한국학교수학회논문집 제 15 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 15, Number 3, 453-465, September 2012

연속함수에 대한 고등학교 교과서의 정의와 고등학생들의 이해[1)]

박달원[2)] · 홍순상[3)] · 신민영[4)]

본 연구에서는 연속함수에 대한 오개념 이미지의 원인을 찾기 위하여 고등학교 수학Ⅱ 교과서와 수학과 고등학교 교육과정해설서를 조사 분석하고 고등학교 학생들을 대상으로 설문조사를 실시하였다. 그 결과, 고등학교 교과서에서 도입하고 있는 함수의 연속성에 대한 정의 방법이 교과서별로 동일하지 않고, 대학의 공식적인 정의와도 큰 차이가 있기 때문에 연속함수에 대한 학생들의 오개념 이미지가 나타나는 것으로 분석되었다. 따라서 이러한 오개념 이미지를 바로잡기 위해서는 함수의 연속성과 불연속성에 대한 대학의 공식적인 정의를 학교수학에서 적극적으로 수용하여 학생들의 수준에 맞는 방법으로 함수의 연속과 불연속에 대한 정의를 명확하게 제시하여 한다.

주요 용어 : 함수의 연속, 개념 이미지, 개념 정의, 오개념

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

Tall & Vinner(1981)는 개념이미지(concept image)와 개념정의(concept definition)에 대한 이론을 제시하였다. 개념을 생각할 때, 떠오르는 이미지가 있는데 이것은 이론적으로 잘 정의된 개념정의(concept definition)와 꼭 관련되어 형성되는 것은 아니라고 하였으며. 이러한 개념과 관련된 인지구조를 개념이미지(concept image)이라 하고 여기에는 개념과 관련된 모든 심상, 성질, 절차가 포함된다고 하였다.

이들은 대학 1학년을 대상으로 연속함수에 대한 학생들의 개념이미지를 조사하였다. 개념의 학습에서 형성된 개념이미지는 학습의 초기에는 도움이 되지만 공식적인 개념정의를 다루는 상황에서는 개념이미지와 개념정의가 서로 상충하는 상황이 되어, 오히려 개념 학습에 장애가 될 수 있다고 하였다.

이경화와 신보미(2005)는 연속함수의 개념이미지에 대한 Tall & Vinner(1981)의 연구결과를 활용하여 고등학교 상위 집단 학생들의 함수의 연속에 대한 개념 이해의 특징과 연속함

---

1) 이 논문은 2010년 공주대학교 학술연구지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었음
2) 공주대학교 수학교육과 (dwpark@kongju.ac.kr)
3) 공주대학교 사범대학 부설고등학교 (h4846@hanmail.net)
4) 대전둔원고등학교 (vicky14@nate,com)

수에 대한 개념이미지를 알아보기 위하여 상위 집단 학생 20명에 대하여 $f_1(x)=x+2$, $f_2(x)=x^2/x$, $f_3(x)=\sqrt{x}$ 등 중에서 $x=0$에서 연속인 함수를 선택하고 가능하면 이유를 설명하라는 질문과 $f_1(x)=x^2+2$, $f_2(x)=1/x$ 등 중에서 연속함수를 선택하고 가능하면 이유를 설명하라는 질문을 제시하여 연속함수에 대한 개념이미지를 조사하였다.

2007개정교육과정의 고등학교 교과서 수학Ⅱ를 조사한 결과 저자에 따라 함수의 연속성에 대한 개념정의가 다르게 기술되고 있다. 대부분의 교과서는 $f(x)=1/x$은 $x=0$에서 불연속이고 $f(x)=1/x$을 불연속함수로 설명하였지만 일부 교과서는 $f(x)=1/x$은 $x=0$에서 연속성을 판정할 수 없으며, 이 함수의 정의역의 모든 원소에 대하여 연속이므로 $f(x)=1/x$을 연속함수라고 설명하고 있어, 연속함수에 대한 정의 방법이 문제가 되고 있다. 본 연구에서는 이러한 문제점을 분석하고 해결할 방향을 제시하고자 연구문제를 다음과 같이 설정하였다.

첫째, 한 점에서 함수의 불연속에 대한 학교수학의 정의에는 어떤 문제점 이 있고 그 문제를 해결할 방법은 무엇인가?

둘째, 연속함수에 대한 학교수학의 정의에는 어떤 문제점이 있고 그 문제를 해결할 방법은 무엇인가?

