이 학생들의 문제 해결 능력 향상에 도 훨씬 도움이 된다.

현행 교과서에는 비에 대한 접근 방법에서 시각화가 결여되어 있어 아이들이 직관적으로 비와 비율에 대해 접근하기가 어렵다. 확대와 축소, 닮음과 같은 것에 대한 언급이 없고, 나중에 시각적 모델로 기능할 수 있는 시각적 세계의 예가 없으며, 해그림자를 이용하는 현상에 대해서도 언급이 없다(정은실, 2003a). 또한 방법적으로 적용되는 비 문제의 수 처리에 대한 도식이 결여되어 있다. 모델은 다양하며, 모델의 사용은 여러 가지 자료, 시각적 모델, 상황 모델, 도식, 다이어그램, 그리고 기호와 같은 수학적 수단들이 제공되거나 학생들에 의해 탐구되고 개발되어야 한다.

MIC 교과서 '백분율은 100을 좋아해'에서는 야구장 전체 관중석 중 자리가 찬 관중석의 모습, 주차장에 주차된 차의 수 그림 등을 제시하고 퍼센트로 계산하는데 띠그래프와 비율표를 이용한다. '달은 얼마나 높이 있을까?'에서는 크기와 축척과 관련하여 그림이나 사진 띠 등을 사용하여 활동을 하도록 구성되어 있다. 특히 머리와 키의 비, 실물 화상기에 올려놓은 물체의 길이 비, 축척을 활용하여 지구와 달, 태양까지의 거리 알아보기와 같은 흥미로우면서도 확대와 축소 닮음과 같이 비례적인 관점이 필요한 생활 속 현상들로 문제를 구성하였다. 따라서 비와 비율 학습시 비와 비율에 대한 개념 이해 및 수를 처리하는 도식과 시각적 모델 사용을 권장하여 직관적인 경험을 충분히 한 후 기능을 습득하도록 해야 한다.

다. 표현과 관련된 장애의 지도방안

표현과 관련된 장애의 원인은 현행 교과서에서 기호를 약속하는 시기가 너무 이르고 약속의 내용이 모호하다는 것이다. 우리나라에서는 여전히 비에 대한 외적 표현과 그 알고리즘의 전수에만 매달리고 있다. 전통적인 기호를 먼저 가르치고 그 기호에 의미를 부여하도록 학생들에게 가르치는 것보다는 학생 스스로 이해한 것에 기호를 부여하도록 하는 것이 더 바람직

한 방법이다(정은실, 2003a). 그러나 현실에서는 비 개념의 본질을 인식하게 하기 보다는 비 자체의 외형적인 표현과 기계적인 알고리즘에만 치우쳐 있다.

모호하게 정의되어 있는 약속 중 하나인 백분율은 '기준량을 100으로 할 때 비교하는 양의 비율을 분수로 나타내고 이것을 백분율이라고 한다.'로 설명되어 있기 때문에 학생들은 분수에 % 기호를 붙인 것을 백분율이라고 생각할 수 있다. 또한 할푼리의 경우에도 교과서에서는 비율을 소수로 나타낼 때, 소수 첫째 자리를 할, 소수 둘째 자리를 푼, 소수 셋째 자리를 리라고 약속하였다. 할은 기준량을 10으로 할 때 비교하는 양을 나타내는 비율이나 교과서에는 소수의 자리 수만으로 설명을 했었기 때문에 학생들이 인식론적인 장애를 일으킬 수 있다.

MIC 교과서와 같이 다양하고 구체적인 상황 속에서 개념 학습이 충분히 이루어진 후에 ;, %와 같은 기호를 천천히 익힐 수 있도록 해야 하며 백분율, 할푼리의 약속을 조금 더 명확히 할 필요가 있다. 백분율의 경우 '기준량을 100으로 할 때 비교하는 양의 비율을 분수로 나타내고 이것을 백분율이라고 한다.'는 사실과 함께 비교하는 양에만 % 기호를 사용한다는 것을 더욱 강조해야 한다. 또한 할푼리의 경우에는 비율을 소수로 나타낼 때 소수의 자리 수에 따라 할푼리가 정해지고 이 때 할은 기준량을 10으로 할 때의 비교하는 양을 나타내는 비율, 푼은 기준량을 100으로, 리는 기준량을 1000으로 볼 때 비교하는 양을 나타내는 비율임을 명확히 정의해 주어야 한다.