본 연구를 수행하기 위하여 2007년 개정교육과정해설서와 7개 종류의 수학Ⅱ 교과서를 조사하여 함수의 연속에 대한 지도방법 및 내용을 분석하고 대전의 D고등학교 42명의 학생들을 대상으로 설문조사를 실시하여 그 결과를 분석하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 연속함수의 정의의 발달

연속함수는 처음부터 엄밀한 정의로 출발한 것은 아니었다. Leonhard Euler(1707~1783)는 연속함수를 좌표평면에서 '함수의 그래프가 손으로 그려지는 하나의 곡선이 되는 함수'로 규정하여 '곡선의 연결'이라는 개념을 연속함수에 도입하였으며, 해석적 표현 즉, 하나의 식으로 표현이 가능한 함수를 연속함수로, 그렇지 않은 함수를 불연속함수로 생각하였다. 그는 해석적으로 표현되는 함수를 그래프로 나타내면 연결된 곡선이 된다고 생각하였다(김남희 외, 2001).

18세기 후반기에서는 함수의 연속성은 직관적인 기하학적의 개념에서 모든 중간값을 지나는 개념 또는 점진적인 변화라는 개념으로 발전하였다. 연속함수의 정의를 명확하기 위하여 Louis Arbogast(1759~1803)는 한 점에서 점프 상태가 있는 함수에 관심을 갖게 되었다. 그는 임의의 두 값 사이에 모든 연속적인 값을 얻을 수 있는 함수의 특징을 연속함수에 대한 특성으로 생각하였는데 이것은 중간값 정리의 출발이 되었다.

$\epsilon-\delta$ 논법은 아니지만 h를 충분히 작게 하면 $f(x+h)-f(x)$를 원하는 만큼 작게 할 수 있다는 연속에 대한 현대적 의미를 갖는 정의는 Bernard Bolzano(1781~1848)에 의하여

1817년에 처음으로 언급되었다. 그의 정의는 실수에 대한 공리를 적용하지 못하였기 때문에 논리적으로 완벽한 것이라고는 할 수 없었지만 그럼에도 불구하고 그의 업적은 진일보한 것이었다. 그러나 그의 업적은 사적으로 발간되어 당시의 사람들에게는 널리 알려지지는 못하였다.

이러한 수학적인 이론에 엄밀성을 부여하고 광범위하게 영향을 미친 수학자는 Augustin Louis Cauchy(1789~1857)이다. 당시 그는 Bolzano의 연속에 대한 정의를 명백하게 잘 알고 있지는 못하였지만, 그는 연속함수의 정의를 h를 작게 변화시키면 $f(x+h)-f(x)$을 축소시킬 수 있다는 용어를 사용하여 설명하였다. Cauchy는 ϵ과 δ를 처음 사용한 사람이지만 함수의 극한과 연속성의 정의에 사용한 것은 아니고 정리의 증명과정에서 사용하였으며, 점별이 아닌 실수전체 구간에서의 함수의 연속성에 관심이 있었다. Cauchy의 업적은 함수의 극한과 연속에 대한 현대적 접근으로의 발달과 비록 현대적 기준에 의한 완벽한 논리적인 증명이라고는 볼 수 없지만 실해석학에 엄격한 증명을 도입한 진일보한 것이었다.

Karl Weierstrass(1857~1897)는 극한의 개념을 변수가 접근한다는 동적인 개념으로부터 '$f(x)$'에 대하여 'x'를 원소로 하는 집합이 존재한다라는 정적인 관점으로 바꾸었다. 그는 $\epsilon-\delta$ 논법으로 함수의 연속성에 대한 정의를 제시하였는데 그는 현재 사용하는 ϵ은 그대로 사용하고 δ 대신에 구간을 사용하였다는 것이 현재의 정의와 다른 점이다. Eduard Heine(1821~1881)은 Weierstrass의 강의에 근거하여 함수의 연속성을 $\epsilon-\delta$ 논법으로 처음 정의하여 오늘에 이르고 있다(E. D. Bloch, 2011).

2. 연속함수에 대한 개념 이미지

Tall & Vinner(1981)는 수학을 선택한 41명의 대학 1학년 학생들에게 연속함수에 대한 개념 이미지를 조사하였는데, 대부분의 학생들은 연속함수를 그래프가 '끊어짐이 없는', '전체가 한 조각인' 개념으로, 소수의 학생들은 '하나의 식', '기울기가 매끄럽게 변하는' 등으로 생각하고 있다고 하였다.

이경화와 신보미(2005)는 고등학교 상위집단 학생들의 함수의 연속에 대한 개념 이미지를 5가지 유형으로 분류하였다. 첫 번째 개념 이미지는 한 점에서의 연속을 구간의 내점에서만 생각한다는 것이고, 두 번째 개념 이미지는 진동하는 함수는 언제나 불연속이라는 것이다. 세 번째 개념 이미지는 함수의 연속성을 그래프의 연결성으로 대치하는 것이며, 네 번째 개념 이미지는 모든 실수에서 연속이어야 연속함수라고 보는 것이다. 다섯 번째 개념 이미지는 분수함수이면 언제나 불연속 함수라고 보는 것이다.

위에서 제시한 개념 이미지는 연속함수에 대한 대학의 공식적인 정의에 근거할 때, 연속함수에 대한 오개념 이미지가 된다고 볼 수 있지만 학교수학 교과서에서의 정의를 근거로 할 때에는 모두 오개념 이미지로는 볼 수가 없다. 함수의 연속에 대한 개념 이미지는 연속함수에 대한 개념정의를 어떻게 하느냐에 따라 오개념 이미지인지 아닌지가 판단되기 때문에 우선 교과서에서 제시한 개념정의와 대학의 공식적인 정의에 대한 분석이 필요하다. 만일 학교수학에서 제시하고 있는 개념정의가 대학의 공식적인 개념정의와 차이가 있다면, 고등학교에서 형성된 학생들의 고착화된 개념 이미지가 향후 학생들이 대학에 진학하여 미적분학을 공부하는데 큰 장애 요인이 될 것이다.

Ⅲ. 연구내용 및 결과 분석

본 연구에서는 고등학교 수학Ⅱ 교과서 7종을 비교 · 분석하고 수학과 고등학교 교육과정 해설서(2008)와 대학에서 다루는 공식적인 정의와의 관계를 분석하여 학교수학에서의 연속 함수의 정의와 지도 방법에 대한 문제점을 조사하였다.

1. 한 점에서의 함수의 연속과 불연속에 대한 학교수학의 정의

교육과학기술부(2008:185)는 함수의 연속을 다음과 같이 지도할 것을 제시하고 있다.

> 한 점에서 끊어진 함수의 그래프의 예를 통해 그 그래프가 이어지려면 어떤 조건이 필요한지 생각해 보게 함으로써 함수의 연속의 조건에 대한 직관적인 이해를 돕고, 함수의 연속에 대한 수학적 정의를 유도하도록 한다.
>
> 함수의 연속에 대한 정의는 여러 가지가 있지만 고등학교 단계에서는 코시(Cauchy)에 의한 정의 즉 '$x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$'를 사용하도록 한다. 여기서, $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$가 성립하기 위해서는 다음 사항이 성립해야만 한다.
>
> ㉠ $f(a)$가 존재한다.
> ㉡ $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.
> ㉢ $\lim_{x\to a} f(x)$와 $f(a)$가 일치한다.
>
> 실제로 $x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속이라는 것은 위의 ㉢ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이고, 이는 ㉠과 ㉡을 내포하고 있지만, 학생들에게 지도할 때에는 위의 세 단계로 나누어서 이해시키도록 한다.
>
> $x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속이 아닐 때, 이 함수는 $x=a$에서 **불연속**이라고 함을 알게 한다. 이 때, 불연속인 점에서는 함숫값이 정의되지 않거나 극한값이 존재하지 않을 때 또는 함숫값과 극한값이 존재하지만 극한값과 함숫값이 다름을 알게 한다.

교육과학기술부(2008:185)에 따라 한 점에서 함수의 연속을 도입하고 있는 수학Ⅱ 교과서는 우정호 외(2009), 유희찬 외(2009), 윤재한 외(2009), 이준열 외(2009), 정상권 외(2009), 최용준 외(2009)이다. 이 정의에 따르면 $f(x)=1/x$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이라는 판정을 하게 된다.

계승혁 외(2009)는 함수의 한 점에서의 연속의 정의를 세 단계 방법으로 도입하지 않고 있다. 세 단계 방법 중 첫 번째 단계인 '$x=a$ 에서 $f(a)$가 존재한다'를 전제조건으로 하였으며, 아래의 정의 A와 같이 정의하고 있다.

> 【정의 A】 일반적으로 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있을 때
>
> $$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$
>
> 이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이라고 한다.
>
> 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이라고 한다. 즉, 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있을 때, 다음 두 가지 경우에 대하여 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(ⅰ) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하지 않는다.

(ⅱ) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하지만 그 값이 $f(a)$와 다르다.

이 정의에 따르면 $x=0$이 $f(x)=1/x$의 정의역에 속하지 않기 때문에 $x=0$에서 연속과 불연속을 생각하지 않는다고 하였다. 수학Ⅱ 교과서 별로 불연속 함수를 제시한 예를 살펴보면 아래와 같다.