V. 결론

본 연구의 목적은 학생들이 비와 비율을 유독 어려워하고 오류를 보이는 학생들이 많다는 점에서 착안하여 인식론적 장애의 유형을 파악하고 원인을 분석하여 그에 따른 지도방안을 제시하기 위함이었다. 이를 위해 선행 연구 분석 및 문헌 연구, 검사지 결과 분석, 면담을 통해 연구 문제에 대해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 인식론적 장애의 유형은 크게 세 가지로 나눌 수 있다. 비와 비율 학습에서 처음 사용되는 비, 비율, 할푼리, 백분율과 같은 새로운 '용어' 학습과 관

련된 장애, 분수를 소수로 바꾸거나 백분율 계산과 같은 '계산'과 관련된 장애, ;, %와 같은 기호 '표현'과 관련된 장애이다.

둘째, 인식론적 장애의 원인은 그 유형에 따라 다르다. '용어'와 관련된 장애의 원인은 처음 배우는 용어이기 때문에 현실적인 맥락에서 다양한 사례를 접한 다음 도입을 해야 하는데 현실 맥락이 부족하다는 점과 교과서 약속에 정의되어 있는 내용이 지나치게 형식적이라는 점이다. '계산'과 관련된 장애의 원인은 비와 비율의 핵심 개념인 승법적인 사고를 할 수 있는 문제가 충분하지 않고 이해의 측면보다는 기능 숙달을 강조하고 있다는 점이다. 마지막으로 '표현'과 관련된 장애의 원인은 비 기호의 도입시기가 너무 이르르고, 백분율 % 기호는 학생들에게 혼란을 줄 수 있도록 정의되어 있다는 것이다.

셋째, 인식론적 장애를 지도하기 위한 방안을 유형에 따라 살펴보면 '용어'와 관련된 장애의 첫 번째 원인인 비와 비율 도입을 위한 현실적인 맥락이 부족하다는 문제를 해결하기 위해 MIC 교과서와 같이 보다 실제적이고 다양한 사례 속에서 용어나 개념을 도입해야 한다. 두 번째 원인인 약속에 제시되어 있는 정의가 지나치게 형식적이고 단편적이라는 문제를 해결하기 위해 비와 비율 지도시 관련되는 개념을 함께 지도해야 한다. 6학년에서 배우는 비율그래프의 지도시기를 앞당기고, 도형의 대칭 단원에서 점대칭 위치에 있는 도형을 학습할 때 비와 비율 개념을 가법적으로 도입할 수 있다. 또한 비와 비율을 배울 때 점대칭 위치에 있는 도형을 활용하여 거리의 비 등을 학습한다면 수학적 개념의 연결성을 찾아 새로운 개념 학습에 도움이 될 것이다.

'계산'과 관련된 장애의 첫 번째 원인인 승법적인 사고를 요구하는 문제가 충분하지 않은 것을 해결하기 위해 비례표 등을 적극 활용해야 하고 두 번째 원인인 기능 습득 측면을 지나치게 강조하는 것은 도식과 시각적 모델 사용을 권장하여 직관적인 경험을 충분히 한 후 기능을 습득하도록 지도해야 한다.

마지막으로 '표현'과 관련된 원인은 현행 교과서에서 기호를 약속하는 시기가 너무 이르렀고 약속의 내용이 모호하다는 것으로 이를 해결하기 위해 다양하고 구체적인 상황 속에서 개념 학습이 충분히 이루어진 후에 ;, %와 같은 기호를 천천히 익힐 수 있도록 해

야 하며 백분율, 할푼리의 약속을 소수의 자리만으로 하기보다는 비율의 의미를 첨가하여 조금 더 명확히 할 필요가 있다.