<표 1> 수학Ⅱ 교과서에서 제시한 불연속의 함수의 예

문 제	교과서
다음 함수의 $x=1$에서의 연속 또는 불연속을 조사하여라. $g(x)=\frac{\lvert x-1\rvert}{x-1}$	유희찬 외(2009: 97)
다음 함수가 $x=2$에서 연속인지, 불연속인지 조사하여라. $f(x)=\frac{1}{x-2}$	윤재한 외(2009: 99)
함수 $f(x)=\frac{\lvert x-1\rvert}{x-1}$은 $x=1$에서 함숫값 $f(1)$이 정의되어 있지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.	우정호 외(2009: 102)
다음 함수에 대하여 $x=1$에서의 연속성을 조사하여라. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$	최용준 외(2009: 105)
다음 함수가 $x=1$에서 연속인지 불연속인지 말하여라. $f(x)=\frac{2}{x-1}$	이준열 외(2009: 92)

계승혁 외(2009)를 제외한 나머지 수학Ⅱ 교과서는 함수가 정의되지 않은 점에서는 함수가 불연속임을 설명하고 있다. 이는 함수의 연속에 대한 개념이미지를 그래프의 연결성으로 보고 이에 따른 지도방안을 제시하고 있는 것이다.

계승혁 외(2009)의 함수의 연속성 정의는 대학의 공식적인 정의에 따르고 있으며, 아래와 같이 교육과학기술부(2008:178)가 제시한 '내용 영역별 지도의 의의와 내용 개요'에서도 함수의 연속성 정의가 $\epsilon-\delta$법에 기초하고 있음을 말하고 있다.

> '함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속'이라는 것을 $\epsilon-\delta$논법으로 엄밀하게 나타내면, 'E를 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이라 할 때, 함수 $f: E \to \mathbb{R}$에서 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $|x-a|<\delta,\ x \in E \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\epsilon$'이 성립한다는 것이다. 이 정의에서는 $x=a$일 때, $f(a)$가 정의되어야 하므로 $0<|x-a|<\delta$ 대신에 $|x-a|<\delta$가 된다. 이 정의도 고등학교 학생들의 수준에서는 매우 어려우므로, 직관적인 극한 개념을 바탕으로 연속성을 이해할 수 있도록 한다.
>
> 함수의 극한과 연속 개념은 이후에 학습하게 될 다항함수의 미분법과 적분법의 원리를 이해하고 활용하는 데 기초가 되는 개념이므로 정확하게 이해하고 활용할 수 있도록 지도하는 것이 필요하다.

교육과학기술부(2008:178)가 제시한 정의에 따르면, 함수의 정의역에 속한 $x=a$에 대하여 연속과 불연속을 판정하며 정의역에 속하지 않은 점에서는 연속과 불연속을 판정할 필요가 없다. 교육과학기술부(2008: 235)는 다음과 같이 한 실수에서의 함수의 극한값을 좌극한값과 우극한값이 일치하는 값으로 정의됨을 설명하고 있다.

> '$\lim_{x\to a} f(x)$를 지도할 때, 좌극한을 $\lim_{x\to a-0} f(x)$, 우극한을 $\lim_{x\to a+0} f(x)$로 표시함도 알게 하고, 우극한값과 좌극한값이 반드시 일치하는 것은 아님을 유의하도록 한다. 이 경우에는 극한값이 존재하지 않음을 알게 한다.'

위의 방법에 의하면, '$x=0$에서 $f(x)=\sqrt{x}$의 좌극한인 $\lim_{x\to 0-0} f(x)$가 존재하지 않기 때문에 $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재하지 않는다.'라는 결론에 이르게 되어 '$f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.'라는 판정을 하게 된다. 교육과학기술부(2008:178)의 극한의 정의에 의하면 $f(x)=\sqrt{x}$는 임의의 양수 $\epsilon>0$에 대하여

$$0<|x-0|<\delta,\ x\in[0,\infty)\ \Rightarrow\ |f(x)-f(0)|<\epsilon$$

을 만족하는 $\delta>0$가 항상 존재하므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$이지만, 교육과학기술부(2008: 235)에 의하면 $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재하지 않게 되어 모순이 발생되고 있다. 교육과학기술부(2008)는 동일한 고등학교 교육과정 해설서에서 연속함수와 함수의 극한에 대한 정의를 다르게 기술하고 있다.

함수의 그래프의 연결성과 연속성은 함수의 정의역이 실수 $\mathbb{R}$ 또는 정의역이 연결된 경우에만 동치인 개념이다. $f(x)=1/x$은 $x=0$에서 정의되지 않으므로 정의역이 $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$이고 정의역은 연결되지 않은 공간이므로 그래프의 연결성과 함수의 연속성은 동치가 아니다.

2. 연속함수에 대한 학교수학의 정의

교육과학기술부(2008: 186)는 구간에서의 연속함수를 다음과 같이 지도할 것을 제시하고 있다.

> 함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간 (a,b)에 속하는 모든 점에서 연속일 때, 이 함수는 주어진 구간에서 연속이라고 하고, (a,b)에서 연속인 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b)$를 만족할 때, 이 함수는 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이라고 함을 알게 한다. 또한 구간 $(-\infty,\infty)$에서 연속인 함수를 **연속함수**라고 함을 알게 한다.

이와 같이 구간에서의 연속함수의 정의를 도입하고 있는 교과서는 유희찬 외(2009), 윤재한 외(2009), 우정호 외(2009), 최용준 외(2009), 이준열 외(2009), 정상권 외(2009)이다.

$f(x)=\sqrt{x}$는 $\lim_{x\to a+0} f(x)=0$이므로 $[0,\infty)$에서 연속함수이지만 한 점에서의 연속에 대

한 교과서의 정의에 의하면 $x=0$에서 $f(x)$가 연속이라고 판정할 수 없으며, $f(x)$의 정의역이 구간 $(-\infty,\infty)$가 아니기 때문에 연속함수라고도 볼 수 없다.

계승혁 외(2009)는 아래의 정의 B와 같이 정의역이 구간이 되는 함수에 대하여 '연속함수', '구간에서 연속'이라는 정의를 하였으며, '정의역이 구간이 아닌 함수에 대해서는 연속과 불연속을 생각하지 않는다.'라고 참고사항을 표기함으로써 함수의 연속성을 정의역이 아닌 구간에서는 생각하지 않음을 명시하였다.

> 【정의 B】 정의역이 구간인 함수 $y=f(x)$가 정의역의 모든 점 $x=a$에서 연속일 때, 이 함수를 **연속함수**라고 한다. 경우에 따라서 이 함수가 어떤 구간에서 연속이라는 표현을 하기도 한다.
>
> 반 닫힌 구간 또는 닫힌 구간에서 정의된 함수의 연속성을 알아볼 때 좌극한과 우극한 가운데 가능한 경우만 생각한다. 즉,
>
> (ⅰ) 열린 구간 (a,b)에서 연속이며
>
> (ⅱ) $\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b)$
>
> 인 함수 $y=f(x)$는 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이다.

이 정의에 의하면 $f(x)=\sqrt{x}$는 $(0,\infty)$의 모든 점에서 연속이고 $\lim_{x\to 0+0} f(x)=f(0)$이므로 $[0,\infty)$에서 연속이다. 그러나 많은 학생들은 $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재하지 않기 때문에 $x=0$에서 $f(x)$가 불연속이라고 판정하게 된다. 구간에서 연속이라는 정의와 구간의 모든 점에서 연속이라는 것은 동치가 아니기 때문에 $f(x)=\sqrt{x}$가 $[0,\infty)$에서 연속이라는 정의를 통하여 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이라는 것을 도출할 수 없다.

이와 같이 한 점에서 연속에 대한 정의와 연속함수에 대한 정의가 교과서별로 차이가 있는 것은 교사와 학생들에게 오개념을 양산하게 하는 원인이 되고 있다고 볼 수 있다. 특히 교사들이 대학에서 배운 연속함수의 정의가 고등학교에서의 정의와 다르기 때문에 혼란이 될 수 있으며, AP제도를 통하여 미분적분학을 공부한 고등학교 학생들에게도 인지적 장애요소가 될 수 있다.

3. 연속함수에 대한 설문조사 결과

이경화와 신보미(2005)가 고등학교 상위집단 20명의 학생들을 대상으로 설문조사를 실시한 결과 $f_2(x)=x^2/x$에 대하여 $x=0$에서 불연속이라고 응답한 학생은 16명(80%), 연속이라고 응답한 학생은 3명(15%)이었다. $f_3(x)=\sqrt{x}$가 $x=0$에서 연속이라고 응답한 학생은 11명(55%), 불연속이라고 응답한 학생은 9명(35%)으로 조사되었다. $f_2(x)=1/x$이 연속함수라고 응답한 학생은 7명(35%), 불연속함수라고 응답한 학생은 12명(60%)으로 조사되었다.

본 연구에서는 이경화와 신보미(2005)의 연구에서 제시한 설문 문항 중 핵심적인 문항 $f(x)=\sqrt{x}$와 $f(x)=1/x$을 선택하여 2011년 11월에 대전의 D고등학교 학생 42명에 대하여 아래와 같은 문제로 설문조사를 실시하였다.

[문제 1] $x=0$에서 $f(x)=\sqrt{x}$의 연속성을 판정하고 그 이유를 설명하여라.
[문제 2] $f(x)=1/x$이 연속함수인지를 판정하고 그 이유를 설명하여라.

1) $x=0$에서 $f(x)=\sqrt{x}$의 연속성에 대한 설문조사

'$x=0$에서 $f(x)=\sqrt{x}$의 연속성을 판정하고 그 이유를 설명하여라.'라는 질문에 대한 응답 결과를 분석한 결과는 아래와 같다.