학생들은 수학 개념을 학습하는 과정에서 인식론적인 장애를 나타낸다. Bachelard(2002)에 따르면 인식의 성립의 시기에는 '반-사고'의 형태로 일어나며, 이후의 발전 단계에서는 '사고의 중지'로 일어난다. 그 경우가 어떠한 간에, 장애는 '사고에 대한 사고의 저항'을 드러낸다고 하였다. 새로운 수학 개념을 학습할 때 학생의 인지 구조 속에 없는 개념이기 때문에 어려움을 겪고 새로운 문제를 접하면서는 처음 접하기 때문에 장애를 보일 수밖에 없는 것이다. 학생들이 문제에서 오답을 보이고 장애를 나타내는 것은 수학 개념을 학습하는 과정이기 때문에 어떻게 보면 당연한 것이다.

따라서 인식론적인 장애를 나타내는 원인을 정확히 파악하고 이에 따른 적절한 지도방안을 연구하려는 노력이 필요하다. 학생들이 보이는 오답을 단순한 실수나 기능이 숙달되지 않았기 때문이라고 간주하지 않아야 하고 장애의 원인을 학생에게 돌리기보다는 문제 해결을 위해 교사가 적극적으로 나서야 한다. 국가 수준의 교육과정은 획일화되어 있고 기준이 되는 지침일 뿐이므로 교육과정을 재구성하거나 현실적 맥락이 담긴 다양한 자료를 활용해야 한다. MIC 교과서와 같이 다른 나라의 교과서를 참고하여 우리나라 실정에 맞게 바꾸어 사용하는 것도 하나의 방법이 될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- 교육과학기술부(2010). 초등학교 수학 5-2. 서울: 두산동아주식회사.
- 교육인적자원부(2007). 교육인적자원부 고시 제 2007-79호에 따른 초등학교 교육과정 해설 III. 서울: 대한교과서 주식회사.
- 교육인적자원부(2008). 교육인적자원부 고시 제 2006-75호 및 제2007-79호에 따른 초등학교 교육과정 해설 IV. 서울: 대한교과서 주식회사.
- 교육과학기술부(2011). 교육인적자원부 고시 제 2011-361호 [별책8] 수학과 교육과정. 서울: 대한교과서주식회사.
- 김경희·백희수(2010). 비와 비율 영역에 대한 우리나라와 싱가포르 교육과정 및 교과서 비교-TIMSS 평가목표와 공개문항을 중심으로. 대한수학교육학회지 <학교수학>, **12(4)**, 473-489.
- 김선희·김경희(2009). 교육과정에 근거한 TIMSS 2007 공개 추이문항의 정답률 분석. 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, **19(1)**, 99-120.
- 김성희·방정숙(2005). 수학 교수·학습 과정에서 과제의 인지적 수준 분석-초등학교 '비와 비율' 단원을 중심으로-. 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, **15(3)**, 251-272.
- 김수현·나귀수(2008). 비와 비율 지도에 대한 연구-교과서 재구성을 중심으로. 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, **18(3)**, 309-329.
- 김태훈(2001). 바슐라르(G. Bachelard)의 과학철학 연구-쿤(T. S. Kuhn)과의 비교-. 중앙대학교 대학원 석사학위논문.
- 배종수(2005). 초등수학교육 내용지도법. 서울: 경문사.
- 우정호(2000). 수학 학습 지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.
- 나온교육연구소(역)(2004a). 수학으로 보는 세상-백분율은 100을 좋아해. 서울: 나온연구소.
- 나온교육연구소(역)(2004b). 수학으로 보는 세상-달은 얼마나 높이 있을까. 서울: 나온연구소.
- 나온교육연구소(역)(2004c). 수학으로 보는 세상-신문 속의 분수. 서울: 나온연구소.
- 나온교육연구소(역)(2004d). 수학으로 보는 세상-늘었다 줄었다. 서울: 나온연구소.
- 나온교육연구소(역)(2004e). 수학으로 보는 세상-비와 비율. 서울: 나온연구소.
- 나온교육연구소(역)(2004f). 수학으로 보는 세상-백분율은 100을 좋아해 교사용 지도서. 서울: 나온연구소.
- 나온교육연구소(역)(2004g). 수학으로 보는 세상-달은 얼마나 높이 있을까 교사용 지도서. 서울: 나온연구소.