<표 2> $x=0$에서 $f(x)=\sqrt{x}$의 연속성에 대한 설문조사 결과

유형	내 용	인원(%)
A_1	$f(0)$이 정의되지 않기 때문에 $x=0$에서 $f(x)$는 **불연속**이다.	1(2.4)
A_2	$\lim_{x\to 0-0} f(x)$가 존재하지 않기 때문에 $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재하지 않는다. 따라서 $x=0$에서 $f(x)$는 **불연속**이다.	33(78.6)
A_3	기 타	8(19)

A_2형인 학생들은 33명(78.6%)으로 이들은 좌극한과 우극한이 존재하고 두 값이 같을 때에만 극한값이 존재한다는 사실을 상기하여 불연속이라고 하였다.

2) $f(x)=1/x$의 연속성에 대한 설문조사 결과

'$f(x)=1/x$이 연속함수인지를 판정하고 그 이유를 설명하여라.'라는 질문에 대한 학생들의 답변을 분석한 결과는 아래와 같다.

<표 3> $f(x)=1/x$의 연속성에 대한 설문조사 결과

유형	내 용	인원(%)
B_1	$f(x)$는 $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$에서 연속이다.	8(19)
B_2	$x=0$에서 $f(x)$가 정의되지 않으므로 $f(x)$는 불연속함수이다.	20(47.6)
B_3	$x=0$에서 $f(x)$의 그래프가 끊어지므로 $f(x)$는 불연속함수이다.	1(2.4)
B_4	기 타	13(31)

$x=0$에서 $f(x)$가 정의되지 않으므로 $f(x)$가 불연속함수라고 응답한 B_2형의 학생들은 20명(47.6%)으로 이들은 $x=0$에서 $f(x)$의 값이 없기 때문에 주어진 함수는 불연속함수라고 응답하였다. 그러나 B_1형 학생들은 $f(x)$의 정의역 $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$에서 주어진 함수가 연속이라고 설명하고 있다.

이와 같이 함수의 연속성에 대한 대학의 공식적인 정의와 학교수학에서의 정의가 다르고, 수학Ⅱ 교과서 별로 차이가 있는 것은 큰 문제라고 볼 수 있으며 학생들의 연속함수에 대한 오개념의 발생은 연속함수의 정의에 대한 구조적인 문제에 기인한다고 볼 수 있다.

Ⅳ. 결론 및 제언

1. 학교수학에서 함수의 연속과 불연속은 정의역의 원소에 대하여만 정의해야 한다.

$x=a$에서 함수 $f(x)$의 연속에 대한 정의를 교과서별로 분석한 결과 두 가지로 제시되어 있음을 볼 수 있었다. 동일한 함수 $f(x)=1/x$에 대하여, 대부분의 교과서는 $x=0$에서 $f(0)$의 값이 존재하지 않기 때문에 '$f(x)$는 $x=0$에서 불연속' 이라 설명하고 있지만, 계승혁 외(2009)는 $f(x)$는 $x=0$에서 함수값을 정의할 수 없기 때문에, '$x=0$에서 $f(x)$의 연속 또는 불연속을 생각하지 않는다.'라고 설명하고 있다.

고등학교에서의 함수의 연속성 개념은 함수의 그래프의 연결성을 도입하여 지도하고 있다. 이는 Leonhard Euler(1707~1783)가 '곡선의 연결'이라는 개념을 연속함수에 도입한 것과 맥락을 같이하는 것으로 볼 수 있다. 당시는 함수에 대한 정의가 명확하지 않았으며 정의역이 실수전체인 함수를 대상으로 연구하였다. 그러나 현재 고등학교에서는 당시에 언급되지 않은 다양한 함수를 다루고 있기 때문에 정의역이 실수전체인 함수에서만 통용되는 직관적인 정의만을 사용하는 것은 문제가 있다고 볼 수 있다.

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$일 때, $f(x)$가 $x=a$에서 연속임을 학생들이 쉽게 이해하도록 하기 위하여 학교수학에서는 세 단계 정의를 도입하고 있으며, 불연속에 대한 정의도 연속에 대한 세 단계 정의를 이용하고 있다. 교육과학기술부(2008:185)에서 제시한 한 점에서의 불연속에 대한 정의는 아래와 같다.

> 불연속인 점에서는 함숫값이 정의되지 않거나 극한값이 존재하지 않을 때 또는 함숫값과 극한값이 존재하지만 극한값과 함숫값이 다름을 알게 한다.

한 점에서의 연속성에 대한 세 단계 정의는 연속에 대한 개념을 강조하기 위한 것이라고 볼 수 있다. 그렇지만 연속에 대한 세 단계 정의 중 한 단계라도 만족하지 않으면 불연속이 된다라는 정의는 불연속성에 대한 오개념을 형성시키고 있다. 즉, 이와 같은 정의에 의하면 $f(x)=\sqrt{x}$는 $x=-1$에서 불연속함수이고 $f(x)=1/x$는 $x=0$에서 불연속이라고 판정하게 된다. 함수의 정의역이 연결되었을 때 한하여 함수의 그래프의 연결성과 연속성은 동치인 개념이 되지만 함수의 정의역이 연결되지 않은 함수의 그래프가 연결되지 못하였다고 하여 불연속이라고 정의하는 것은 많은 문제점을 내포하고 있다.

대학의 공식적인 정의에 의하면, $f(x)=1/x$과 $f(x)=\sqrt{x}$는 정의역의 모든 점에서 연속이기 때문에 연속함수가 된다. 연속함수라는 것은 불연속점이 없음을 내포하는 용어이다. 이

것은 불연속점이 존재하는데 불구하고 연속함수가 된다는 것으로 논리적으로 맞지 않는 결론에 이르게 된다. 따라서 함수의 정의역에서 함수의 연속성과 불연속성을 판정하고 정의역에 아닌 점에서는 함수의 연속성과 불연속성을 판정하는 방법을 교과서에 도입하는 것은 지양해야할 것이다.

2. 학교수학에서 정의역의 끝 점에서의 함수의 연속성을 정확하게 정의해야 한다.

학교수학에서는 한 점에서의 함수의 극한에 대한 정의가 구간에 내점에 대하여만 강조되고 있음을 볼 수 있다. 설문조사결과 78.6%의 학생들은 $f(x)=\sqrt{x}$ 은 $x=0$에서 불연속이라고 응답하였으며 이경화와 신보미(2005)도 '한 점에서의 연속을 구간의 내점에서만 생각한다'라는 개념 이미지를 제시하였는데 이는 학생들의 오개념으로 보기 보다는 함수의 연속성에 대한 교육과학기술부(2008: 235)의 정의와 이에 따른 교과서의 기술방법에 그 원인이 있다고 볼 수 있다.

'함수 $f(x)$의 정의역이 $[a,b]$이라 할 때, $\lim_{x\to a} f(x)$이 존재한다.'라는 것은 $\lim_{x\to a+0} f(x)$이 존재하는 것을 의미하는 것이다. 따라서 $\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이 된다. 따라서 $f(x)=\sqrt{x}$ 의 정의역이 $[0,\infty)$이고 $\lim_{x\to 0+0} f(x)=f(0)$이므로 $f(x)=\sqrt{x}$ 는 $x=0$에서 연속이 된다.

학교수학에서 $x=a$에서 함수 $f(x)$의 정의를 대학의 공식적인 정의에 맞게 수정하여 이에 대한 학생과 교사의 혼란을 제거해야 할 필요가 있다. 따라서 세 단계 방법의 첫 번째인 '$x=a$에서 $f(a)$가 정의되어 있고'를 전제 조건으로 하여 아래와 같은 두 단계 방법으로 도입하면, 연속성과 불연속성을 정확하게 설명하는 방법이 될 것이다. 이는 계승혁 외(2009)가 제시한 방법과 비슷한 방법이다.

【정의 C】 함수 $f(x)$의 정의역의 내점 $x=a$에 대하여

㉠ $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하고

㉡ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

이면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이라고 한다. 함수의 $f(x)$의 정의역의 내점 $x=a$에 대하여 ㉠ 또는 ㉡이 성립하지 않으면 $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이라 한다.

【정의 D】 함수 $f(x)$에 대하여

㉠ 열린 구간 (a,b)에서 연속이고

㉡ $\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$

㉢ $\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b)$

이면, 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a,b]$에서 **연속**이라고 한다. 정의역이 $[a,b)$ 또는 $[a,b]$인 경우에 ㉡이 성립하면 $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이라 하고, 정의역이 $(a,b]$ 또는 $[a,b]$인 경우에 ㉢이 성립하면 $f(x)$는 $x=b$에서 **연속**이라고 한다. 정의역이 구간인 함수 $f(x)$가 정의역의 모

든 점 $x=a$에서 연속일 때, 이 함수를 **연속함수**라고 한다.

[참고] 함수의 정의역에 속하지 않은 실수에 대하여는 함수의 연속, 불연속을 생각하지 않는다.

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$가 구간의 끝점에 대한 정의를 포함하고 있지만 학생들의 이해를 돕기 위하여 구간의 끝점에 대한 연속성을 별도로 제시한 것이다.

3. 학교수학에서 연속함수에 대한 정의를 정확하게 기술해야 한다.

대부분의 교과서는 $f(x)=1/x$는 $x=0$에서 불연속이기 때문에 불연속함수라고 설명하고 있고, 계승혁 외(2009)는 $f(x)=1/x$의 정의역이 $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$이고 정의역에 속한 모든 점에서 주어진 함수가 연속이기 때문에, $f(x)$는 연속함수라고 설명하고 있다.