- 나온교육연구소(역)(2004h). 수학으로 보는 세상-신문 속의 분수 교사용 지도서. 서울: 나온연구소.
- 나온교육연구소(역)(2004i). 수학으로 보는 세상-늘었다 줄었다 교사용 지도서. 서울: 나온연구소.
- 나온교육연구소(역)(2004j). 수학으로 보는 세상-비와 비율 교사용 지도서. 서울: 나온연구소.
- 유현주(1995). 분수개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구. 서울대학교 박사학위논문.
- 이종희(1999). 함수 개념의 역사적 발달과 인식론적 장애. 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>. **9(1)**, 133-150.
- 이종희(2002). 중학생의 수학적 오류 분석 및 교수학적 처방을 위한 학습 지도 방법 개발. 교과교육 연구 활성화 방안 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 정은실(2003a). 비 개념에 대한 교육적 분석. 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>. **13(3)**, 247-265.
- 정은실(2003b). 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석. 대한수학교육학회지 <학교수학>. **5(4)**, 421-437
- Bachelard. G.(1998). 현대 물리학의 합리주의적 활동. (정계섭 역). 서울: 민음사.
- Bachelard. G.(1996). 부정의 철학. (김용선 역). 서울: 인간사랑. (불어 원작은 1940년 출판).
- Bachelard. G.(2002). *The formation of the science mind : A contribution to a psychanalysis of objective knowledge*(tr. by Mary McAllester Jones). Manchester: Clinamen.(불어 원작은 1938년 출판).
- Baroody, A., & Coslick, R. (2006). 수학의 힘을 길러주자. (권성룡 외 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1998년 출판).
- National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Piaget, J., Grize, J., Szeminska, A., & Bang, V. (1997). *Epistemology and psychology of functions*, Castellanos, F.X. Anderson, V. D.(trans.), Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (towards a theory) part II: The outline of the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics*, **16(1)**, 75-94.

An Analysis on the Epistemological Obstacles of Elementary Students in the Learning of Ratio and Rate

Park, Heeok

Seoul Jeongneung Elementary School, Seoul, 136-847, Korea

E-mail : 30309cuteguy@naver.com

Park, Mangoo

Seoul National University of Education, Seoul, 137-742, Korea

E-mail : mpark29@snue.ac.kr

Many obstacles have been found in the learning of ratio and rate. The types of epistemological obstacles concern 'terms', 'calculations' and 'symbols'. It is important to identify the epistemological obstacles that students must overcome to understand the learning of ratio and rate. In this respect, the present study attempts to figure out what types of epistemological obstacles emerge in the area of learning ratio and rate and where these obstacles are generated from and to search for the teaching implications to correct them. The research questions were to analyze this concepts as follow;

A. How do elementary students show the epistemological obstacles in ratio and rate?

B. What is the reason for epistemological obstacles of elementary students in the learning of ratio and rate?

C. What are the teaching implications to correct epistemological obstacles of elementary students in the learning of ratio and rate?

In order to analyze the epistemological obstacles of elementary students in the learning of ratio and rate, the present study was conducted in five different elementary schools in Seoul. The test was administered to 138 fifth grade students who learned ratio and rate. The test was performed three times during six weeks. In case of necessity, additional interviews were carried out for thorough examination.

The final results of the study are summarized as follows. The epistemological obstacles in the learning of ratio and rate can be categorized into three types. The first type concerns 'terms'. The reason is that realistic context is not sufficient, a definition is too formal. The second type of epistemological obstacle concerns 'calculations'. This second obstacle is caused by the lack of multiplication thought in mathematical problems.

As a result of this study, the following conclusions have been made. The epistemological obstacles cannot be helped. They are part of the natural learning process. It is necessary to understand the reasons and search for the teaching implications. Every teacher must try to develop the teaching method.

* ZDM Classification : D43

* 2000 Mathematics Classification : 97D70

* Key Words : Ratio and rate, The epistemological obstacles