교육과학기술부(2008: 186)에서는 '구간 $(-\infty,\infty)$에서 연속인 함수를 연속함수라고 함을 알게 한다.'라고 연속함수에 대한 정의를 하고 있다. 고등학교에서 다루는 함수는 다항함수만 있는 것이 아니라 $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=1/x$, $f(x)=\log x$ 등 다양한 함수에 대한 미분과 적분을 다루고 있다. 위에서 제시한 정의에 따르면 이 함수들은 불연속인 함수로 정의하게 되어 논리의 체계상 맞지 않는다. 함수의 정의역에 속한 모든 원소에 대하여 연속인 함수를 연속함수로 정의하여 불합리성이 없도록 해야 할 것이다.

<표 4> $x=0$에서 함수 $f(x)$가 연속인가?

구 분	2007 개정 교육과정의 정의	학문의 공식적인 정의	정의 C 또는 정의 D에 의한 판정
$f(x)=1/x$	불연속	판정하지 않음	정의 C에 의하여 판정하지 않음
$f(x)=\sqrt{x}$	불연속	연속	정의 D에 의하여 연속

<표 5> 함수 $f(x)$는 연속함수인가?

구 분	2007 개정 교육과정의 정의	학문의 공식적인 정의	정의 C 또는 정의 D에 의한 판정
$f(x)=\sqrt{x}$	불연속함수	연속함수	정의 D에 의하여 연속함수
$f(x)=1/x$	불연속함수	연속함수	정의 D에 의하여 연속함수

함수의 연속성과 연결성은 밀접한 관계에 있지만 동일한 개념으로 볼 수는 없다. 정의역이 연결된 영역이라면 연속함수의 그래프는 연결되지만, 정의역이 연결된 영역이 아니라면 연속함수의 그래프의 연결성은 보장 되지 않는다. 특히 $f(x)=1/x$과 같이 정의역이 연결되

지 않은 함수에 대하여 그 그래프가 연결되지 못하여 연속함수가 아니라는 연속함수의 초기 개념정의를 학교수학에 도입하는 것은 많은 학생들에게 심각한 오개념을 양산하게 할 것이다. 따라서 함수의 연속성의 정의는 대학의 공식적인 정의에 따르되 학생들의 수준에 맞는 정의 C와 정의 D와 같은 방법으로 도입해야 한다. 그렇지 않으면 고등학교에서 형성된 연속함수에 대한 개념 이미지는 향후 학생들이 대학에 진학하여 미분적분학을 공부할 때, 오개념 이미지로 고착화되어 개념이해에 큰 장애 요소가 될 것이다.

참고문헌

계승혁 외 5인 (2009). 고등학교 수학Ⅱ, 성지출판(주).

교육과학기술부 (2008). 고등학교 교육과정 해설(수학), 한국보훈복지의료공단 신생인쇄조합.

김남희 외 5인 (2011). 예비교사와 현직교사를 위한 수학교육과정과 교재연구, 경문사.

우정호 외 7인 (2009). 고등학교 수학Ⅱ, 두산동아.

유희찬 외 12인 (2009). 고등학교 수학Ⅱ, (주)미래엔컬처그룹.

윤재한 외 23인 (2009). 고등학교 수학Ⅱ, 더 텍스트.

이경화, 신보미 (2005). 상위 집단 학생들의 함수의 연속 개념 이해, 대한수학교육학회지, 제 15권 제 1호.

이준열 외 9인 (2009). 고등학교 수학Ⅱ, 천재교육.

정상권 외 8인 (2009). 고등학교 수학Ⅱ, (주)금성출판사.

최용준 외 9인 (2009). 고등학교 수학Ⅱ, 천재교육.

Ethan D. Bloch (2011). The Real Numbers and Real Analysis, Springer New York(ISBN 978-0-387-72176-7).

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

N. Movshovitz-Hadar, Oritz Zaslarsky (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 19, No. 1, 3-14.

High School Textbook Definition and Students' Understanding of Continuity of Functions[5)]

Dal-Won Park[6)] · Hong Soon Sang[7)] · Min-Young Shin[8)]

Abstract

In this paper, we first analysis definition of continuity of functions in high school textbooks, the mathematics high school curriculum and university mathematics textbooks.

We surveyed what was causing the students to struggle in their concept image of continuity of functions. We arrived at that students' concept for errors in images of continuity of function were caused by definition of continuity of functions in high school textbooks.

Key Words : Continuity of Functions, Concept Image, Concept Definition, Misconception

5) This work was supported by the research grant of the Kongju National University in 2010.
6) Kongju National university (dwpark@kongju.ac.kr)
7) Kongju National university high school (h4846@hanmail.net)
8) Daejeon Dunwon High School (vicky14@nate,com)